F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

1

TOMUL 19

1967

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

Acad. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
Acad. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

Pentru completarea colecţiei şi primirea la timp a revistei, reînnoiţi abonamentul dv. pe anul 1967.
În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile şi abonamentele din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuţa poştală 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa:
Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

19, NR. 1
1967

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

MAR

Pag.

RADU ROŞCA, Cîteva considerații de geometrie diferențială liniară 3

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Un criteriu de convergență pentru serii cu termeni pozitivi 9

F. MARCUS, Congruențe de drepte ce stabilesc între pînzele lor focale o reprezentare conformă de modul constant şi diferit de ± 1 13

IOAN ŞUTAC, Grupul de invarianță al unui obiect geometric $\Omega^{\wedge}(x, \dot{x})$ 25

VIOREL DUMITRAŞ, Asupra spațiilor A_n cu grup separabil care admit o rotație 33

LIVIU TODOR, Problema normării datelor pentru aplicarea metodei lui Jacobi respectiv Givens de rezolvare a problemei valorilor şi vectorilor proprii pentru metrici simetrice . . . 41

VASILE PETEANU, Asupra compatibilității problemei centrale a ordonanțării 47

HORIA I. ENE, Asupra unei probleme din mişcarea apelor arteziene 53

ANDREI DUMA, Morfisme de natură finită în categoria spațiilor inelate 59

KLINCSEK GEZA, O problemă de frontieră pentru sisteme de ecuații cu derivate parțiale tare eliptice 65

MARIANA CRAIU, Proprietăți ale seriei Fourier asociată unei funcții neintegrabile de singularități date 73

IOAN POP, O problemă variațională pentru un corp de masă variabilă 85

IOAN POP, Soluții ale ecuațiilor stratului limită nestaționar tridimensional 91

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 1–162, BUCUREŞTI, 1967

GH. PETRESCU, O generalizare a problemei lui Jukovski în teori
filtrației . . . .

IOAN TOMESCU, Asupra unor metode matriciale care interv
în teoria rețelelor . . . .

N. GHEORGHIU, Teorema contracțiilor în spații uniforme . .

VIOREL POPA, O mișcare plană staționară cu suprafață liber
într-un mediu poros omogen . . . .

DUMITRU ENE, Pseudocorectarea erorilor în teoria codurilor .

C. BĂNICĂ și O. STĂNĂȘILĂ, Spectrul unei latici . . . .

CLAUDIA SIMIONESCU, Asupra teoremei Vitali . . . . . .

ANDREI SUSEA, O generalizare a problemei Riemann omogene

CÎTEVA CONSIDERAȚII DE GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ LINIARĂ

DE

RADU ROȘCA

Dacă K_{1B}, K_{2B} și K_1, K_2 sînt respectiv curburile unei congruențe Ribaucour $[C_r]$ și ale suprafeței generatoare [**B**], se stabilește formula

$$\frac{K_{2B}^2}{K_{1B}} = \frac{K_2^2}{K_1}$$

și se pune în evidență cîteva proprietăți ale complexelor liniare adjuncte ale lui $[C_r]$ corespunzătoare liniilor asimptotice și caracteristice trasate pe (**B**).

În toate considerațiile care vor urma, vom considera diferitele mărimi scalare sau geometrice continue și avînd o clasă suficient de mare pentru a justifica calculele. Să notăm atunci cu 2φ, 2ρ și **A** respectiv unghiul focal, distanța focală și punctul mediu corespunzînd fiecărei raze a unei congruențe rectilinii oarecare $[C]$ din spațiul obișnuit E_3. Acestea fiind ecuațiile deplasării infinitezimale ale *reperului canonic* $\tau \equiv \{\mathbf{A}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}\}$ atașat razei ($\mathbf{A}$, $\mathbf{e}$), după cum se știe [1],

$$\begin{aligned}
d\mathbf{A} &= \rho\,(\omega_2^3\,\mathbf{e}_1 + \omega_1^3\,\mathbf{e}_2) + \omega^3\,\mathbf{e}\\
d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^2\,\mathbf{e}_2 + \omega_1^3\,\mathbf{e}\\
d\mathbf{e}_2 &= -\,\omega_1^2\,\mathbf{e}_1 + \omega_2^3\,\mathbf{e}\\
d\mathbf{e} &= -\,\omega_1^3\,\mathbf{e}_1 - \omega_2^3\,\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

unde ω_1^3, ω_2^3 sînt Pfaffieni invarianți ai deplasării lui τ. Vom presupune în cele ce urmează că $[C]$ este o congruență Ribaucour, adică o congruență ale cărei desfășurabile trasează pe suprafața mijlocie ($\mathbf{A}$), o rețea conjugată (în mod necesar cu invarianții egali); o asemenea congruență o vom nota $[C_r]$

---

[1] A se vedea și Finikov, *Theorie der Kongruenzen*, Akademie — Verlag, Berlin, 1959.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 3–8, BUCUREȘTI, 1967

O congruenţă $[C_r]$ admite o *suprafaţă generatoare* (**B**) care formează cu (**A**) un cuplu ortogonal şi deci

$$d\mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} \overset{\text{def}}{=} 0 \quad \text{(punctul însemnînd produsul scalar).} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) se obţine imediat

$$d\mathbf{B} = \lambda\,(b'\,\omega_1^3\,\mathbf{e}_1 - b\,\omega_2^3\,\mathbf{e}_2), \quad (b' = \rho \operatorname{tg} \varphi,\ b = \rho \operatorname{cotg} \varphi) \tag{3}$$

şi prin diferenţiere exterioară a lui (3) şi cu ajutorul ecuaţiilor de structură ale grupului euclidian

$D\omega^i = [\omega^k\,\omega_k^i]$, $D\,\omega_i^j = [\omega_i^k\,\omega_k^j]$ (D = simbolul diferenţierei exterioare) se găseşte, după Finikov [1],

(4) $d \lg \lambda = -\xi\,\omega_1^3 - \eta\,\omega_2^3$ 2).

Dacă desemnăm acum cu Ω_1^3, Ω_2^3, Ω_1, Ω_2 Pfaffieni principali corespunzători reperului $\{\mathbf{B}\,\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}\}$ şi ne reamintim că **e** este purtat pe normala în **B** şi luăm

$$\Omega_1 = \lambda b'\,\omega_1^3, \quad \Omega_2 = -\,\lambda b\,\omega_2^3,$$

obţinem relaţiile

$$\Omega_1^3 = \frac{\Omega_1}{\lambda b'}, \quad \Omega_2^3 = -\frac{\Omega_2}{\lambda b}. \tag{5}$$

Conform teoriei generale rezultă imediat din (5) că cele două curburi ale lui (**B**) (respectiv gaussiană şi mijlocie) au ca expresii

$$K_{1B} = -\frac{1}{\rho^2\,\lambda^2}, \quad K_{2B} = \frac{2 \operatorname{cotg} 2\varphi}{\rho\,\lambda} \tag{6}$$

şi că liniile de curbură ale lui (**B**) sînt

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = 0.$$

Dar fără a scădea generalitatea se poate mereu considera reprezentarea sferică a unei congruenţe $[C]$ avînd forma ortogonală, şi ultima ecuaţie (1) permite să scriem

$$\omega_1^3 = m_1 du^{\mathrm{I}}, \quad \omega_2^3 = m_2 du^{\mathrm{II}}. \tag{7}$$

Pe de altă parte, reamintim [2] că fiecărei congruenţe $[C]$ din E_3 i se pot ataşa doi tensori simetrici

$$g_{ik} \overset{\text{def}}{=} \partial\mathbf{e}/\partial u^i.\ \partial\mathbf{e}\,/\partial u^k, \quad a_{ik} \overset{\text{def}}{=} 2\,(\mathbf{e},\ \partial\mathbf{e}/\partial u^i,\ \partial\,\mathbf{A}/\partial u^k), \ (i, k = \mathrm{I}, \mathrm{II}) \tag{8}$$

g_{ik} este tensorul metric fundamental şi a_{ik} sînt coeficienţii *formei lui Sannia.* Scriind după Finikov pe d**A** sub forma

$$d\,\mathbf{A} = b'\,\omega_1^3\,(\mathbf{e}_2 + \eta\mathbf{e}) + b\,\omega_2^3\,(\mathbf{e}_1 + \xi\,\mathbf{e}),$$

---

2) Cei doi multiplicatori ξ, η satisfac în cazul unei congruenţe Ribaucour la o anumită condiţie care însă nu interesează în această Notă.

deducem din ultima ecuație (1) și din (7)

$$g_{\mathrm{I}\,\mathrm{I}} = m_1^2, \qquad g_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} = 0, \quad g_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}} = m_2^2$$

$$a_{\mathrm{I}\,\mathrm{I}} = 2\,b'\,m_1^2, \quad a_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} = 0, \quad a_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}} = -\,2\,b\,m_2^2.$$

Acestea fiind cele două curburi [2]

$$K_1 = \frac{\det\,(g_{ik})}{\det\,(a_{ik})}, K_2 = g_{ik}\,a^{ik}$$

ale unei congruențe $[C]$ din E_3, au ca expresii în cazul unei congruențe $[C_r]$

$$K_1 = -\,\frac{1}{4\,\rho^2}, \quad K_2 = \frac{\operatorname{cotg} 2\,\varphi}{\rho} \tag{10}$$

și comparînd cu (6) obținem

$$\frac{K_{2B}^2}{K_{1B}} = \frac{K_2^2}{K_1}. \tag{11}$$

Așadar cele două curburi ale unei congruențe Ribaucour sînt legate de curburile suprafeței generatoare prin relația simplă (11) care permite regăsirea rapidă a anumitor proprietăți aparținînd numeroaselor tipuri de congruențe Ribaucour. Astfel reamintind că $K_2 = 0$, caracterizează congruențele normale, din (11) rezultă imediat proprietatea bine cunoscută a congruențelor Ribaucour normale de a avea drept suprafață generatoare o suprafață minimală. Dacă suprafața generatoare (**B**) a unei congruențe Ribaucour $[C_r]$ este o sferă, relația (11) arată că cele două curburi K_1, K_2 ale lui $[C_r]$ satisfac egalitatea

$$4\,K_1 = K_2^2$$

care exprimă [2] că toate suprafețele congruenței în chestiune sînt suprafețe principale.

Dar congruențele Ribaucour cu suprafață generatoare sferică sînt cum se știe *congruențele izotrope*, și astfel fără a fi nevoie de a calcula formele lui Kummer se deduce din (11) o proprietate cunoscută a congruențelor izotrope. În cazul unei congruențe $[C]$ oarecari, reamintim [2] că suprafețele principale ale lui $[C]$ sînt determinate de ecuația

$$K_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j = 0, \tag{12}$$

unde K_{ij} este tensorul pătratic definit de

$$K_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,(a_{\mathrm{I}i}\,g_{\mathrm{II}j} - a_{\mathrm{II}j}\,g_{\mathrm{I}i}), \; (g = \det\,(g_{ik}))$$

În cazul care ne preocupă, făcînd cu ajutorul lui (9) calculele, se găsește

$$K_{\mathrm{I}\,\mathrm{I}} = 0, \quad K_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} = 2\,b'\,m_1 m_2, \quad K_{\mathrm{II}\,\mathrm{I}} = 2\,b\,m_1\,m_2, K_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}} = 0.$$

Şi cum am văzut că (u^i) este reţeaua liniilor principale ale lui (**B**), conchidem din (12) şi (13) *că acestea corespund suprafeţelor principale ale lui* $[C_r]$.

Dar corespondenţa de elemente liniar ortogonale definită de (2) şi noţiunile de geometrie diferenţială liniară introduse de Hlavaty [2], permite să se pună în evidenţă şi alte proprietăţi al anumitor suprafeţe aparţinînd unei congruenţe $[C_r]$. În acest scop reamintim [2] că v^i $(i = \mathrm{I}, \mathrm{II})$ fiind un vector oarecare contravariant, entitatea geometrică

$$(14)\qquad \mathbf{V} = v^i \mathbf{e}_i \quad (i = \mathrm{I}, \mathrm{II})$$

unde s-a notat

$$\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{e} / \partial u^i$$

este *complexul liniar adjunct* al suprafeţei determinată de ecuaţia

$$(15)\qquad \frac{\mathrm{d}u^{\mathrm{I}}}{v^{\mathrm{I}}} = \frac{\mathrm{d}u^{\mathrm{II}}}{v^{\mathrm{II}}}.$$

În cele ce urmează vom spune pe scurt ,,suprafaţă **V**" a congruenţei $[C]$ în loc de suprafaţă (15) al cărui complex adjunct este **V**. Acestea fiind, se deduce imediat din (7), (3) şi ultima ecuaţie (1) că tensorul metric fundamental G_{ik} a lui (**B**) este egal cu g_{ik} şi coeficienţii d_{ik} ai celei de-a doua forme a lui (**B**) au ca expresii

$$(16)\qquad d_{\mathrm{I\,I}} = \lambda\, b'\, m_1^2, \quad d_{\mathrm{I\,II}} = 0, \quad d_{\mathrm{II\,II}} = -\,\lambda\, b\, m_2^2.$$

Observăm astfel că liniile asimptotice şi liniile caracteristice ale lui (**B**) care au ca ecuaţii respectiv

$$(17)\qquad b'\, m_1^2\, (\mathrm{d}u^{\mathrm{I}})^2 - b\, m_2^2\, (\mathrm{d}u^{\mathrm{II}})^2 = 0$$

$$(17)'\qquad b'\, m_1^2\, (\mathrm{d}u^{\mathrm{I}})^2 + b\, m_2^2\, (\mathrm{d}u^{\mathrm{II}})^2 = 0$$

sînt separate armonice de reţeaua (u_i) a liniilor principale. Acest lucru şi faptul că reţelei (u^i) a lui (**B**) îi corespund suprafeţele principale ale lui $(C_r]$, ne conduce să considerăm suprafeţele V_h, V_h^* $(h = \mathrm{I}, \mathrm{II})$ de forma (14) determinate respectiv de (17) şi (17)',

Să considerăm în primul rînd suprafeţele lui $[C_r]$:

$$(18)\qquad \mathbf{V}_h = V_h^k \mathbf{e}_k \quad (h = 1{,}2)$$

corespunzătoare liniilor asimptotice ale suprafeţei (**B**). Din (17) se găsesc pentru componentele celor doi vectori contravarianţi care figurează în (18), următoarele valori

$$(19)\qquad \underset{1}{V}^{\mathrm{I}} = \sqrt{b}\, m_2,\ \underset{1}{V}^{\mathrm{II}} = -\sqrt{b'}\, m_1,\ \underset{2}{V}^{\mathrm{I}} = \sqrt{b}\, m_2,\ \underset{2}{V}^{\mathrm{II}} = \sqrt{b'}\, m_1.$$

Dar *unghiul metric* [2] φ_g a două suprafețe $\mathbf{V}_h$ fiind definit pentru o congruență oarecare $[C]$ de formula

$$\cos\ \varphi_g \sqrt{\gamma} = \frac{g_{ik}\ \underset{1}{V}^i\ \underset{2}{V}^k}{\sqrt{g_{hl}\ \underset{1}{V}^h \underset{1}{V}^l\ g_{rs}\ V^r V^s}}\ (\gamma = \text{semn}\ \ g),$$

în cazul unei congruențe $[C_r]$ și a suprafețelor (19) se găsește, după efectuarea calculelor,

$$\cos\ \varphi_g = \cos 2\ \varphi. \tag{20}$$

O altă proprietate a suprafețelor $\mathbf{V}_h$ se referă la *curburile lor distributive.*

Aceasta, pentru o suprafață $\mathbf{V}$ oarecare și pentru congruența $[C]$ oarecare, este definită prin formula [2]:

$$\frac{1}{R} = \frac{g_{ik} V^i V^k}{a_{rs}\ V^r V^s};$$

or, făcînd calculele în cazul suprafețelor $\mathbf{V}_h$, se găsește cu ajutorul lui (9) și (9′) că aceste suprafețe *au curbura distributivă infinită.*

Dacă acum considerăm suprafețele $\mathbf{V}_h^*$ corespunzătoare liniilor caracteristice ale lui (**B**), deducem din (17′):

$$\underset{1}{V}^{*\mathrm{I}} = i\sqrt{\bar{b}'}\ m_2,\ \ \underset{1}{V}^{*\mathrm{II}} = -\sqrt{\bar{b}'}\ m_1,\ \ \underset{2}{V}^{*\mathrm{I}} = i\sqrt{\bar{b}}\ m_2,\ \ \underset{2}{V}^{*\mathrm{II}} = \sqrt{\bar{b}'}\ m_1 \tag{21}$$

și calculînd de data aceasta *unghiul proiectiv* φ_a al acestor suprafețe, care în general este definit de formula

$$\cos\ \varphi_a \sqrt{l} = \frac{a_{rs}\ \underset{1}{V}^r \underset{2}{V}^s}{\sqrt{a_{mn}\ \underset{1}{V}^m \underset{1}{V}^n\ a_{pq}\ \underset{2}{V}^p\ \underset{2}{V}^q}},$$

se găsește că pentru suprafețele $\mathbf{V}_h^*$ în joc avem:

$$\cos\ \varphi_a = 0.$$

Suprafețele $\mathbf{V}_h^*$ sînt așadar *proiectiv ortogonale* și făcînd calculul curburilor distributive obținem

$$\frac{1}{R_1^*} = \frac{1}{R_2^*} = \frac{\operatorname{cotg} 2\varphi}{2\rho} = \frac{K_2}{2}.$$

Putem deci enunța următorul rezultat. Fie (**B**) *suprafața generatoare a unei congruențe Ribaucour* $[C_r]$ și $(\mathfrak{A})$ *și* $(\mathfrak{L})$ *respectiv rețeaua liniilor asimptotice și a liniilor caracteristice trasate pe* (**B**). *Rețelei* $(\mathfrak{A})$ *îi corespunde un cuplu de suprafețe ale lui* $[C_r]$ *al căror unghi metric este egal cu unghiul* *focal al lui* $[C_r]$, *iar reţelei* $(\mathfrak{L})$ *un cuplu de suprafeţe proiectiv ortogonale. În plus curburile distributive ale suprafeţelor corespunzătoare reţelei* $(\mathfrak{L})$ *sînt egale între ele şi egale cu semicurbura mijlocie a congruenţei* $[C_r]$.

Primită la redacţie la 7 mai 1966

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. S. Finikov, *Theorie der Kongruenzen.* Academie-Verlag, Berlin, 1959.
2. Y. Hlavaty, *Differential line geometrie.* Nordohoff—Groningen, 1953.

UN CRITERIU DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII CU TERMENI POZITIVI

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

O serie cu termeni pozitivi $\sum_{1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă este posibil să se găsească un șir de numere reale (a_n), două numere naturale p, N și un număr $\lambda > 0$, astfel încît pentru orice $n > N$ condițiile (α_1) și (β_1) sînt îndeplinite. Pentru $p = 1$ se obține criteriul lui Kummer.

În această Notă ne propunem să demonstrăm următoarea :

TEOREMĂ. 1) *Seria cu termeni pozitivi*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \tag{1}$$

este convergentă dacă putem să găsim un șir de numere reale

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

două numere naturale p, N *și un număr* $\lambda > 0$ *astfel încît pentru orice* $n > N$ *să avem*

$$\alpha_1) \quad \frac{1}{u_{n+p}} s_{p,n} \geqslant \lambda$$

$$\beta_1) \quad s_{p-1,n} > 0$$

unde

$$s_{p,n} = a_n u_n - C_p^1 a_{n+1} u_{n+1} + \dots + (-1)^p C_p^p a_{n+p} u_{n+p}. \tag{2}$$

2) *Seria cu termeni pozitivi (1) este divergentă dacă putem să găsim un șir de numere pozitive*

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 9–11, BUCUREȘTI, 1967

două numere naturale p, N și un număr $\lambda < 0$ astfel încît pentru orice $n > N$ să avem

$$\alpha_2) \qquad \frac{1}{u_{n+p}} s_{p,n} \leqslant \lambda$$

$$\beta_2) \qquad s_{p-1,n} > 0$$

$$\gamma) \qquad s_{p-2,n} + s_{p-3,n} + \dots + s_{o,n} \geqslant 0,$$

$$\delta) \qquad \text{seria } \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ este divergentă.}$$

Demonstrație. 1) Deoarece $s_{p,n} = s_{p-1,n} - s_{p-1\,n+1}$, din condiția ($\alpha_1$) urmează că

$$\lambda\, u_{n+p} \leqslant s_{p-1,n} - s_{p-1,n+1} < 0$$

și pentru că $s_{p-1,n} > 0$, șirul $(s_{p-1,n})$ este monoton descrescător, deci convergent.

Rezultă de aici că seria cu termenul general $s_{p,n}$ este convergentă și are ca sumă $s_{p-1,n} - l$, unde $l = \lim\limits_{n\to\infty} s_{p-1,n}$. Din

$$u_{n+p} \leqslant \frac{1}{\lambda} s_{p,n}$$

folosind criteriul comparației, deducem că seria $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2) Pentru a demonstra partea a doua a teoremei observăm că

$$0 > \lambda u_{n+p} \geqslant s_{p-1,n} - s_{p-1,n+1} < 0,$$

deci șirul $(s_{p-1,n})$ este monoton crescător. Există deci un număr $A > 0$ astfel încît pentru $n > N$ să avem $s_{p-1,n} > A$ sau

$$u_n > \frac{A}{a_n} + C_{p-1}^{1} \frac{a_{n+1}}{a_n} u_{n+1} - C_{p-1}^{2} \frac{a_{n+2}}{a_n} u_{n+2} + \dots$$

$$\dots + (-1)^p C_{p-1}^{p-1} \frac{a_{n+p-1}}{a_n} u_{n+p-1}$$

însă $a_n > 0$, seria $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă iar

$$C_{p-1}^{1} a_{n+1} u_{n+1} - C_{p-1}^{2} a_{n+2} u_{n+2} + \dots + (-1)^p C_{p-1}^{p-1} a_{n+p-1} u_{n+p-1} =$$

$$= s_{p-2,n+1} + s_{p-3,n+1} + \dots + s_{0,n+1} > 0,$$

prin urmare avem $u_n > \frac{A}{a_n}$ şi folosind criteriul comparației, rezultă că seria $\sum\limits_1^\infty u_n$ este divergentă. Teorema este demonstrată.

Observație. Dacă $p = 1$ iar şirul (a_n) este cu termeni pozitivi, obținem criteriul lui Kummer.

Primită la redacție la 5 martie 1966

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47
Bucureşti

CONGRUENŢE DE DREPTE CE STABILESC ÎNTRE PÎNZELE LOR FOCALE O REPREZENTARE CONFORMĂ DE MODUL CONSTANT ŞI DIFERIT DE ± 1

DE

F. MARCUS

(Iaşi)

Datorită unor rezultate ale lui Finikoff se cunosc congruenţele de drepte ce realizează aplicabilitatea metrică între pînzele lor focale. Nu s-au făcut studii pentru cazul în care corespondenţa este conformă. Prezenta lucrare studiază cazul în care corespondenţa între pînzele focale este o *reprezentare conformă de modul constant şi diferit de* ±1. Se determină toate congruenţele pentru cazul în care unghiul ω al planelor focale este constant. *Aceste congruenţe sînt congruenţe Ribaucour de tip Vincensini.*

1. Considerăm o congruenţă de drepte cu pînzele focale nedegenerate şi raportată la desfăşurabilele sale u, v. Fie

$$(1.1)\qquad \mathrm{d}s'^2 = e\,\mathrm{d}u^2 + 2\sqrt{eg}\cos\omega\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + g\,\mathrm{d}v^2,$$

elementul liniar al reprezentării sferice a congruenţei, ω fiind unghiul planelor focale şi e, g, $f = \sqrt{eg}\cos\omega$, funcţii de u, v verificînd ecuaţia lui Gauss [1]

$$(1.2)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(b\sqrt{\frac{g}{e}}\sin\omega\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(a\sqrt{\frac{e}{g}}\sin\omega\right) + \sin\omega\sqrt{eg} = 0,$$

care exprimă că curbura elementului (1.1) este egală cu unu şi

$$(1.3)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\dfrac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} - \cos\omega\,\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}}{\sin^2\omega\sqrt{e}},\\ b &= \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' = \frac{\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} - \cos\omega\,\dfrac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}}{\sin^2\omega\sqrt{g}}.\end{aligned}\right.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 13–24, BUCUREŞTI, 1967

Notînd cu x, y, z coordonatele punctului mediu al razei (u, v) şi cu 2ρ distanţa între cele două puncte focale F_1, F_2, atunci cele două pînze focale (F_1) şi (F_2) ale congruenţei, sînt definite prin ecuaţiile [1]

$$(1.4)\quad \begin{aligned} &(F_1)\ x_1 = x + \rho X \text{ şi analoagele pentru } y_1 \text{ şi } z_1,\\ &(F_2)\ x_2 = x - \rho X \text{ şi analoagele pentru } y_2 \text{ şi } z_2,\end{aligned}$$

unde X, Y, Z sînt cosinuşii directori ai razei (u, v) sau coordonatele punctului (u, v) de pe sfera unitară şi ρ o soluţie a ecuaţiei lui Giuchard [1]

$$(1.5)\quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + a\frac{\partial \rho}{\partial u} + b\frac{\partial p}{\partial v} + (a_u + b_v + f)\,\rho = 0.$$

Fiecare soluţie a ecuaţiei (1.5) determină o congruenţă raportată la desfăşurabilele sale a cărei suprafaţă medie este definită de sistemul

$$(1.6)\quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= (\rho_u + 2b\rho)\, X - \rho\frac{\partial X}{\partial u},\\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -(\rho_v + 2a\rho) X + \rho\frac{\partial X}{\partial v},\end{aligned}$$

şi coeficienţii elementelor liniare ale celor două pînze focale (F_1) şi (F_2) sînt

$$(1.7)\quad \begin{cases} E_1 = 4\,(\rho_u + b\rho)^2\,; F_1 = -\,4a\rho\,(\rho_u + b\rho)\,; G_1 = 4\rho^2\,(a^2 + g),\\ E_2 = 4\,\rho^2\,(b^2 + e)\,; F_2 = -\,4b\rho\,(\rho_v + a\rho)\,; G_2 = 4\,(\rho_v + a\rho)^2.\end{cases}$$

În prezenta lucrare ne ocupăm de acele congruenţe ce stabilesc între pînzele lor focale o reprezentare conformă cu modulul de dilataţie λ constant şi diferit de ± 1.

După cîte ştim, pînă în prezent a fost studiat numai cazul $\lambda = 1$, adică cazul în care pînzele focale sînt aplicabile între ele. Cu astfel de congruenţe s-a ocupat Finikoff [2].

Congruenţa (u, v) realizînd o corespondenţă conformă între pînzele lor focale, rezultă din (1.7)

$$(1.8)\quad \left|\begin{aligned} &e + b^2 = \lambda^2\,(b + (\log\rho)_u)^2,\\ &b\,(a + (\log\rho)_v) = a\,\lambda^2\,(b + (\log\rho)_u),\\ &(a + (\log\rho)_v)^2 = \lambda^2\,(g + a^2).\end{aligned}\right.$$

Din (1.8) ţinînd seama de (1.7), se deduce că anularea lui a atrage şi anularea lui b şi reciproc. Vrem să arătăm că nu poate fi $ab = 0$. În adevăr, fie de exemplu $a = 0$.

Din (1.8_1) şi (1.8_3) rezultă

$$(1.9)\quad \lambda^2\,((\log\rho)_u)^2 = e\,;\quad ((\log\rho)_v)^2 = \lambda^2\, g,$$

şi din (1.8_2) $b\,(\log\rho)_v = 0$. Dacă $(\log\rho)_v = 0$, atunci $g = 0$, ceea ce trebuie exclus, dacă ţinem seama de (1.7). Deci $b = 0$.

a și b fiind egale cu zero, se pot alege parametrii u, v [1] astfel încît să avem $e = g = 1$. Din (1.9) avem în acest caz $(\log \rho)_u = \pm \frac{1}{\lambda}$; $(\log \rho)_v = \pm \lambda$.

Derivînd și ținînd seama de ecuația lui Giuchard, rezultă $f = \cos \omega = -1$, ceea ce se exclude. Deci $ab \neq 0$.

Ridicînd (1.8_2) la pătrat și ținînd seama de prima și cea de-a 3-a condiție (1.8) obținem

$$b^2 g = a^2 e. \tag{1.10}$$

Fără a diminua generalitatea putem lua

$$a\sqrt{e} = b\sqrt{g}. \tag{1.10'}$$

Din (1.3), ținînd seama de (1.10') și observînd că $1 + \cos \omega \neq 0$, rezultă

$$(\sqrt{e})_v = (\sqrt{g})_u. \tag{1.11}$$

De asemenea, în baza observației de mai sus și din (1.3) se deduce că nu poate fi $(\sqrt{e})_v = (\sqrt{g})_u = 0$. Putem deci găsi o funcție $\varphi(u, v)$ astfel încît

$$\sqrt{e} = \varphi_u ; \sqrt{g} = \varphi_v , \tag{1.12}$$

și elementul liniar (1.1) poate fi pus sub forma

$$ds'^2 = \varphi^2 \, du^2 + 2\, \varphi_u \varphi_v \cos \omega \, du \, dv + \varphi_v^2 \, dv^2, \tag{1.1'}$$

așa cum a observat și P. Vincensini în [3], căci în cazul nostru, unghiurile omoloage *ale celor două rețele focale sînt egale, deoarece prin ipoteză pînzele focale sînt în corespondență conformă.*

Se poate ajunge la acest rezultat și altfel. Corespondența între pînzele focale fiind conformă, rezultă :

$$\frac{F_1}{\sqrt{E_1 G_1}} = \frac{F_2}{\sqrt{E_2 G_2}} = \cos \bar{\omega},$$

$\bar{\omega}$ fiind unghiul rețelelor focale. Ținînd seama de (1.7) avem

$$\frac{a^2}{g + a^2} = \frac{b^2}{e + b^2} = \cos^2 \bar{\omega}, \tag{1.13}$$

de unde tocmai condițiile (1.10).

Să mai observăm că tot din (1.13) rezultă

$$a = \varphi_v \operatorname{cotg} \bar{\omega} ; \; b = \varphi_u \operatorname{cotg.} \bar{\omega}, \tag{1.14}$$

și ținînd seama de (1.3) obținem :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v} = (1 + \cos \omega) \operatorname{cotg} \bar{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \tag{1.15}$$

În consecință, ecuația lui Gauss (1.2) se poate pune sub forma

$$\begin{aligned}(1.2')\qquad &\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\sin\omega\,(1+2\,(1+\cos\omega)\operatorname{cotg}^2\bar{\omega})+\\ &+\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\sin\omega\operatorname{cotg}\bar{\omega})_v+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(\sin\omega\,\operatorname{cotg}\bar{\omega})_u=0.\end{aligned}$$

Pe lîngă ecuațiile lui Gauss și Giuchard precum și condițiilor (1.8), trebuie să se țină seama și de consecința ce rezultă, scriind că între curburile totale K_2 și K_1 ale pînzelor focale (F_2) și (F_1) are loc relația

$$(1.16)\qquad K_2=\frac{K_1}{\lambda^2}.$$

Din expresiile curburilor pînzelor focale ale unei congruențe rezultă [1]

$$(1.17)\qquad \frac{\sqrt{\frac{g}{e}}\sin\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}+a\sqrt{\frac{e}{g}}\sin\omega\right)}{\rho_v+a\,\rho}=\frac{\sqrt{\frac{e}{g}}\sin\,\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}+b\sqrt{\frac{g}{e}}\sin\,\omega\right)}{\lambda^2\,(\rho_u+b\,\rho)}.$$

Dar din (1.8) și (1.10′) se deduce

$$(1.18)\qquad (\log\rho)_u+a\sqrt{\frac{e}{g}}=\frac{1}{\lambda^2}\left[(\log\rho)_v\sqrt{\frac{e}{g}}+a\right],$$

de unde

$$(1.19)\qquad \frac{\partial\omega}{\partial v}\sqrt{e}=\frac{\partial\omega}{\partial u}\sqrt{g}\,.$$

Ținînd seama de (1.12) avem $\frac{\partial(\omega,\varphi)}{\partial(u,v)}=0$ și în consecință

$$(1.20)\qquad \omega=\omega(\varphi).$$

O astfel de relație are loc și în cazul congruențelor de drepte ce realizează o aplicabilitate între pînzele lor focale [2].

Vom arăta acum că distanța focală $\rho(u,v)$ nu poate fi, ca și în cazul $\lambda=1$, o funcție de φ.

În adevăr, dacă ar fi $\rho=\rho(\varphi)$, atunci din $\frac{\partial(\rho,\varphi)}{\partial(u,v)}=0$ și din relația

$$(1.21)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,(\rho_v+a\rho-\lambda^2 a\rho)=\lambda^2\rho_u\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

ce se obține din (1.8), (1.10′) și (1.12), observînd că în cazul nostru $\lambda^2-1\neq\neq 0$, rezultă

$$(1.22)\qquad \rho_u\,(\rho_v+a\rho)=0.$$

Dacă $\rho_u = 0$, atunci și $\rho_v \varphi_u = 0$. Cum $\varphi_u \neq 0$, rezultă $\rho_v = 0$, adică $\rho \equiv$ const. Dar din (1.8) observînd că $ab \neq 0$, ar rezulta $\lambda^2 = 1$, ceea ce se exclude. Nu poate fi însă nici $\rho_v + a\rho = 0$, căci în acest caz cea de-a doua pînză focală (F_2) s-ar reduce la o curbă [1], ceea ce iar se exclude.

Acest rezultat arată deosebirea ce există între cazul $\lambda = 1$ *și cazul în care* $\lambda^2 \neq \pm 1$, *adică între cazul unei aplicabilități și al unei reprezentări conforme cu modul const.* $\neq \pm 1$, *între pînzele focale ale unei congruențe.* De aici toată dificultatea problemei.

Cîteva proprietăți

2. Am arătat mai sus că nu poate fi, în cazul nostru, $ab = 0$. Nu poate fi, de asemenea, $ab = 0$ și în cazul studiat de Finikoff [2]. Avem deci proprietatea următoare :

1°. *O congruență Guichard nu poate realiza o corespondență conformă, de modul constant, între pînzele ei focale.*

Ca P. Vincensini [3], vom numi congruența (ω) o congruență de drepte astfel încît cele 2 plane focale ce ies din aceeași rază fac între ele un unghi constant ω. După același autor, o rețea de curbe este de tip (ω) dacă tangentele la curbele conjugate ale rețelei ce ies din același punct, formează un unghi ω constant.

În [3] P. Vincensini arată că nu există în afara congruențelor parabolice congruențe (ω), astfel încît rețelele lor focale să fie rețele $(\bar{\omega})$, $(\bar{\omega})$ putînd fi egal sau diferit de ω.

Însă în cazul $\lambda = 1$ și $\lambda^2 \neq 1$, se exclud congruențele parabolice. Deci

2°. *O congruență care realizează între pînzele focale o corespondență conformă de modul constant, poate fi cel mult o congruență* (ω) *sau să admită cel mult o rețea focală* $(\bar{\omega})$.

Se poate completa un rezultat din [3] întrebîndu-ne care este condiția ca o congruență de drepte, avînd unghiurile omoloage ale celor două rețele focale egale, să fie congruență Ribaucour?

Pentru aceasta trebuie ca pe lîngă condiția $a_u = b_v$, să fie satisfăcute și (1.13) deci și (1.14). Dar din (1.14) obținem

$$(2.1)\quad \begin{cases} a_u = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} \operatorname{cotg} \bar{\omega} - \dfrac{1}{\sin^2 \bar{\omega}} \cdot \dfrac{\partial \bar{\omega}}{\partial u} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}, \\[2ex] b_v = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} \operatorname{cotg} \bar{\omega} - \dfrac{1}{\sin^2 \bar{\omega}} \dfrac{\partial \bar{\omega}}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}. \end{cases}$$

Deci

$$\frac{\partial (\bar{\omega}, \varphi)}{\partial (u, v)} = 0,$$

adică

$$(\alpha)\quad \bar{\omega} = \bar{\omega}(\varphi)$$

și reciproc.

Acest rezultat aplicat la cazul nostru dă loc următoarei proprietăți :

3°. *O congruență ce realizează între pînzele focale o corespondență conformă de modul constant este o congruență Ribaucour, dacă este satisfăcută condiția* (α) *și reciproc.*

Să demonstrăm acum următorul rezultat :

4°. *O congruență de drepte ce stabilește o corespondență conformă de modul constant și diferit de* ± 1 *nu poate admite rețele focale* ($\overline{\omega}$).

În adevăr, dacă unghiul $\overline{\omega}$ este constant, atunci din (1.14) rezultă $a_u = b_v$. Din (1.13) avem

$$\frac{a^2}{\cos^2\overline{\omega}} = g + a^2\,; \quad \frac{b^2}{\cos^2\overline{\omega}} = e + b^2. \tag{2.2}$$

Introducînd aceste expresii în (1.18), obținem

$$(\log\rho)_{uv} + b_v = \pm\frac{b_v}{\lambda\cos\overline{\omega}}\,; \quad (\log\rho)_{uv} + a_u = \pm\lambda\frac{a_u}{\cos\overline{\omega}} \tag{2.3}$$

din care se deduce $\lambda^2 = 1$, ceea ce se exclude.

Aceste proprietăți restrîng într-o măsură oarecare clasele de congruențe căutate.

Unele clase de congruențe

3. Condițiile (1.19) sînt identic satisfăcute dacă ω = constant. În acest caz din (1.3) și (1.12) rezultă

$$a = \frac{1}{1+\mu}\,\frac{\varphi_{uv}}{\varphi_u}\,; \quad b = \frac{1}{1+\mu}\,\frac{\varphi_{uv}}{\varphi_v}, \tag{3.1}$$

cu $\mu = \cos\omega$.

Să presupunem mai întîi $a \neq b$, adică $\varphi_u \neq \varphi_v$. În acest caz se deduce din ecuația (1.2)

$$\left(b\,\frac{\varphi_v}{\varphi_u}\right)_u + \left(a\,\frac{\varphi_u}{\varphi_v}\right)_v + \varphi_u\,\varphi_v = 0, \tag{3.2}$$

care devine, dacă ținem seama de (3.1),

$$(\log\,\varphi_u\,\varphi_v)_{uv} + (1+\mu)\,\varphi_u\,\varphi_v = 0. \tag{3.3}$$

Integrînd obținem

$$\varphi_u\,\varphi_v = -\frac{2}{1+\mu}\,\frac{\mathcal{U}'\,\mathcal{V}'}{(\mathcal{U}+\mathcal{V})^2}, \tag{3.4}$$

cu $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{(u)}$ și $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{(v)}$.

Luînd ca noi variabilele U și V, putem pune

$$\varphi_u\,\varphi_v = \frac{2}{(1+\mu)\,(u+v)^2}. \tag{3.5}$$

Integrînd din nou avem

$$\varphi_u = \varphi_v + 2\,\delta, \tag{3.6}$$

cu δ constantă şi diferită de zero.

Din (3.5) rezultă

$$\begin{cases} \varphi_u = \sqrt{e} = \dfrac{\delta\,\tau\sqrt{1+\mu} \pm \beta}{\tau\sqrt{1+\mu}}, \\ \varphi_v = \sqrt{g} = \dfrac{-\,\delta\,\tau\sqrt{1+\mu} \pm \beta}{\tau\sqrt{1+\mu}}, \end{cases} \tag{3.7}$$

unde $\tau = u + v$ şi $\beta = \sqrt{(1+\mu)\,\delta^2\,\tau^2 - 2}$.

În fine, integrînd din nou obţinem

$$\varphi = \delta\,\tau_1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+\mu}}\left(\beta - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) \text{cu } \tau_1 = u - v. \tag{3.8}$$

Pentru determinarea lui ρ vom folosi condiţia $(1.8)_2$:

$$a\,b\,(1-\lambda^2) + b\,(\log\rho)_v - a\,\lambda^2\,(\log\rho)_u = 0, \tag{3.9}$$

unde

$$\begin{cases} a = \dfrac{2}{(1+\mu)^{3/2}\,\beta\,\tau\,(1 \pm \tau\,\delta\sqrt{1+\mu})}, \\ b = \dfrac{2}{(1+\mu)^{3/2}\,\beta\,\tau\,(1 \mp \tau\,\delta\sqrt{1+\mu})}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Pentru fiecare soluţie a ecuaţiei (3.9) şi care verifică şi condiţia lui Giuchard, se determină cu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + 2\,b\,\rho\right) X - \rho\,\dfrac{\partial X}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial v} + 2\,a\,\rho\right) X + \rho\,\dfrac{\partial X}{\partial v}, \end{cases} \tag{3.11}$$

o congruenţă corespunzătoare care are ca imagine sferică a desfăşurabilelor forma diferenţială (1.1).

Punînd $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu}}$,

avem

$$\begin{cases} \sqrt{e} = \varphi_u = \dfrac{\delta\,(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 2})}{\tau}; \quad \sqrt{g} = \varphi_v = \dfrac{\delta\,(-\,\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 2})}{\tau} \\ a = \dfrac{2\,\delta^{3/2}}{\tau\sqrt{\tau^2 - 2}\,(1 \pm \tau)}; \quad b = \dfrac{2\,\delta^{3/2}}{\tau\sqrt{\tau^2 - 2}\,(1 \mp \tau)}, \end{cases} \tag{3.12}$$

şi ecuaţia (3.9) devine

$$(3.13)\qquad \frac{2\,\lambda^2\,\delta^{3/2}}{\tau\,(1\pm\tau)\sqrt{\tau^2-2}}\,\rho_u-\frac{2\,\delta^{3/2}}{\tau\,(1\mp\tau)\sqrt{\tau^2-2}}\,\rho_v=\rho\,(1-\lambda^2).$$

4. Vom considera acum cazul $a=b$ adică $\varphi_u=\varphi_v$. În consecinţă $\varphi=\varphi\,(\tau)\,(\tau=u+v)$ şi avem

$$(4.1)\qquad a=b=\frac{1}{1+\mu}\,\frac{\varphi''}{\varphi'}.$$

Din ecuaţia lui Gauss obţinem

$$(4.2)\qquad \frac{2}{1+\mu}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'+\varphi'^2=0,$$

accentul reprezentînd derivarea în raport cu τ. Observînd că $\mu=\cos\,\omega$, putem scrie ecuaţia (4.2) :

$$(4.3)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)+\cos^2\frac{\omega}{2}\,\varphi'^2=0.$$

O soluţie a acestei ecuaţii se obţine punînd

$$(4.4)\qquad \varphi'^2=-\frac{2}{(1+\mu)\,\tau^2}.$$

În acest caz

$$(4.5)\qquad e=g=-\frac{2}{(1+\mu)\,\tau^2};\ f=\frac{2\,\mu}{(1+\mu)\,\tau^2};\ a=b=-\frac{1}{(1+\mu)\,\tau},$$

şi ecuaţia (3.9) devine

$$(4.6)\qquad \lambda^2\rho_u-\rho_v=\rho\,\frac{\lambda^2-1}{\tau(1+\mu)}.$$

Prin integrare obţinem

$$(4.7)\qquad \rho=\tau^{\frac{1}{1+\mu}}\,F.$$

(F funcţie de argumentul $u+\lambda^2\,v$).

Din celelalte condiţii (1.8) rezultă

$$(4.8)\qquad \lambda^2\left(\frac{F'}{F}\right)^2=-\frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2\,\tau^2}.$$

Cum $\lambda^2\neq 1$ şi $\tau=u+v$, rezultă

$$(4.9)\qquad F\,(u+\lambda^2 v)\equiv\text{const.}\,;\ \mu=\cos\omega=-\frac{1}{2}$$

și din (4.5) și (4.7) obținem

$$(4.10) \qquad \rho = C\tau^2 ; \; e = g = -\frac{4}{\tau^2}; \quad f = \frac{2}{\tau}; \quad a = b = -\frac{2}{\tau}\cdot$$

Introducînd aceste valori în (1.7), se constată că coeficienții elementelor liniare ale celor două pînze focale sînt identic nule. În consecință, soluția (4.4) trebuie exclusă.

5. Făcînd o nouă schimbare de variabile u și v se obține din (4.2)

$$(5.1) \qquad \varphi' = \sqrt{\frac{2}{1+\mu}}\, \mathrm{ch}^{-1}\, \tau.$$

În consecință

$$(5.2) \qquad e = g = \frac{2}{(1+\mu)\,\mathrm{ch}^2\,\tau}; \; f = \frac{2\mu}{(1+\mu)\,\mathrm{ch}^2\,\tau}; \; a = b = -\frac{\mathrm{th}\,\tau}{1+\mu}\cdot$$

Din (5.1) se obține

$$(5.3) \qquad \rho = (\mathrm{ch}\ \tau)^{\frac{1}{1+\mu}}\, F$$

cu F funcție de argumentul $u + \lambda v^2$. Din (1.8) și (5.2) rezultă

$$(5.4) \qquad \frac{1 + 2\mu + \mathrm{ch}^2\,\tau}{(1+\mu)^2\,\mathrm{ch}^2\,\tau} = \lambda^2 \left(\frac{F'}{F}\right)^2 = C_1$$

cu $C_1 \neq 0$. Deci

$$(5.5) \qquad 1 + 2\mu + \mathrm{ch}^2\,\tau\,(1 - C_1\,(1+\mu)^2) = 0.$$

În consecință

$$(5.6) \qquad \mu = \cos\,\omega = -\frac{1}{2}; \quad C_1 = 4; \quad \frac{F'}{F} = \pm\frac{2}{\lambda}\cdot$$

Deci

$$(5.7) \qquad F = C_2 \exp\,\sigma$$

cu

$$(5.8) \qquad \sigma = \pm\frac{2}{\lambda}(u + \lambda^2\, v).$$

Ținînd seama de (5.6) și (5.7), se obține

$$(A) \quad \begin{cases} e = g = \dfrac{4}{\mathrm{ch}^2\,\tau}; \quad f = -\dfrac{2}{\mathrm{ch}^2\,\tau}, \\ \rho = C_2 \exp\,\sigma\,\mathrm{ch}^2\,\tau; \quad a = b = -\,2\,\mathrm{th}\,\tau; \\ \varphi = 4\,\mathrm{arctg}\,(\exp\,\tau) + C. \end{cases}$$

Se verifică imediat că aceste valori satisfac și ecuația lui Giuchard. *Obținem astfel pentru fiecare valoare a modulului de dilatare* $\lambda^2 \neq 1$, *o congruență de drepte ce satisface problema noastră.*

Toate aceste congruențe sînt congruențe (ω) *de tip Ribaucour cu* $\omega = \frac{2\pi}{3}$.

Elementul liniar sferic al congruențelor este

$$(5.9)\qquad \mathrm{d}s'^2 = \frac{4}{\mathrm{ch}^2\,\tau}\,(\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2),$$

și coeficienții celor două forme liniare a pînzelor focale sînt :

$$(5.10)\qquad \begin{cases} E_1 = \dfrac{16\,C_2^2}{\lambda^2}\,(\mathrm{ch}^4\,\tau)\,(\exp 2\sigma)\,; \quad G_1 = 16\,C_2^2 \exp 2\sigma\,\mathrm{ch}^4\,\tau, \\[2ex] \qquad F_1 = \pm\,\dfrac{8\,C_2^2}{\lambda} \exp 2\sigma\,\mathrm{sh}\,2\,\tau\,\mathrm{ch}^2\,\tau, \\[2ex] E_2 = 16\,C_2^2 \exp 2\sigma\,\mathrm{ch}^4\,\tau\,; \quad G_2 = 16\,C_2^2\,\lambda^2 \exp 2\sigma\,\mathrm{ch}^4\,\tau, \\ \qquad F_2 = \pm\,8\,\lambda\,C_2^2 \exp 2\sigma\,\mathrm{sh}\,2\,\tau\,\mathrm{ch}^2\,\tau. \end{cases}$$

Pentru unghiul $\bar{\omega}$ al rețelelor focale avem

$$(5.11)\qquad \cos\bar{\omega} = \pm\,\mathrm{th}\,\tau.$$

Punînd

$$(5.12)\qquad u = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos\bar{u}}{\sin\bar{u}}\right) + \frac{\bar{v}}{2\sqrt{3}}\,; \quad v = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos\bar{u}}{\sin\bar{u}}\right) - \frac{\bar{v}}{2\sqrt{3}},$$

putem reduce elementul liniar sferic la forma

$$(5.13)\qquad \mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}\bar{u}^2 + \sin^2\bar{u}\,\mathrm{d}\bar{v}^2$$

astfel încît cosinușii directori ai razelor congruențelor sînt :

$$(5.14)\qquad X = \sin\bar{u}\cos\bar{v}\,; \quad Y = \sin\bar{u}\sin\bar{v}\,; \quad Z = \cos\bar{u},$$

cu

$$(5.15)\qquad \bar{u} = \arccos\,(\mathrm{th}\,\tau)\,; \quad \bar{v} = \sqrt{3}\,(u - v).$$

În variabilele inițiale avem

$$(5.16)\qquad X = \frac{\cos\,(u-v)\sqrt{3}}{\mathrm{ch}\,\tau}\,; \quad Y = \frac{\sin\,(u-v)\sqrt{3}}{\mathrm{ch}\,\tau}\,; \quad Z = \mathrm{th}\,\tau.$$

Elementul liniar sferic îl putem scrie și astfel :

$$(5.17)\qquad \mathrm{d}s'^2 = \sin^2\bar{u}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}^2}{\sin^2\bar{u}} + \mathrm{d}\bar{v}^2\right).$$

Punînd $u^* = \int \frac{d\bar{u}}{\sin \bar{u}} = \log \operatorname{tg} \frac{u}{2}$, rezultă

$$du^* = \frac{d\bar{u}}{\sin \bar{u}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\bar{u}}{2} = e^{u^*}; \quad \sin \bar{u} = \frac{2e^{u^*}}{1 + e^{2u^*}} = \frac{1}{\operatorname{ch} u^*}$$

Deci

$$ds'^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u^*} (du^{*2} + d\bar{v}^2).$$

Un astfel de element sferic reprezintă imaginea asimptoticelor unor suprafețe minime [1] *al cărui element liniar este*

$$d\bar{s}^2 = \bar{a}^2 \operatorname{ch}^2 u^* (du^{*2} + d\bar{v}^2).$$

Cu această schimbare a parametrilor avem

$$X = \frac{\cos \bar{v}}{\operatorname{ch} u^*}; \quad Y = \frac{\sin \bar{v}}{\operatorname{ch} u^*}; \quad Z = \operatorname{th} u^*. \tag{5.18}$$

Observînd că în noii parametri avem

$$\left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0,$$

rezultă că liniile $v = $ *const. sînt geodezice.*

Dar ele sînt și asimptotice.

Avem deci următoarele rezultate :

1. *Aceste suprafețe sînt elicoizii drepți de arie minimă.*

2. *Considerînd un elicoid drept minimum raportat la asimptotele* u, v *avînd elementul liniar*

$$d\bar{s}^2 = \bar{a}^2 \operatorname{ch}^2 u^* (du^{*2} + d\bar{v}^2), \tag{5.19}$$

ca suprafața generatoare (S), *se determină suprafețele* ($\bar{S}$) *ce se corespund prin ortogonalitatea de elemente cu suprafața* (S). *Suprafețele* ($\bar{S}$) *sînt suprafețele medii ale congruențelor descrise de paralelele la normalele suprafețelor* (S).

Ecuația caracteristică a lui Weingarten sub forma normală [1]

$$\bar{\varphi}_{u^* \bar{v}} + O\, \bar{\varphi}_{u^*} + \operatorname{sh} u^* \bar{\varphi}_{\bar{v}} = 0 \tag{5.19}$$

se integrează în cazul nostru și avem

$$\bar{\varphi} = [\exp(- \operatorname{ch} u^*)]\, V(\bar{v}) + U(u^*). \tag{5.20}$$

Reciproc, presupunînd că reprezentarea sferică a congruenței este definită prin ecuațiile :

$$X = \sin \bar{u} \cos \bar{v}; \quad Y = \sin \bar{u} \sin \bar{v}; \quad Z = \cos \bar{u} \tag{5.21}$$

și punînd

$$\bar{u} = \arccos (\operatorname{th} \tau); \quad \bar{v} = (u - v) \sqrt{3} \tag{5.22}$$

obţinem

$$(\bar{\alpha})\quad \begin{cases} X = \sin\,[\arccos\,(\operatorname{th}\,\tau)]\cos\,(u - v)\sqrt{3}, \\ Y = \sin\,[\arccos\,(\operatorname{th}\,\tau)]\sin\,(u - v)\sqrt{3}, \\ Z = \cos\,[\arccos\,(\operatorname{th}\,\tau)]. \end{cases}$$

Calculînd elementul liniar obţinem

$$(5.23)\qquad \mathrm{d}s'^2 = \frac{4}{\operatorname{ch}^2\tau}(\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2),$$

de unde

$$(5.24)\qquad a = b = -\frac{2}{\operatorname{th}\,\tau},$$

cu

$$(5.25)\qquad \rho = C_2 \exp \sigma \operatorname{ch}^2\tau,$$

şi luînd ca suprafaţă medie o suprafaţă (x) şi conducînd razele cu cosinuşii directori egali cu $(\bar{\alpha})$, obţinem o congruenţă Ribaucour de tip Vincensini cu $\omega = \frac{2\pi}{3}$ şi care realizează o corespondenţă conformă între pînzele focale cu modulul λ constant şi $\neq \pm 1$.

Primită la redacţie la 30 martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*. Bologna, N. Zanichelli, 1927, tom. I, part I şi II.
2. S. Finikoff. *Congruences avec les deux nappes de la surface focale applicable l'une sur l'autre par les points correspondants.* Annali di Mat. pura ed appl. Serie quasto, **I (LVIII)** 175–184 (1923).
3. P. Vincensini, *Sur les généralisations de quelques problèmes de géométrie différentielle et sur certains cycles de congruences.* Acta Mathematica, **71**, 145–174 (1939).

GRUPUL DE INVARIANȚĂ AL UNUI OBIECT GEOMETRIC $\Omega^{\wedge}(x, \dot{x})$

DE

IOAN ȘUTAC
(Suceava)

Lucrarea tratează problema grupului de invarianță al obiectelor geometrice din spațiul de elemente liniare, generalizînd rezultatele lui Yano și Thașiro.

Recent Radu Miron în [2] s-a ocupat de studiul derivatei Lie a obiectelor geometrice care depind de punct și de direcție $\Omega^{\wedge}(x, \dot{x})$ stabilind formulele fundamentale, identitățile fundamentale. De asemenea s-a ocupat de grupul de invarianță al obiectelor amintite. În Nota de față abordăm problema generalizării teoremelor lui Yano și Thașiro [1] din teoria obiectelor geometrice $\Omega^{\wedge}(x)$ și prezentăm cîteva rezultate noi privind perechile de obiecte liniare $\underset{1}{\Omega}{}^{\wedge}(x, \dot{x})$ și $\underset{2}{\Omega}{}^{\wedge}(x, \dot{x})$.

Conferențiar Dr. Miron a avut amabilitatea să-mi acorde ajutorul său în realizarea acestei lucrări.

1. Fiind dată V_n, o varietate de clasă C^u, să considerăm în fiecare punct al ei (x^i) o direcție $(\dot{x}^i)$ arbitrară. Transformările de coordonate pe V_n sînt date de:

$$(1.1)\qquad \begin{cases} x^{i'} = f^i\,(x^1,\ldots, x^n) \\ \dot{x}^{i'} = \partial_j f^i\,(x^1,\ldots, x^n)\,\dot{x}^j \end{cases}$$

$$(i, j = 1,\ldots, n).$$

Un obiect geometric de clasă $p \leqslant u$ ce depinde de punct (x^i) și de derivată $(\dot{x}^i)$ se definește prin N componente $\Omega^{\wedge}(x, \dot{x})$ date în sistemul de coordonate (x^i), k — omogene în $(\dot{x}^i)$ și care la o transformare de coordonate pe V_n de forma (1.1) se transformă după legea:

$$\Omega^{\wedge\prime} = F^{\wedge}(\Omega\,; x^i, f^i\,; \partial_j f^i, .\,., \partial_{j_p\cdots j_1} f^i\,; \dot{x}^i, \dot{x}^{i'})$$

ceea ce se poate scrie sub forma:

$$(1.2)\qquad \Omega^{\wedge\prime} = F^{\wedge}(\Omega\,; x^i, x^{i'}\,; \dot{x}^i, \dot{x}^{i'}),$$

aceste componente verificînd anumite proprietăți grupale [2].

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 25–31, BUCUREȘTI, 1967

Dacă legea de transformare (1.2) e de forma:

$$\Omega^{\wedge\prime} = F^{\wedge}_{\Sigma}(x^{i}, x^{i'}; \dot{x}^{i}, \dot{x}^{i'})\, \Omega^{\Sigma} + G^{\wedge}(x^{i}, x^{i'}; \dot{x}^{i}, \dot{x}^{i'}), \tag{1.3}$$

atunci obiectul geometric se va numi liniar, iar dacă în (1.3) $G^{\wedge}(x^{i}, x^{i'}; \dot{x}^{i}, \dot{x}^{i'}) = 0$, obiectul se va numi liniar şi omogen.

Dacă în $F^{\wedge}$ din (1.2) (x^{i}) şi $(x^{i'})$ nu intră explicit, atunci obiectul geometric se va numi diferenţial.

Pe varietatea V_n să considerăm transformarea infinitezimală generalizată generată de cîmpul de vectori $V^{i}(x)$ definiţi pe V_n:

$$\begin{cases} 'x^{i} = x^{i} + v^{i}(x)\,\mathrm{d}t, \\ '\dot{x}^{i} = \dot{x}^{i} + \partial_j v^{i}(x)\,\mathrm{d}t. \end{cases} \tag{1.4}$$

Derivata Lie a unui obiect geometric liniar, notată $\underset{v}{\mathcal{L}}\, \Omega^{\wedge}(x, \dot{x})$ va fi dată de, [2]:

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\, \Omega^{\wedge}(x, \dot{x}) = v^{i}\partial_i \Omega^{\wedge} + \dot{x}^{j}\partial_j v^{i}\dot{\partial}_i\, \Omega^{\wedge} - \{F, v\}^{\wedge}_{\pi}\Omega^{\pi} - \{G, v\}^{\wedge} \tag{1.5}$$

în care s-a notat pentru simplificare:

$$\begin{cases} \{F, v\}^{\wedge}_{\pi} = \sum\limits_{s=0}^{p} F^{\lambda\,(s)\wedge}_{i\;\;\;\pi}\, \partial_{\lambda\,(s)}\, v^{i} + \dot{\partial}_i\, F^{\wedge}_{\alpha}\dot{x}^{j}\partial_j v^{i} \\ \{G, v\}^{\wedge} = \sum\limits_{s=0}^{p} G^{\lambda\,(s)\wedge}_{i}\, \partial_{\lambda\,(s)}\, v^{i} + \dot{\partial}_i\, G^{\wedge}\dot{x}^{j}\,\partial_j\, v^{i}, \end{cases} \tag{1.6}$$

unde:

$$\begin{cases} F^{\lambda\,(0)\wedge}_{i\;\;\;\pi} = \left[\dfrac{\partial F^{\wedge}_{\pi}}{\partial f^{i}}\right]_{(x,\,\dot{x})};\ F^{\lambda\,(s)\wedge}_{i\;\;\;\pi} = \left[\dfrac{\partial F^{\wedge}_{\pi}}{\partial\,(\partial_{\lambda_s\cdots\lambda_1} f^{i})}\right]_{(x,\,\dot{x})}; \\ \dot{\partial}_i\, F^{\wedge}_{\pi} = \left[\dfrac{\partial F^{\wedge}_{\pi}}{\partial \dot{x}^{i}}\right]_{(x,\,\dot{x})} \text{ etc.,} \end{cases} \tag{1.7}$$

punctul $(x, \dot{x})$ fiind definit prin:

$$f^{i} = x^{i}; \partial_{\lambda} f^{i} = \delta^{i}_{\lambda}, \partial_{\lambda_2\lambda_1} f^{i} = 0, \ldots, \partial_{\lambda_p\cdots\lambda_1} f^{i} = 0, \dot{x}^{i'} = \dot{x}^{i}.$$

Fie $\underset{a}{v}{}^{i}(x)$, $(a = 1, \ldots, r)$, r vectori definiţi pe varietatea V_n. Dacă $\underset{a}{\mathcal{L}} f = \mathcal{L} \underset{\hat{a}}{f}$ sînt r operatori infinitezimali ai unui grup Lie G_r, atunci pentru un obiect geometric diferenţial liniar $\Omega^{\wedge}(x, \dot{x})$ are loc formula:

$$(\underset{c}{\mathcal{L}}\underset{b}{\mathcal{L}})\, \Omega^{\wedge}(x, \dot{x}) = C^{a}_{c\,b}\, \underset{a}{\mathcal{L}}\, \Omega^{\wedge}(x, \dot{x}), \tag{1.8}$$

unde $C^{a}_{c\,b}$ sînt constantele de structură ale grupului G_r.

$\Omega^{\wedge}(x, \dot{x})$ fiind obiect geometric diferenţial liniar, egalitatea:

$$\underset{a}{\mathcal{L}}\, \Omega^{\wedge}(x, \dot{x}) = \Phi^{\wedge}_{a}(x, \dot{x}) \tag{1.9}$$

arată că $\Phi^{\wedge}_{a}(x, \dot{x})$ sînt r obiecte geometrice liniare omogene.

Înlocuind $\Phi_a{}^{\wedge}(x, \dot{x})$ în (1.8) se obține :

$$\underset{c}{\mathcal{L}}\, \Phi_b{}^{\wedge}(x, \dot{x}) - \underset{b}{\mathcal{L}}\, \Phi_c^{\wedge}(x, \dot{x}) = C^a_{c\,b}\, \Phi_a^{\wedge}(x, \dot{x}). \tag{1.10}$$

Definiția 1. *O mulțime de r obiecte geometrice liniare omogene $\Phi_a^{\wedge}(x, \dot{x})$ ce verifică o relație de forma (1.10) se va numi mulțime completă în raport cu grupul G_r.*

Se pune problema : fiind date r obiecte geometrice liniare omogene $\Phi_a^{\wedge}(x, \dot{x})$ cu legea de transformare de același tip, formînd o mulțime completă în raport cu grupul G_r, sistemul (1.9) admite totdeauna soluții în raport cu $\Omega^{\wedge}(x, \dot{x})$?

Vom rezolva afirmativ problema în ipoteza că $r \leqslant n$.

În adevăr, deoarece obiectele geometrice își păstrează caracterul geometric la schimbări de coordonate, putem alege un sistem de coordonate cu proprietatea :

$$\det |\underset{a}{v}^{\alpha}| \neq 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, r)\,; (a, b, c = 1, \ldots, r)$$

$$\underset{a}{v}^{\xi}\, a = 0 \quad (\xi = r + 1, \ldots, n).$$

Se știe că există asemenea sisteme de coordonate și atunci, ținînd cont de (1.5), sistemul (1.9) se reduce la :

$$\underset{b}{v}^{\beta}\, \partial_{\beta}\Omega^{\wedge} + \dot{x}^j\, \partial_j\, \underset{b}{v}^{\beta}\, \dot{\partial}_{\beta}\Omega^{\wedge} - \{F, \underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\, \Omega^{\pi} - \{G, \underset{b}{v}\}^{\wedge} = \Phi_b^{\wedge}(x, \dot{x}). \tag{1.11}$$

Să notăm prin $\theta_{\beta}^{\wedge}(\Omega, \dot{\partial}\,\Omega, \Phi, x, \dot{x})$ expresia :

$$\underset{b}{v}^{\beta}\, \theta_{\beta}^{\wedge} = \{F, \underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\, \Omega^{\pi} + \{G, \underset{b}{v}\}^{\wedge} + \Phi_b^{\wedge} - \dot{x}^j\, \partial_j\, \underset{b}{v}^{\beta}\, \dot{\partial}_{\beta}\, \Omega^{\wedge} \tag{*}$$

și atunci (1.11) devine :

$$\partial_{\beta}\, \Omega^{\wedge} = \theta_{\beta}^{\wedge}(\Omega, \dot{\partial}\,\Omega, \Phi, x, \dot{x}) \tag{1.12}$$

care este echivalent cu sistemul (1.9).

A arăta că sistemul (1.12) (și deci sistemul 1.9) este regulat în sensul lui Thomas [1] revine la a demonstra că sînt identic satisfăcute condițiile de completă integrabilitate ale sistemului (1.12) în raport cu derivatele principale :

$$\begin{aligned} \partial_{\gamma}\, \theta_{\beta}^{\wedge} + \frac{\partial\, \theta_{\beta}^{\wedge}}{\partial\, \Omega^{\pi}}\, \theta^{\pi}_{\gamma} + \frac{\partial\, \theta_{\beta}^{\wedge}}{\partial\, \Omega^{\pi}_{\alpha}}\, \partial_{\gamma}\Omega^{\pi}_{\alpha} + \frac{\partial\, \theta_{\beta}^{\wedge}}{\partial\, \Phi^{\pi}_{\alpha}}\, \partial_{\gamma}\, \Phi^{\pi}_{\alpha} &= \\ = \partial_{\beta}\theta_{\gamma}^{\wedge} + \frac{\partial\, \theta_{\gamma}^{\wedge}}{\partial\, \Omega^{\pi}}\, \theta^{\pi}_{\beta} + \frac{\partial\theta_{\gamma}^{\wedge}}{\partial\, \Omega^{\pi}_{\lambda}}\, \partial_{\beta}\Omega^{\pi}_{\alpha} + \frac{\partial\, \theta_{\gamma}^{\wedge}}{\partial\, \Phi^{\pi}_{\alpha}}\, \partial_{\beta}\, \Phi^{\pi}_{\alpha}&, \end{aligned} \tag{1.13}$$

unde am convenit a nota $\Omega^{\pi}_{\alpha} = \dot{\partial}_{\alpha}\Omega^{\pi}$.

Ținînd cont de relațiile (*) și de faptul că derivatele parametrice verifică relațiile :

$$\partial_{\gamma}\Omega_{\beta}^{\wedge} = \dot{\partial}_{\beta}(\partial_{\gamma}\Omega^{\wedge}),\ \dot{\partial}_{\gamma}\, \dot{\partial}_{\beta}\Omega^{\wedge} = \dot{\partial}_{\beta}\, \dot{\partial}_{\gamma}\Omega^{\wedge},$$

obţinem :

$$(1.14)\quad \underset{c}{v}^{\gamma}\underset{b}{v}^{\beta}(\partial_{\gamma}\theta^{\wedge}_{\beta}-\partial_{\beta}\theta^{\wedge}_{\gamma})+(\underset{c}{v}^{\gamma}\partial_{\gamma}\underset{b}{v}^{\beta}-\underset{b}{v}^{\gamma}\partial_{\gamma}\underset{c}{v}^{\beta})\,\theta^{\wedge}_{\beta}=(\underset{c}{v}^{\gamma}\partial_{\gamma}\{F,\underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\pi}-$$

$$-\underset{b}{v}^{\beta}\partial_{\beta}\{F,\underset{c}{v}\}^{\wedge}_{\pi})\,\Omega^{\pi}+\underset{c}{v}^{\gamma}\partial_{\gamma}\{G,\underset{b}{v}\}^{\wedge}-\underset{b}{v}^{\beta}\partial_{\beta}\{G,\underset{c}{v}\}^{\wedge}-\dot{x}^{j}(\underset{c}{v}^{\gamma}\partial_{\gamma}\partial_{j}\underset{b}{v}^{\beta}-\underset{b}{v}^{\gamma}\partial_{\gamma}\partial_{j}\underset{c}{v}^{\beta})\,\Omega^{\wedge}_{\beta}.$$

$$(1.15)\quad \underset{c}{v}^{\gamma}\underset{b}{v}^{\beta}\left(\frac{\partial\theta^{\wedge}_{\beta}}{\partial\Omega^{\pi}}\theta^{\pi}_{\gamma}-\frac{\partial\theta^{\wedge}_{\gamma}}{\partial\Omega^{\pi}}\theta^{\pi}_{\beta}\right)=(\{F,\underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\{F,\underset{c}{v}\}^{\pi}_{\Sigma}-\{F,\underset{c}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\{F,\underset{b}{v}\}^{\pi}_{\Sigma})\,\Omega^{\Sigma}+$$

$$+\{F,\underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\{G,\underset{c}{v}\}^{\pi}-\{F,\underset{c}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\{G,\underset{b}{v}\}^{\pi}+\{F,\underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\Phi^{\pi}_{c}-\{F,\underset{c}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\Phi^{\pi}_{b}-$$

$$-\dot{x}^{j}(\partial_{j}\underset{c}{v}^{\gamma}\{F,\underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\Omega^{\pi}_{\gamma}-\partial_{j}\underset{b}{v}^{\beta}\{F,\underset{c}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\Omega^{\pi}_{\beta}).$$

$$(1.16)\quad \underset{c}{v}^{\gamma}\underset{b}{v}^{\beta}\left(\frac{\partial\theta^{\wedge}_{\beta}}{\partial\Omega^{\pi}_{\alpha}}\partial_{\gamma}\Omega^{\pi}_{\alpha}-\frac{\partial\theta^{\wedge}_{\gamma}}{\partial\Omega^{\pi}_{\alpha}}\partial_{\beta}\Omega^{\pi}_{\alpha}\right)=-\dot{x}^{j}[(\partial_{j}\underset{b}{v}^{\beta}\dot{\partial}_{\beta}\{F,\underset{c}{v}\}^{\wedge}_{\pi}-$$

$$-\partial_{j}\underset{c}{v}^{\gamma}\dot{\partial}_{\gamma}\{F,\underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\pi})\,\Omega^{\pi}+\partial_{j}\underset{b}{v}^{\beta}\{F,\underset{c}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\Omega^{\pi}_{\beta}-\partial_{j}\underset{c}{v}^{\gamma}\{F,\underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\Omega^{\pi}_{\gamma}+\partial_{j}\underset{b}{v}^{\beta}\dot{\partial}_{\beta}\{G,\underset{c}{v}\}^{\wedge}-$$

$$-\partial_{j}\underset{c}{v}^{\gamma}\{G,\underset{b}{v}\}^{\wedge}+\partial_{j}\underset{b}{v}^{\beta}\dot{\partial}_{\beta}\Phi^{\wedge}_{c}-\partial_{j}\underset{c}{v}^{\gamma}\dot{\partial}_{\gamma}\Phi^{\wedge}_{b}-(\partial_{j}\underset{b}{v}^{\beta}\partial_{\beta}\underset{c}{v}^{\gamma}-\partial_{j}\underset{c}{v}^{\beta}\dot{\partial}_{\beta}\underset{b}{v}^{\gamma})\,\Omega^{\wedge}_{\gamma}].$$

$$(1.17)\quad \underset{c}{v}^{\gamma}\underset{b}{v}^{\beta}\left(\frac{\partial\theta^{\wedge}_{\beta}}{\partial\Phi^{\pi}_{\alpha}}\partial_{\gamma}\Phi^{\pi}_{\alpha}-\frac{\partial\theta^{\wedge}_{\gamma}}{\partial\Phi^{\pi}_{\alpha}}\partial_{\beta}\Phi^{\pi}_{\alpha}\right)=\underset{c}{v}^{\gamma}\partial_{\gamma}\Phi^{\wedge}_{b}-\underset{b}{v}^{\beta}\partial_{\beta}\Phi^{\wedge}_{c}.$$

Sumînd (1.14), (1.15), (1.16), (1.17) şi ţinînd cont de identităţile fundamentale [2] :

$$\{F,\underset{c}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\{F,\underset{b}{v}\}^{\pi}_{\Sigma}-\{F,\underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\{F,\underset{c}{v}\}^{\pi}_{\Sigma}-(\underset{c}{v}^{i}\partial_{i}\{F,\underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\Sigma}-\underset{b}{v}^{i}\partial_{i}\{F,\underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\Sigma})-$$

$$-\dot{x}^{j}(\partial_{j}\underset{c}{v}^{i}\dot{\partial}_{i}\{F,\underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\Sigma}-\partial_{j}\underset{b}{v}^{i}\dot{\partial}_{i}\{F,\underset{c}{v}\}^{\wedge}_{\Sigma})=-\{F,\underset{c}{v_{b}}\}^{\wedge}_{\Sigma},$$

$$\{F,\underset{c}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\{G,\underset{b}{v}\}^{\pi}-\{F,\underset{b}{v}\}^{\wedge}_{\pi}\{G,\underset{c}{v}\}^{\pi}-(\underset{c}{v}^{i}\partial_{i}\{G,\underset{b}{v}\}^{\wedge}-\underset{b}{v}^{i}\partial_{i}\{G,\underset{c}{v}\}^{\wedge})-$$

$$-\dot{x}^{i}(\partial_{j}\underset{c}{v}^{i}\dot{\partial}_{i}\{G,\underset{b}{v}\}^{\wedge}-\partial_{j}\underset{b}{v}^{i}\dot{\partial}_{i}\{G,\underset{c}{v}\}^{\wedge})=-\{G,\underset{c}{v_{b}}\}^{\wedge},$$

la care satisface derivata Lie într-un spaţiu de obiecte liniare precum şi de derivata Lie a obiectelor geometrice $\Phi^{\wedge}_{a}(x,\dot{x})$, după (1.10) se găseşte :

$$\underset{c}{v}^{\lambda}\underset{b}{v}^{\beta}\left(\partial_{\gamma}\theta^{\wedge}_{\beta}-\partial_{\beta}\theta^{\wedge}_{\gamma}+\frac{\partial\theta^{\wedge}_{\beta}}{\partial\Omega^{\pi}}\theta^{\pi}_{\gamma}-\frac{\partial\theta^{\wedge}_{\gamma}}{\partial\Omega^{\pi}}\theta^{\pi}_{\beta}+\frac{\partial\theta^{\wedge}_{\beta}}{\partial\Omega^{\pi}_{\alpha}}\partial_{\gamma}\Omega^{\pi}_{\alpha}-\frac{\partial\theta^{\wedge}_{\gamma}}{\partial\Omega^{\pi}_{\alpha}}\partial_{\beta}\Omega^{\pi}_{\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\theta^{\wedge}_{\beta}}{\partial\Phi^{\pi}_{\alpha}}\partial_{\gamma}\Phi^{\pi}_{\alpha}-\frac{\partial\theta^{\wedge}_{\gamma}}{\partial\Phi^{\pi}_{\alpha}}[\partial_{\beta}\Phi^{\pi}_{\alpha}\right)=-\underset{cb}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge}+\underset{c}{\mathcal{L}}\Phi^{\wedge}_{b}-\underset{b}{\mathcal{L}}\Phi^{\wedge}_{c}=-\underset{cb}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge}+\underset{cb}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge}=0,$$

care sînt tocmai (1.13). Deci (1.12) este un sistem regulat. Prin urmare se poate formula următoarea teoremă :

TEOREMA 1. *Fiind dat grupul Lie G_r de transformări pe V_n, în ipoteza că $r \leqslant n$ şi că $\Phi^{\wedge}_{a}(x,\dot{x})$ sînt r obiecte geometrice liniare omogene cu legea de transformare de acelaşi tip, formînd o mulţime completă în raport cu grupul G_r, sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale (1.9) admite soluţii în raport cu $\Omega^{\wedge}(x,\dot{x})$.*

Observații. 1) Dacă obiectele geometrice $\Phi_a^{\wedge}(x, \dot{x})$ sînt nule, atunci se obține teorema referitoare la existența soluțiilor sistemului : $\underset{a}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge}(x, \dot{x}) = 0$ a cărei demonstrație este dată în [2].

2) Dacă obiectele geometrice $\Omega^{\wedge}$ și $\Phi_a^{\wedge}$ depind numai de punct nu și de direcție, și $\Phi_a^{\wedge}$ formează o mulțime completă în raport cu grupul G_r, atunci se obține teorema lui Yano și Thașiro [1], adică sistemul :

$$\underset{a}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge}(x) = \Phi_a^{\wedge}(x)$$

este complet integrabil, de asemenea dacă $\Phi_a^{\wedge}(x) = 0$, atunci sistemul $\underset{a}{\mathcal{L}}\Omega_a^{\wedge}(x) = 0$, la fel, este complet integrabil.

1. Să dăm cîteva aplicații ale teoremei demonstrate anterior care generalizează rezultatele lui Yano și Thașiro.

TEOREMA 2. *Fiind dat grupul G_r cu $r \leqslant n$ care se bucură de proprietatea că există un obiect geometric liniar și omogen $\Omega^{\wedge}(x, \dot{x})$ așa fel ca :*

$$\underset{a}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge}(x, \dot{x}) = \rho_a \Omega^{\wedge}(x, \dot{x}) \tag{2.1}$$

unde ρ_a, $(a = 1, \ldots, r)$, sînt scalari, atunci există un scalar ρ așa fel ca grupul G_r să fie grup de invarianță al obiectului geometric $\rho\Omega^{\wedge}(x, \dot{x})$. Aceasta revine la a demonstra că în ipotezele teoremei 2 se poate determina ρ așa fel ca :

$$\underset{a}{\mathcal{L}}(\rho\Omega^{\wedge}(x, \dot{x})) = 0. \tag{2.2}$$

În adevăr, cum (2.1) au loc, ținînd seama de formula (1.8), avem :

$$\underset{cb}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge}(x, \dot{x}) = C^a_{cb}\underset{a}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge}(x, \dot{x}) = C^a_{cb}\, \rho_a \Omega^{\wedge}(x, \dot{x})$$

sau încă :

$$\underset{c}{\mathcal{L}}\rho_b \Omega^{\wedge} - \underset{b}{\mathcal{L}}\rho_c \Omega^{\wedge} = C^a_{cb}\rho_a \Omega^{\wedge}$$

dar cum $\rho_a \Omega^{\wedge}$ este un produs de două obiecte geometrice iar ρ_a sînt scalari, se aplică regula lui Leibniz și se capătă :

$$(\underset{c}{\mathcal{L}}\rho_b - \underset{b}{\mathcal{L}}\rho_c)\,\Omega^{\wedge} + \rho_b \underset{c}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge} - \rho_c \underset{b}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge} = C^a_{cb}\rho_a \Omega^{\wedge}$$

dar ținînd cont de (2.1) :

$$\rho_b \underset{c}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge} - \rho_c \underset{b}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge} = \rho_b \rho_c \Omega^{\wedge} - \rho_c \rho_b \Omega^{\wedge} = 0$$

și deci simplificînd cu $\Omega^{\wedge}$ rezultă :

$$\underset{c}{\mathcal{L}}\rho_b - \underset{b}{\mathcal{L}}\rho_c = C^a_{cb}\rho_a \tag{2.3}$$

ceea ce arată că ρ_a formează o mulțime completă în raport cu grupul G_r.

Fie, atunci, (2.2). Folosind regula lui Leibniz se capătă prin simplificarea lui $\Omega^{\wedge}$ și ținînd cont de (2.1) :

$$\underset{a}{\mathcal{L}}\rho = -\rho\rho_a$$

de unde :

$$\underset{a}{\mathscr{L}} \ln \rho = -\rho_a \tag{2.4}$$

şi atunci problema existenţei lui ρ din (2.2) se reduce la problema existenţei soluţiei sistemului (2.4) care este de tipul (1.9) şi cum ρ_a formează o mulţime completă în raport cu grupul G_r, deci la fel şi $-\rho_a$; sîntem deci în condiţiile teoremei 1, ceea ce demonstrează afirmaţia enunţată.

TEOREMA 3. *Fiind dat grupul* G_r *cu* $r \leqslant n$ *şi obiectul geometric liniar* $\Omega^{\wedge}(x, \dot{x})$, *atunci există un obiect geometric liniar şi omogen* $\Psi^{\wedge}(x, \dot{x})$ *aşa fel ca grupul* G_r *să fie grup de invarianţă pentru obiectul geometric* $\Omega^{\wedge} + \Psi^{\wedge}$ *adică* sistemul :

$$\underset{a}{\mathscr{L}}(\Omega^{\wedge} + \Psi^{\wedge}) = 0 \tag{2.5}$$

admite soluţii în raport cu $\Psi^{\wedge}$.

În adevăr, pentru obiectele geometrice $\Omega^{\wedge}$ şi $\Psi^{\wedge}$ este îndeplinită relaţia :

$$\underset{a}{\mathscr{L}}(\Omega^{\wedge} + \Psi^{\wedge}) = \underset{a}{\mathscr{L}}\Omega^{\wedge} + \underset{a}{\mathscr{L}}\Psi^{\wedge}$$

şi atunci sistemul (2.5) se reduce la :

$$\underset{a}{\mathscr{L}}\Psi^{\wedge} = -\underset{a}{\mathscr{L}}\Omega^{\wedge}. \tag{2.6}$$

Dar pentru $\Omega^{\wedge}$ se ştie că :

$$\underset{cb}{\mathscr{L}}\Omega^{\wedge} = \underset{c}{\mathscr{L}}\underset{b}{\mathscr{L}}\Omega^{\wedge} - \underset{b}{\mathscr{L}}\underset{c}{\mathscr{L}}\Omega^{\wedge} = C^a_{cb}\underset{a}{\mathscr{L}}\Omega^{\wedge}$$

adică mulţimea de obiecte $\underset{a}{\mathscr{L}}\Omega^{\wedge}$ este completă în raport cu grupul G_r şi deci la fel este şi $-\underset{a}{\mathscr{L}}\Omega^{\wedge}$. Dar sistemul (2.6) este de forma (1.9) şi cum sîntem în condiţiile teoremei 1, înseamnă că existenţa lui $\Psi^{\wedge}$ este asigurată şi deci teorema 3 este demonstrată.

Observaţii. Teorema 3 este valabilă şi pentru cazurile următoare :

— fiind dat obiectul geometric liniar $\Omega^{\wedge}$, se poate determina obiectul geometric liniar $\Psi^{\wedge}$ încît G_r e grup de invarianţă pentru obiectul geometric $\Omega^{\wedge} - \Psi^{\wedge}$.

— fiind dat obiectul geometric liniar şi omogen $\Omega^{\wedge}$, se determină $\Psi^{\wedge}$ liniar încît G_r este grup de invarianţă pentru obiectul geometric $\Omega^{\wedge} + \Psi^{\wedge}$.

— $\Omega^{\wedge}$ şi $\Psi^{\wedge}$ sînt ambele obiecte geometrice liniare şi omogene.

TEOREMA 4. *Fiind dat grupul* G_r cu $r \leqslant n$ *şi obiectul geometric liniar* $\underset{1}{\Omega}{}^{\wedge}(x, \dot{x})$, *atunci există un obiect geometric liniar* $\underset{2}{\Omega}{}^{\wedge}(x, \dot{x})$ *cu aceiaşi lege de transformare aşa fel ca grupul* G_r *să fie grup de invarianţă pentru obiectul geometric* $\frac{1}{2}(\underset{1}{\Omega}{}^{\wedge}(x, \dot{x}) + \underset{2}{\Omega}{}^{\wedge}(x, \dot{x}))$.

Va trebui să dovedim că :

$$\underset{a}{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{2}(\underset{1}{\Omega}^{\wedge} + \underset{2}{\Omega}^{\wedge})\right) = 0 \tag{2.7}$$

admite soluții în raport cu $\underset{2}{\Omega}^{\wedge}$.

În adevăr, în general pentru obiectele geometrice liniare $\underset{1}{\Omega}^{\wedge}$ și $\underset{2}{\Omega}^{\wedge}$ avem :

$$\underset{a}{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{2}(\underset{1}{\Omega}^{\wedge} + \underset{2}{\Omega}^{\wedge})\right) = \frac{1}{2}\underset{a}{\mathcal{L}}\underset{1}{\Omega}^{\wedge} + \frac{1}{2}\underset{a}{\mathcal{L}}\underset{2}{\Omega}^{\wedge}$$

și deci sistemul (2.7) este echivalent cu sistemul :

$$\underset{a}{\mathcal{L}}\underset{2}{\Omega}^{\wedge} = -\underset{a}{\mathcal{L}}\underset{1}{\Omega}^{\wedge}$$

și cum (1.8) arată că mulțimea $-\underset{a}{\mathcal{L}}\underset{1}{\Omega}^{\wedge}$ este completă în raport cu grupul G_r, sistemul (2.8) este de forma (1.9) și fiind în condițiile teoremei 1, rezultă că teorema 4 este adevărată.

Primită la redacție la 30 martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. K. Yano, *The Theory of Lie derivatives and its applications.*
2. R. Miron, *Sur la dérivée Lie des objects géométriques.* (în curs de publicare).

ASUPRA SPAȚIILOR A_n CU GRUP SEPARABIL CARE ADMIT O ROTAȚIE

DE

VIOREL DUMITRAȘ

Se determină spațiile cu conexiune afină A_n $(n \geqslant 3)$ care admit grupul de transformări de congruențe $\mathrm{d}\bar{s}^1 = \cos\theta\, \mathrm{d}s^1 - \sin\theta\, \mathrm{d}s^2$, $\mathrm{d}\bar{s}^2 = \sin\theta\, \mathrm{d}s^1 + \cos\theta\, \mathrm{d}s^2$, $\mathrm{d}\bar{s}^{\alpha} = c^{\alpha}_{\lambda}\, \mathrm{d}s^{\lambda}$. Se arată că aceste spații sînt simetrice în sensul lui Cartan, fiind produsul direct dintre un spațiu V_2 cu curbură constantă, cu un spațiu afin euclidian A_{n-2}.

Fie un sistem de congruențe independente (λ) într-un spațiu cu conexiune afină fără torsiune. Vom nota prin γ^a_{bc} componentele conexiunii pe aceste congruențe.

Față de o transformare de congruențe

$$\mathrm{d}\bar{s}^a = c^a_b\, \mathrm{d}s^b, \tag{1}$$

componentele conexiunii se transformă după legea [1]

$$\frac{\partial c^a_o}{\partial s^c} = \bar{\gamma}^a_{pq}\, c^p_b\, c^q_c - \gamma^p_{bc}\, c^a_p \tag{2}$$

și condițiile de integrabilitate ale acestor ecuații se scriu

$$\bar{\gamma}^a_{pqr}\, c^p_b\, c^q_c\, c^r_d - \gamma^p_{bcd}\, c^a_p = 0, \tag{3}$$

unde γ^a_{bcd} reprezintă componentele tensorului de curbură. Considerăm și tensorii de curbură contractați

$$r_{cd} = \gamma^a_{acd}, \quad \gamma_{bd} = \gamma^a_{bad} \tag{4}$$

ntre componentele acestor tensori existînd relațiile

$$\gamma_{bd} - \gamma_{db} = r_{bd}, \quad r_{bd} + r_{bd} = 0 \tag{4'}$$

Atașăm spațiului forma pătratică invariantă

$$\varphi = \gamma_{bd}\, \mathrm{d}s^b\, \mathrm{d}s^d \tag{5}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 33-39, BUCUREȘTI, 1967

şi vom presupune că această formă este de rang 2, deci că poate fi redusă la forma canonică

$$\varphi = (\mathrm{d}s^1)^2 + \varepsilon\,(\mathrm{d}s^2)^2, \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{5'}$$

Grupul separabil maxim de transformări de congruenţe care păstrează această formă canonică este dat de ecuaţiile

$$\mathrm{d}\bar{s}^1 = \cos\theta\,\mathrm{d}s^1 - \sin\theta\,\mathrm{d}\bar{s}^2,\ \mathrm{d}\bar{s}^2 = \sin\theta\,\mathrm{d}s^1 + \cos\theta\,\mathrm{d}s^2,\ \mathrm{d}\bar{s}^\alpha = c^\alpha_\lambda \mathrm{d}s^\lambda \tag{6}$$

respectiv

$$\mathrm{d}\bar{s}^1 = \mathrm{ch}\,\theta\,\mathrm{d}s^1 + \mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{d}s^2,\ \mathrm{d}\bar{s}^2 = \mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{d}s^1 + \mathrm{ch}\,\theta\,ds^2,\ \mathrm{d}\bar{s}^\alpha = c^\alpha_\lambda\,\mathrm{d}s^\lambda \tag{6'}$$

după cum $\varepsilon = 1$ sau $\varepsilon = -1$[1]).

Ne propunem să determinăm spaţiile A_n cu grup de transformări de congruenţe separabil care au forma pătratică φ de rang 2. Vom trata cazul $\varepsilon = 1$, deoarece în celălalt caz se ajunge la acelaşi rezultat. Aşadar, urmează să determinăm componentele conexiunii spaţiilor A_n care admit grupul de transformare de congruenţe (6); pentru aceasta vom utiliza formulele (1) în care vom ţine seama că avem

$$c^1_2 = c^2_2 = \cos\theta,\ c^2_1 = -\,c^1_2 = \sin\theta,\ c^1_\alpha = c^2_\alpha = c^\alpha_1 = c^\alpha_2 = 0\ (\alpha = 3, \ldots, n).$$

De asemenea, vom ţine seama că nu trebuie să existe relaţii între $c^\alpha_\beta\ (\alpha,\ \beta = 3, \ldots, n)$.

Dînd pe rînd indicilor *a*, *b* şi *c* valorile 1, α, 1 ; 1, α, 2 ; 2, α, 1 ; 2, α, 2, obţinem :

$$(\bar{\gamma}^1_{\lambda 1}\cos\theta + \bar{\gamma}^1_{\lambda 2}\sin\theta)\,c^\lambda_\alpha - \gamma^1_{\alpha 1}\cos\theta + \gamma^2_{\alpha 1}\sin\theta = 0,$$

$$(-\,\gamma^1_{\lambda 1}\sin\theta + \bar{\gamma}^1_{\lambda 2}\cos\theta)\,c^\lambda_\alpha - \gamma^1_{\alpha 2}\cos\theta + \gamma^2_{\alpha 2}\sin\theta = 0,$$

$$(\bar{\gamma}^1_{\lambda 1}\cos\theta + \bar{\gamma}^2_{\lambda 2}\sin\theta)\,c^\lambda_\alpha - \gamma^1_{\alpha 1}\sin\theta - \gamma^2_{\alpha 1}\cos\theta = 0,$$

$$(-\,\gamma^2_{\lambda 1}\sin\theta + \gamma^2_{\lambda 2}\cos\theta)\,c^\lambda_\alpha - \gamma^1_{\alpha 2}\sin\theta - \gamma^2_{\alpha 2}\cos\theta = 0.$$

Spaţiul admiţînd grupul de transformări de congruenţe (6), se impune condiţia ca aceste relaţii să nu depindă de θ şi de c^α_β, de unde rezultă că $\gamma^1_{\alpha 1}, \gamma^1_{\alpha 2}, \gamma^2_{\alpha 1}, \gamma^2_{\alpha 2}\ (\alpha \geqslant 3)$ trebuie să fie nule în orice sistem de congruenţe. În acelaşi mod rezultă că şi componentele $\gamma^\alpha_{11}, \gamma^\alpha_{12}, \gamma^\alpha_{21}, \gamma^\alpha_{22}, \gamma^1_{\alpha\beta}, \gamma^2_{\alpha\beta}\ (\alpha, \beta \geqslant 3)$ au aceeaşi proprietate.

Considerînd coeficienţii c^a_b care depind de θ şi dînd indicelui *c* valorile 1 şi 2, vom obţine cîte patru expresii ale derivatelor funcţiei θ în raport cu s^1 şi s^2. Egalînd aceste expresii vom obţine şase relaţii din care va rezulta [2] că $\gamma^1_{11}, \gamma^1_{12}, \gamma^2_{21}, \gamma^2_{22}$ sînt nule în orice sistem de congruenţe şi de asemenea că $\gamma^1_{22} + \gamma^2_{12} = 0,\ \gamma^1_{21} + \gamma^2_{11} = 0$; notînd

$$\gamma^2_{11} = -\,\gamma^1_{21} = m,\ \gamma^2_{12} = -\,\gamma^1_{22} = n, \text{ vom avea}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial s^1} = \bar{m}\cos\theta + \bar{n}\sin\theta - m,\ \frac{\partial\theta}{\partial s^2} = -\,\bar{m}\sin\theta + \bar{n}\cos\theta - n. \tag{7}$$

---

[1] În formulele (6), (6′) şi în cele care urmează, indicii notaţi cu litere greceşti iau valori de la 3 pînă la *n*.

Dînd apoi indicelui *c* valori cuprinse între 3 şi *n*, obţinem

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta}{\partial s^{\alpha}} = -\,(\overline{\gamma}^{1}_{1\lambda}\operatorname{cotg}\theta + \overline{\gamma}^{1}_{2\lambda})\,c^{\lambda}_{\alpha} + \gamma^{1}_{1\alpha}\operatorname{cotg}\theta - \gamma^{2}_{1\alpha},\\
&\frac{\partial\theta}{\partial s^{\alpha}} = (\overline{\gamma}^{2}_{1\lambda} + \overline{\gamma}^{2}_{2\lambda}\operatorname{tg}\theta)\,c^{\lambda}_{\alpha} - \gamma^{1}_{1\alpha}\operatorname{tg}\theta - \gamma^{2}_{1\alpha},\\
(8)\qquad&\frac{\partial\theta}{\partial s^{\alpha}} = (\overline{\gamma}^{1}_{1\lambda}\operatorname{tg}\theta - \overline{\gamma}^{1}_{2\lambda})\,c^{\lambda}_{\alpha} + \gamma^{1}_{2\alpha} - \gamma^{2}_{2\alpha}\operatorname{tg}\theta,\\
&\frac{\partial\theta}{\partial s^{\alpha}} = (\overline{\gamma}^{2}_{1\lambda} - \overline{\gamma}^{2}_{2\lambda}\operatorname{cotg}\theta)\,c^{\lambda}_{\alpha} + \gamma^{1}_{2\alpha} + \gamma^{2}_{2\alpha}\operatorname{cotg}\theta
\end{aligned}
$$

şi egalînd aceste valori ale derivatelor lui θ în raport cu s^{α}, rezultă că avem $\gamma^{1}_{1\alpha} = \gamma^{2}_{2\alpha} = 0$, $\gamma^{1}_{2\alpha} + \gamma^{2}_{1\alpha} = 0$ în orice sistem ee congruenţe. În acet fel ecuaţiile (8) capătă forma

$$
(8') \qquad \frac{\partial\theta}{ds^{\alpha}} + \overline{\gamma}^{1}_{2\lambda}\,c^{\lambda}_{\alpha} - \gamma^{1}_{2\alpha} = 0.
$$

Ţinînd seama de condiţiile obţinute, putem enunţa :

PROPOZIŢIA 1. *Componentele conexiunii spaţiilor A_n care admit grupul de transformări (6), verifică relaţiile*

$$
\begin{aligned}
&\gamma^{1}_{11} = \gamma^{1}_{12} = \gamma^{2}_{21} = \gamma^{2}_{22} = 0,\ \gamma^{2}_{11} + \gamma^{1}_{21} = 0,\ \gamma^{2}_{12} + \gamma^{1}_{22} = 0,\\
(9)\qquad&\gamma^{1}_{\alpha 1} = \gamma^{1}_{1\alpha} = \gamma^{1}_{\alpha 2} = \gamma^{2}_{\alpha 2} = \gamma^{2}_{2\alpha} = \gamma^{2}_{\alpha 1} = \gamma^{1}_{\alpha\beta} = \gamma^{2}_{\alpha\beta} = 0,\\
&\gamma^{\alpha}_{11} = \gamma^{\alpha}_{12} = \gamma^{\alpha}_{21} = \gamma^{\alpha}_{1\beta} = \gamma^{\alpha}_{2\beta} = 0,\ \gamma^{1}_{2\alpha} + \gamma^{2}_{1\alpha} = 0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha,\ \beta = 3,\ \ldots,\ n)
\end{aligned}
$$

în orice sistem de congruenţe.

Dintre ecuaţiile (2) mai avem de considerat pe cele care se obţin cînd indicii *a* şi *b* iau valori cuprinse între 3 şi *n* ; acestea sînt :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial c^{\alpha}_{\beta}}{\partial s^{1}} = (\overline{\gamma}^{\alpha}_{\lambda 1}\cos\theta + \overline{\gamma}^{1}_{\lambda 2}\sin\theta)\,c^{\lambda}_{\beta} - \gamma^{\lambda}_{\beta 1}\,c^{\alpha}_{\lambda},\\
(10)\qquad&\\
&\frac{\partial c^{\alpha}_{\beta}}{\partial s^{2}} = (-\,\overline{\gamma}^{\alpha}_{\lambda 1}\sin\theta + \overline{\gamma}^{\alpha}_{\lambda 2}\cos\theta)\,c^{\lambda}_{\beta} - \gamma^{\lambda}_{\beta 2}\,c^{\alpha}_{\lambda}.
\end{aligned}
$$

$$
(10') \qquad \frac{\partial c^{\alpha}_{\beta}}{\partial s^{\gamma}} = \overline{\gamma}^{\alpha}_{\lambda\mu}\,c^{\lambda}_{\beta}\,c^{\mu}_{\gamma} - \gamma^{\lambda}_{\beta}\,c^{\alpha}_{\lambda}.
$$

Să considerăm acum şi ecuaţiile (3) care ne dau legea de transformare a componentelor tensorului de curbură. Dînd indiciilor *a* şi *b* respectiv valorile 1,1 ; 1,2 ; 2,1 ; 2,2, iar indicilor *c* şi *d* valori cuprinse între 3 şi *n*, avem

$$
\begin{aligned}
(\overline{\gamma}^{1}_{1\lambda\mu}\cos\theta + \overline{\gamma}^{1}_{2\lambda\mu}\sin\theta)\,c^{\lambda}_{\alpha}\,c^{\mu}_{\beta} - \gamma^{1}_{1\alpha\beta}\cos\theta + \gamma^{2}_{1\alpha\beta}\sin\theta &= 0,\\
(-\,\overline{\gamma}^{1}_{1\lambda\mu}\sin\theta + \overline{\gamma}^{1}_{2\lambda\mu}\cos\theta)\,c^{\lambda}_{\alpha}\,c^{\mu}_{\beta} - \gamma^{1}_{2\alpha\beta}\cos\theta + \gamma^{2}_{2\alpha\beta}\sin\theta &= 0,\\
(\overline{\gamma}^{2}_{1\lambda\mu}\cos\theta + \overline{\gamma}^{2}_{2\lambda\mu}\sin\theta)\,c^{\lambda}_{\alpha}\,c^{\mu}_{\beta} - \gamma^{1}_{1\alpha\beta}\sin\theta - \gamma^{2}_{1\alpha\beta}\cos\theta &= 0,\\
(-\,\overline{\gamma}^{2}_{1\lambda\mu}\sin\theta + \overline{\gamma}^{2}_{2\lambda\mu}\cos\theta)\,c^{\lambda}_{\alpha}\,c^{\mu}_{\beta} - \gamma^{1}_{2\alpha\beta}\sin\theta - \gamma^{2}_{2\alpha\beta}\cos\theta &= 0
\end{aligned}
$$

şi din aceste relaţii rezultă $\gamma^1_{1\alpha\beta} = \gamma^1_{2\alpha\beta} = \gamma^2_{1\alpha\beta} = \gamma^2_{2\alpha\beta} = 0$ în orice sistem de congruenţe.

Dacă indicii a, b, c, şi d iau valori cuprinse între 3 şi n, avem

$$\overline{\gamma}^{\alpha}_{\lambda\mu\nu}\, c^{\lambda}_{\beta}\, c^{\mu}_{\gamma}\, c^{\nu}_{\delta} - \gamma^{\lambda}_{\beta\gamma\delta}\, c^{\alpha}_{\lambda} = 0$$

şi rezultă că toate componentele tensorului de curbură cu indicii luînd valori între 3 şi n sînt nule. Ţinînd seama de aceste proprietăţi, rezultă că sistemele

$$\frac{\partial \theta}{\partial s^{\alpha}} - \gamma^1_{2\alpha} = 0, \quad \frac{\partial c^{\alpha}_{\beta}}{\partial s^{\gamma}} + \gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\, c^{\alpha}_{\lambda} = 0$$

sînt complet integrabile. Luînd funcţiile θ şi c^{α}_{β} astfel ca să verifice aceste sisteme, putem face, ţinînd seama de (8′) şi (10′), $\overline{\gamma}^1_{2\alpha} = 0$, $\overline{\gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ şi în acest sistem de congruenţe funcţiile considerate depind numai de s^1 şi s^2.

Observaţie. În cazul $n = 3$, sistemele (8′) şi (10′) se reduc la cîte o singură ecuaţie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial s^3} + \overline{\gamma}^1_{23}\, c^3_3 - \gamma^1_{23} = 0, \quad \frac{\partial c^3_3}{\partial s^3} - \overline{\gamma}^3_{33}\, (c^3_3)^2 + \gamma^3_{33}\, c^3_3 = 0$$

şi putem anula componentele γ^1_{23} şi γ^3_{33} luînd funcţiile θ şi c^3_3 ca soluţii ale ecuaţiilor

$$\frac{\partial \theta}{\partial s^3} - \gamma^1_{23} = 0, \quad \frac{\partial c^3_3}{\partial s^3} + \gamma^3_{33}\, c^3_3 = 0.$$

În sistemul de congruenţe astfel ales, coeficienţii w^a_{bc} ai covarianţilor biliniari ai formelor Pfaff ds^a au componentele nenule $w^1_{12} = -\gamma^1_{21} = m$, $w^2_{12} = \gamma^2_{12} = n$, $w^{\alpha}_{\beta 1} = \gamma^{\alpha}_{\beta 1}$, $w^{\alpha}_{\beta 2} = \gamma^{\alpha}_{\beta 2}$.

Aceşti coeficienţi verifică identităţile lui Jacobi

$$\frac{\partial w^a_{bc}}{\partial s^d} + \frac{\partial w^a_{cd}}{\partial s^b} + \frac{\partial w^a_{db}}{\partial s^c} + w^a_{bf}\, w^f_{cd} + w^a_{cf}\, w^f_{db} + w^a_{df}\, w^f_{bc} = 0$$

care pentru $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = 1$, $d = 2$ se vor scrie

$$\frac{\partial \gamma^{\alpha}_{\beta 1}}{\partial s^2} - \frac{\partial \gamma^{\alpha}_{\beta 2}}{\partial s^1} + \gamma^{\alpha}_{p1}\, \gamma^{p}_{\beta 2} - \gamma^{\alpha}_{p2}\, \gamma^{p}_{\beta 1} + \gamma^{\alpha}_{\beta p}\, w^{p}_{12} = 0$$

deci avem $\overline{\gamma}^{\alpha}_{\beta 12} = 0$. Prin urmare sistemul

$$\frac{\partial c^{\alpha}_{\beta}}{\partial s^1} + \gamma^{\lambda}_{\beta 1}\, c^{\alpha}_{\lambda} = 0, \quad \frac{\partial c^{\alpha}_{\beta}}{\partial s^2} + \gamma^{\lambda}_{\beta 2}\, c^{\alpha}_{\lambda} = 0$$

este complet integrabil ; luînd funcţiile c^{α}_{β} astfel încît să verifice acest sistem, din ecuaţiile (10) vom obţine $\overline{\gamma}^{\alpha}_{\beta 1} = \overline{\gamma}^{\alpha}_{\beta 2} = 0$ şi în noul sistem de congruenţe c^{α}_{β} vor fi constanţi. Din condiţiile de integrabilitate

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^1 \partial s^{\alpha}} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^{\alpha} \partial s^1} = w^a_{12}\, \frac{\partial \theta}{\partial s^a}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2 \partial s^{\alpha}} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^{\alpha} \partial s^2} = w^a_{2\alpha}\, \frac{\partial \theta}{\partial s^a}$$

care se scriu $\frac{\partial^2\theta}{\partial s^\alpha \partial s^1} = 0$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial s^\alpha \partial s^2} = 0$, avem

$$\left(\frac{\partial \overline{m}}{\partial \overline{s}^\lambda}\cos\theta + \frac{\partial \overline{n}}{\partial \overline{s}^\lambda}\sin\theta\right)c^\lambda_\alpha - \frac{\partial m}{\partial s^\alpha} = 0, \left(-\frac{\partial \overline{m}}{\partial \overline{s}^\lambda}\sin\theta + \frac{\partial \overline{n}}{\partial \overline{s}^\lambda}\cos\theta\right)c^\lambda_\alpha - \frac{\partial n}{\partial s^\alpha} =$$

şi din aceste relaţii rezultă că m şi n nu depind de s^α.

Condiţia de integrabilitate

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial s^1 \partial s^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial s^2 \partial s^1} = w^a_{12}\frac{\partial\theta}{\partial s^a}$$

nu duce la concluzia că expresia

$$A = \frac{\partial n}{\partial s^1} - \frac{\partial m}{\partial s^2} - m^2 - n^2 \tag{11}$$

este un invariant absolut al spaţiilor considerate. Să observăm că pentru orice invariant I al acestor spaţii ($I = \overline{I}$) vom avea

$$\frac{\partial I}{\partial s^1} = \frac{\partial \overline{I}}{\partial \overline{s}^1}\cos\theta + \frac{\partial \overline{I}}{\partial \overline{s}^2}\sin\theta, \quad \frac{\partial I}{\partial s^2} = -\frac{\partial \overline{I}}{\partial \overline{s}^1}\sin\theta + \frac{\partial \overline{I}}{\partial \overline{s}^2}\cos\theta, \quad \frac{\partial I}{\partial s^\alpha} = \frac{\partial \overline{I}}{\partial \overline{s}^\lambda}c^\lambda_\alpha$$

şi din aceste relaţii rezultă că toţi invarianţii sînt constanţi; în particular şi A este constant.

Pe baza rezultatelor obţinute putem enunţa:

PROPOZIŢIA 2. *Dacă un spaţiu A_n admite grupul de transformări* (6), *există un sistem de congruenţe în care toate componentele conexiunii sînt nule în afară de $\gamma^1_{21}, \gamma^1_{22}, \gamma^2_{11}, \gamma^2_{12}$, avînd $\gamma^1_{21} = -\gamma^2_{11}$, $\gamma^2_{12}, = -\gamma^1_{22}$ şi componentele nenule nu depind de s^α. În acest sistem de congruenţe, c^α_β ($\alpha, \beta > 3, \ldots, n$) sînt constanţi, iar θ este o funcţie numai de s^1 şi s^2, de asemenea toţi invarianţii acestor spaţii sînt constanţi.*

Calculînd componentele tensorului de curbură care au expresiile

$$\gamma^a_{bcd} = \frac{\partial \gamma^a_{bc}}{\partial s^d} - \frac{\partial \gamma^a_{bd}}{\partial s^c} + \gamma^a_{pc}\gamma^p_{bd} - \gamma^a_{pd}\gamma^p_{bc} + \gamma^a_{bp}w^p_{cd}$$

găsim că singurele componente nenule ale acestui tensor sînt

$$\gamma^1_{212} = -\gamma^1_{221} = \gamma^2_{121} = -\gamma^2_{112} = A \tag{12}$$

şi de aici deducem că tensorul contactat strîmb simetric r_{cd} are toate componentele nule, iar tensorul contactat γ_{bd} are doar două componente nenule şi anume:

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = A. \tag{12'}$$

Verificăm în acest mod că pentru spaţiile considerate tensorul contactat γ_{bd} se reduce la forma canonică propusă.

Calculînd componentele tensorului derivat al tensorului de curbură, găsim că toate aceste componente sînt nule, deci spaţiul este simetric în sensul lui Cartan.

Observăm că deoarece componentele nenule ale spaţiului considerat nu depind decît de s^1 şi s^2, ele determină un spaţiu A_2 cu conexiune afină ; acestui spaţiu i se poate ataşa metrica

$$ds^2 = A\,(ds^1)^2 + A\,(ds^2)^2 \tag{13}$$

Şi deoarece componentele tensorului r_{cd} sînt nule, iar componentele tensorului derivat al lui γ_{bd} sînt de asemenea nule, rezultă că acest spaţiu A_2 este un spaţiu al lui Riemann. Pe de altă parte, cum $\gamma^1_{212} = A$, rezultă, conform unui rezultat al acad. G. Vrănceanu [1], că avem un spaţiu V_2 cu curbură constantă. Celelalte componente ale conexiunii fiind nule, deducem că spaţiile A_n considerate sînt produsul direct dintre un spaţiu V_2 cu curbură constantă şi un spaţiu afin euclidian A_{n-2}. Putem enunţa

TEOREMĂ. *Spaţiile A_n care admit grupul de transformări de congruenţe (6) sînt spaţii simetrice în sensul lui Cartan care au singurele componente nenule ale conexiunii $\gamma^1_{21} = -\gamma^2_{11}$, $\gamma^2_{12} = -\gamma^1_{22}$. Aceste spaţii sînt produsul direct dintre un spaţiu V_2 cu curbură constantă, cu un spaţiu afin euclidian A_{n-2}.*

Convarianţii biliniari ai formelor ds^a fiind

$$\Delta s^1 = m\,[ds^1\,ds^2],\quad \Delta s^2 = n\,[ds^1 ds^2],\quad \Delta s^\alpha = 0$$

putem lua

$$ds^1 = e^{-u}dx^1,\ ds^2 = e^{-v}\,dx^2,\ ds^3 = dx^3$$

şi obţinem expresiile componentelor nenule ale conexiunii

$$\gamma^1_{21} = -\gamma^2_{11} = e^v\frac{\partial u}{\partial x^2},\ \gamma^2_{12} = -\gamma^1_{22} = e^u\frac{\partial v}{\partial x^1}. \tag{14}$$

Ţinînd seama că aceste componente nu depind de x^α cît şi de relaţia (11), rezultă că funcţiile u şi v verifică ecuaţiile cu derivate parţiale :

$$\begin{gathered} e^{2u}\left[\frac{\partial u}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial v}{\partial x^1} + \frac{\partial^2 v}{(\partial x^1)^2} - \left(\frac{\partial v}{\partial x^1}\right)^2\right] + e^{2v}\left[\frac{\partial v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{(\partial x^2)^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x^2}\right)^2\right] = A \\ \frac{\partial v}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha\partial x^2} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial v}{\partial x^1} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^\alpha\partial x^1} = 0. \end{gathered} \tag{14'}$$

Avînd valorile momentelor şi parametrilor congruenţelor

$$\lambda^1_1 = e^{-u},\ \lambda^2_2 = e^{-v},\ \lambda^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta,\ \text{restul nuli,}$$

$$\mu^1_1 = e^u,\ \ \mu^2_2 = e^v,\ \ \mu^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta,\quad ,,\quad ,,\ ,$$

vom putea determina componentele Γ^i_{jk} ale conexiunii în sistemul de coordonate (x) cu ajutorul formulelor

$$\Gamma^i_{jk} = \left(-\frac{\partial\lambda^a}{\partial x^k} + \gamma^a_{bc}\,\lambda^b_j\lambda^c_k\right)\mu^i_a.$$

Obținem

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\partial u}{\partial x^1},\ \Gamma^1_{12} = \frac{\partial u}{\partial x^2},\ \Gamma^1_{22} = -\,\mathrm{e}^{2u-2v}\frac{\partial v}{\partial x^2},$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{\partial v}{\partial x^2},\ \Gamma^2_{21} = \frac{\partial v}{\partial x^1},\ \Gamma^2_{11} = -\,e^{2v-2u}\frac{\partial u}{\partial x^2}, \tag{15}$$

celelalte componente fiind nule.

Observăm că putem lua pe u și v astfel ca să nu depindă de x^α și în acest caz ultimele ecuații (14′) sînt verificate.

Dacă mai presupunem și $u = v$, prima ecuație (14′) devine

$$\mathrm{e}^{2u}\, \nabla^2 u = A. \tag{16}$$

unde ∇^2 reprezintă operatorul lui Laplace în două variabile. O soluție a ecuației (16) este

$$u = \ln\left[1 + \frac{A}{4}(x^1)^2 + \frac{A}{4}(x^2)^2\right]$$

și în acest caz componentele nenule ale conexiunii au expresiile

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{Ax^1}{M},\ \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}\frac{Ax^2}{M},\ \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{Ax^1}{M},$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2}\frac{Ax^2}{M},\ \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}\frac{Ax^1}{M},\ \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}\frac{Ax^2}{M}, \tag{17}$$

unde am pus

$$M = 1 + \frac{A}{4}(x^1)^2 + \frac{A}{4}(x^2)^2. \tag{17'}$$

Grupul de mișcări al spațiului A_2, care are componentele conexiunii date de formulele (17), (17′), este grupul proiectiv în două variabile care păstrează conica

$$A\,(x^1)^2 + A\,(x^2)^2 + 4 = 0.$$

Acest grup are 3 parametrii. Grupul de mișcări al spațiilor considerate este prin urmare un grup tranzitiv cu $n^2 - 3\,n + 5$.

Observație. În cazul spațiilor A_n cu grup de transformări (6′) se ajunge la același rezultat numai că metrica spațiului V_2 cu curbură constantă este

$$\mathrm{d}s^2 = A\,(\mathrm{d}s^1)^2 - A\,(\mathrm{d}s^2)^2.$$

Primită la redacție la 7 mai 1966

Institutul Politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”,
București

BIBLIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Lecții de geometrie diferențială*. Editura didactică și pedagogică, București, vol. II, 1963.
2. V. DUMITRAȘ, *Determinarea spațiilor A_3 care admit o rotație în fiecare punct*. St. și cerc. *mat.*, IV, *1–2* (1953).

PROBLEMA NORMĂRII DATELOR PENTRU APLICAREA METODEI LUI JACOBI RESPECTIV GIVENS DE REZOLVARE A PROBLEMEI VALORILOR ȘI VECTORILOR PROPRII PENTRU METRICI SIMETRICE

DE

LIVIU TODOR

Se determină două constante R și b, date de (21) și (22), cu ajutorul cărora se pregătește o matrice simetrică reală A pentru aplicarea metodelor lui Jacobi și Givens. Elementele matricii pregătite B sînt date de (23) și (24), iar legăturile dintre valorile proprii λ ale lui A și μ ale lui B sînt date de (25). Alegerile lui R și b sînt optimale, asigurînd pe lîngă nedepășiea unității, precizia maximă. Se propune criteriul (26) pentru alegerea între metoda lui Jacobi și Givens.

1. Amîndouă metodele citate revin la transformarea treptată a matricii simetrice $A = (a_{ij})$, reale, prin transformări ortogonale T_k, la o formă mai simplă — diagonală respectiv tridiagonală. Normarea are ca scop, ca atît datele problemei (elementele a_{ij}) cît și rezultatele intermediare și finale să nu depășească în modul unitatea, astfel încît calculul efectuat la o mașină electronică cu virgulă fixă să nu conducă la complicații. O posibilitate ar fi ca la fiecare etapă să se înmulțească toate elementele matricii cu un factor de forma 2^s (s întreg pozitiv sau negativ) astfel ca prima cifră după virgulă a celui mai mare număr în modul, să fie 1 (în baza 2). Un astfel de procedeu atrage după sine complicații de programare, pierdere de timp mașină și mai ales o reducere a preciziei. O altă posibilitate ar fi ca să se împartă de la început toate elementele matricii A cu un număr astfel încît tot în timpul calculelor, nici unul din elementele matricelor transformate să nu depășească unitatea. Pentru ca precizia calculelor să fie maximă, numărul respectiv trebuie să fie cît mai mică cu putință, astfel încît rapoartele obținute să aibă un număr cît mai mare de cifre semnificative. Un raționament arată că se poate lua acel număr egal cu :

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{S_2}. \tag{1}$$

ST. CERC. MAT., TOM 19, NR. 1, P. 41–46, BUCUREȘTI, 1967

Acest număr nu este însă cel mai mare dintre numerele potrivite pentru operaţia indicată. Mai jos propunem o altă metodă de normare care este mai adecvată. Rezultatele intermediare permit de asemenea determinarea unui număr, pe baza căruia să se poată face o alegere raţională între metoda lui Gauss şi metoda lui Givens.

2. Norma $\|A\|$ precum şi urma :

$$\mathrm{Sp}\, A = S_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = S_1 \tag{2}$$

sînt invariante pentru orice transformări ale matricii simetrice reale A prin transformări ortogonale. Vom determina atunci cea mai mare valoare în modul pe care o poate lua cel mai mare element de pe diagonala vreunei matrici asemenea cu A printr-o transformare ortogonală, ţinînd seama că tot timpul S_1 şi S_2 nu se schimbă. Simplificată la maximum, problema se poate enunţa în felul următor :

Să se determine o margine superioară pentru $|x_i|$ cu x_i reali şi satisfăcînd la condiţiile :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S_1 \tag{2'}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant S_2. \tag{1'}$$

Observăm că, deocamdată cel puţin, putem presupune $S_1 \geqslant 0$ căci altfel am putea înmulţi matricea A cu -1, ceea ce nu ar schimba modulul valorilor proprii, ci numai semnul lor. Să notăm cu N mulţimea vectorilor $x = (x_1 \ldots, x_n)$ ce satisfac la condiţiile (1′) şi (2′) cu x_i reali. Din cauza simetriei condiţiilor (2′) şi (1′) putem presupune că x_1 este cel care realizează maximumul modulului lui x_i :

$$\operatorname*{Sup}_{x \in M} \max_{i} |x_i| = \operatorname*{Sup}_{x \in M} |x_1| = r. \tag{3}$$

Pe de altă parte, maximumul lui x_1 va fi atins pentru un punct $x \in N_1$, unde N_1 este frontiera lui N. Deci condiţia (1′) trebuie înlocuită prin :

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = S_2. \tag{1''}$$

Din (2′) obţinem :

$$x_1 = S_1 - S_1', \tag{4}$$

unde :

$$S_1' = x_2 + x_3 + \ldots x_n. \tag{5}$$

Condiţia (1″) devine prin eliminarea lui x_1 :

$$x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = S_2 - (S_1 - S_1')^2. \tag{6}$$

Acum problema iniţială a devenit o problemă de extremum pentru x_1 dat de (4) cu condiţia (6). Aplicînd metoda multiplicatorilor, se ajunge la sistemul de ecuaţii :

$$-1 - \lambda(S_1' - S_1 + x_k) = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{7}$$

Adunînd ecuațiile (7) după k, se obține valoarea lui λ:

$$\lambda = \frac{n-1}{(n-1)S_1 - nS_1'}$$

și valorile lui x_k vor rezulta din (7):

$$x_k = \frac{S_1'}{n-1}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{8}$$

Înlocuind x_k în condiția (6) se obține ecuația:

$$\frac{n}{n-1}(S_1')^2 - 2S_1S_1' + S_1^2 - S_2 = 0$$

care va determina pe S_1':

$$S_1' = \frac{\sqrt{n-1}}{n}\left[\sqrt{n-1}\, S_1 \pm \sqrt{nS_2 - S_1^2}\right]. \tag{9}$$

Apoi din (4) se obține:

$$x_1 = \frac{1}{n}\left[S_1 \pm \sqrt{n-1}\sqrt{nS_2 - S_1^2}\right]. \tag{10}$$

Evident, pentru valoarea maximă a lui $|x_1|$ va conveni semnul + înaintea radicalului:

$$r = \sup_{x \in N} \max_i |x_i| = \sup_{x \in N} |x_1| = \frac{1}{n}\left[S_1 + \sqrt{n-1}\sqrt{nS_2 - S_1^2}\right]. \tag{11}$$

Pentru x_k se va obține:

$$x_k = \frac{1}{n}\left[S_1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sqrt{nS_2 - S_1^2}\right], \qquad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{12}$$

Dacă în cele precedente lăsăm la o parte condiția ca $S_1 \geqslant 0$, (11) se va transforma în :

$$r = \frac{1}{n}\left[|S_1| + \sqrt{n-1}\sqrt{nS_2 - S_1^2}\right]. \tag{13}$$

3. Există două transformări simple care pot fi folosite pentru pregătirea matricii A în vederea aplicării ulterioare a uneia din metodele citate. Prima dintre ele ne conduce de la matricea reală simetrică A la matricea $\widetilde{A}$, prin relațiile :

$$\widetilde{a}_{ij} = a_{ij}, \qquad i \neq j, \tag{14}$$

$$\widetilde{a}_{ii} = a_{ii} - b. \tag{15}$$

Din (14) și (15) rezultă următoarele relații dintre valorile proprii ale celor două matrice :

$$\widetilde{\lambda} = \lambda - b \tag{16}$$

în timp ce vectorii proprii rămîn neschimbați. Mărimile S_1 și S_2 se vor transforma în $\tilde{S}_1$ și $\tilde{S}_2$:

$$\tilde{S}_1 = S_1 - nb \tag{17}$$

$$\tilde{S}_2 = S_2 - 2bS_1 + nb^2\,; \tag{18}$$

iar $nS_2 - S_1^2$ se dovedește a fi invariantă :

$$n\tilde{S}_2 - \tilde{S}_1^2 = nS_2 - S_1^2. \tag{19}$$

În sfîrșit, mărimea r va deveni $\tilde{r}$:

$$\tilde{r} = \frac{1}{n}\left[|\tilde{S}_1| + \sqrt{n-1}\,\sqrt{nS_2 - S_1^2}\right]. \tag{20}$$

A doua transformare este împărțirea tuturor elementelor matricii $\tilde{A}$ printr-un număr, astfel ca matricea transformată $\tilde{\tilde{A}}$ să aibă proprietatea ca toate matricile asemenea cu ea prin transformări ortogonale să aibă toate elementele subunitare. Din cele precedente reiese că acel număr poate fi orice număr mai mare decît r dat de (20). Pe de altă parte, avem tot interesul să alegem acel număr cît mai mic cu putință pentru ca să avem în A cît mai multe cifre semnificative diferite de zero. Atunci vom putea lua :

$$R = \min_{b} \tilde{r} = \frac{\sqrt{n-1}}{n}\sqrt{nS_2 - S_1^2}, \tag{21}$$

unde am profitat de faptul că r depindea de parametrul încă nedeterminat b. Valoarea lui b se determină din $S_1 = 0$, care ne conduce la următoarea valoare a lui b :

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{22}$$

Acum se pot scrie elementele matricei pregătită pentru aplicarea metodei lui Jacobi sau Givens, pe care să o notăm cu B :

$$b_{ii} = \frac{a_{ii} - b}{R}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{23}$$

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{R}, \qquad i, j = 1, \ldots, n\,;\, i \neq j, \tag{24}$$

unde R este dat de (21), iar b de (22). Legătura dintre valorile proprii μ ale matricei B cu cele ale lui A este simplă :

$$\lambda = b + R\mu. \tag{25}$$

4. Cu ajutorul formulelor (21) ... (25) ne asigurăm de faptul că valorile proprii ale matricii B să nu depășească unitatea în modul. Aceasta revine la a spune că matricea B se poate reduce la forma diagonală, prin transformări ortogonale, și elementele de pe diagonala matricii respective diagonale sînt subunitare în modul. Să arătăm că toate transformatele

matricii respective diagonale prin matrici ortogonale, au elementele subunitare în modul. Fie C o transformată oarecare a matricii diagonale D printr-o transformare ortogonală :

$$C = TDT'.$$

Elementele c_{ij} ale lui D vor fi :

$$c_{ij} = \sum_{k,s=1}^{n} t_{ik} d_k \partial_{ks} t_{js} = \sum_{k,s=1}^{n} t_{ik} d_k t_{jk}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Apoi :

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 = \sum_{j,k,s=1}^{n} t_{ik} d_k t_{jk} t_{is} d_s t_{js} = \sum_{k,s=1}^{n} t_{ik} d_k t_{is} d_s \delta_{ks} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} t_{ik}^2 d_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_{ik}^2 = 1, \qquad i = 1, \ldots, n$$

care arată că elementele lui C sînt subunitare.

5. Rezultatele precedente permit formarea unui criteriu natural de alegere între metoda lui Jacobi și metoda lui Givens. În literatură se recomandă aplicarea metodei Jacobi în cazul cînd matricea A este ,,aproape'' de matricea diagonală. Dacă aceasta nu se întîmplă, se recomandă metoda lui Givens. Nu este însă prea clar ce trebuie înțeles prin ,,aproape'' de o matrice diagonală. De obicei prin aceasta se înțelege faptul că elementele de pe diagonala matricii sînt predominante ca mărime. S-ar putea forma un criteriu plecînd de la raportul :

$$\rho = \frac{S_2'}{S_2''}$$

dintre suma pătratelor elementelor matricii A situtate pe diagonală și suma pătratelor nesituate pe diagonală. Acest număr are dezavantajul de a nu fi invariant la transformarea (14), (15). Un criteriu mult mai natural pare a fi :

$$q = \frac{nS_2' - S_1^2}{nS_2''}, \tag{26}$$

unde :

$$S_2' = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 \tag{27}$$

$$S_2'' = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}^2 = S_2 - S_2' \tag{28}$$

iar S_1 este cel dat de (2). Numărul q are proprietatea de a fi invariant la transformarea (14), (15) ca și la înmulțirea sau la împărțirea elementelor matricei A cu același număr diferit de zero. Pentru q mare (probabil supraunitar) este de recomandat întrebuințarea metodei Givens,în timp pentru q mic trebuie recomandată întrebuințarea metodei Jacobi.

6. Întorcîndu-ne la formulele (11) şi (12) care dau valorile extreme pentru max x_i şi min x_i, şi impunînd condiţia ca x_k dat de (12) să aibă acelaşi semn cu x_1, se obţine o condiţie suficientă pentru ca o matrice simetrică A să fie definită. Această condiţie este :

$$S_1^2 > S_2 \tag{29}$$

a cărui structură este foarte simplă. Dacă $S_1 > 0$, atunci matricea este pozitiv definită, iar dacă S_1 este negativ, atunci matricea A este negativ definită.

Primită la redacţie la 31 mai 1966

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Д. К. ФАДЕЕВ и В. Н. ФАДЕЕВ, *Вычислительные методы линейной алгебры*. Москва, 1963.
2. И. С. БАЕРЕЗИН и И. П. ЖИДКОВ, *Методы вычислений*. Москва, 1959.

ASUPRA COMPATIBILITĂȚII PROBLEMEI CENTRALE A ORDONANȚĂRII[1]

DE

VASILE PETEANU

(Cluj)

În lucrare se dă o condiție necesară și suficientă pentru compatibilitatea sistemului de restricții (1), (2) și un algoritm pentru determinarea uneia din soluții.

1. INTRODUCERE

În problema centrală a ordonanțării se studiază mulțimea vectorilor T, ale căror componente t_i, $i \in I = \{1,2,...,n\}$, satisfac sistemul de restricții :

$$t_j - t_i \geqslant a_{ij},\ (i, j) \in U \subset I \times I,\ i \neq j \tag{1}$$

$$t_1 = 0 \tag{2}$$

a_{ij} fiind numere cunoscute. Este ușor de văzut că studiul compatibilității sistemului de restricții (1), (2) se reduce la studiul compatibilității sistemului (1).

Amintim că o tratare amănunțită a problemelor de ordonanțare se găsește în teza de doctorat a lui B. Roy [2]. B. Roy atașează sistemului de restricții (1) un graf orientat în care fiecare vîrf al grafului este pus în corespondență biunivocă cu un indice $i \in I$ și fiecare din restricțiile (1) este pusă în corespondență biunivocă cu un arc al grafului mergînd de la vîrful i la vîrful j și afectat de ,,lungimea'' a_{ij}. Se demonstrează că sistemul de restricții (1) este compatibil, dacă și numai dacă graful atașat lui nu conține circuite de lungime strict pozitivă.

În lucrarea [1], autorii, utilizînd o structură algebrică adecvată, dau un algoritm pentru determinarea unei soluții a sistemului de restric-

---

[1] Lucrare prezentată la ședința de comunicări a Institutului de calcul—Cluj, din 25.III.1966.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 47–52, BUCUREȘTI, 1967

ţii (1), în ipoteza că graful ataşat nu conţine circuite de lungime strict pozitivă.

În această lucrare vom da o condiţie necesară şi suficientă pentru ca sistemul de restricţii (1) să fie compatibil, utilizînd structura algebrică introdusă în [1], fără nici o referire la graful ataşat sistemului de restricţii. Pentru aceasta va fi necesar să prezentăm în prealabil structura algebrică amintită.

2. STRUCTURA ALGEBRICĂ UTILIZATĂ

Fie R mulţimea numerelor reale, iar $E = R \cup \{-\infty\}$. În mulţimea E vom defini două operaţii simbolice, adunarea, $\oplus$, şi înmulţirea, $\otimes$, în modul următor :

$$\left.\begin{array}{l} a \oplus b = \max\,(a,\ b) \\ a \otimes b = a + b \end{array}\right. \qquad a,\ b \in E.$$

Aceste operaţii sînt asociative şi comutative, iar înmulţirea simbolică este distributivă în raport cu adunarea simbolică. Elementul neutru pentru adunare este $-\infty$, iar pentru înmulţire este 0.

Oricare ar fi a şi b din E, avem

$$a \geqslant b$$

dacă şi numai dacă

$$a \oplus b = a.$$

Două inegalităţi de acelaşi sens se pot aduna simbolic şi înmulţi simbolic cu termen.

Notăm

$$\mathop{\overline{|+|}}\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$$

$$\mathop{\overline{|\times|}}\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n$$

Fie A, B, C matrici ale căror elemente a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} aparţin mulţimii E. Suma

$$C = A \oplus B$$

a două matrici A şi B, ambele de dimensiuni $m \times n$, va fi o matrice C de aceleaşi dimensiuni ale cărei elemente sînt

$$c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}\,.$$

Adunarea matricială simbolică este asociativă şi comutativă.

Prin analogie cu înmulţirea matricială obişnuită se defineşte înmulţirea matricială simbolică astfel

$$A \otimes B = C,$$

unde

$$c_{ij} = \mathop{\overline{|+|}}\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes b_{kj}$$

cele trei matrici avînd respectiv dimensiunile $m \times n$, $n \times p$ şi $m \times p$.

Înmulţirea matricială simbolică este asociativă şi distributivă în raport cu adunarea matricială simbolică.

Există matricea pătratică unitate E pentru care

$$A \otimes E = E \otimes A = A,$$

oricare ar fi matricea pătratică A de aceeaşi dimensiune cu E. Elementele lui E sînt definite de

$$e_{ij} = \begin{cases} -\infty \text{ pentru } i \neq j \\ 0 \text{ pentru } i = j. \end{cases}$$

Mulţimea matricilor de aceleaşi dimensiuni este parţial ordonată Avem $A \geqslant B$ dacă şi numai dacă $A \oplus B = A$. Remarcăm că $A \geqslant E$ înseamnează pur şi simplu că elementele diagonalei principale ale matricii A sînt nenegative.

Două inegalităţi matriciale de acelaşi sens se pot aduna şi înmulţi simbolic termen cu termen, astfel din

$$A \geqslant B$$

$$C \geqslant D$$

rezultă

$$A \oplus C \geqslant B \oplus D$$

$$A \otimes C \geqslant B \otimes D.$$

Vom justifica ultima inegalitate. Elementul din linia i şi coloana j a matricii $A \otimes C$ este dat de $\max\limits_k (a_{ik} + c_{kj})$, iar al matricii $B \otimes D$ este $\max\limits_k (b_{ik} + d_{kj})$. Cum $a_{ik} \geqslant b_{ik}$ şi $c_{kj} \geqslant d_{ki}$ rezultă ultima inegalitate matricială. În particular, din $A \geqslant B$ rezultă $A \otimes C \geqslant B \otimes C$.

Pentru o matrice pătratică se poate defini ridicarea la putere astfel

$$A^{(0)} = E,\ A^{(k)} = A^{(k-1)} \otimes A = A \otimes A^{(k-1)}.$$

În decursul lucrării vom nota cu $a_{ij}^{(k)}$ elementul din linia i şi coloana j al matricii $A^{(k)}$.

3. REPREZENTAREA MATRICIALĂ A SISTEMULUI DE RESTRICŢII

Structura algebrică de mai sus permite să reprezentăm matricial sistemul de restricţii (1). Pentru aceasta vom completa sistemul de restricţii (1) cu restricţiile corespunzătoare acelor perechi de indici care nu aparţin lui U, valorile a_{ij} corespunzătoare fiind

$$(3) \qquad a_{ij} = \begin{cases} -\infty \text{ dacă } i \neq j, \\ 0 \quad \text{dacă } i = j. \end{cases}$$

Se obţine astfel sistemul de restricţii echivalent cu (1),

$$t_j - t_i \geqslant a_{ij},\ (i, j) \in I \times I$$

sau utilizînd operațiile simbolice introduse

$$t_j \geqslant t_i \otimes a_{ij}, \quad (i, j) \in I \times I. \tag{4}$$

Adunînd simbolic termen cu termen inegalitățile din (4) pentru un anumit j, obținem sistemul de restricții

$$t_j \geqslant \mathop{\boxed{+}}\limits_{i=1}^{n} t_i \otimes a_{ij}, \quad j \in I \tag{5}$$

care este echivalent cu (4) și care se poate scrie matricial

$$T \geqslant T \otimes A, \tag{6}$$

unde $A = \{a_{ij}\}$.

În virtutea lui (3), $A \geqslant E$ și deci $T \otimes A \geqslant T$, fapt care demonstrează echivalența inegalității (6) cu

$$T = T \otimes A. \tag{7}$$

În lucrarea [1] se demonstrează echivalența ecuației (7) cu ecuația

$$T = T \otimes A^{(p)}, \tag{8}$$

oricare ar fi întregul $p \geqslant 1$. Se arată de asemenea că dacă graful atașat sistemului de restricții (1) nu conține nici un circuit de lungime strict pozitivă, deci dacă sistemul de restricții este compatibil, atunci

$$A^{(n)} = A^{(n+1)}. \tag{9}$$

4. COMPATIBILITATE

Privitor la compatibilitatea sistemului de restricții (1) se demonstrează următoarea

TEOREMĂ. *Condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația* (7) *să fie compatibilă, este ca*

$$A^{(n-1)} = A^{(n)}.$$

Demonstrație. Condiția este necesară. Să presupunem că ecuația (7) admite o soluție $T_0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0)$. Din echivalența ecuațiilor (7) și (8) rezultă

$$t_j^0 = \mathop{\boxed{+}}\limits_{i=1}^{n} t_i^0 \otimes a_{ij}^{(p)}, \quad j \in I, \; p = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Întrucît $A \geqslant E$ implică $A^{(p)} \geqslant E$, rezultă că oricare ar fi $i \in I$ și $p = 1, 2, \ldots$ avem $a_{ii}^{(p)} \geqslant 0$. Pe de altă parte, din (10) făcînd $i = j$ obținem $a_{ii}^{(p)} \leqslant 0$, deci se poate avea numai

$$a_{ii}^{(p)} = 0, \quad i \in I, \; p = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Din egalitatea

$$A^{(p)} = A^{(p_1)} \otimes A^{(p_2)},$$

unde $p_1 + p_2 = p$, se deduce imediat că

$$a_{ij}^{(p)} = \mathop{\boxplus}\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p_1)} \otimes a_{kj}^{(p_2)}.$$

Din egalitatea precedentă rezultă, pe de o parte, că pentru orice indice k avem

$$a_{ij}^{(p)} \geqslant a_{ik}^{(p_1)} \otimes a_{kj}^{(p_2)} \tag{12}$$

iar pe de altă parte, că există cel puțin un indice S pentru care

$$a_{ij}^{(p)} = a_{is}^{(p_1)} \otimes a_{sj}^{(p_2)}. \tag{13}$$

Aplicînd succesiv inegalitatea (12), obținem inegalitatea

$$a_{ij}^{(p)} \geqslant a_{ik_1} \otimes a_{k_1 k_2} \otimes \ldots \otimes a_{k_{p-1} j} \tag{14}$$

oricare ar fi indicii $k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}$ aparținînd lui I. În virtutea lui (3) există însă indicii $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ aparținînd lui I astfel încît

$$a_{ij}^{(n)} = a_{is_1} \otimes a_{s_1 s_2} \otimes \ldots \otimes a_{s_{n-1} j}. \tag{15}$$

În membrul drept al egalității (15) figurează $n + 1$ indici aparținînd lui I. Cel puțin doi dintre aceștia coincid. Fie s_q și s_r doi dintre indicii care coincid ($q \leqslant r - 1$). Atunci

$$a_{ij}^{(n)} = \alpha_{is_q} \otimes \beta_{s_q s_r} \otimes \gamma_{s_r j}, \tag{16}$$

unde

$$\alpha_{is_q} = a_{is_1} \otimes \ldots \otimes a_{s_{q-1} s_q}$$

$$\beta_{s_q s_r} = a_{s_q s_{q+1}} \otimes \ldots \otimes a_{s_{r-1} s_r}$$

$$\gamma_{s_r j} = a_{s_r s_{r+1}} \otimes \ldots \otimes a_{s_{n-1} j}.$$

În virtutea lui (14),

$$a_{is_q}^{(q)} \geqslant \alpha_{is_q}, \quad a_{s_q s_r}^{r-q} \geqslant \beta_{s_q s_r}, \quad a_{s_r j}^{(n-r)} \geqslant \gamma_{s_r j}$$

dar $s_q = s_r$ deci $a_{s_q s_r}^{(r-q)} = 0$ conform lui (11). Rezultă deci că

$$a_{ij}^{(n)} \leqslant a_{is_q}^{(q)} \otimes a_{s_r j}^{(n-r)} \leqslant a_{ij}^{(n+q-r)} \tag{17}$$

ultima inegalitate fiind o consecință a lui (17) în virtutea egalității $s_q = s_r$ Din (17) și (11) rezultă deci că

$$A^{(n)} \leqslant \mathop{\boxplus}\limits_{p=1}^{n-1} A^{(p)}. \tag{18}$$

Pe de altă parte din $A \geqslant E$ rezultă

$$A \leqslant A^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant A^{(n-1)} \leqslant A^{(n)} \leqslant \ldots \tag{19}$$

de unde

$$\mathop{\boxplus}\limits_{p=1}^{n-1} A^{(p)} = A^{(n-1)}. \tag{20}$$

În fine, din (18), (19) și (20) rezultă

$$A^{(n-1)} = A^{(n)}. \tag{21}$$

Condiția este suficientă. Fie T_1 un vector arbitrar n-dimensional. Dacă $A^{(n-1)} = A^{(n)}$, atunci

$$T = T_1 \otimes A^{(n-1)} \tag{22}$$

verifică ecuația (7). Într-adevăr, avem

$$T_1 \otimes A^{(n-1)} = T_1 \otimes A^{(n-1)} \otimes A = T_1 \otimes A^{(n)}$$

ceea ce demonstrează suficiența condiției.

Observația 1. Condiția (21) nu mai poate fi slăbită, căci în general $A^{(n-2)} \neq A^{(n-1)}$ chiar dacă ecuația (7) este compatibilă. Astfel ecuația

$$T = T \otimes B,$$

unde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & & & -\infty \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ -\infty & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

admite soluție, spre exemplu $T = (1, 2, \ldots, n)$, însă $B^{(n-2)} \neq B^{(n-1)}$.

Observația 2. Egalitatea (22) ne furnizează un algoritm pentru determinarea unei soluții a ecuației (7). Întrucît înmulțirea a două matrici necesită un volum de calcule mai mare decît înmulțirea unui vector cu o matrice, pentru determinarea soluției este preferabil să se calculeze succesiv

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 \otimes A \\ T_3 &= T_2 \otimes A \\ &\cdots\cdots \\ T_n &= T_{n-1} \otimes A, \end{aligned}$$

ultimul vector fiind o soluție posibilă a ecuației (7). Calculînd și $T_{n+1} = T_n \otimes A$, compatibilitatea ecuației (7) se recunoaște din egalitatea $T_{n+1} = T_n$, dar ea poate fi recunoscută mai devreme dacă pentru un indice i avem $T_{i+1} = T_i$.

Primită la redacție la 5 mai 1966

Institutul de calcul al Academiei
Republicii Socialiste România,
Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. R. Cruon, Ph. Hervé, *Quelques résultats relatifs à une structure algébrique et son application au problème central de l'ordonnancement.* Revue Française de Recherche Opérationnelle, *34*, 3–19 (1965).
2. B. Roy, *Cheminement et connexité dans les graphes, application aux problèmes d'ordonnancement*, METRA, Série Spéciale, *1* (1962).

ASUPRA UNEI PROBLEME DIN MIȘCAREA APELOR ARTEZIENE

DE

HORIA I. ENE

În lucrarea de față se studiază problema mișcării apelor arteziene spre un puț practicat într-un mediu poros limitat de două arce de cerc, care au aceleași extremități, frontiera domeniului fiind parțial impermeabilă.

Avînd în vedere poziția porțiunii impermeabile, problema este complet rezolvată dacă se consideră două cazuri: cînd porțiunea impermeabilă conține punctul B (fig. 1) și cînd nu îl conține. În ambele cazuri se aplică formulele date de S. Gogonea [4] pentru o problemă care a fost pusă de M. Muskat [6].

1. Ne propunem să studiem problema mișcării apelor arteziene spre un puț practicat într-un mediu poros limitat de două arce de cerc de raze diferite (fig. 1). Frontiera domeniului ocupat de mediul poros se consideră parțial impermeabilă, restul fiind suprafață de alimentare.

Cazul în care mediul poros ocupă un sector de cerc, coarda sectorului fiind considerată suprafață impermeabilă, iar arcul ca suprafață de alimentare a fost studiat de A. Houpeurt [5]. Aceeași problemă pentru cazul cînd suprafața se întinde și pe porțiunea curbilinie a conturului a fost rezolvată de noi în [1].

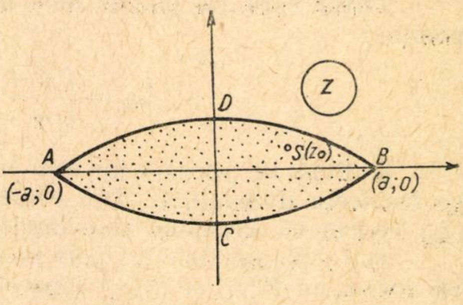


Fig. 1

Problema propusă spre rezolvare se va vedea că se reduce la aplicarea unor formule date de S. Gogonea [4] pentru o problemă care a fost considerată pe o altă cale de M. Muskat [6].

2. Să considerăm deci mediul poros ca avînd configurația din figura 1. În mediul poros este practicat un puț de afixă z_0 și de rază δ.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P., 53–57, BUCUREȘTI, 1967

Făcînd transformarea conformă :

(1) $$Z = \ln \frac{a+z}{a-z},$$

domeniul din planul fizic (z) se transformă în planul (Z) într-o bandă infinită $X \in (-\infty, +\infty)$, $Y \in (Y_1, Y_2)$, unde $Y = Y_2 < 0$ şi $Y = Y_1 > 0$ sînt imaginile celor două arce de cerc, fiind în acelaşi timp unghiurile pe care le fac cele două arce cu axa Ox. Corespondenţa punctelor în cele două plane va fi următoarea : punctul A va fi aruncat la $X = -\infty$, punctul B va corespunde lui $X = +\infty$, punctele C şi D avînd noile poziţii respectiv în $-iY_2$ şi iY_1.

Făcînd translaţia :

(2) $$\zeta_1 = Z - iY_2,$$

vom obţine în planul (ζ_1) o bandă infinită de lărgime $L = Y_1 - Y_2$, unde corespondentele punctelor C şi D vor fi situate respectiv în origine şi în iL.

O nouă transformare :

(3) $$\zeta_2 = e^{\pi/L\zeta_1},$$

ne va conduce la domeniul Im $\zeta_2 > 0$, cu următoarea corespondenţă a punctelor : punctul B se va afla la infinit, punctul A în origine, iar punctele C şi D respectiv în 1 şi -1.

Deci reprezentarea care ne duce de la domeniul din planul fizic la semiplanul superior Im $\zeta_2 > 0$ este :

(3′) $$\zeta_2 = \left(\frac{a+z}{a-z}\right)^{\pi/L} e^{-iY_2\pi/L}.$$

Puţul care în planul fizic avea afixa z_0 în planul (ζ_2), va ocupe poziţia :

$$\zeta_{20} = \left(\frac{a+z_0}{a-z_0}\right)^{\pi/L} e^{-iY_2\pi/L}.$$

3. Pînă în prezent nu am precizat poziţia porţiunii impermeabile pe frontiera domeniului. Din configuraţia domeniului mişcării în planul (ξ_2) vedem că avem de considerat două cazuri :

a) În planul fizic (z) porţiunea impermeabilă conţine şi punctul B. Să notăm cu F (z_1) şi E (z_2) capetele porţiunii impermeabile care conţine punctul B.

Imaginile acestor puncte în planul (ζ_2) prin transformarea (3′) vor fi :

(4) $$\zeta_{21} = \left(\frac{a+z_1}{a-z_1}\right)^{\pi/L} e^{-iY_2\pi/L}, \qquad \zeta_{22} = \left(\frac{a+z_2}{a-z_2}\right)^{\pi/L} e^{-iY_2\pi/L}.$$

Deci în acest caz în planul (ζ_2) avem următoarea situaţie (fig. 2) : semiplanul Im $\zeta_2 > 0$ este mediu poros, porţiunea *FDACE* din axa Im $\zeta_2 = 0$ este suprafaţă de alimentare, iar restul axei Im $\zeta_2 = 0$ este suprafaţă impermeabilă, puţul ocupînd poziţia ζ_{20}.

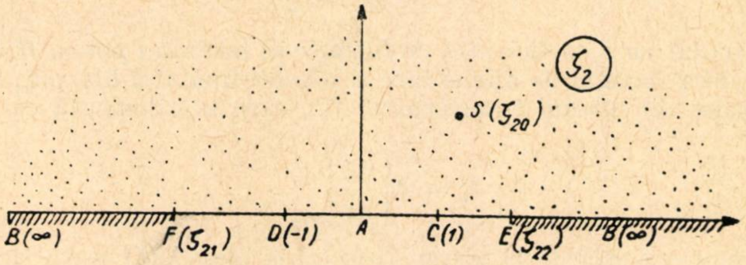


Fig. 2

Făcînd o translaţie :

$$w_1 = \zeta_2 - \frac{1}{2}(\zeta_{21} + \zeta_{22}), \tag{5}$$

domeniul mişcării va fi Im $w_1 > 0$ cu singura deosebire că acum suprafaţa de alimentare *FDACE* ocupă o poziţie simetrică faţă de origine, punctul *E* avînd afixa w_1^*, iar *F* pe $-w_1^*$, unde :

$$w_1^* = \frac{1}{2}(\zeta_{21} - \zeta_{22}).$$

În felul acesta am fost conduşi la o problemă care a fost considerată de M. Muskat [6] şi pe care a rezolvat-o cu ajutorul metodei imaginilor. Pornind de la o altă configuraţie, S. Gogonea [4] este condus la aceeaşi problemă pe care însă o rezolvă pe o altă cale, pe care o vom aplica şi noi în cele ce urmează.

Două noi transformări :

$$w_2 = \ln \frac{w_1 - w_1^*}{w_1 + w_1^*}, \tag{6}$$

şi

$$\zeta = w_2 - c, \tag{7}$$

ne conduc în final în planul $\zeta = \xi + i\eta$ la o bandă infinită $\xi \in (-\infty, +\infty)$, $\eta \in (-\pi, 0)$, unde $\eta = 0$ este suprafaţă de alimentare, iar $\eta = -\pi$ este suprafaţă impermeabilă. Dacă notăm $w_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, atunci constanta $c = \alpha_{20} + i\pi$, puţul ocupînd în planul (ζ) poziţia $\zeta_0 = i(\beta_{20} - \pi) = -ib$.

Pentru aflarea potenţialului complex al mişcării şi debitul puţului nu avem decît să aplicăm formulele date de S. Gogonea [4], care se obţin impunînd condiţiile cunoscute [2] pe frontiera puţului :

$$f(\zeta) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{th} \dfrac{\zeta - ib}{4}}{\operatorname{th} \dfrac{\zeta + ib}{4}}, \tag{8}$$

şi

$$q = \frac{2\pi k H}{\ln \dfrac{\delta_1}{4} \operatorname{tg} \dfrac{b}{2}}, \tag{9}$$

unde s-a notat cu k coeficientul de filtraţie al mediului poros, H diferenţa de nivel între bazinul de alimentare şi nivelul fluidului din puţ, iar cu δ_1 raza puţului din planul transformării (ζ), care se calculează cu ajutorul relaţiei :

$$\delta_1 = \delta \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=z_0}.$$

Transformarea finală de la planul fizic (z) la planul (ζ) se va scrie deci :

$$\zeta = \ln \frac{[(a+z)(a-z_1)]^{\pi/L} - [(a-z)(a+z_1)]^{\pi/L}}{[(a+z)(a-z_2)]^{\pi/L} - [(a-z)(a+z_2)]^{\pi/L}} + \frac{\pi}{L} \ln \frac{a-z_2}{a-z_1} - c. \tag{10}$$

b) În planul fizic (z) porţiunea impermeabilă nu conţine punctul B. Să presupunem că această porţiune ocupă poziţia FCE, unde punctele F şi E au afixele respectiv z_1 şi z_2.

În planul (ζ_2) acestor puncte le vor corespunde punctele ζ_{21} şi ζ_{22} date de relaţiile (4). În acest caz în planul (ζ_2) vom avea următoarea configuraţie (fig. 3) : semiplanul $\operatorname{Im} \zeta_2 > 0$ este mediu poros, porţiunea FCE

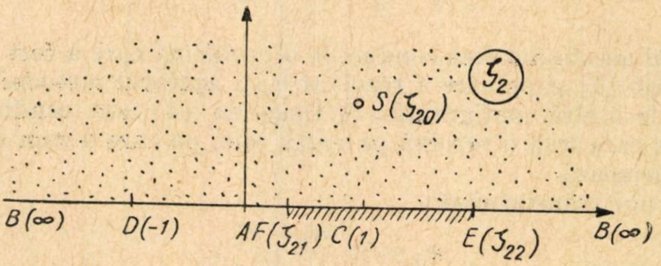


Fig. 3

este suprafaţă impermeabilă, restul axei $\operatorname{Im} \zeta_2 = 0$ fiind suprafaţă de alimentare, puţul ocupînd poziţia ζ_{20}.

Pentru a reduce problema la configuraţia lui M. Muskat [6] vom face o translaţie :

$$\omega_1 = \zeta_2 - \frac{1}{2}(\zeta_{21} + \zeta_{22}), \tag{11}$$

care ne duce porţiunea impermeabilă simetric faţă de origine, $F(-\omega_1^*)$ şi $E(\omega_1^*)$, unde $\omega_1^* = \frac{1}{2}(\zeta_{21} - \zeta_{22})$, urmată de o inversiune de pol 0 şi de putere K :

$$\omega_2 = \frac{K}{\omega_1}. \tag{12}$$

În felul acesta în planul (ω_2) punctul B se va afla în origine, punctele F şi E vor avea afixele respectiv $-\omega_2^*$ şi ω_2^*, unde $\omega_2^* = \frac{K}{\omega_1^*}$ astfel încît suprafaţa de alimentare este un segment simetric faţă de origine, iar suprafaţa impermeabilă ocupă exteriorul acestui segment.

Am ajuns exact la o problemă de tipul celei tratată anterior, deci vom fi conduşi la următoarele transformări :

$$\omega_3 = \ln \frac{\omega_2 - \omega_2^*}{\omega_2 + \omega_2^*}, \tag{13}$$

şi

$$\zeta = \omega_3 - d, \tag{14}$$

unde dacă notăm poziţia puţului cu $\omega_{30} = \alpha_{30} + i\beta_{30}$, avem $d = \alpha_{30} + i\pi$. În planul mişcării domeniul este acelaşi cu cel obţinut prin transformarea (7), singura deosebire constînd în poziţia puţului care este diferită deoarece s-au utilizat transformări diferite.

Problema va fi rezolvată tot de formulele (8) şi (9) ţinîndu-se seama însă că transformarea de la planul fizic (z) la planul (ζ) este în acest caz următoarea :

$$\zeta = \ln \frac{[(a-z)\,(a+z_1)]^{\pi/L} - [(a+z)\,(a-z_1)]^{\pi/L}}{[(a+z)(a-z_2)]^{\pi/L} - [(a-z)\,(a+z_2)]^{\pi/L}} + \frac{\pi}{L} \ln \frac{a-z_2}{a-z_1} - d\cdot \tag{15}$$

4. Cazul tratat de A. Houpeurt [5] se obţine făcînd $Y_2 = 0$ şi luînd porţiunea impermeabilă cu extremităţile în punctele A şi B, anume segmentul de dreaptă ACB. Se vede în acest caz că transformarea (1) este exact cea utilizată de A. Houpeurt şi că în planul (Z) avem configuraţia căreia A. Houpeurt i-a aplicat metoda imaginilor pentru a rezolva problema.

Cazul mai general considerat de noi în [1] se obţine tot pentru $Y_2=0$, numai că de data aceasta porţiunea impermeabilă va ocupa segmentul ACB şi arcul BF. În acest caz configuraţiei din planul (ζ_2) îi vom aplica o translaţie şi o rotaţie astfel încît să obţinem domeniul mişcării ca fiind primul cadran, semiaxa pozitivă Im $\zeta_2 = 0$ fiind suprafaţă impermeabilă, iar semiaxa pozitivă Re$\zeta_2=0$ fiind suprafaţă de alimentare. Acestei configuraţii noi i-am aplicat metoda imaginilor.

În fine, se mai poate considera cazul cînd cele două arce de cerc au raze egale, ceea ce revine la a lua $Y_1 = Y_2$, şi tot în acest caz putem considera cazul cercului, avînd de data aceasta $Y_1 = Y_2 = \pi/2$.

Primită la redacţie la 5 iunie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. H. I. Ene, *Generalizarea unei probleme din mişcarea apelor arteziene*. St. cerc. mec. apl., **19**, *4*, 1043–1049 (1965).
2. St. I. Gheorghiţă, *Capitole din teoria mişcărilor în medii poroase*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
3. S. Gogonea, *Cîteva mişcări în medii poroase în prezenţa unor contururi de alimentare finite*. St. cerc. matem., **15**, *7*, 825–835 (1964).
4. — *Asupra mişcării apelor arteziene în prezenţa unor contururi de alimentare parţial obturate*, St. cerc. mat., **18** (1966) (sub tipar).
5. A. Houpeurt, *Elements de mècanique des fluides dans les milieux poreux*. Paris, 1957.
6. M. Muskat, *The flow of homogenous fluids trough porous media*. Michigan, 1946.

MORFISME DE NATURĂ FINITĂ ÎN CATEGORIA SPAŢIILOR INELATE

DE

ANDREI DUMA

Nota de faţă încearcă să găsească analogul noţiunii de morfism de tip finit de la subcategoria preschemelor la categoria spaţiilor inelate arbitrare şi să obţină proprietăţi analoage celor din cazul preschemelor.

§1. SPAŢIU INELAT DE POLINOAME ŞI SPAŢIU INELAT DE SERII FORMALE ASOCIATE UNUI SPAŢIU INELAT

Fie (X, O_X) un spaţiu inelat şi $\mathcal{M}$ un O_X - Modul. Se va nota cu $\mathbf{Alg}\ O_X$ categoria O_X - Algebrelor unitare, comutative, cu morfisme unitare. Se consideră functorul :

$$F_{\mathcal{M}} : \mathbf{Alg}\ O_X \to \mathbf{Ens}$$

definit astfel : $F_{\mathcal{M}}(\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\, O_X}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ pentru orice O_X-Algebră $\mathcal{A}$ şi $F_{\mathcal{M}}(u) = \mathrm{Hom}\,(1_{\mathcal{M}}, u)$ oricare ar fi $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un omomorfism de O_X-Algebre.

Lemă. *Functorul $F_{\mathcal{M}}$ este reprezentabil.* Într-adevăr, fie O_X-Algebra : $\mathrm{S}(\mathcal{M}) = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}^{\otimes n}$ şi morfismul de incluziune : $\mathcal{M} \xrightarrow{\rho_{\mathcal{M}}} \mathrm{S}(\mathcal{M})$.

Atunci cuplul $(\mathrm{S}(\mathcal{M}), \rho_{\mathcal{M}})$ este un reprezentant al functorului $F_{\mathcal{M}}$.

Definiţie. $\mathrm{S}(\mathcal{M})$ se numeşte Algebra simetrică asociată O_X -Modulului $\mathcal{M}$.

În acest fel se obţine un functor covariant, aditiv şi exact la dreapta, care comută în plus cu produsul tensorial :

$$\mathrm{S} : \mathbf{Mod}\ O_X \to \mathbf{Alg}\ O_X.$$

Dacă $\mathcal{M}'$ este un sub- O_X -Modul al lui $\mathcal{M}$, astfel ca ambele să fie plate, atunci $\mathrm{S}(\mathcal{M}')$ se identifică canonic cu o sub- O_X-Algebră a lui $\mathrm{S}(\mathcal{M})$.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 59–63, BUCUREŞTI, 1967

Observație. Dacă se ia $\mathcal{M} = O_X$, atunci $\mathrm{S}(O_X)$ se identifică cu suma directă $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} O_X$. Dacă considerăm $\mathbf{Z}$ și $\mathbf{Z}\,[T]$ ca fascicule constante pe spațiul X, atunci morfismul canonic $\mathrm{S}(O_X) \to O_X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}\,[T]$ este izomorfism, ceea ce se vede imediat luînd morfismul indus pe fibre — căci ambele fascicule au fibra în punctul x izomorfă cu $O_{X,x}\,[T]$.

Aceasta justifică notația $\mathrm{S}(O_X) = O_X\,[T]$.

Vom explicita secțiunile fasciculului $O_X\,[T]$; de la început trebuie spus că în general $\Gamma(U, O_X)\,[T] \subsetneqq \Gamma(U, O_X\,[T])$.

Se observă că $O_X\,[T]$ poate fi definit și ca fasciculul asociat prefasciculului :

$$U \rightsquigarrow \Gamma\,(U, O_X)\,[T]$$

cu morfismele de restricție corespunzător definite, plecînd de la morfismele de restricție ale lui O_X.

Aceasta permite să punem și să rezolvăm problema într-un cadru mai general și anume să căutăm secțiunea fasciculului asociat prefasciculului :

$$U \rightsquigarrow \Gamma\,(U, O_X)\,[T_1, T_2, \ldots, T_n].$$

Ca o primă remarcă, există un izomorfism functorial în $\mathcal{M}$ de la categoria O_X-Modulelor la categoria $\Gamma(X, O_X)$-modulator.

$$\Gamma\,(X, \mathcal{M})^n \approx \mathrm{Hom}_{O_X}\,(O_X[T_1, T_2 \ldots, T_n], \mathcal{M})$$

Următorul rezultat răspunde problemei noastre :

PROPOZIȚIA 1. *Secțiunile fasciculului* $O_X\,[T_1, T_2, \ldots, T_n]$ *peste un deschis* U *constituie o subalgebră a algebrei seriilor formale* $\Gamma\,(U, O_X)\,[[T_1, T_2, \ldots, T_n]]$ *formată din seriile local finite.*

Demonstrație. Este clar că astfel se obține un subfascicul al fasciculului de serii formale care conține prefasciculul în discuție. În plus, acest fascicul este chiar cel asociat prefasciculului, căci rezolvă problema de universalitate.

COROLARUL 1.1. *Dacă* V *este un deschis cvasicompact al lui* X, *atunci* :

$$\Gamma\,(V, O_X\,[T_1, T_2, \ldots, T_n]) = \Gamma\,(V, O_X)\,[T_1, T_2, \ldots, T_n]$$

COROLARUL 1.2. *Dacă* X *este un spațiu noetherian, atunci prefasciculul* $U \rightsquigarrow \Gamma\,(U, O_X)\,[T_1, T_2, \ldots, T_n]$ *este chiar fascicul și este generat* (în sensul din [1]) *de secțiunile sale* $(T_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *peste tot spațiul.*

În mod natural se impune considerarea prefasciculului :

$$U \rightsquigarrow \Gamma\,(U, O_X)\,[[T_1, T_2, \ldots, T_n]].$$

Se observă că acesta este chiar fascicul și îl vom nota cu $O_X\,[[T_1, T_2, \ldots, T_n]]$. Acest fascicul nu este generat de secțiunile sale peste tot spațiul.

COROLARUL 1.3. *Dacă* O_X *este un fascicul flasc, la fel vor fi*

$$O_X[T_1, T_2, \ldots, T_n] \text{ și } O_X[[T_1, T_2, \ldots, T_n]].$$

DEFINIȚIE. Spațiile inelate $(X, O_X[T_1, T_2, \ldots, T_n])$ și $(X, O_X[[T_1, T_2, \ldots, T_n]])$ se numesc spațiile inelate de polinoame, respectiv de serii formale ale spațiului dat (X, O_X) în n nedeterminate.

De menționat următoarea diagramă comutativă de epimorfisme canonice :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} (X, O_X[[T_1, T_2, \ldots, T_n]]) \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "h"'] & (X, O_X[T_1, T_2, \ldots, T_n]) \arrow[d, "i"] \\ & (X, O_X) \end{tikzcd}$$

În încheiere, dăm o aplicație a spațiilor inelate de fracții[1]). Fie (X, O_X) un spațiu inelat și $(X, O_X[T_1, \ldots, T_n])$ spațiul inelat de polinoame asociat lui (X, O_X). Sistemul de secțiuni :

$\mathcal{S} = \{T_1^{i1} \cdot T_2^{i2} \ldots T_n^{in}\}_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in N_n}$ formează un sistem multiplicativ închis. Deci teoria generală a spațiilor inelate de fracții, există spațiul inelat de fracții asociat lui $(X, O_X[T_1, T_2, \ldots, T_n])$ și $\mathcal{S}$ — și acest spațiu îl vom nota :

$$(X, O_X[T_1, T_2, \ldots, T_n, T_1^{-1}, T_2^{-1}, \ldots, T_n^{-1}]).$$

În plus, $O_X[T_1, T_2, \ldots, T_n, T_1^{-1}, T_2^{-1}, \ldots, T_n^{-1}]$ este fasciculul asociat prefasciculului :

$$G_1 : U \rightsquigarrow \Gamma(U, O_X[T_1, T_2, \ldots, T_n])[T_1^{-1}, T_2^{-1}, \ldots, T_n^{-1}]$$

sau prefasciculului :

$$G_2 : U \rightsquigarrow \Gamma(U, O_X)[T_1, T_2, \ldots, T_n, T_1^{-1}, T_2^{-1}, \ldots, T_n^{-1}].$$

Analog cu cele anterioare avem :

PROPOZIȚIA 2. *Fasciculul* $O_X[T_1, T_2, \ldots, T_n, T_1^{-1}, T_2^{-1}, \ldots, T_n^{-1}]$ *are ca secțiuni peste un deschis arbitrar* $U \subset X$, *seriile formale din* $\Gamma(U, O_X)[[T_1, T_2, \ldots, T_n, T_1^{-1}, T_2^{-1}, \ldots, T_n^{-1}]]$ *local finite.*

COROLARUL 2.1. *Dacă* V *este un deschis cvasicompact din* X, *atunci* :

$$\Gamma(V, O_X[T_1, T_2, \ldots, T_n, T_1^{-1}, T_2^{-1}, \ldots, T_n^{-1}]) =$$
$$= \Gamma(V, O_V)[T_1, T_2, \ldots, T_n, T_1^{-1}, T_2^{-1}, \ldots T_n^{-1}]$$

COROLAR 2.2. *Dacă* X *este spațiu topologic neotherian, atunci relația anterioară are loc pentru orice deschis, deci prefasciculul* G_2 *este fascicul.*

Observație. Considerente analoage se pot face pentru $(X, O_X[[T_1, T_2, \ldots, T_n]])$ și același sistem multiplicativ $\mathcal{S}$. Se obține o diagramă asemănătoare diagramei (*).

---

[1]) A. DUMA, *Categoria spațiilor inelate* (Lucrare de diplomă, 1966).

§ 2. SPAŢIU INELAT NOETHERIAN ŞI LOCAL NOETHERIAN

Vom face cîteva consideraţii utile în cele ce urmează.

Definiţie. 1° Se numeşte spaţiu inelat noetherian, un spaţiu inelat (N, O_N) astfel încît :

i) N să fie un spaţiu topologic noetherian.

ii) N admite o bază de mulţimi deschise $(N_\alpha)_{\alpha \in I}$ astfel ca $\Gamma(N_\alpha, O_N)$ să fie inele noetheriene.

2°. Un spaţiu inelat obţinut prin racolarea unor spaţii noetheriene se numeşte local noetherian.

Observaţie. În cazul preschemelor se obţine definiţia din [1].

Propoziţia 3. *Un spaţiu inelat de polinoame* $(X, O_X\ [T_1, \dots T_n])$ *al unui spaţiu noetherian* (X, O_X) *este încă spaţiu noetherian.*

Aceasta rezultă din definiţia anterioară şi corolarul 1.2.

Propoziţia 4. *Un spaţiu inelat este noetherian dacă şi numai dacă este local noetherian şi spaţiul subiacent este cvasicompact.*

Deoarece orice inel factor al unui inel noetherian este noetherian şi orice subspaţiu al unui spaţiu topologic noetherian este încă noetherian, rezultă :

Propoziţia 5. *Dacă* $i : (Y, O_Y) \to (X, O_X)$ *este o imersie şi dacă* (X, O_X) *este un spaţiu inelat noetherian (local noetherian), atunci* (Y, O_Y) *este la fel.*

§ 3. MORFISME DE NATURĂ FINITĂ

Definiţie. Morfismul $f : (X, O_X) \to (Y, O_Y)$ se numeşte de natură finită, dacă există o acoperire $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$ a lui Y cu deschişi, astfel ca V_α să îndeplinească condiţia :

(NF) $f^{-1}(V_\alpha) = \bigcup\limits_{i=1}^{n(\alpha)} U_{\alpha i}$, astfel ca : $(U_{\alpha i}, O_{U\alpha i})$ să fie izomorf prin intermediul restricţiei lui f, cu un subspaţiu închis al unui spaţiu de polinoame al lui $(V_\alpha, O_{V\alpha})$.

Corolar 1) *Dacă V are proprietatea* (NF), *atunci orice deschis inclus în V o are.*

2) *Local, topologia lui X este topologia indusă pe un subspaţiu închis al lui Y.*

Propoziţia 6. (i) *Orice imersie închisă este un morfism de natură finită.*

(ii) *Compunerea a două morfisme de natură finită este un morfism de natură finită.*

(iii) *Morfismele de natură finită sînt stabile la ridicarea bazei.*

(iv) *Produsul a două morfisme de natură finită este tot un morfism de natură finită.*

(v) *Fie* $(X, O_X) \xrightarrow{f} (Y, O_Y) \xrightarrow{g} (Z, O_Z)$ *trei spaţii cu suport total* (Supp $O_X = X$; Supp $O_Y = Y$; Supp $O_Z = Z$). *Dacă* $g \circ f$ *este de natură finită şi* g *este separat, atunci* f *este de natură finită.*

(vi) *Fie* $(X, O_X) \xrightarrow{f} (Y\ O_Y)$ *un morfism de natură finită între spaţii inelate cu suport total. Atunci* f_{red} *este încă de natură finită.*

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm primele trei afirmaţii. Fie $i : (Y, O_Y) \to (X, O_X)$ un subspaţiu închis al lui (X, O_X) definit de idealul $\mathcal{J}$ al lui O_X. Atunci (Y, O_Y) se poate privi ca subspaţiul închis al lui $(X, O_X\,[T])$ definit de $\mathcal{J} \cdot O_X\,[T] + (T)$, deci (i).

Fie $f : (X, O_X) \to (Y, O_Y)$ şi $g : (Y, O_Y) \to (Z, O_Z)$ două morfisme de natură finită şi W un deschis din Z care are proprietatea (NF) relativ la g, deci $g^{-1}(W) = \bigcup_{\beta=1}^{n} V_\beta$. Micşorînd convenabil pe W, pot presupune, conform corolarului anterior, că V_β au proprietatea (NF) relativă la f. Aserţiunea (ii) rezultă din remarca : proprietatea de a fi subspaţiu închis al unui spaţiu de polinoame este tranzitivă.

Pentru (iii) ne reducem la cazul în care avem de probat că proprietatea de a fi subspaţiu închis al unui spaţiu de polinoame a unui spaţiu dat se păstrează prin ridicare. Dar aceasta rezultă din definiţiile respective.

Este încă adevărată următoarea proprietate de ridicare :

PROPOZIŢIA 7. *Dacă cosursa unui morfism de natură finită* $f : (X, O_X) \to (Y, O_Y)$ *este un spaţiu inelat noetherian (local noetherian), la fel va fi şi sursa.*

Demonstraţie. Este suficient să presupunem (Y, O_Y) noetherian. Cum $Y = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ astfel că V_i are proprietatea (TF), rezultă X noetherian, căci : $X = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n(i)} U_{ij}$, unde $(U_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n(i)}$, acoperă $f^{-1}(V_i)$ şi sînt omeomorfi cu închişi din V_i.

O bază de deschişi în X se poate obţine dintr-o bază de deschişi $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ ai lui Y, unde $\mathcal{B}_i$ este o bază de deschişi ai lui V_i. Cum pentru orice deschis W_i al lui V_i, $\Gamma(f^{-1}(W_i), O_X)$ este izomorf cu un cît al inelului : $\Gamma(W_i, O_Y\,[T_1, \ldots, T_n])$ cu n convenabil, rezultă $\Gamma(f^{-1}(W_i), O_X)$ noetherian, deoarece conform corolarului 1.2 :

$$\Gamma(W_i, O_Y\,[T_1, \ldots, T_n]) = \Gamma(W_i, O_Y)\,[T_1, \ldots, T_n]$$

Observaţie. Un morfism de natură finită este morfism cvasicompact. Probarea se face utilizînd esenţial faptul că un închis al unui cvasicompact este cvasicompact.

Aceste lucruri se pot continua introducînd analog ca în [1] şi bazat pe definiţia dată aici, morfisme local de natură finită. Se obţin parţial rezultate analoage cu cele din [1].

Primită la redacţie la 20 aprilie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. A. GROTHENDIECK şi J. DIEUDONNÉ, *Élements de géométrie algébrique.*
2. SEMINAR HENRI CARTAN, 1960/61.

O PROBLEMĂ DE FRONTIERĂ PENTRU SISTEME DE ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE TARE ELIPTICE

DE

KLINCSEK GEZA

(Craiova)

În lucrarea de faţă se trasează rezolvabilitatea problemei combinate Dirichlet-Neumann pentru un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale tare eliptice.

Se construieşte spaţiul funcţional ataşat problemei $V_e(\Omega)$, formulînd o extindere corespunzătoare teoremei lui Aronszajn, care asigură scufundarea complet continuă a spaţiului $V_e(\Omega)$ în $L_2(\Omega)$.

Se arată că problema studiată satisface alternativele lui Fredholm.

I

În studiul sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale tare eliptice are un rol de bază familia de funcţii, în care se caută soluţia. Această familie depinde şi de sistemul de ecuaţii şi de condiţiile de frontieră.

Lucrarea de faţă trasează problema spaţiului funcţional corespunzător unui sistem de ecuaţii tare eliptic, cu condiţii de tip Dirichlet-Neumann. Această problemă a fost studiată de către J. Gobert [1], pentru sisteme eliptice de formă particulară.

Se consideră funcţii vectoriale $u = (u_1, \ldots, u_N)$, definite şi la pătrat integrabile într-un domeniu $\Omega \subset E_n$. În acest spaţiu folosim produsul scalar :

$$(1.1) \qquad (u, v)_{L_2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} (u_i, v_i)_{L_2^0(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} u_i \overline{v}_i \, d\Omega.$$

Vom nota cu $D(\Omega)$ spaţiul funcţiilor φ, definite şi infinit variabile în E_n, cu suport compact în Ω.

Vom nota cu $H_{\overline{s}}(\Omega)$ spaţiul funcţiilor u, cu componentele u_i, avînd derivate generalizate de ordin s_i la pătrat integrabile, spaţiul e organizat cu norma :

$$(1.2) \qquad \| u \|^2_{N_{\overline{s}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \sum\nolimits_{|\rho| \leqslant s_i} \| D^{\rho} u_i \|^2_{L_2^0(\Omega)}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 65–71, BUCUREŞTI, 1967

Spaţiul $\overset{\circ}{H}_{\bar{s}}(\Omega) \subset H_{\bar{s}}(\Omega)$ va fi închiderea spaţiului $D(\Omega)$ după norma dată de formula (1.2).

Dacă $\dot{\Omega}$ este destul de bun din relaţia lui Ehrling-Nirenberg [2], rezultă că norma (1.2) este echivalentă cu norma :

$$(1.3) \qquad |u|^2_{H_{\bar{s}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \sum\nolimits_{|\rho| = s_i} \|D^\rho u_i\|^2_{L_2^\sigma(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Lîngă spaţiile $H_{\bar{s}}(\Omega)$ şi $\overset{\circ}{H}_{\bar{s}}(\Omega)$ vom folosi şi spaţiile $H_{\bar{s},e}(\Omega)$ definite în felul următor. Descompunem frontiera $\dot{\Omega}$ a domeniului Ω în (1.4), $\dot{\Omega} = eUe^*$ şi se ia închiderea spaţiului de funcţii infinit derivabile, care se anulează într-o vecinătate a frontierei e, închidere după norma (1.2)

Funcţiilor vectoriale u le aplicăm operatorul matricial de derivare $L = (l_{ij}(x, D))$ de forma :

$$(1.4) \qquad l_{ij}(x, D) = \sum\nolimits_{|\rho| \leqslant s_i} \sum\nolimits_{|\sigma| \leqslant s_j} (-1)^{s_i} D^\rho b_{ij}^{\rho\sigma} D^\sigma,$$

unde coeficienţii $b_{ij}^{\rho\sigma}(x)$ sînt suficient de netezi.

Punînd

$$(1.5) \qquad a_{ij}^{\rho\sigma}(x) = \frac{1}{2}\left(b_{ij}^{\rho\sigma}(x) + b_{ij}^{\rho\sigma}(x)\right),$$

definim partea simetrică principală a operatorului sub forma $L^0 = (l_{ij}^0(x, D))$, unde

$$(1.6) \qquad l_{ij}^0(x, D) = \sum\nolimits_{|\rho| = s_i} \sum\nolimits_{|\sigma| = s_i} (-1)^{s_i} D^\rho a_{ij}^{\rho\sigma}(x) D^\sigma.$$

Matricea caracteristică a operatorului va fi :

$$L^0(x, \lambda) = (l_{ij}^0, (x, \lambda)).$$

Definiţie. Operatorul $L(D)$ este tare eliptic, dacă matricea polinomială caracteristică $L^\circ(x_0, \lambda)$ este pozitiv definită [2], adică pentru orice vector avem :

$$(1.7) \qquad \langle \xi, L^0(x_0, \lambda)\, \xi \rangle \geqslant c_0 \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^2 \, |\lambda|^{2s_i}_{E_N}.$$

Pentru a pune în evidenţă proprietăţile legate de această definiţie, introducem următoarea notaţie :

Se defineşte operatorul

$$h_{\bar{s}} u = \left(D^{\overset{1}{\rho}_1} u_1, \ldots, D^{\overset{1}{\rho}_{i_1}} u_1, D^{\overset{2}{\rho}_1} u_2, \ldots, D^{\overset{N}{\rho}_{i_N}} u_N\right)$$

încît să avem :

$$(1.8) \qquad |u|^2_{H_{\bar{s}}(\Omega)} = (h_{\bar{s}}\, u,\ h_{\bar{s}}\, u)_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Atunci forma biliniară :

$$(1.9) \qquad B(u, v) = \sum_{i,j=1}^{N} \left(\sum\nolimits_{|\rho| = s_i} \sum\nolimits_{|\delta| = s_j} D^\rho u_i,\ a_{ij}^{\rho\sigma}(x) D^\sigma v_j\right)_{L_2^0(\Omega)}$$

se poate pune sub forma :

$$(1.10) \qquad B(u, v) = (h_{\bar{s}}\, u, A(x)\, h_{\bar{s}}\, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Teorema lui Görding arată că pentru funcţii $u \in \mathring{H}_{\bar{s}}(\Omega)$ avem :

$$B(u, u) \geqslant c_1 \|u\|^2_{H_{\bar{s}}(\Omega)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{1.11}$$

Aceasta înseamnă că în spaţiul $\mathring{H}_{\bar{s}}(\Omega)$ expresia

$$B(u, u) + k \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{1.12}$$

unde k suficient de mare constituie o normă echivalentă cu cea dată de formula (1.2).

Comparînd normele (1.3) şi (1.12), se vede că în relaţia (1.12) apare ponderea A, formată din coeficienţii operatorului tare eliptic $L^0(D)$.

Închiderea spaţiului $H_{\bar{s},e}(\Omega)$ după (1.12) o vom nota cu $V_e(\Omega)$. Am văzut că $V_{\dot{\Omega}}(\Omega) = \mathring{H}_{\bar{s}}(\Omega)$. Se pune problema în ce condiţii coincid spaţiile $H_{\bar{s},e}(\Omega)$ şi $V_e(\Omega)$? Răspunsul este dat de următoarea generalizare a teoremei lui Aronszajn.

Fie Ω un domeniu conic [2], de clasă $\bar{s}$ pe partea e^* a frontierei. Se notează cu η_i vectorii tangenţi, cu η vectorul normal într-un punct $x_0 \in e^*$, cu λ un vector real, $\lambda \in E_{n-1} |\lambda| = 1$.

Operatorului L tare eliptic i se ataşează operatorul $M(D_t)$ de forma :

$$M(D_t) = A(x_0)\, h\left(\sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \lambda_i + \eta D_t\right). \tag{1.13}$$

Condiţia lui Aronszajn : pentru $x_0 \in e^*$ din relaţia $M(D_t)\, u = 0$ $u \in H_{\bar{s}}(E_1)$ rezultă $u = 0$.

Teorema lui Aronszajn. *Condiţia necesară şi suficientă ca relaţia :*

$$\|u\|^2_{H_{\bar{s}}} \leqslant c_3 (B(u, u) + \|u\|^2_{L_2}) \tag{1.14}$$

să aibă loc pentru orice $u \in H_{\bar{s},e}(\Omega)$ e ca : e^* să fie finită şi operatorul L să verifice condiţiile lui Aronszajn.

Suficienţa. Demonstraţia se face în mai multe etape.

a) Partea e^* a frontierei se acoperă cu un număr de sfere S, de rază ε, cu centrul $x_0 \in e^*$. Vom nota cu W_{x_0} spaţiul $H_{\bar{s},\dot{S}}(S \cap \Omega)$, unde $\dot{S}$ este frontiera sferei S.

Evident, $\Omega \subset \Omega \cup \left(\bigcup_{i=1}^{p} S_i\right)$ şi deci există o descompunere a unităţii $\varphi_0 \in D(\Omega)$, $\varphi_i \in D(S_i)$ încît pentru orice $u \in H_{\bar{s},e}(\Omega)$ avem $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i^2 u = u$ pentru $x \in \Omega \cup e^*$ şi $\varphi_0 u \in \mathring{H}_{\bar{s}}(\Omega)$, $\varphi_i u \in \check{H}_{\bar{s}}(S_i)$.

Folosind această descompunere, putem enunţa lema :

Lema 1. *Inegalitatea (1.14) are loc dacă şi numai dacă are loc inegalitatea :*

$$\|u\|^2_{H_{\bar{s}}(\Omega)} \leqslant C_4 (B(u, u) + \|u\|^2_{L_2}), \tag{1.15}$$

pentru orice $u \in W_{x_0}$ pentru orice $x_0 \in e^*$.

Evident, (1.14) rezultă din (1.15).

Dacă are loc (1.15), atunci putem scrie, folosind descompunerea arătată a unității, teorema lui Gärding și teorema lui Ehrling-Nirenberg:

$$\|u\|^2_{H_{\bar{s}}(\Omega)} = \sum_{i=0}^{p} (\varphi_i^2 u, u)_{H_{\bar{s}}(\Omega)} = \sum_{i=0}^{p} \|\varphi_i u\|^2_{H_{\bar{s}}(\Omega)} + \sum_{i=0}^{p} T(u, \varphi_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{p} C_{i.5}[B(\varphi_i u, \varphi_i u) + \|\varphi_i u\|^2_{L_2(\Omega)}] + \sum_{i=0}^{p} |T(u, \varphi_i)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{p} C_{i.5}[B(\varphi_i^2 u, u) + (\varphi_i^2 u, u)_{L_2(\Omega)}] + \sum_{i=0}^{p} |T_1(u, \varphi)| \leqslant$$

$$\leqslant e_5(B(u, u) + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}) + k\|u\|_{H_{\bar{s}}(\Omega)} \|u\|_{H_{\overline{s-1}}(\Omega)},$$

de unde găsim:

$$\|u\|^2_{H_{\bar{s}}(\Omega)} \leqslant C_4(B(u, u) + \|u\|^2_{L_2}).$$

b) Notăm cu L' și B' operatorul, respectiv forma biliniară obținută din L și B, înlocuind coeficienții variabili $a_{ij}^{\varrho\sigma}(x)$ cu valoarea lor în punctul x_0.

Notăm cu S'_{x_0} semisfera cu centrul în $x_0 \in e^*$, mărginită de planul tangent în x_0 la Ω, cu $W^1_{x_0}$ spațiul funcțiilor $u \in \overset{\circ}{H}_{\bar{s}}(S_{x_0}) \cap H_{\bar{s}}(S'_{x_0})$. Are loc lema:

LEMA 2. *Inegalitatea* (1.15) *are loc pentru un* $x_0 \in e^*$ *dacă are loc inegalitatea* (*și numai dacă are loc inegalitatea*):

$$\|u\|^2_{H_{\bar{s}}(S'_{x_0})} \leqslant C_5(B'(u, u) + \|u\|^2_{L_2}) \tag{1.16}$$

pentru orice $u \in W^1_{x_0}$.

Cum frontiera e^* este de clasă $\bar{s}$, există o transformare de forma $x' = x + \theta$ care transformă pe W_{x_0} în $W^1_{x_0}$, unde $\dfrac{\theta(x)}{\varepsilon} \to 0$, ε fiind raza sferei S_{x_0}.

Totodată coeficienții $a_{ij}^{\varrho\sigma}(x)$ fiind suficient de netezi, pentru ε suficient de mic:

$$|B(u, v) - B'(u, v)| \leqslant \eta \|u\|_{H_{\bar{s}}} \cdot \|v\|_{H_{\bar{s}}} \qquad u, v \in H_{\bar{s}}(S_{x_0}). \tag{1.17}$$

Fie u_1 transformata lui u, $u_1 \in W^1$ și $u \in W$; atunci:

$$|B(u, u) - B'|(u_1, u_1)| \leqslant |B(u, u) - B'(u, u)| + |B'(u, u) - B'(u_1, u_1)| \leqslant$$

$$\leqslant \eta \|u\|^2_{H_{\bar{s}}} + O(\varepsilon)\|u\|^2_{H_{\bar{s}}},$$

de unde rezultă afirmația.

c) Să notăm cu :

$$M_1(D_t) = h^*\left(\sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \lambda_i + \eta D_t\right)$$

și cu

$$M(u, v) = (M_1 u, Mv)$$

$$M^0 = M^* M_1. \tag{1.18}$$

LEMA 3. *Dacă operatorul L satisface condițiile teoremei lui Aronszajn, atunci pentru orice $u \in H_{\bar{s}}(E_1^+)$ avem relația :*

$$\|u\|^2_{H_{\bar{s}}} \leqslant C_6 M(u, u).$$

Pentru $u \in \overset{\circ}{H}_{\bar{s}}(E_1^+)$ relația e evidentă din teoremele lui Gärding și Schwartz, deci pentru $u \in \overset{\circ}{H}_{\bar{s}}$ putem introduce norma $\|u\|^2_M = M(u, u)$; atunci pentru :

$$u \in H_{\bar{s}}(E_1^+),\ v \in \overset{\circ}{H}_{\bar{s}}(E_1^+)$$

avem :

$$(M^0 u, v)_{L_2} = (M_1 u, M v)_{L_2} \leqslant \|M_1 u\|_{L_2} \|v\|_M$$

deci există un $u_0 \in \overset{\circ}{H}_{\bar{s}}(E_1^+)$ încît să avem :

$$(M^0 u, v)_{L_2} = (u_0, v)_M = (M_1 u_0, Mv)_{L_2} = (M^0 u_0, v)_{L_2}$$

$$u = u_0 + u_1,\ u_0 \in \overset{\circ}{H}_{\bar{s}}(E_1^+),\ M^0 u_1 = 0.$$

Fiindcă $M^0 u_1 = 0$ are un număr finit de soluții liniar independente avem $u_1 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i$ și deci există o constantă încît $\|u_1\|^2_{H_{\bar{s}}} \leqslant C_7 M(u_1, u_1)$ de unde :

$$\|u\|^2_{H_{\bar{s}}} = \|u_1 + u_0\|^2_{H_{\bar{s}}} \leqslant \|u_1\|^2_{H_{\bar{s}}} + \|u_0\|^2_{H_{\bar{s}}} \leqslant C_6 [M(u_1, u_1) + M(u_0, u_0)] =$$
$$= C_6 [M(u_1, u_1) + M(u_0, u_0) + M(u_1, u_0) + M(u_0, u_1)] = C_6 M(u, u).$$

d) Fie $u \in W'_{x_0}$ și să notăm cu $\hat{u}$ transformata lui Fourier după direcțiile $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$. Folosind egalitatea lui Parseval și lema 3 deducem consecutiv :

$$\|u\|^2_{H_{\bar{s}}} = \|h(D_{x'}, D_t) u\|_{L_2} = \left\| h\left(\sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \lambda_i + \eta D_t\right) \hat{u} \right\|^2_{L_2} \approx C(\lambda) \|u\|^2_{H_{\bar{s}}(E_1^+)}.$$

Totodată :

$$(M_1 \hat{u}, M\hat{u})_{L_2(E_1^+)} \approx (hu, Ahu)_{L_2(W'_{x_0})}$$

de unde avem :

$$\|u\|^2_{H_{\bar{s}}} \leqslant C_7 [B(u, u) + \|u\|^2_{L_2}]$$

pentru $u \in W'_{x_0}$.

Cu aceasta suficienţa teoremei este complet demonstrată.

Necesitatea. Se presupune că există o funcţie $u^0(t) \in H_{\bar{s}}(E_1^+)$ încît $M(D_t)u^0 = 0$ cu un vector λ^0 corespunzător. Aplicînd transformarea inversă transformării Fourier dată la pct. d), funcţiei u, notînd cu : $u_1 = (\lambda - \lambda_0)\widecheck{u^0}(\lambda)$, aceasta nu va satisface relaţiile (1.14) şi (1.16).

II

Spaţiul $V_e(\Omega)$ se foloseşte la punerea problemei combinate, a problemei cu condiţii de frontieră Dirichlet-Neumann.

Problema se pune în felul următor :

Fiind dat sistemul de ecuaţii $L^0 u = f$, unde $f \in L_2(\Omega)$ se caută o funcţie $u \in L_2(\Omega)$ care satisface următoarele două condiţii :

$$L^0 u = f,\quad f \in L_2(\Omega),\ u \in V_e(\Omega) \tag{2.1}$$

$$(L^0 u, v)_{L_2(\Omega)} = B(u, v) \tag{2.2}$$

pentru orice $v \in V_e(\Omega)$, se vede că prima condiţie este o condiţie de tip Dirichlet pe partea $e \subset \dot{\Omega}$ a frontierei, a doua condiţie este de tip Neumann pe partea e^* a frontierei. Acest lucru se verifică aplicînd formula lui Green. Din (2.2) se găseşte un operator de derivare pe direcţie normală pe partea e^* a frontierei.

Fiindcă L este foarte eliptic, avem pentru $u, v \in V_e(\Omega)$

$$B(u, v) \leqslant C_8 \|u\|_{H_{\bar{s}}} \|v\|_{H_{\bar{s}}},$$

$$B(u, u) \geqslant C_9 \|u\|^2_{H_{\bar{s}}} - k\|u\|^2_{L_2}.$$

Atunci operatorul $L^0 + kI$ ne dă o formă biliniară $B_1(u, v)$ care generează un spaţiu $V'_e(\Omega)$; identic cu spaţiul $V_e(\Omega)$, în care norma este dată de $\|u\|^2_{V'_e(\Omega)} = B_1(u, u)$.

Înseamnă că $L^0 + kI$ are invers mărginit, care transformă $L_2(\Omega)$ în $H_{\bar{s}, e}(\Omega)$, fie $L^1 = (L^0 + kI)^{-1}$.

Putem deduce consecutiv :

$$L^0 u = f, \quad (L^0 + kI)u = f + ku,$$

$$u = L^1 f + L^1 ku, \quad L^1 f = f_1. \tag{2.3}$$

Fiindcă L' transformă pe L_2 în L_2 complet continuu, ecuaţia $u = f_1 + kL_1 u$ satisface alternativele lui Fredholm.

Se vede că în rezolvarea problemei (2.1) şi (2.2) era esenţial ca $V_e(\Omega)$ să aibă o scufundare complet continuă în $L_2(\Omega)$, care se realizează cînd $V_e(\Omega) = H_{\bar{s}, e}(\Omega)$.

Importanţa teoremei lui Aronszajn constă în faptul că permite elaborarea teoremelor de existenţă a soluţiilor unor probleme complexe, de o largă generalitate, inaccesibile prin alte metode.

Problema combinată necesită o comportare diferită a funcţiilor pe diferite părţi ale frontierei ce este realizată prin construirea spaţiului $V_e(\Omega)$, iar rezolvarea problemei, condiţiile în care sînt satisfăcute alternativele lui Fredholm, fac necesară studierea condiţiilor de scufundare a spaţiului $V_e(\Omega)$, în spaţiul $H_{\bar{s},e}(\Omega)$.

Primită la redacţie la 4 iulie 1966

Facultatea de matematică a Universităţii din Craiova

BIBLIOGRAFIE

1. J. Gobert, *Operateurs matriciels de derivation elliptiques et problemes aux limites.* Memoires de la societe royale des sciens de Liege; seria 5, **VI**, *2* (1961).

2. Louis Nirenberg, *Remarkes on strongly elliptic partial differential equations.* Comunication Pure and Applied Mathematics, **8**, 649—675 (1953).

PROPRIETĂŢI ALE SERIEI FOURIER ASOCIATĂ UNEI FUNCŢII NEINTEGRABILE DE SINGULARITĂŢI DATE

DE

MARIANA CRAIU

Se consideră funcţia $f(x)$ definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulţime $\mathcal{M} \subset [-\pi, \pi]$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Fie $\mathcal{M}_5 \subset \mathcal{M}$ o mulţime finită $\mathcal{M}_5 = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_5\}$ care îndeplineşte condiţiile a), b), c). Se studiază proprietăţile seriei Fourier (3) asociată funcţiei neintegrabile $f(x)$.

Rezultatele obţinute sînt conţinute în teoremele : 3.1, 4.1, 4.2, 5.1, 6.1.

1. Să considerăm funcţia $f(x)$ definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulţime $\mathcal{M} \subset [-\pi, \pi]$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Fie $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}$ o mulţime finită $\mathcal{M}_p = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ care îndeplineşte următoarele condiţii :

a) $\xi_1 = -\pi, \ \xi_p = \pi$

b) $\xi_{p+1} - \xi_p = \dfrac{2\pi}{p-1}$

c) funcţia $\varphi^*(x) = f(x) \prod\limits_{k=1}^{p} (x - \xi_k), \ x \in [-\pi, \pi] - \mathcal{M}$ este integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

În această lucrare ne propunem să studiem proprietăţile seriei Fourier asociată funcţiei neintegrabile $f(x)$ pentru $p = 5$. În această situaţie $\xi_k = -\pi + \dfrac{2k\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, iar funcţia $\varphi(x) = \sin 2x f(x)$, $x \in [-\pi, \pi] - \mathcal{M}$ este integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

2. Dacă seria asociată funcţiei integrabile $\varphi(x)$ este :

$$(1) \quad \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots. + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx + \ldots..$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 73–83, BUCUREŞTI, 1967

procedînd ca în [1]¹) trebuie să avem :

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)\equiv\sin 2x\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right], \tag{2}$$

unde seria trigonometrică

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{3}$$

este seria asociată funcției neintegrabile $f(x)$ [1]²). Coeficienții seriei (3) sînt soluții ale sistemului infinit

$$\alpha_0=b_2,\ 2\alpha_1=b_1+b_3,\ 2\alpha_2=b_4,\ 2\alpha_3=-b_1+b_5,\ldots,2\alpha_n=$$
$$=-b_{n-2}+b_{n+2},\ldots$$
$$2\beta_1=a_1-a_3,\ 2\beta_2=a_0-a_4,\ 2\beta_3=a_1-a_5,\ldots,\ 2\beta_n=$$
$$=a_{n-2}-a_{n+2},\ldots$$

soluție care este dată de :

$$a_{4n}=a_0-2\sum_{k=1}^{n}\beta_{4k-2},\quad a_{4n+1}=a_1-2\sum_{k=1}^{n}\beta_{4k-1},\quad a_{4n+2}=a_2-2\sum_{k=1}^{n}\beta_{4k}$$

$$a_{4n+3}=a_1-2\sum_{k=0}^{n}\beta_{4k+1},\quad b_{4n}=2\sum_{k=1}^{n}\alpha_{4k-2},\quad b_{4n+1}=b_1+2\sum_{k=1}^{n}\alpha_{4k-1} \tag{5}$$

$$b_{4n+2}=\alpha_0+2\sum_{k=1}^{n}\alpha_{4k},\quad b_{4n+3}=-b_1+2\sum_{k=0}^{n}\alpha_{4k+1},$$

unde :

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin 2t\cos kt\,\mathrm{d}t,\ \beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin 2t\sin kt\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Dacă înlocuim pe α_k și β_k în (5) și însumăm, obținem coeficienții seriei (3)

$$a_{4n}=a_0+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,[\cos 4\,nt-1]\,\mathrm{d}t,$$

$$a_{4n+1}=a_1+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,[\cos(4n+1)\,t-\cos t]\,\mathrm{d}t$$

$$a_{4n+2}=a_2+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,[\cos(4n+2)\,t-\cos 2t]\,\mathrm{d}t, \tag{7}$$

$$a_{4n+3}=a_I+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,[\cos(4n+3)\,t-\cos t]\,\mathrm{d}t$$

---

¹) Pag. 129.
²) Pag. 130.

şi

$$b_{4n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin 4nt\,\mathrm{d}t,\ b_{4n+1}=b_1+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,[\sin(4n+1)t-\sin t]\,\mathrm{d}t$$

$$(8)\quad b_{4n+2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(4n+2)t\,\mathrm{d}t, b_{4n+3}=-b_1+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)[\sin(4n+3)t+\sin t]\,\mathrm{d}t$$

pentru $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Se observă că $f(x)$ deşi nu este integrabilă pe $[-\pi,\ \pi]$, dacă însă îndeplineşte condiţia $c)$ toate integralele care dau coeficienţii a_k, b_k există.

3. Dacă înlocuim pe a_k şi b_k daţi de (7) şi (8) în (3) şi considerăm pe a_0, a_1, a_2 şi b_1 nedeterminaţi, cum rezultă din identificare, putem enunţa următoarea teoremă :

TEOREMA 3.1. *Fie $f(x)$ o funcţie definită pe $[-\pi,\ \pi]$ în afară de o mulţime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi,\ \pi]$. Fie $\mathfrak{M}_5$ o mulţime care îndeplineşte condiţiile a, b, f îndeplinind în raport cu $\mathfrak{M}_5$ şi condiţia* c). *Seria Fourier asociată funcţiei $f(x)$ este dată de :*

$$f(x)\sim S_0(x)+\lambda_1S_1(x)+\lambda_2S_2(x)+\lambda_3S_3(x)+\lambda_4S_4(x),$$

unde $S_0(x)$ este seria (3) *cu coeficienţii a_k, b_k daţi de* (7) *şi* (8), *unde se ia $a_0=a_1=a_2=b_1=0$ iar $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $S_4(x)$ sînt serii trigonometrice independente de $f(x)$, anume :*

$$S_1(x)\equiv\frac{1}{2}+\cos 4x+\cos 8x+\ldots+\cos 4nx+\ldots\ldots$$

$$(9)\quad\begin{aligned}S_2(x)&\equiv\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos(2n+1)x+\ldots\\ S_3(x)&\equiv\cos 2x+\cos 6x+\cos 10x+\ldots.+\cos(4n+2)x+\ldots\\ S_4(x)&\equiv\sin x-\sin 3x+\sin 5x+\ldots+(-1)^n\sin(2n+1)x+\ldots\end{aligned}$$

λ_i, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$ *fiind numere arbitrare.*

4. Să considerăm funcţiile $\varphi_n(t)$ date pe R de

$$(10)\quad\begin{aligned}&\varphi_{8n}(t)=\sin 4nt,\ \varphi_{8n+1}(t)=\sin(4n+1)t-\sin t,\ \varphi_{8n+2}(t)=\sin(4n+2)t\\ &\varphi_{8n+3}(t)=\sin(4n+3)t-\sin t,\quad \varphi_{8n+4}(t)=\cos 4nt-1,\\ &\varphi_{8n+5}(t)=\cos(4n+1)t-\cos t\\ &\varphi_{8n+6}(t)=\cos(4n+2)t-\cos 2t;\ \varphi_{8n+7}(t)=\cos(4n+3)t-\cos t\end{aligned}$$

care intervin în (7) şi (8).

Să considerăm şi sistemul $\psi_n(t)$ dat pe R de

$$(11)\quad\begin{aligned}&\psi_{8n}(t)=\sin 4nt,\ \psi_{8n+1}(t)=\sin(4n+1)t,\ \psi_{8n+2}(t)=\sin(4n+2)t,\\ &\psi_{8n+3}(t)=\sin(4n+3)t\\ &\psi_{8n+4}(t)=\cos 4nt,\ \psi_{8n+5}(t)=\cos(4n+1)t,\ \psi_{8n+6}(t)=\cos(4n+2)t,\\ &\psi_{8n+7}(t)=\cos(4n+3)t.\end{aligned}$$

Se verifică uşor că avem : $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_r(t)\,\psi_s(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}1, & r=s\\ 0, & r\neq s.\end{cases}$

TEOREMA 4.1. *Sistemele de funcţii* $\varphi_n(t)$ *date de (10) şi* $\psi_n(t)$ *date de (11) sînt biortogonale.*

Un calcul direct ne permite să enunţăm următoarea teoremă privitor la sumabilitatea Cesàro a seriilor S_1, S_2, S_3, S_4 ce intervin în teorema 3.1.

TEOREMA 4.2. a) *Seriile* S_1, S_3 *sînt sumabile* $(C, 1)$ *către* 0 *pe* $[-\pi, \pi] - \mathcal{M}_5$.

b) *Seria* S_2 *este sumabilă* $(C, 1)$ *către* 0 *pe* $[-\pi, \pi] - \{-\pi, 0, \pi\}$.

c) *Seria* S_4 *este sumabilă* $(C, 1)$ *către* 0 *pe* $[-\pi, \pi] - \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

5. În acest aliniat ne ocupăm de comportarea sumelor parţiale $S_n(x)$ pentru $n \to \infty$ într-un punct x de continuitate al funcţiei $f(x)$, fapt ce ne va permite să studiem şi ordinul de creştere al sumelor $s_n(x)$, cît şi stabilirea unui rezultat privind sumabilitatea seriei trigonometrice ataşată funcţiei $f(x)$ către $f(x)$ în puncte de continuitate sau în puncte de discontinuitate de prima speţă.

Ne propunem să demonstrăm următoarea teoremă :

TEOREMA 5.1. *Într-un punct* $x \in [-\pi, \pi]$ *de continuitate al funcţiei* $f(x)$, *sumele parţiale* $s_n(x)$ *ale seriei trigonometrice* (3) *ataşată funcţiei* $f(x)$ *au proprietatea :*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n(x)}{g(n)\, n^{\alpha-1}} = 0, \qquad \alpha < 2$$

pentru orice $g(n) \to \infty$ *cînd* $n \to \infty$, *dacă* $\left[\prod_{k=1}^{5} (x - \xi_k)^{\alpha}\right] f(x)$ *este mărginită pentru* $x \in [-\pi, \pi]$.

Demonstraţie. Vom calcula pe $s_{4n}(x)$, deoarece rezultatele sînt asemănătoare pentru celelalte sume. Folosind (7) şi (8) obţinem :

$$s_{4n}(x) = a_0 \frac{\sin(4n+2)x}{2\sin 2x} + a_1 \frac{\sin 4nx}{2\sin x} + a_2 \frac{\sin 4nx}{2\sin 2x} + b_1 \frac{\sin 4nx}{2\cos x} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) A_n^*(x, t)\, \mathrm{d}t,$$

unde

$$A_n^*(x, t) = \frac{\sin \frac{8n+1}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} - \cos t \frac{\sin 4nx}{2\sin x} - \cos 2t \frac{\sin 4nx}{2\sin 2x} + \sin t \frac{\sin 4nx}{2\cos x} - \frac{\sin(4n+2)x}{2\sin 2x}. \tag{13}$$

Considerăm un punct de continuitate $x \notin \mathcal{M}_5$ al lui $f(x)$. Mai precis, îl luăm în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Funcţia fiind continuă în vecinătatea lui x, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon, x)$ astfel că pentru $t \in [x - \delta, x + \delta]$, $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

Folosind un rezultat cunoscut [2][1] într-un punct de continuitate $x \in [-\pi, \pi]$ al lui $f(x)$, avem :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{8n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} f(x)\, \mathrm{d}t. \tag{14}$$

Ne propunem să evaluăm diferența :

$$S_{4n}(x) - f(x) = B(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[A_n^*(x,t) f(t) - \frac{\sin \frac{8n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} f(x) \right] \mathrm{d}t, \tag{15}$$

unde

$$B(x) = a_0 \frac{\sin(4n+2)x}{2\sin 2x} + a_1 \frac{\sin 4nx}{2\sin x} + a_2 \frac{\sin 4nx}{2\sin 2x} + b_1 \frac{\sin 4nx}{2\cos x}. \tag{16}$$

Pentru $n > \frac{1}{\delta}$, integrala din expresia (15) se poate descompune într-o sumă de integrale de forma :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{-\pi+A} + \int_{-\pi+A}^{-\frac{\pi}{2}-A} + \int_{-\frac{\pi}{2}-A}^{-\frac{\pi}{2}+A} + \int_{-\frac{\pi}{2}+A}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} + \\ + \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{2}-A} + \int_{\frac{\pi}{2}-A}^{\frac{\pi}{2}+A} + \int_{\frac{\pi}{2}+A}^{\pi-A} + \int_{\pi-A}^{\pi} = \sum_{i=1}^{11} I_i. \end{aligned} \tag{17}$$

Integralele I_2, I_4, I_5, I_8, I_{10} sînt mărginite, deoarece integranții sînt funcții continue pe intervalul de integrare. Putem scrie deci :

$$I_\alpha \leqslant M_\alpha, \text{ dacă } \alpha = 2, 4, 5, 8, 10.$$

Evaluăm integrala I_6

$$I_6 = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \frac{\sin \frac{8n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} [f(t) - f(x)]\, \mathrm{d}t + \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} C(x,t) f(t)\, \mathrm{d}t, \tag{18}$$

unde

$$C(x,t) = -\cos t \frac{\sin 4nx}{2\sin x} - \cos 2t \frac{\sin 4nx}{2\sin 2x} + \sin t \frac{\sin 4nx}{2\cos x} - \frac{\sin(4n+2)x}{2\sin 2x}.$$

---

[1] pag. 87, vol. I.

Avînd în vedere că $C(x, t)$ este continuă pe $\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]$ în raport cu t, (18) se poate scrie :

$$(18') \quad I_6 \leqslant 2\varepsilon \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \frac{\sin \frac{8n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} \cdot \frac{\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}} \, \mathrm{d}t + M' \leqslant \frac{\varepsilon\pi(8n+1)}{4} + M'.$$

Integrala I_7 se poate scrie :

$$(19) \quad \begin{aligned} I_7 &= \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\delta} \frac{\sin \frac{8n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} [f(t) - f(x)] \, \mathrm{d}t + \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\delta} C(x,t) f(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\delta} \frac{\sin \frac{8n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} \, \frac{\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}} \, \mathrm{d}t + M''. \end{aligned}$$

Deoarece : $\dfrac{\frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, iar $\left| \sin \dfrac{8n+1}{2}(t-x) \right| < 1$ pentru I_7, obținem

$$(19') \quad I_7 \leqslant \varepsilon \frac{\pi}{2} (\ln \delta + \ln n) + M''.$$

Integralele I_1, I_3, I_8, I_9, I_{11} sînt de același tip. Vom evalua numai integrala I_8, raționamentul rămînînd același pentru celelalte integrale. Avem :

$$(20) \quad \begin{aligned} I_8 &= \int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{2}-A} \frac{\sin \frac{8n+1}{2} t \cos \frac{8n+1}{2} x}{2 \sin \frac{t-x}{2}} f(t) \, \mathrm{d}t - \int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{2}-A} \frac{\sin \frac{8n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} f(x) \, \mathrm{d}t - \\ &- \int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{2}-A} D(x,t) f(t) \, \mathrm{d}t + \int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{2}-A} \frac{\sin \frac{t}{2} \lambda(x)}{2 \sin \frac{t-x}{2} \sin 2x} f(t) \, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

unde :

$$D(x,t) = -\frac{\sin\frac{8n+1}{2}x\cos\frac{8n+1}{2}t\sin 2x - 2\cos t\cos x\sin 4nx\sin\frac{x}{2}\cos\frac{t}{2} +}{2\sin\frac{t-x}{2}\sin 2x}$$

$$\frac{+\cos 2t\sin 4nx\sin\frac{x}{2}\cos\frac{t}{2} - \sin(4n+2)x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}\sin 2x}.$$

În expresia (20) integrala a 3-a în vecinătatea originii este de forma $\mu(x)\,n^2\,t^2 f(t)$, iar, în celelalte puncte, funcţia este continuă. Ţinînd seamă de condiţiile impuse, rezultă că integrala este mărginită.

Integralele 2 şi 4 din (20) sînt mărginite, integranţii fiind funcţii continue.

Pentru prima integrală din expresia (20) avem :

$$(20') \qquad \left|\int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{2}-A} \frac{\sin\frac{8n+1}{2}t\cos\frac{8n+1}{2}x}{2\sin\frac{t-x}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{2}-A} \left|\frac{\sin\frac{8n+1}{2}t}{2\sin\frac{t-x}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 4M'''n^{\alpha-1}.$$

Ţinînd seama de relaţiile (18), (19), (20), rezultă teorema 5.1.

Consecinţă. În cazul particular $\alpha = 1$, ţinînd seama de (19′) şi în condiţiile teoremei 5.1, rezultă proprietatea :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n(x)}{\ln n} = 0.$$

6. În cele ce urmează ne propunem să stabilim sumabilitatea $(C, 1)$ a seriei $S_0(x)$.

Sumele parţiale ale seriei $S_0(x)$ sînt :
$s_{4n}(x)$ este dată de (12),

$$s_{4n+1}(x) = a_0\frac{\sin(4n+2)x}{2\sin 2x} + a_1\frac{\sin(4n+2)x}{2\cos x} + b_1\frac{\sin(4n+2)x}{2\cos x} +$$

$$+ a_2\frac{\sin 4nx}{2\sin 2x} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,B_n^{*}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

cu :

$$B_n^*(x,\ t) = \frac{\sin \frac{8n+3}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} - \cos t \frac{\sin (4n+2)\, x}{2 \sin x} - \cos 2t \frac{\sin 4nx}{2 \sin 2x} -$$

$$- \sin t \frac{\sin (4n+2)\, x}{2 \cos x} - \frac{\sin\ (4n+2)\ x}{2 \sin 2x}$$

$$s_{4n+2}(x) = a_0 \frac{\sin\ (4n+2)\ x}{2 \sin 2x} + a_1 \frac{\sin (4n+2)\ x}{2 \cos x} + b_1 \frac{\sin (4n+2)\ x}{2 \cos x} +$$

$$+ a_2 \frac{\sin (4n-4)\ x}{2 \sin 2x} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, C_n^*(x, t)\, \mathrm{d}t$$

cu :

$$C_n^*(x, t) = \frac{\sin \frac{8n+5}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} - \cos t \frac{\sin (4n+2)\, x}{2 \sin x} - \cos 2t \frac{\sin (4n+4)\, x}{2 \sin 2x} -$$

$$- \sin t \frac{\sin (4n+2)\, x}{2 \cos x} - \frac{\sin (4n+2)\, x}{2 \sin 2x}$$

$$s_{4n+3}(x) = a_0 \frac{\sin\ (4n+2)\ x}{2 \sin 2x} + a_1 \frac{\sin\ (4n+4)\, x}{2 \sin x} + b_1 \frac{\sin (4n+4)\, x}{2 \cos x} +$$

$$+ a_2 \frac{\sin (4n+4)\, x}{2 \sin 2x} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n^*(x, t)\, \mathrm{d}t$$

cu

$$D_n^*(x, t) = \sin \frac{8n+7}{2}(t-x) - \cos t \frac{\sin (4n+4)\, x}{2 \sin x} - \cos 2t \frac{\sin (4n+4)\, x}{2 \sin 2x} -$$

$$- \sin t \frac{\sin (4n+4)\, x}{2 \cos x} - \frac{\sin (4n+2)\, x}{2 \sin 2x}.$$

Calculînd suma :

$$\sigma_{4n}(x) = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{4n-1}}{4n}$$

se obţine :

$$4n\sigma_{4n}(x) = 2a_0 \frac{\sin^2 2nx}{\sin^2 2x} - 2a_1 \frac{\sin^2 2nx}{2 \sin x} - 2b_1 \frac{\sin^2 2nx}{2 \sin x} -$$

$$- 2a_2 \frac{\sin^2 2nx}{\sin^2 2x} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t \tag{21}$$

cu :

$$N(x, t) = \frac{\sin^2 2n(t-x)}{2\sin^2\frac{t-x}{2}} - 2\,\frac{\sin^2 2nx \cos t \cos x}{2\sin^2 x} - \frac{\cos 2t}{4\sin^2 2x} \times$$

(21')

$$\times\ [8\cos 2x \sin^2 2nx + 2\sin^2 2x] - \frac{2\sin^2 2nx \sin t}{2\sin x} - \frac{\sin 2nx \sin(2n-1)x}{2\sin x \sin 2x}.$$

Vom arăta că :

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{4n}(x) = f(x).$$

Pentru aceasta este suficient de arătat că :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} N(x, t)f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \tag{22}$$

deoarece ceilalţi termeni din (20) tind la zero ; pentru $n \to \infty$ vom alege un punct $x \notin \mathfrak{M}_5$ de continuitate pentru funcţia $f(x)$ în intervalul $[-\pi, \pi]$, şi anume în intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ şi un interval $[x-\delta, x+\delta] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

În vecinătatea originii, N se poate pune sub forma :

21'') $$N(x, t) = \frac{\sin^2 2nt \cos^2 2nx}{2\sin^2\frac{t-x}{2}} - \frac{\sin 2nt \cos 2nx \sin 2nx \cos 2nt}{2\sin^2\frac{t-x}{2}} + \varphi_3(x, t),$$

(unde :

$$\varphi_3(x, t) = \frac{\sin^2 2nx \cos^2 2nt}{2\sin^2\frac{t-x}{2}} - \frac{\sin^2 2nx\,(\cos t \cos x + \sin t)}{\sin^2 x} -$$

$$-\frac{\cos 2t}{4\sin^2 2x}[8\cos 2x \sin^2 2nx + 2\sin^2 2x] - \frac{\sin 2nx \sin(2n-1)x}{2\sin x \sin 2x}$$

Integrala (22) se descompune într-o sumă de integrale de forma (17).

Vom demonstra că integrala pe intervalul care conţine originea, anume integrala I_8, este mărginită, raţionamentul repetîndu-se şi pentru restul de integrale din (17), efectuate pe intervale care conţin celelalte puncte din $\mathfrak{M}_5$,

$$\int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{2}-A} N(x, t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

se descompune într-o sumă de integrale de tipul :

$$\int_0^\gamma \frac{\sin^2 2nt}{2\sin^2\frac{t-x}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t,\ \int_0^\gamma \frac{\sin 2nt}{2\sin^2\frac{t-x}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ şi } \int_0^\gamma t f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{23}$$

Pentru prima integrală din (23) avem :

$$\left|\int_0^{\gamma} \frac{\sin^2 2nt}{t^{\alpha}} \cdot \frac{t^{\alpha} f(t)}{\sin^2 \frac{t-x}{2}}\, \mathrm{d}t\right| \leqslant M \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin^2 2nt}{t^{\alpha}}\, \mathrm{d}t + M' \int_{\frac{1}{n}}^{\gamma} \frac{\sin^2 2nt}{t^{\alpha}}\, \mathrm{d}t \leqslant M' n^{\alpha-1}$$

la fel :

$$\left|\int_0^{\gamma} \frac{\sin 2nt}{t^{\alpha}} \cdot \frac{t^{\alpha} f(t)}{\sin^2 \frac{t-x}{2}}\, \mathrm{d}t\right| \leqslant M \left|\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin 2nt}{t^{\alpha} \sin^2 \frac{t-x}{2}}\, \mathrm{d}t\right| + \left|\int_{\frac{1}{n}}^{\gamma} \frac{\sin 2nt}{t^{\alpha} \sin^2 \frac{t-x}{2}}\, \mathrm{d}t\right| =$$

$$= M \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{2nt}{t^{\alpha}}\, \mathrm{d}t + M' \int_{\frac{1}{n}}^{\gamma} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} \leqslant M'' n^{\alpha-1}.$$

Rămîne de arătat că :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{8n\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\sin^2 2n(t-x)}{\sin^2 \frac{t-x}{2}} f(t)\, \mathrm{d}t = f(x) \tag{24}$$

deoarece celelalte integrale au integrantul mărginit pe intervalul pe care se efectuează.

Fie funcţia

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi,\ x-\delta] \cup [x+\delta,\ \pi] \\ f(t), & t \in (x-\delta,\ x+\delta). \end{cases}$$

$\psi(t)$ este integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, continuă în punctul x şi, conform unui rezultat cunoscut, sumele $\sigma_n(x, t)$ ale funcţiei ψ sînt convergente pentru $n \to \infty$ către $\psi(x)$, prin urmare :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\pi n} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \left(\frac{\sin 2n(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}}\right)^2 \psi(t)\, \mathrm{d}t = \psi(x). \tag{25}$$

Dar cum $\psi(t) = f(t)$ pentru $t \in (x-\delta,\ x+\delta)$, rezultă $\psi(x) = f(x)$. Rezultatul de mai sus este adevărat şi dacă x este un punct de discontinuitate de prima speţă, iar valoarea $f(x)$ este dată de :

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Raţionamentele expuse mai sus ne îngăduie să enunţăm următoarea :

TEOREMA **6.1.** *Fie $f(x)$ o funcţie definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulţime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$.*

Dacă $f(x)$ îndeplinește toate condițiile teoremei (5.1), atunci în orice punct de continuitate $x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}_5$ al lui $f(x)$ seria $S_0(x)$ din (α) este sumabilă $(C, 1)$ către valoarea $f(x)$, iar în punctele de discontinuitate de prima speță, seria $S_0(x)$ este sumabilă $(C, 1)$ către valoarea:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Primită la redacție la 4 mai 1966

Institutul Politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”,
București

BIBLIOGRAFIE

1. MARCEL N. ROSCULEȚ, *Recherches sur les séries trigonométriques*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XI**, 2 (1966).
2. А. ЗИГМУНД, *Тригонометрические ряды*. Том. I. Издательство „МИР”, Москва, 1956.

O PROBLEMĂ VARIAȚIONALĂ PENTRU UN CORP DE MASĂ VARIABILĂ

DE

IOAN POP

(Cluj)

Se determină legea de variație a masei și a vitezelor efective de expulzare și captare a particulelor unui corp de masă variabilă, astfel ca porțiunea activă a traiectoriei parcurse cu rezerva de energie dată, să fie maximă. Rezultatele obținute se aplică pentru două legi de variație a rezistenței mediului.

1. După cum se știe, metodele calculului variațional aplicate la studiul mișcării rachetelor (corpuri de masă variabilă), au condus la o serie de aplicații pentru determinarea regimurilor optime de mișcare. Astfel, într-o serie de cazuri, aceste metode permit ca din infinitatea regimurilor posibile de mișcare, descrise de ecuații diferențiale neliniare, să separăm o clasă mai îngustă de mișcări pentru care ecuațiile diferențiale neliniare să se integreze prin cvadraturi.

2. Să considerăm un corp de masă variabilă care se mișcă vertical în sus datorită captării și detașării simultane de particule. Presupunem că mișcarea are loc într-un mediu rezistent, iar cîmpul forțelor de greutate este omogen.

Ecuația care descrie asemenea mișcare este ecuația lui Mescerski generalizată, care, proiectată pe direcția mișcării are forma [1]:

$$m \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} u_1(t) - \frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t} u_2(t) + mg + Q(\dot{s}) = 0, \tag{1}$$

unde $m(t)$ este masa corpului; $m_1(t)$ masa particulelor expulzate; $m_2(t)$ masa particulelor captate; $v = \dot{s}$ viteza de mișcare a corpului; $u_1(t)$ viteza efectivă de expulzare; $u_2(t)$ viteza efectivă de captare; g accelerația gravitațională; s distanța de la central Pămîntului; $Q(\dot{s})$ rezistența mediului.

Vom presupune că masa particulelor expulzate variază conform legii

$$m_1 = m_0 f(t), \tag{2}$$

iar debitul pe secundă (captare) şi consumul pe secundă (evacuare) se exprimă prin relaţia [2],

$$\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = \beta \frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}, \tag{3}$$

unde m_0 este masa iniţială a corpului iar β o constantă ce caracterizează creşterea masei particulelor expulzate faţă de masa particulelor ataşate. Atunci rezultă că

$$\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = m_0 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t} = \frac{m_0}{\beta} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

În acest fel masa corpului poate fi scrisă în forma

$$m = m_0 - m_1 + m_2 = a m_0 (1 - f), \tag{5}$$

cu $a = 1 - \frac{1}{\beta}$ şi $\beta > 1$.

Ecuaţia (1), conform relaţiilor (2) — (5), poate fi scrisă astfel,

$$a m_0 (1 - f) \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + m_0 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} u_1 - \frac{m_0}{\beta} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} u_2 + \\ + a m_0 (1 - f) g + Q(\dot{s}) = 0. \tag{6}$$

Presupunem că corpul de masă variabilă posedă rezerva de energie [2],

$$E = \mu_1 \int_0^{t_1} \frac{1}{2} \left(-\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} \right) u_1^2 \mathrm{d}t + \mu_2 \int_0^{t_1} \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t} \right) u_2^2 \mathrm{d}t = \\ = \mu_1 \int_0^{t_1} \frac{1}{2} \left(m_0 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right) u_1^2 \mathrm{d}t + \mu_2 \int_0^{t_1} \frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{\beta} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right) u_2^2 \mathrm{d}t, \tag{7}$$

unde t_1 este timpul total de mişcare pe porţiunea activă a traiectoriei, iar $0 \leqslant \mu_1 \leqslant 1$ şi $0 \leqslant \mu_2 \leqslant 1$.

Se pune problema determinării legii de variaţie a masei $m(t)$ şi a vitezelor efective de expulzare $u_1(t)$ şi de captare $u_2(t)$ a particulelor, astfel ca porţiunea activă s_1 a traiectoriei parcurse cu rezerva de energie dată E, să fie maximă.

Dacă se scrie s_1 în forma

$$s_1 = \int_0^{t_1} \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t, \tag{8}$$

atunci problema se reduce la aflarea maximului funcționalei (8) cu condițiile (1) și (7). Pentru asemenea problemă variațională ecuațiile lui Euler au forma [3]:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{u}_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{u}_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} = 0, \tag{9}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{f}} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{s}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{s}} + \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \theta,
$$

unde

$$
\Phi = \dot{s} - \frac{1}{2}\mu_1\lambda_1 m_\theta \dot{f}\, u_1^2 + \frac{1}{2\beta}\mu_2\lambda_2 m_0 \dot{f}\, u_2^2 + \tag{10}
$$

$$
+ \lambda_3(t)\left[am_0(1-f)\,\ddot{s} + m_0 \dot{f}\, u_1 - \frac{m_0}{\beta}\hat{f}\, u_2 + am_0(1-f)\,g + Q(\dot{s})\right].
$$

Ținînd seama de relația (10), sistemul (9) devine:

$$
\begin{gathered}
\lambda_3 - \mu_1\lambda_1 u_1 = 0, \\
\lambda_3 - \mu_2\lambda_2 u_2 = 0, \\
\dot{u}_1 - \frac{\dot{u}_2}{\beta} + a\ddot{s} + ag = 0, \\
(u_1 m)'' - \left(u_1 \frac{\partial Q}{\partial \dot{s}}\right)' = 0.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Prin integrare din (11) rezultă

$$
u_1 = u_1^0 + \frac{\mu_2\lambda_2(\beta-1)}{\mu_1\lambda_1 - \mu_2\lambda_2\beta}(v+gt), \tag{12}
$$

$$
u_2 = \frac{\mu_1\lambda_1}{\mu_2\lambda_2}\left[u_1^0 + \frac{\mu_2\lambda_2(\beta-1)}{\mu_1\lambda_1 - \mu_2\lambda_2\beta}(v+gt)\right],
$$

u_1^0 fiind viteza inițială de detașare a particulelor.

Funcția $m(t)$ se determină din ecuația

$$
\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u_1 \frac{\partial Q}{\partial \dot{s}}\right) = 0, \tag{13}
$$

unde $z = u_1 m$. Astfel, se obține

$$
m(t) = \frac{1}{u_1}\left[\int_0^t \left(u_1 \frac{\partial Q}{\partial \dot{s}} + C_1\right)\mathrm{d}t + C_2\right], \tag{14}
$$

constantele de integrare C_1 și C_2 determinîndu-se din condițiile inițiale ale problemei.

Să presupunem acum că este îndeplinită condiţia $\mu_1 \lambda_1 = \mu_2 \lambda_2$. Atunci, din relaţiile (12), se observă că $u_1 = u_2$, adică viteza particulelor expulzate este egală cu cea a particulelor captate. În această condiţie, din (12) rezultă

$$u_1 = u_1^0 - v - gt. \tag{15}$$

3. În cele ce urmează, să aplicăm rezultatele obţinute mai sus pentru cazul cînd rezistenţa mediului variază liniar cu viteza şi proporţional cu pătratul vitezei.

În primul caz ecuaţia (6) şu expresia (14), conform cu (15), se vor scrie

$$am_0(1 - f)\,\ddot{s} + am_0 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\, u_1 + am_0(1 - f)\, g + k\dot{s} = 0, \tag{16}$$

$$am_0(1 - f) = (u_1^0 - v - gf)^{-1}\Big[(ku_1^0 + C_1)\, t - \\ - \frac{kgt^2}{2} - ks + ks_0 + C_2\Big]. \tag{17}$$

Din acest sistem de ecuaţii diferenţiale în necunoscutele s şi f respectiv m, cu condiţiile iniţiale $s\,(0) = s_0$ şi $f\,(0) = f_0$ respectiv $m\,(0) = m_0$, rezultă

$$\begin{aligned} s\,(t) &= s_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{4}, \\ v\,(t) &= v_0 - \frac{gt}{2}, \\ u_1(t) &= u_1^0 - v_0 - \frac{gt}{2}, \\ m\,(t) &= \frac{1}{u_1}\left[m_0 u_1^0 + kt\left(v_0 - \frac{gt}{4}\right)\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

În cazul cînd rezistenţa mediului este proporţională cu pătratul vitezei, ecuaţia (6) şi expresia masei (14) se vor scrie astfel :

$$am_0(1 - f)\,\ddot{s} + am_0 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} u_1 + am_0(1 - f)\, g + k_1\, \dot{s}^2 = 0, \tag{19}$$

$$am_0(1 - f) = (u_1^0 - v - gt)^{-1}\Big[2k_1 u_1^0 s - k_1\, gt^2 + C_1 t - \\ - \int_0^t \dot{s}^2\, \mathrm{d}t + C_2 - 2k_1\, u_1^0 s_0\Big]. \tag{20}$$

Din sistemul de ecuaţii diferenţiale (19), (20) rezultă

$$s(t) = s_0 + \frac{u_1^0}{3} t - \frac{1}{27g} [(u_1^{02} + 6gt - 3K)^{3/2} - (u_1^{02} - 3K)^{3/2}], \tag{21}$$

unde $K = \frac{C_1}{k_1}$.

Cunoscînd funcţia $s(t)$ se poate deduce viteza $v(t) = \dot{s}(t)$, după care se obţine $u_1(t)$ şi $m(t)$. În acest fel, problema variaţională pusă este rezolvată, adică am găsit o asemenea funcţie, $s(t)$, care poate lua o valoare maximă la extremitatea porţiunii active a traiectoriei parcurse de corpul a cărui masă $m(t)$ variază datorită emisiei şi captării simultane.

Primită la redacţie la 31 mai 1966

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii „Babeş-Bolyai" din
Cluj.

BIBLIOGRAFIE

1. А. А. Космодемьянский, *Курс теоретической механики*. Москва, 1955, p. 495.
2. Э. Токсапуло, *Решение одной экстремальной задачи механики переменной массы*. Труды первой Казахстанской межвузовской научной конференции по математике и механике. Алма-Ата, 1965, p. 250—254.
3. M. A. Lavrientiev şi L. A. Liusternic, *Curs de calcul variaţional*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1955, p. 84.

SOLUȚII ALE ECUAȚIILOR STRATULUI LIMITĂ NESTAȚIONAR TRIDIMENSIONAL

DE

IOAN POP

(Cluj)

Se integrează ecuațiile stratului limită nestaționar tridimensional, în ipoteza că viteza mișcării potențiale exterioare are componentele $Ae^{nt} F(x, y)$, $Ae^{nt} G(x, y)$.

1. Pentru un corp care execută o mișcare impulsivă, ecuațiile stratului limită nestaționar tridimensional au fost integrate inițial de către L. C. Squire [1], iar recent Z.U.A. Warsi [2] a integrat aceste ecuații în cazul cînd viteza la suprafața exterioară a stratului limită are componentele $At^{\alpha} U_0(x, y)$ și $At^{\alpha} V_0(x, y)$, unde α este un număr pozitiv iar A o constantă.

În această Notă ne propunem să integrăm aceste ecuații presupunînd că viteza mișcării potențiale exterioare este de forma $Ae^{nt} F(x, y)$ respectiv $Ae^{nt} G(x, y)$, în care $n > 0$. Soluții de acest tip au fost considerate de E. J. Watson [3] în studiul stratului limită nestaționar plan, de L. A. Rozin [4], R. Așkovici [5] etc., pentru studiul stratului limită nestaționar din jurul unui corp de rotație.

Ecuațiile stratului limită nestaționar tridimensional se deduc din ecuațiile de mișcare ale fluidelor scrise în coordonate curbilinii ortogonale [6], și au următoarea formă [1]:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_2}\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - k_2 uv + k_1 v^2 = -\frac{1}{\rho h_1}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$(2) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{h_2}\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + k_2 u^2 - k_1 uv = -\frac{1}{\rho h_2}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

iar ecuația continuității este

$$(3) \qquad \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - k_1 u - k_2 v = 0,$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 91–95, BUCUREȘTI, 1967

unde

$$k_1 = -\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x} \quad \text{și} \quad k_2 = -\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial y}.$$

În aceste ecuații coordonatele curbilinii x și y se iau pe suprafața corpului, iar z perpendicular pe el; k_1 și k_2 sînt curburile geodezice ale curbelor de coordonate $x = \text{const.}$ și $y = \text{const.}$; u, v, w sînt componentele vitezei în lungul lui x, y respectiv z.

Condițiile la limită ale problemei sînt

$$\begin{aligned} &u = v = w = 0 && \text{pentru } z = 0, \\ &u \to U(x, y, t),\ v \to V(x, y, t), && \text{pentru } z \to \infty, \end{aligned} \tag{4}$$

U și V fiind componentele vitezei mișcării potențiale exterioare, pe care le considerăm de următoarele forme

$$U(x, y, t) = A\mathrm{e}^{nt} F(x, y), \quad V(x, y, t) = A\mathrm{e}^{nt} G(x, y). \tag{5}$$

2. Pentru integrarea sistemului de ecuații (1)— (3) cu condițiile la limită (4), vom aplica metoda aproximațiilor succesive [7], folosită în literatură în probleme similare.

Astfel, pentru primele două aproximații ale vitezei în stratul limită,

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, z, t) + u_1(x, y, z, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, z, t) + v_1(x, y, z, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, z, t) + w_1(x, y, z, t), \end{aligned} \tag{6}$$

unde $u_1 << u_0$ etc., din (1) — (3) obținem următoarele sisteme de ecuații pentru sistemele de funcții (u_0, v_0, w_0) și (u_1, v_1, w_1):

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \frac{\partial U}{\partial t}, \\ &\frac{\partial v_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} = \frac{\partial V}{\partial t}, \\ &\frac{1}{h_1}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} - k_1 u_0 - k_2 v_0 = 0 \end{aligned} \right. \tag{7}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = \frac{U}{h_1}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{V}{h_2}\frac{\partial U}{\partial y} - k_2 U V + k_1 V^2 - \\ &\qquad - \frac{u_0}{h_1}\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{v_0}{h_2}\frac{\partial u_0}{\partial y} - w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} + k_2 u_0 v_0 - k_1 v_0^2, \\ &\frac{\partial v_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} = \frac{U}{h_1}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{V}{h_2}\frac{\partial V}{\partial y} + k_2 U^2 - k_1 U V - \\ &\qquad - \frac{u_0}{h_1}\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{v_0}{h_2}\frac{\partial v_0}{\partial y} - w_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} - k_2 u_0^2 + k_1 u_0 v_0, \end{aligned} \right. \tag{8}$$

cu condiţiile la limită :

$$
(9)\qquad \left.\begin{array}{l} u_0 = v_0 = w_0 = 0 \\ u_1 = v_1 = w_1 = 0 \end{array}\right\} \text{pentru } z = 0, \qquad \left.\begin{array}{l} u_0 \to U(x,y,t),\ v_0 \to V(x,y,t) \\ u_1 = v_1 = 0 \end{array}\right\} \text{pentru } z \to \infty.
$$

Dacă soluţia sistemului (7) o alegem în forma

$$
(10)\qquad \begin{aligned} u_0 &= A\mathrm{e}^{nt}\,Fg_0'(\eta), \\ v_0 &= A\mathrm{e}^{nt}\,Gg_0'(\eta), \end{aligned}
$$

unde $\eta = z\sqrt{\frac{n}{\nu}}$, atunci din sistemul (7) rezultă următoarea ecuaţie diferenţială pentru determinarea funcţiei g_0,

$$
(11)\qquad g_0''' - g_1' = 1,
$$

care va trebui rezolvată cu condiţiile la limită

$$
(12)\qquad g_0(0) = g_1'(0) =0,\quad g_0'(\infty) = 1.
$$

Din (11) şi (12) obţinem

$$
(13)\qquad g_0(\eta) = \eta - 1 + \mathrm{e}^{-\eta},
$$

iar soluţia sistemului (7) va fi :

$$
(14)\qquad \begin{aligned} u_0 &= A\mathrm{e}^{nt}F(1 - \mathrm{e}^{-\eta}), \\ v_0 &= A\mathrm{e}^{nt}G(1 - \mathrm{e}^{-\eta}), \\ w_0 &= -\sqrt{\frac{\nu}{n}}\,A\mathrm{e}^{nt}L(\eta - 1 + \mathrm{e}^{-\eta}), \end{aligned}
$$

unde

$$
L = \frac{1}{h_1}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial G}{\partial y} - k_1F - k_2G.
$$

3. Acum se poate explicita sistemul pentru aproximaţia de ordinul doi a vitezei. Astfel, din (8) obţinem :

$$
(15)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} &= A^2\mathrm{e}^{2nt}\,[M(1 - g_0'^2) + LFg_0g_0''], \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} &= A^2\mathrm{e}^{2nt}\,[N(1 - g_0'^2) + LGg_0g_0''], \end{aligned}
$$

unde

$$
M = \frac{F}{h_1}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{G}{h_2}\frac{\partial F}{\partial y} - k_2FG + k_1G^2,
$$

$$
N = \frac{F}{h_1}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{G}{h_2}\frac{\partial G}{\partial y} + k_2F^2 - k_1FG.
$$

Să căutăm soluția sistemului (15) în forma:

$$u_1 = \frac{1}{n} A^2 e^{2nt} [M g_1'(\eta) + L F g_2'(\eta)], \tag{16}$$
$$v_1 = \frac{1}{n} A^2 e^{2nt} [N g_1'(\eta) + L G g_2'(\eta)].$$

Înlocuind relațiile (16) în sistemul (15), obținem ecuațiile diferențiale ordinare satisfăcute de g_1 și g_2,

$$g_1''' - 2g_1' = -1 + g_0'^2, \tag{17}$$
$$g_2''' - 2g_2' = -g_0 g_0''$$

iar, conform cu (9), condițiile la limită corespunzătoare vor fi

$$g_1(0) = g_1'(0) = g_1'(\infty) = 0, \tag{18}$$
$$g_2(0) = g_2'(0) = g_2'(\infty) = 0.$$

Se găsește că

$$g_1' = \frac{1}{2} e^{-2\eta} + 2e^{-\eta} - \frac{5}{2} e^{-\sqrt{2}\eta}, \tag{19}$$
$$g_2' = \frac{7}{2} e^{-\sqrt{2}\eta} + (-3 + \eta) e^{-\eta} - \frac{1}{2} e^{-2\eta},$$

prin urmare

$$u = A e^{nt} \left[F g_0'(\eta) + \frac{1}{n} A e^{nt} (M g_1'(\eta) + L F g_2'(\eta)) \right], \tag{20}$$
$$v = A e^{nt} \left[G g_0'(\eta) + \frac{1}{n} A e^{nt} (N g_1'(\eta) + L G g_2'(\eta)) \right].$$

Legătura dintre poziția punctului de desprindere a stratului limită de corp și intervalul de timp corespunzător de la începutul mișcării se află din condiția

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = 0; \tag{21}$$

aceasta conduce la următoarea formulă pentru spațiul parcurs de corp de la momentul începerii mișcării pînă în momentul cînd stratul limită se desprinde de el,

$$S_{\text{despr.}} = -\frac{F g_0''(0)}{M g_1''(0) + L F g_2''(0)}, \tag{22}$$

unde

$$g_0''(0) = 1, \; g_0''(0) = -3 + \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad g_2''(0) = 5 - \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Dacă corpul este axial-simetric ($h_1 = 1$ şi $h_2 = r$), atunci regăsim formula dedusă de R. Aşkovici [5], pentru calculul spaţiului parcurs de un corp axial-simetric de la momentul începerii mişcării pînă în momentul cînd stratul limită se desprinde de el, adică

$$s_{\text{despr.}} = -\frac{1}{(2-\sqrt{2})F' + \left(5 - \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)\frac{F}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}}. \tag{23}$$

Primită la redacţie la 18 mai 1966

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii „Babeş-Bolyai" din
Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. L. C. Squire, *Boundary layer growth in three dimensions.* Phil. Mag., Seria 7, **45**, *371*, 1272–1283 (1954).
2. Z. U. A. Warsi, *A note on three-dimensional boundary layer growth.* Appl. sci. Res., A, **13**, *4–5*, 312–316 (1964).
3. E. J. Watson, *Boundary-layer growth.* Proc. Roy. Soc., A, **231**, *1184*, 104–116 (1955).
4. Л. А. Розин, *Развитие ламинарного пограничного слоя около бесконечного диска и шара, вращающихся вокруг оси.* Изв. Акад. наук СССР, серия Механики и Машиностроения, (1960) вып. 4, 176—178.
5. Р. Ашкович, *Нестационарный пограничный слой на телах вращения при внешней скорости, зависящей от времени по степенному и экспоненциальному закону.* Publications l'Institut Mathématique, Belgrad, *5* (*19*) 55–67) (1965).
6. C. Iacob, *Introduction mathématque à la Mécanique des Fluides.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, — Gauthier–Villars, Paris, 1959, p. 293.
7. Л. Г. Лойцянский, *Ламинарный пограничный слой,* Москва, 1962, p. 115.

O GENERALIZARE A PROBLEMEI LUI JUKOVSKI ÎN TEORIA FILTRAȚIEI

DE

GH. PETRESCU

(Piteşti)

În lucrare se studiază mişcarea de filtrație a unui fluid perfect, domeniul mişcării fiind cel din fig. 1. Considerînd pe suprafața de alimentare condiția la limită (4), se obține potențialul complex (7), cu ajutorul căruia se determină parametric o familie de curbe de alimentare AB (17) şi linia liberă corespunzătoare (19).

1. În studiul mişcărilor de filtrație în medii poroase, o importanță deosebită o au mişcările cu suprafață liberă. Determinarea acestei suprafețe se dovedeşte uneori foarte dificilă.

Studiul mişcărilor potențiale plane este considerabil uşurat prin trecerea de la planul fizic, ($z = x + iy$), la planul potențialului complex, ($f = \varphi + i\psi$) şi apoi la planul ajutător al funcției lui Jukovski, ($J = f(z) - ikz) = (\varphi + ky - i(\psi - kx)$), care permite reprezentarea parametrică a suprafeței libere.

Cu ajutorul funcției $J(z)$, N. E. Jukovski a studiat mişcarea de filtrație a unui fluid perfect pe sub un perete vertical impermeabil de lungime finită, mediul poros ocupînd întregul semiplan inferior $\operatorname{Im} z < 0$ [1], [2].

În cele ce urmează vom folosi o metodă semiinversă de determinare a unor mişcări de acest tip, pentru o familie de suprafețe de alimentare AB (fig. 1).

2. Să considerăm mişcarea staționară plană a unui fluid perfect într-un mediu poros omogen cu coeficientul de filtrație k, domeniul fizic al mişcării fiind cel din figura 1, în care AB este suprafața de alimentare, BC este un perete impermeabil de lungime cunoscută l, iar DE este suprafața liberă a fluidului în mediul poros.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 97–108, BUCUREŞTI, 1967

Vom admite legea liniară de filtrație a fluidului în mediul poros :

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi \tag{1}$$

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\gamma} + y\right).$$

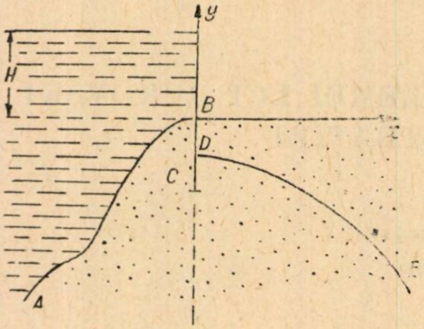


Fig. 1

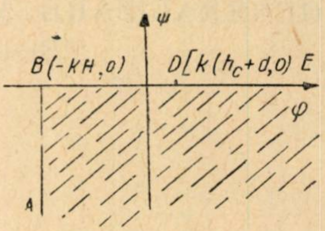


Fig. 2

Condițiile la limită în planul fizic sînt :

$$\begin{aligned} &-\text{Pe } AB; \quad \psi = \text{constant} = -kH \\ &-\text{Pe } BCD; \quad \varphi = 0 \\ &-\text{Pe } DE; \quad \psi = 0 \text{ și } \varphi + ky = kh_c \end{aligned} \tag{2}$$

Aici, h_c este o constantă care depinde de capilaritatea mediului poros, numită înălțime de capilaritate [2].

Domeniul mișcării în planul potențialului complex este deci cel din figura 2.

Considerînd planul funcției lui Jukovski, vom avea următoarele condiții la limită :

$$\begin{aligned} &-\text{Pe } BCD; \quad \psi - kx = 0, \text{ adică } J_2 = 0 \\ &-\text{Pe } DE; \quad \varphi + ky = kh_c, \quad \text{adică } J_1 = kh_c \end{aligned} \tag{3}$$

— Pe linia de separație AB să punem condiția

$$J_1 - \lambda J_2 + kH = 0, \tag{4}$$

unde λ este un parametru real pozitiv.

Condiția (4) se poate justifica în felul următor : pentru $\lambda = 0$, obținem pe AB condiția $J_1 = \varphi = -kH$ și $y = 0$, adică tocmai cazul lui Jukovski, iar pentru $\lambda = +\infty$, condiția (4) se reduce la condiția $\psi - kx = 0$, adică condiția corespunzătoare cazului în care suprafața de alimentare AB este aproape verticală.

Domeniul mişcării în planul funcţiei lui Jukovski este cel din figura 3. Semidreapta AB (fig. 3) are panta $m = \frac{1}{\lambda}$. Notînd unghiul ABD cu $\alpha\pi$, obţinem pentru α expresia:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda}, \tag{5}$$

Se vede că pentru $\lambda \in (0, +\infty)$, parametrul α ia valori între $\frac{1}{2}$ şi 1.

3. Pentru rezolvarea problemei vom folosi metoda reprezentării conforme a domeniilor din planele f şi J pe semiplanul inferior al unui plan

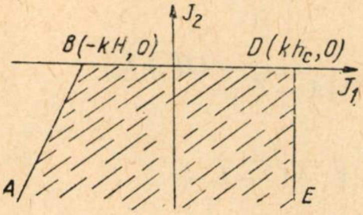


Fig. 3

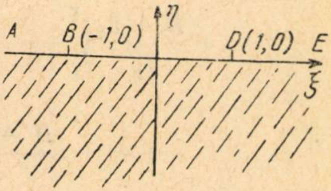


Fig. 4

ajutător $\zeta = \xi + i\eta$. Aplicînd formula Schwarz — Christoffel şi impunînd condiţiile ca punctele de la infinit să se corespundă, punctele $B\,(-kH, 0)$ din planele f şi J să treacă în punctele $B\,(-1, 0)$ din planul ζ, punctul $D\,[k(h_c + d), 0]$ din f precum şi $D\,(kh_c, 0)$ din planul J să treacă în punctul $D\,(1, 0)$ din planul ζ (fig. 4) se obţine:

$$f = M_1 \int_0^\zeta (-1-\zeta)^{-\frac{1}{2}}\, d\zeta + N_1 = M\sqrt{-\zeta - 1} + N. \tag{6}$$

Cînd $\zeta = -1$, se găseşte $N = -kH$, iar cînd $\zeta = 1$ avem

$$M = -\frac{ik(H + h_c + d)}{\sqrt{2}}.$$

Formula de reprezentare este deci:

$$f = -i\frac{(H + h_c + d)}{\sqrt{2}}\sqrt{-\zeta - 1} - kH \tag{7}$$

Pentru domeniul din planul J obţinem asemănător:

$$J = M_2 \int_1^\zeta (-1-\zeta)^{\alpha-1}(1-\zeta)^{-\frac{1}{2}}\, d\zeta + N_2.$$

Cînd $\zeta = 1$, se obţine $H_2 = kh_c$, iar cînd $\zeta = -1$, găsim

$$M_2 = \frac{-k(H + h_c)}{I_0}.$$

Am notat cu I_0 integrala convergentă :

$$I_0 = \int_1^{-1} \frac{d\zeta}{(-1-\zeta)^{1-\alpha}\sqrt{1-\zeta}} \tag{8}$$

Funcţia de reprezentare va fi :

$$J = f(z) - ikz = -\frac{k(H+h_c)}{I_0}\int_1^{\zeta} \frac{d\zeta}{(-1-\zeta)^{1-\alpha}\sqrt{1-\zeta}} + kh_c. \tag{9}$$

Reprezentarea conformă a domeniului din planul fizic pe semiplanul inferior din ζ se obţine eliminînd pe f între relaţiile (7) şi (9). Rezultă :

$$\begin{aligned} iz = &-i\frac{H+h_c+d}{\sqrt{2}}\sqrt{-\zeta-1} + \\ &+\frac{H+h_c}{I_0}\int_1^{\zeta}\frac{d\zeta}{(-1-\zeta)^{1-\alpha}\sqrt{1-\zeta}} - (H+h_c) \end{aligned} \tag{10}$$

adică

$$\begin{aligned} z = &-\frac{H+h_c+d}{\sqrt{2}}\sqrt{-\zeta-1} - \\ &-i\frac{H+h_c}{I_0}\int_1^{\zeta}\frac{d\zeta}{(-1-\zeta)^{1-\alpha}\sqrt{1-\zeta}} + i(H+h_c). \end{aligned} \tag{10'}$$

Pentru $\zeta = \xi =$ real, obţinem din relaţia (10′) o reprezentare parametrică a frontierei $AB \cup BCD \cup DE$.

Viteza complexă a fluidului se obţine din expresiile (7), (9) şi (10) :

$$\frac{dJ}{dz} = \frac{df}{dz} - ik = \frac{dJ}{dz}\cdot\frac{d\zeta}{dz}.$$

După cîteva calcule simple se obţine expresia :

$$w = \frac{df}{dz} = ik + \frac{k(H+h_c)}{i(H+h_c) - I_0\dfrac{H+h_c+d}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{(-1-\zeta)^{1-\alpha}\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{-1-\zeta}}}. \tag{11}$$

În punctul $B, w_B = w\,(\zeta = \xi = -1) = ik$; $\left(\frac{1}{2} < \alpha < 1\right)$, iar în D obţinem

$$w_D = w\,(\zeta = \xi = 1) = 0. \tag{12}$$

Singura mărime nedeterminată în relaţiile de pînă acum este d, cota punctului D, pe care o aflăm punînd condiţia ca în C viteza să fie infinită.

Din (10) obţinem valoarea ξ_c, care este soluţia cuprinsă între -1 şi $+1$ a ecuaţiei :

$$l = \frac{H+h_c+d}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\xi_c} + \frac{H+h_c}{iI_0}\int_1^{\xi_c}\frac{d\xi}{(\xi+1)^{1-\alpha}\sqrt{\xi-1}} - (H+h_c) \tag{13}$$

Parametrul d rezultă apoi ca soluţia ecuaţiei liniare

$$(H+h_c)i - I_0\frac{H+h_c+d}{2\sqrt{2}}(-1-\xi_c)^{1-\alpha}\sqrt{1-\xi_c} = 0. \tag{14}$$

care reprezintă condiţia ca numitorul vitezei (11) să fie zero :

$$d = \frac{2\sqrt{2}\,i(H+h_c)}{I_0(-1-\xi_c)^{1-\alpha}\sqrt{1-\xi_c}} - (H+h_c). \tag{15}$$

4. Să determinăm acum suprafaţa de alimentare AB şi suprafaţa liberă DE. Pentru $\zeta = \xi \leqslant -1$ avem :

$$\int_1^\xi \frac{\mathrm{d}\xi}{(-1-\xi)^{1-\alpha}\sqrt{1-\xi}} = \int_1^{-1} +$$

$$+\int_{-1}^{\xi} = I_0 + \int_{-1}^{\xi} = I_0 - \int_\xi^{-1}\frac{\mathrm{d}\xi}{(-1-\xi)^{1-\alpha}\sqrt{1-\xi}}.$$

Deci :

$$z = -\frac{H+h_c+d}{\sqrt{2}}\sqrt{-\xi-1} + i\frac{H+h_c}{I_0}\int_\xi^{-1}\frac{\mathrm{d}\xi}{(-1-\xi)^{1-\alpha}\sqrt{1-\xi}} \tag{16}$$

unde atît radicalul cît şi integrala din dreapta sînt reale şi pozitive pentru $\xi \in (-\infty, -1)$. Vom pune şi integrala I_0 de la numitor sub forma :

$$I_0 = (-1)^\alpha\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\xi}{(1+\xi)^{1-\alpha}\sqrt{1-\xi}} = (-1)^\alpha I_0',$$

unde noua integrală I_0' este reală şi convergentă.

Găsim ecuaţiile parametrice ale liniei de alimentare AB :

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{H+h_c+d}{\sqrt{2}}\sqrt{-\xi-1} + \mathrm{Re}\left[\frac{i(H+h_c)}{(-1)^\alpha I_0'}\right]\int_\xi^{-1}\frac{\mathrm{d}\xi}{(-1-\xi)^{1-\alpha}\sqrt{1-\xi}},\\ y &= \mathrm{Im}\left[\frac{i(H+h_c)}{(-1)^\alpha I_0'}\right]\int_\xi^{-1}\frac{\mathrm{d}\xi}{(-1-\xi)^{1-\alpha}\sqrt{1-\xi}}. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Curbele (17) admit în originea planului fizic, aceeaşi tangentă şi anume axa Ox. Într-adevăr, notînd cu x' şi y' derivatele lui x şi y în raport cu ξ, vom avea :

$$x' + iy' = +\frac{H+h_c+d}{2\sqrt{2}\sqrt{-\xi-1}} - i\frac{H+h}{(-1)^\alpha I_0'}\frac{1}{(-1-\xi)^{1-\alpha}\sqrt{1-\xi}},$$

de unde rezultă imediat

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\xi=-1} = 0 \tag{18}$$

Acest rezultat atestă concluzia (12).

Linia liberă *DE* se obţine asemănător din (10) sau (10′) luînd $\zeta = \xi \geqslant 1$. Vom avea

$$(19) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{H+h_c}{I_0'}\displaystyle\int_1^{\xi} \dfrac{\mathrm{d}\xi}{(1+\xi)^{1-\alpha}\sqrt{\xi-1}} \\ y = (H+h_c) - \dfrac{H+h_c+d}{\sqrt{2}}\sqrt{\xi+1}. \end{cases}$$

5. Pentru verificare să studiem cazul limită $\alpha = \dfrac{1}{2}$ regăsind rezultatele lui Jukovski (2).

Pentru $\alpha = \dfrac{1}{2}$ avem:

$$I_0 = i\int_1^{-1} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = i\,\pi.$$

Luînd $\xi \leqslant -1$, rezultă

$$\int_1^{\xi} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} = -\left[\int_{\xi}^{-1} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} + \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\right] = -\operatorname{arg\,ch}\xi\Big|_{\xi}^{-1} -$$

$$-\frac{1}{i}\arcsin\xi\Big|_{-1}^{1} = -i\,\pi + \operatorname{arg\,ch}\xi + i\,\pi = \operatorname{arg\,ch}\xi = \ln\left|\sqrt{\xi^2-1}+\xi\right|.$$

Făcînd schimbarea $\varkappa = -\xi$, obţinem următoarele ecuaţii parametrice pentru linia de alimentare *AB* (17):

$$(20) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{H+h_c+d}{\sqrt{2}}\sqrt{x-1} - \dfrac{H+h_c}{\pi}\ln\left|\varkappa - \sqrt{\varkappa^2-1}\right| \\ y = 0 \qquad\qquad\qquad (\varkappa \geqslant 1) \end{cases}$$

Linia liberă *DE* are reprezentarea parametrică următoarea:

$$(21) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{H+h_c}{\pi}\operatorname{arg\,ch}\xi \\ y = (H+h_c) - \dfrac{H+h_c+d}{\sqrt{2}}\sqrt{\xi+1}; \end{cases} \qquad (\xi \geqslant 1)$$

Eliminînd pe ξ se găsesc rezultatele din [2], adică:

$$y = (H+h_c) - \frac{H+h_c+d}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\operatorname{ch}\frac{\pi x}{H+h_c}} =$$

$$(21') \qquad = (H+h_c) - (H+h_c+d)\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2(H+h_c)}$$

Expresia vitezei este

$$w = ik + \frac{k(H+h_c)}{(H+h_c)i - I_0\dfrac{H+h_c+d}{2\sqrt{2}}\sqrt{1-\zeta}},$$

care în punctul B are valoarea :

$$w_B = i\,\frac{k(H + h_c + d)}{(H + h_c)(2 + \pi) + \pi d},$$

Aceste rezultate concordă cu cele găsite de N.E. Jukovski [1].

Primită la redacţie la 21 iunie 1966

Institutul pedagogic Pitești

BIBLIOGRAFIE

1. Н. Е. ЖУКОВСКИЙ *Просачивание воды через плотины* — (1920) — Собрание сочинений, VII, 1950.
2. П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА, *Теория движения грунтовых вод*. Москва, 1952, p. 143—147.

ASUPRA UNOR METODE MATRICIALE CARE INTERVIN ÎN TEORIA REȚELELOR

DE

IOAN TOMESCU

În acest articol se utilizează noțiunea de semigrup semilaticial ordonat, introdusă de Gr. C. Moisil în [1]. Matricile de ordinul p cu elemente dintr-un semigrup semilaticial ordonat care au pe diagonala principală elementul unitate al semigrupului, au proprietatea că $A^{p-1}=A^{p}=\ldots$ Se propun metode iterative pentru calcularea matricii A^{p-1} sau numai a anumitor linii ale matricii A^{p-1} care conduc mai repede la rezultat ca procedeul formării șirului $\{A^{2^n}\}_{n\in N}$, și care folosesc mai bine memoria unui calculator electronic (în sensul că permit rezolvarea unor probleme în care intervine un număr p de noduri de aproximativ 1,4 ori mai mare ca în cazul formării șirului $\{A^{2^n}\}_{n\in N}$).
Metodele descrise se pot aplica la determinarea conductibilităților totale ale unei scheme cu contacte și relee, la determinarea închiderii tranzitive a unui graf finit precum și la rezolvarea unor probleme de economia transporturilor, ca de exemplu : costul minim al transportului, capacitatea maximă de transport sau probabilitatea maximă de reușită a transportului dintre două noduri ale unei rețele de transport.

I

În [1] se definește semigrupul semilaticial ordonat ca fiind o mulțime S cu proprietățile :

I. În S este definită o lege de compoziție comutativă și asociativă notată „$\circ$" cu element neutru e, deci :

(1) $$a\circ b=b\circ a,$$

(2) $$a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c,$$

(3) $$a\circ e=e\circ a=a.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 105-118, BUCUREȘTI, 1967

II. În S este definită o relaţie de ordine parţială „$<$" şi o lege de compoziţie „$\wedge$" care verifică axiomele :

$$a < a, \tag{4}$$

$$\text{dacă } a < b \text{ şi } b < a, \text{ atunci } a = b, \tag{5}$$

$$\text{dacă } a < b \text{ şi } b < c, \text{ atunci } a < c, \tag{6}$$

$$a \wedge b < a, \tag{7}$$

$$a \wedge b < b, \tag{8}$$

$$\text{dacă } z < a,\ z < b, \text{ atunci } z < a \wedge b. \tag{9}$$

III. În S sînt valabile legile distributive şi de absorbţie :

$$a \circ (b \wedge c) = (a \circ b) \wedge (a \circ c), \tag{10}$$

$$a \wedge (a \circ b) = a. \tag{11}$$

TEOREMA 1. *Dacă $a < c$ şi $b < d$, atunci $a \wedge b < c \wedge d$.*

Într-adevăr, $a \wedge b < a < c$ şi deci $a \wedge b < c$; $a \wedge b < b < d$ şi deci $a \wedge b < d$. Conform axiomei 9 rezultă $a \wedge b < c \wedge d$ c.c.t.d.

Din (11) şi (8) se deduce că $a = a \wedge (a \circ b) < a \circ b$; la fel $b < a \circ b$. În particular $e < a \circ e = a$, deci $e < a$ oricare ar fi $a \in S$.

Dacă $a < b$, atunci din $a < b$; $a < a$ se deduce $a < a \wedge b$ şi $a < b \wedge a$. Comparînd cu (7) şi (8) şi folosind (5) rezultă $a = a \wedge b = b \wedge a$ dacă $a < b$.

Deoarece $e < a$, rezultă că $e \wedge a = a \wedge e = e$, oricare ar fi $a \in S$. Din (11) rezultă că $a \wedge a = a \wedge (a \circ e) = a$.

Legea de compoziţie „$\wedge$" este asociativă, adică $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$. Într-adevăr, se deduce că $a \wedge (b \wedge c) < a$; $a \wedge (b \wedge c) < b$ şi $a \wedge (b \wedge c) < c$ şi folosind axioma 9 rezultă că $a \wedge (b \wedge c) < (a \wedge b) \wedge c$. În mod analog se deduce că $(a \wedge b) \wedge c < a \wedge (b \wedge c)$ c.c.t.d. Din (7), (8) şi (9) se deduce $a \wedge b < b \wedge a$ şi $b \wedge a < a \wedge b$, deci $a \wedge b = b \wedge a$.

TEOREMA 2. *Dacă $a < c$ şi $b < d$, rezultă că $a \circ b < c \circ d$.*

Vom demonstra mai întîi că dacă $a < c$, atunci $a \circ b < c \circ b$.

Fie $a < c$; rezultă $a \wedge c = a$ şi conform axiomei de distributivitate, $a \circ b = b \circ a = b \circ (a \wedge c) = (b \circ a) \wedge (b \circ c) = (a \circ b) \wedge (b \circ c)$. Dar $(a \circ b) \wedge (b \circ c) < b \circ c$ şi deci $a \circ b < c \circ b$. Dacă $a < c$ şi $b < d$, se deduce $a \circ b < c \circ b = b \circ c < d \circ c = c \circ d$ c.c.t.d.

În [2] se defineşte o semilatice ca fiind o mulţime în care este definită o lege de compoziţie „$\wedge$" care verifică axiomele :

$$a \wedge a = a. \tag{4'}$$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, \tag{5'}$$

$$a \wedge b = b \wedge a. \tag{6'}$$

Definind relaţia de ordine parţială $a < b$ dacă $a \wedge \mathrm{b} = a$, rezultă că axiomele (4) — (9) sînt verificate.

Demonstrația este imediată; de exemplu dacă $z < a$ și $z < b$, rezultă că $z \wedge (a \wedge b) = (z \wedge a) \wedge b = z \wedge b = z$, deci $z < a \wedge b$.

Deci sistemul de axiome (1) — (3), (4′) — (6′), (10), (11) este echivalent cu sistemul de axiome (1) — (11) dacă definim relația de ordine parțială $a < b$ prin condiția $a = a \wedge b$.

Fie matricile pătrate $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\dots,p}$ și $B = \{b_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\dots,p}$ cu $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta} \in S$.

Definim produsul acestor matrici

$$\{A \times B\}_{\alpha\beta} = \bigwedge_{\gamma=1,\dots,p} (a_{\alpha\gamma} \circ b_{\gamma\beta}) = (a_{\alpha 1} \circ b_{1\beta}) \wedge (a_{\alpha 2} \circ b_{2\beta}) \wedge \dots \wedge (a_{\alpha p} \circ b_{p\beta}).$$

În [1] se demonstrează că această lege de compoziție este asociativă, adică $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$. Notînd puterile matricii $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\dots,p}$ cu proprietatea că $a_{\alpha\alpha} = e$ prin $A^n = \{a^{(n)}_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\dots,p}$, din [1] se deduce că:

$$a^{(2)}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{\substack{\gamma_1=1,\dots,p \\ \gamma_1 \neq \alpha,\beta}} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\beta})$$

$$a^{(3)}_{\alpha\beta} = a^{(2)}_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{\substack{\gamma_1,\gamma_2=1,\dots,p \\ \gamma_1,\,\gamma_2 \neq \alpha,\beta \\ \gamma_1 \neq \gamma_2}} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ a_{\gamma_2\beta})$$

. . . .

$$a^{(p)}_{\alpha\beta} = a^{(p-1)}_{\alpha\beta} = a^{(p-2)}_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{\substack{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{p-2}=1,\dots,p \\ \gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{p-2}\neq\alpha,\beta \\ \gamma_1\neq\gamma_2,\dots,\gamma_1\neq\gamma_{p-2} \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_{p-3}\neq\gamma_{p-2}}} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \dots \circ a_{\gamma_{p-3}\gamma_{p-2}} \circ a_{\gamma_{p-2}\beta})$$

Deci $A^{p-1} = A^p = \dots$ și $a^{(n)}_{\alpha\alpha} = e$ pentru orice $n \in N$.

Fiind dată o matrice A de ordinul p cu elemente dintr-un semigrup semilaticial ordonat, definim determinantul matricii A prin relația:

$$|A| = \bigwedge_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (a_{1\sigma(1)} \circ a_{2\sigma(2)} \circ \dots \circ a_{p\sigma(p)}), \tag{12}$$

unde σ parcurge toate permutările mulțimii $\{1, 2, \dots, p\}$.

Minorul elementului $a_{\alpha\beta}$ al matricii A îl notăm $A_{\alpha\beta}$ și îl definim ca determinantul asociat matricii obținute din A prin suprimarea liniei α și a coloanei β (păstrînd ordinea inițială pentru liniile și coloanele rămase).

Luînd în considerare legea de distributivitate, se deduce că

$$|A| = \bigwedge_{\gamma=1,\dots,p} (a_{\alpha\gamma} \circ A_{\alpha\gamma}) = \bigwedge_{\gamma=1,\dots,p} (a_{\gamma\beta} \circ A_{\gamma\beta}),$$

adică un procedeu iterativ pentru calculul determinantului unei matrici cu elemente dintr-un semigrup semilaticial ordonat.

TEOREMA 3. *Dacă* $a_{\alpha\alpha} = e$ *pentru orice* $\alpha \in \{1,2,\dots,p\}$, *atunci* $a^{(p-1)}_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ *pentru orice* $\alpha, \beta \in \{1,2,\dots,p\}$.

Demonstrație. Dacă $\alpha = \beta$, atunci $a_{\alpha\alpha}^{(p-1)} = e$ și $A_{\alpha\alpha} = e \wedge \bigwedge\limits_{\sigma}(a_{1\sigma(1)} \circ \circ . \; . \; . \circ a_{\alpha-1\sigma(\alpha-1)} \circ a_{\alpha+1\sigma(\alpha+1)} \circ . \; . \; . \circ a_{p\sigma(p)}) = e$, unde σ parcurge toate permutările mulțimii $\{1,2,. \; . \; .,p\}\setminus\{\alpha\}$, mai puțin permutarea identică.

Dacă $\alpha \neq \beta$, atunci

$$A_{\beta\alpha} = \bigwedge_{\sigma} (a_{1\sigma(1)} \circ . \; . \; . \circ a_{\beta-1\sigma(\beta-1)} \circ a_{\beta+1\sigma(\beta+1)} \circ . \; . \; . \circ a_{p\sigma(p)}),$$

unde σ parcurge mulțimea tuturor aplicațiilor biunivoce ale mulțimii $\{1,2,. \; . \; .,p\}\setminus\{\beta\}$ pe mulțimea $\{1,2,. \; . \; .,p\}\setminus\{\alpha\}$.

Pentru orice aplicație biunivocă σ a mulțimii $\{1,2,. \; . \; .,p\}\setminus\{\beta\}$ pe mulțimea $\{1,2,. \; . \; .,p\}\setminus\{\alpha\}$ sau $\sigma(\alpha) = \beta$ sau există un șir de numere diferite între ele $\gamma_1, \gamma_2,. \; . \; .,\gamma_r$ $(0 < r \leqslant p - 2)$ cu proprietatea că $\sigma(\alpha) = \gamma_1; \sigma(\gamma_1) = \gamma_2;. \; . \; .; \sigma(\gamma_i) = \gamma_{i+1}, . \; . \; ., \sigma(\gamma_r) = \beta$. Într-adevăr, dacă $\sigma(\alpha) \neq \beta$, atunci notăm $\sigma(\alpha) = \gamma_1$; dacă $\sigma(\gamma_1) \neq \beta$, notăm $\sigma(\gamma_1) = \gamma_2$ și continuăm procesul. Deoarece σ este o corespondență biunivocă a mulțimii $\{1,2,. \; . \; .,p\}\setminus\{\beta\}$ pe mulțimea $\{1,2,. \; . \; .,p\}\setminus\{\alpha\}$, rezultă că există un termen γ_r al șirului astfel format cu proprietatea $\sigma(\gamma_r) = \beta$. Dar

$$\bigwedge_{\sigma} (a_{1\sigma(1)} \circ . \; . \; . \circ a_{\beta-1\sigma(\beta-1)} \circ a_{\beta+1\sigma(\beta+1)} \circ . \; . \; . \circ a_{p\sigma(p)}) =$$

$$\sigma(\alpha) = \gamma_1; \sigma(\gamma_1) = \gamma_2;. \; . \; .; \sigma(\gamma_i) = \gamma_{i+1}; \; . \; . \; .; \sigma(\gamma_r) = \beta$$

$$= a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ . \; . \; . \circ a_{\gamma_r\beta},$$

unde σ parcurge toate aplicațiile biunivoce ale mulțimii $\{1,2,. . .,p\}\setminus\{\beta\}$ pe mulțimea $\{1,2,. \; . \; .,p\}\setminus\{\alpha\}$ cu proprietatea că $\sigma(\alpha) = \gamma_1; \sigma(\gamma_1) = \gamma_2;. \; . \; .; \sigma(\gamma_i) = \gamma_{i+1};. \; . \; .; \sigma(\gamma_r) = \beta$. Demonstrația acestei egalități se face observînd că în mulțimea acestor permutări există o permutare σ_0 cu proprietatea că $\sigma_0(\gamma) = \gamma$ pentru orice $\gamma \notin \{\alpha, \beta, \gamma_1,. \; . \; .,\gamma_r\}$ și termenul corespunzător va fi $a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ . \; . \; . \circ a_{\gamma_r\beta}$, termen care va absorbi termenii rămași (axioma (11)). În mod analog

$$\bigwedge_{\substack{\sigma \\ \sigma(\alpha)=\beta}} (a_{1\sigma(1)} \circ . \; . \; . \circ a_{\beta-1\sigma(\beta-1)} \circ a_{\beta+1\sigma(\beta+1)} \circ . \; . \; . \circ a_{p\sigma(p)}) = a_{\alpha\beta},$$

unde σ parcurge toate aplicațiile biunivoce ale mulțimii $\{1,2,. \; . \; .,p\}\setminus\{\beta\}$ pe mulțimea $\{1,2,. . .,p\}\setminus\{\alpha\}$ cu proprietatea că $\sigma(\alpha) = \beta$. Deci

$$A_{\beta\alpha} = \bigwedge_{\sigma} (a_{1\sigma(1)} \circ . \; . \; . \circ a_{\beta-1\sigma(\beta-1)} \circ a_{\beta+1\sigma(\beta+1)} \circ . \; . \; . \circ a_{p\sigma(p)}) =$$

$$= a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{(\gamma_1,\gamma_2,. . .,\gamma_r)} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ . \; . \; . \circ a_{\gamma_r\beta}) = a_{\alpha\beta}^{(p-1)}$$

unde numerele $(\gamma_1, \gamma_2,. \; . \; ., \gamma_r)$ parcurg toate aranjamentele numerelor din mulțimea $\{1,2,. \; . \; .,p\} \setminus \{\alpha,\beta\}$ luate cîte $\gamma = 1,2,. \; . \; .,p - 2$ c.c.t.d.

În cele ce urmează se expun alte procedee pentru calcularea matricii A^{p-1}.

Fiind date matricile A și B cu elemente din semigrupul semilaticial ordonat S, definim relația de ordine parțială $A < B$ dacă $a_{\alpha\beta} < b_{\alpha\beta}$ pentru orice $\alpha, \beta = 1,. \; . \; .,p$. Dacă $A < C$ și $B < D$ deci $a_{\alpha\gamma} < c_{\alpha\gamma}$ și $b_{\gamma\beta} < d_{\gamma\beta}$, conform teoremelor 1 și 2 rezultă că $a_{\alpha\gamma} \circ b_{\gamma\beta} < c_{\alpha\gamma} \circ d_{\gamma\beta}$ pentru orice α, β,

$\gamma = 1,\ldots,p$ şi deci $\bigwedge\limits_{\gamma=1,\ldots,p} (a_{\alpha\gamma} \circ b_{\gamma\beta}) < \bigwedge\limits_{\gamma=1,\ldots,p} (c_{\alpha\gamma} \circ d_{\gamma\beta})$ pentru orice $\alpha,\ \beta = 1,\ldots,p$, adică $A \times B < C \times D$.

Deoarece $a^{(2)}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge\limits_{\substack{\gamma_1=1,\ldots,p \\ \gamma_1 \neq \alpha,\beta}} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\beta}) < a_{\alpha\beta}$, rezultă că $A > A^2$, relaţie care prin înmulţire cu A ne conduce la:

(13) $$A > A^2 > \ldots > A^{p-1} = A^p = \ldots$$

Se introduc operatorii $T_{\mu\nu}$ cu $\mu,\ \nu \in \{1,2,\ldots,p\}$, definiţi pe mulţimea matricilor $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ cu $a_{\alpha\beta} \in S$ şi $a_{\alpha\alpha} = e$ în modul următor:

$T_{\mu\nu}(A) = B$ dacă $b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \wedge \bigwedge\limits_{\substack{\rho=1,\ldots,p \\ \rho \neq \mu,\nu}} (a_{\mu\rho} \circ a_{\rho\nu}) = a^{(2)}_{\mu\nu}$ şi $b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ pentru orice $(\alpha,\ \beta) \neq (\mu,\ \nu)$.

Se observă că $T_{\mu\mu}(A) = A$ şi $T^2_{\mu\nu}(A) = T_{\mu\nu}(T_{\mu\nu}(A)) = T_{\mu\nu}(A)$.

Teorema 4. *Avem*

$$(T_{\mu\nu}(A))^{p-1} = A^{p-1} \textit{ pentru orice } \mu,\ \nu \in \{1,2,\ldots,p\}.$$

Demonstraţie. Deoarece $\{T_{\mu\nu}(A)\}_{\mu\nu} = a^{(2)}_{\mu\nu}$ şi $\{T_{\mu\nu}(A)\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} > a^{(2)}_{\alpha\beta}$ pentru orice $(\alpha,\ \beta) \neq (\mu,\ \nu)$, rezultă $A > T_{\mu\nu}(A) > A^2$, de unde se deduce $A^{p-1} > (T_{\mu\nu}(A))^{p-1} > (A^2)^{p-1}$. Deci $A^{p-1} > (T_{\mu\nu}(A))^{p-1} > A^{p-1}$, adică $(T_{\mu\nu}(A))^{p-1} = A^{p-1}$ c.c.t.d.

Se introduce operatorul T obţinut prin compunerea operatorilor $T_{\mu\nu}$:

(14) $$T = \prod_{\mu,\nu=1}^{p} T_{\mu\nu} = \prod_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu\neq\nu}}^{p} T_{\mu\nu} = T_{\alpha_1\beta_1}\, T_{\alpha_2\beta_2} \ldots T_{\alpha_{p^2-p}\,\beta_{p^2-p}}.$$

Operatorul T depinde de ordinea operatorilor $T_{\mu\nu}$ în produsul (14); rezultatele ulterioare rămîn adevărate pentru orice operator obţinut din T printr-o permutare a operatorilor $T_{\mu\nu}$ din expresia (14).

Teorema 5. *Avem*

$$(T^n(A))^{p-1} = A^{p-1} \textit{ pentru orice } n \in N.$$

Demonstraţie. Folosind teorema 4 se deduce:

$$(T(A))^{p-1} = (T_{\alpha_1\beta_1}(T_{\alpha_2\beta_2} \ldots T_{\alpha_{p^2-p}\,\beta_{p^2-p}}(A)))^{p-1} =$$
$$= (T_{\alpha_2\beta_2} \ldots T_{\alpha_{p^2-p}\,\beta_{p^2-p}}(A))^{p-1} = \ldots = A^{p-1}.$$

Prin inducţie se obţine:

$$(T^n(A))^{p-1} = (T(T^{n-1}(A))^{p-1} = (T^{n-1}(A))^{p-1} = A^{p-1} \text{ c.c.t.d.}$$

Teorema 6. *Avem*

$$T^n(A) < A^{2^n} \textit{ oricare ar fi } n \in N.$$

Demonstrație. Aplicînd definiția dată :

$$\{T(A)\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{\substack{\gamma=1,\ldots,p\\ \gamma\neq\alpha,\beta}} (\tilde{a}_{\alpha\gamma} \circ \tilde{a}_{\gamma\beta}), \tag{15}$$

unde expresiile de forma $\tilde{a}_{\lambda\theta}$ care se găsesc în expresia (15) au valoarea $\tilde{a}_{\lambda\theta} = \{T(A)\}_{\lambda\theta} < a_{\lambda\theta}$ dacă operatorul $T_{\alpha\beta}$ precede operatorul $T_{\lambda\theta}$ în produsul (14) și $\tilde{a}_{\lambda\theta} = a_{\lambda\theta}$ în caz contrar. Deci $\tilde{a}_{\lambda\theta} < a_{\lambda\theta}$ și $\{T(A)\}_{\alpha\beta} < a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{\substack{\gamma=1,\ldots,p\\ \gamma\neq\alpha,\beta}} (a_{\alpha\gamma} \circ a_{\gamma\beta}) = a^{(2)}_{\alpha\beta}$ sau $T(A) < A^2$.

Prin inducție se deduce :

$$T^n(A) = T(T^{n-1}(A)) < (T^{n-1}(A))^2 < (A^{2^{n-1}})^2 = A^{2^n} \text{ c.c.t.d.}$$

Dacă q este cel mai mic indice pentru care $A^{2^q} = A^{p-1}$, rezultă că $T^q(A) = A^{p-1}$. Într-adevăr, $T^q(A) < A^{2^q} = A^{p-1}$ și $T^q(A) > (T^q(A))^{p-1} = A^{p-1}$, adică $T^q(A) = A^{p-1}$. În momentul cînd $T^r(A) = T^{r+1}(A)$, se obține $T^r(A) = A^{p-1}$, deoarece $T^r(A) = T^{r+1}(A) = T^{r+2}(A) = \ldots = T^s(A) = A^{p-1}$ pentru $s \geqslant \left[\frac{\log(p-1)}{\log 2}\right] + 1$.

Introducem operatorii $S_{\mu\nu}$ cu $\mu, \nu \in \{1,2,\ldots,p\}$ definiți pe mulțimea matricilor $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ cu elemente din semigrupul semilaticial ordonat S și $a_{\alpha\alpha} = e$ astfel : $S_{\mu\nu}(A) = B$ dacă $b_{\mu\nu} = a^{(2)}_{\mu\nu}$; $b_{\nu\mu} = a^{(2)}_{\nu\mu}$ și $b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ pentru orice $(\alpha, \beta) \neq (\mu, \nu)$; (ν, μ). Dacă matricea A este simetrică, rezultă că și matricea $S_{\mu\nu}(A)$ este simetrică.

Pentru orice matrice A se observă că $S_{\mu\nu}(A) = T_{\mu\nu} T_{\nu\mu}(A) = T_{\nu\mu} T_{\mu\nu}(A) = S_{\nu\mu}(A)$.

Operatorii $S_{\mu\nu}$ au proprietăți analoge cu operatorii $T_{\mu\nu}$.

TEOREMA 7. *Avem*

$$(S_{\mu\nu}(A))^{p-1} = A^{p-1} \text{ pentru orice } \mu, \nu \in \{1,2,\ldots,p\}.$$

Într-adevăr, $(S_{\mu\nu}(A))^{p-1} = (T_{\mu\nu}(T_{\nu\mu}(A)))^{p-1} = (T_{\nu\mu}(A))^{p-1} = A^{p-1}$ c.c.t.d.

Se introduce operatorul S definit astfel :

$$S = \prod_{\mu,\nu=1}^{p} S_{\mu\nu} = \prod_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu\neq\nu}}^{p} S_{\mu\nu} = S_{\alpha_1\beta_1} S_{\alpha_2\beta_2} \ldots S_{\alpha_{p^2-p}\beta_{p^2-p}}. \tag{16}$$

Ordinea operatorilor $S_{\mu\nu}$ în produsul (16) este oarecare, dar va fi considerată fixă în cursul demonstrațiilor următoare.

TEOREMA 8. *Avem*

$$(S^n(A))^{p-1} = A^{p-1} \text{ pentru orice } n \in N.$$

Demonstrație. Folosind teorema 7 se obține $(S(A))^{p-1} = A^{p-1}$. Dacă $(S^{p-1}(A))^{p-1} = A^{p-1}$, se deduce :

$$(S^n(A))^{p-1} = (S(S^{n-1}(A)))^{p-1} = (S^{n-1}(A))^{p-1} = A^{p-1} \text{ c.c.t.d.}$$

Dacă $A < B$, atunci $S_{\mu\nu}(A) < S_{\mu\nu}(B)$ și prin iterare $S(A) < S(B)$. Pentru orice matrice A cu $a_{\alpha\alpha} = e$, există relația $S_{\mu\nu}(A) < T_{\mu\nu}(A)$.

Folosind aceste rezultate se deduce prin iterare că $S(A) < T(A)$ dacă S şi T se scriu în acelaşi mod ca produs de operatori $S_{\mu\nu}$, respectiv $T_{\mu\nu}$.

TEOREMA 9. *Avem*

$S^n(A) < T^n(A)$ *pentru orice* $n \in N$, *dacă* S *și* T *se scriu în același mod ca produs de operatori* $S_{\mu\nu}$, *respectiv* $T_{\mu\nu}$.

Demonstrația se face prin inducție după n : $S(A) < T(A)$ și dacă $S^{n-1}(A) < T^{n-1}(A)$ rezultă :

$S^n(A) = S(S^{n-1}(A)) < S(T^{n-1}(A)) < T(T^{n-1}(A)) = T^n(A)$ c.c.t.d.
Dacă $T^q(A) = A^{p-1}$, rezultă $S^q(A) < T^q(A) = A^{p-1}$ şi $S^q(A) > > (S^q(A))^{p-1} = A^{p-1}$, deci $S^q(A) = A^{p-1}$ şi prin metoda formării șirului $\{S^n(A)\}_{n\in N}$ ajungem la rezultat mai repede ca prin procedeul formării șirului $\{T^n(A)\}_{n\in N}$.

Metoda este avantajoasă în cazul matricilor simetrice deoarece nu mai trebuie să calculăm două elemente : $a_{\mu\nu}^{(2)}$ şi $a_{\nu\mu}^{(2)}$, ci numai unul dintre ele, căci $a_{\mu\nu}^{(2)} = a_{\nu\mu}^{(2)}$ dacă matricea A este simetrică.

Pentru calcularea anumitor linii ale matricii A^{p-1} vom transforma cu ajutorul operatorilor $T_{\mu\nu}$ numai liniile respective ale matricii A.

Notăm $U_1 = T_{1p}\, T_{1p-1} \ldots T_{12}$ şi $U_1^n(A) = \{a_{\alpha\beta}^{[n]}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$.

Se observă că operatorul U_1 transformă numai elementele primei linii a matricii A. Deoarece $(T_{1\alpha}(A))^{p-1} = A^{p-1}$ pentru orice $\alpha = 2, \ldots, p$, rezultă că $(U_1^n(A))^{p-1} = A^{p-1}$ pentru orice $n \in N$.

TEOREMA 10. *Avem*

$\{U_1^n(A)\}_{1\alpha} < \{A^{n+1}\}_{1\alpha}$ *pentru orice* $\alpha = 2, \ldots, p$ și $n \in N$.

Demonstrația se face prin inducție după n. Pentru $n = 1$ se obține :
$a_{12}^{[1]} = a_{12} \wedge \bigwedge\limits_{\beta=3,\ldots,p} (a_{1\beta} \circ a_{\beta 2}) < a_{12}^{(2)}$.

Dacă am demonstrat că $a_{12}^{[1]} < a_{12}^{(2)}; \ldots ; a_{1\alpha-1}^{[1]} < a_{1\alpha-1}^{(2)}$, rezultă că $a_{1\alpha}^{[1]} = a_{1\alpha} \wedge \bigwedge\limits_{\beta=2,\ldots,\alpha-1} (a_{1\beta}^{[1]} \circ a_{\beta\alpha}) \wedge \bigwedge\limits_{\beta=\alpha+1,\ldots,p} (a_{1\beta} \circ a_{\beta\alpha}) < a_{1\alpha} \wedge \bigwedge\limits_{\substack{\beta=2,\ldots,p\\ \beta\neq\alpha}} (a_{1\beta} \circ a_{\beta\alpha}) =$
$= a_{1\alpha}^{(2)}$ pentru $3 \leqslant \alpha \leqslant p$, căci $a_{1\beta}^{[1]} < a_{1\beta}^{(2)} < a_{1\beta}$ pentru $\beta = 2, \ldots, \alpha - 1$.

Rezultă că $a_{1\alpha}^{[1]} < a_{1\alpha}^{(2)}$ pentru $\alpha = 2, \ldots, p$.

Presupunînd că $a_{1\alpha}^{[k]} < a_{1\alpha}^{(k+1)}$ pentru $\alpha = 2, \ldots, p$, rezultă că :

$$a_{12}^{[k+1]} = a_{12}^{[k]} \wedge \bigwedge_{\beta=3,\ldots,p} (a_{1\beta}^{[k]} \circ a_{\beta 2}) < a_{12}^{(k+1)} \wedge \bigwedge_{\beta=3,\ldots,p} (a_{1\beta}^{(k+1)} \circ a_{\beta 2}) = a_{12}^{(k+2)}$$

deoarece $a_{12}^{(k+1)} < a_{12}$ şi $a_{12}^{(k+1)} \wedge a_{12} = a_{12}^{(k+1)}$.

Dacă am demonstrat că $a_{12}^{[k+1]} < a_{12}^{(k+2)}; \ldots ; a_{1\alpha-1}^{[k+1]} < a_{1\alpha-1}^{(k+2)}$, rezultă că : $a_{1\alpha}^{[k+1]} = a_{1\alpha}^{[k]} \wedge \bigwedge\limits_{\beta=2,\ldots,\alpha-1} (a_{1\beta}^{[k+1]} \circ a_{\alpha\beta}) \wedge \bigwedge\limits_{\beta=\alpha+1,\ldots,p} (a_{1\beta}^{[k]} \circ a_{\beta\alpha}) <$
$< a_{1\alpha}^{(k+1)} \wedge \bigwedge\limits_{\beta=2,\ldots,\alpha-1} (a_{1\beta}^{(k+1)} \circ a_{3\alpha}) \wedge \bigwedge\limits_{\beta=\alpha+1,\ldots,p} (a_{1\beta}^{(k+1)} \circ a_{\beta\alpha}) = a_{1\alpha}^{(k+2)}$
pentru $3 \leqslant \alpha \leqslant p$, căci $a_{1\alpha}^{(k+1)} < a_{1\alpha}$ şi deci $a_{1\alpha}^{(k+1)} \wedge a_{1\alpha} = a_{1\alpha}^{(k+1)}$ şi $a_{1\beta}^{[k+1]} < < a_{1\beta}^{(k+2)} < a_{1\beta}^{(k+1)}$ pentru $\beta = 2, \ldots, \alpha - 1$. Rezultă că $a_{1\alpha}^{[k+1]} < a_{1\alpha}^{(k+2)}$ pentru orice $\alpha = 2, \ldots, p$ c.c.t.d.

Dacă q este cel mai mic indice pentru care $A^q = A^{p-1}$, rezultă că $a_{1\alpha}^{[q-1]} < a_{1\alpha}^{(q)} = a_{1\alpha}^{(p-1)}$ pentru $\alpha = 2, . . ., p$.

Dar $a_{1\alpha}^{[q-1]} > \{(U_1^{q-1}(A))^{p-1}\}_{1\alpha} = a_{1\alpha}^{(p-1)}$ şi deci $a_{1\alpha}^{[q-1]} = a_{1\alpha}^{(p-1)}$ pentru $2 \leqslant \alpha \leqslant p$. Cînd am obţinut doi termeni consecutivi egali din şirul $\{U_1^n(A)\}_{n \in N}$, adică $U_1^r(A) = U_1^{r+1}(A)$ rezultă că $U_1^r(A) = U_1^{r+1}(A) = = . . . = U_1^{p-2}(A)$ şi deci $a_{1\alpha}^{[r]} = a_{1\alpha}^{(p-1)}$ pentru $\alpha = 2, . . ., p$. Matricea $U_1^{p-2}(A)$ are elementele primei linii $\{U_1^{p-2}(A)\}_{1\alpha} = a_{1\alpha}^{(p-1)}$ şi celelalte elemente $\{U_1^{p-2}(A)\}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}$ pentru orice $\mu = 2, . . ., p$ şi $\nu = 1, . . . , p$.

Dacă ne interesează şi elementele liniei μ a matricii A^{p-1}, atunci formăm şirul $\{U_\mu^n(U_1^{p-2}(A))\}_{n \in N}$, unde $U_\mu = T_{\mu p} . . . T_{\mu\mu+1} T_{\mu\mu-1} . . . T_{\mu 1}$. Atunci cînd se obţin doi termeni consecutivi egali din acest şir, adică $U_\mu^s(U_1^{p-2}(A)) = U_\mu^{s+1}(U_1^{p-2}(A))$ $(s \leqslant p-2)$, printr-un raţionament analog rezultă că elementele liniei μ a matricii $U_\mu^s(U_1^{p-2}(A))$ sînt egale cu elementele liniei μ a matricii $(U_1^{p-2}(A))^{p-1} = A^{p-1}$ ş.a.m.d.

Fixînd o anumită ordine a operatorilor în produsul (14), această ordine induce o relaţie tranzitivă în mulţimea perechilor (α_i, β_i) cu α_i, $\beta_i \in \{1,2. . . ., p\}$ şi $\alpha_i \neq \beta_i$ astfel:

Spunem că (α_k, β_k) precede pe (α_l, β_l) şi scriem $(\alpha_k, \beta_k) \subset (\alpha_l, \beta_l)$ dacă operatorul $T_{\alpha_k \beta_k}$ precede operatorul $T_{\alpha_l \beta_l}$ în expresia (14) care defineşte operatorul T, adică dacă:

$$T = T_{\alpha_1\beta_1} . . . T_{\alpha_{k-1}\beta_{k-1}} T_{\alpha_k\beta_k} . . . T_{\alpha_l\beta_l} T_{\alpha_{l+1}\beta_{l+1}} . . . T_{\alpha_{p^2-p}\beta_{p^2-p}}$$

Fie operatorul T dat de relaţia:

$$(17) \quad T = T_{pp-1} T_{pp-2} . . . T_{p1} . . . T_{2p} . . . T_{23} T_{21} T_{1p} . . . T_{13} T_{12}.$$

TEOREMA 11. *Avem* $\{T(A)\}_{pp-1} = a_{pp-1}^{(p-1)}$ *şi* $\{T(A)\}_{p-1p} = a_{p-1p}^{(p-1)}$.

Vom demonstra că $\{T(A)\}_{pp-1} = a_{pp-1}^{(p-1)}$ iar cealaltă egalitate se demonstrează analog.

Fie termenul $a_{p\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ . . . \circ a_{\gamma_r p-1}$, unde $1 \leqslant r \leqslant p-2$; $\gamma_1, \gamma_2, . . ., \gamma_r \neq p, p-1$; $\gamma_1 \neq \gamma_2, \gamma_1 \neq \gamma_3, . . ., \gamma_1 \neq \gamma_r, \cdots, \gamma_{r-1} \neq \gamma_r$. Vom considera mulţimea ordonată $\{p, \gamma_1, \gamma_2, . . ., \gamma_r, p-1\}$ şi notăm $\gamma_{i_1} = \max\{\gamma_1, \gamma_2, . . ., \gamma_r\}$.

Deoarece $\gamma_{i_1} < p-1$, rezultă că $(p, p-1) \subset (p, \gamma_{i_1})$; $(p, p-1) \subset \subset (\gamma_{i_1}, p-1)$ şi $\{T(A)\}_{pp-1} < \{T(A)\}_{p\gamma_{i_1}} \circ \{T(A)\}_{\gamma_{i_1}p-1}$ deoarece operatorul T_{pp-1} precede operatorii $T_{p\gamma_{i_1}}$ şi $T_{\gamma_{i_1}p-1}$ în expresia (17).

Dacă $i_1 = 1$, atunci continuăm raţionamentul pentru mulţimea $\{\gamma_1, . . ., p-1\}$ care are proprietatea că dacă $\gamma_i \in \{\gamma_1, \gamma_2, . . . , \gamma_r\}$, atunci $\gamma_i < \gamma_1 < p-1$. Analog pentru $i_1 = r$.

Dacă $i_1 \neq 1$; $i_1 \neq r$, continuăm căutarea maximelor pentru fiecare din mulţimile ordonate $\{p, . . ., \gamma_{i_1}\}$; $\{\gamma_{i_1}, . . ., p-1\}$ care au proprietatea că extremităţile sînt cele mai mari numere din mulţime.

În felul acesta se formează un arbore ale cărui noduri sînt perechi de elemente din mulţimea $\{p, \gamma_1, . . . \gamma_r, p-1\}$, cu nodul iniţial perechea $(p, p-1)$ care este legat de nodurile (p, γ_{i_1}) şi $(\gamma_{i_1}, p-1)$ ş.a.m.d., nodurile finale fiind cele $r+1$ perechi ordonate de numere vecine din mulţimea ordonată $\{p, \gamma_1, . . . , \gamma_r, p-1\}$.

Pe fiecare ramură a arborelui ne oprim atunci cînd obţinem o astfel de pereche de numere vecine (în cazul anterior cînd $i_1 = 1$ sau $i_1 = r$).

Pe fiecare drum care unește nodul inițial cu un nod final întîlnim numai perechi care se găsesc în relația „$\subset$”, primul element în raport cu această relație fiind nodul inițial $(p, p-1)$ și ultimul element pentru drumul respectiv fiind nodul final al drumului.

După m etape obținem $\{T(A)\}_{pp-1} < \{T(A)\}_{pk_1} \circ \{T(A)\}_{k_1k_2} \circ \ldots \circ \{T(A)\}_{k_tp-1}$, unde (p, k_1); (k_1, k_2); . . . ; $(k_t, p-1)$ sînt sau noduri finale situate la distanța cel mult m de nodul inițial $(p, p-1)$ sau noduri care nu sînt finale situate la distanța m de nodul $(p, p-1)$. (Distanța este egală cu numărul de arce conținute în drumul ce unește nodul inițial cu nodul respectiv).

După cel mult r etape luăm în considerare toate nodurile finale ale arborelui, deci obținem prin tranzitivitate

$$\{T(A)\}_{pp-1} < \{T(A)\}_{p\gamma_1}\circ\{T(A)\}_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ \{T(A)\}_{\gamma_rp-1} < a_{p\gamma_1}\circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_rp-}\,.$$

Conform axiomei (9) rezultă : $\{T(A)\}_{pp-1} < a^{(p-1)}_{pp-1}$. Dar

$$\{T(A)\}_{pp-1} > \{(T(A))^{p-1}\}_{pp-1} = a^{(p-1)}_{pp-1} \quad \text{c.c.t.d.}$$

Printr-un raționament analog celui de mai sus, luînd în locul lui p pe α și în locul lui $p-1$ pe β, se deduce că pentru operatorul T dat de (17) există relația :

$\{T(A)\}_{\alpha\beta} < \{T(A)\}_{\alpha\delta_1} \circ \{T(A)\}_{\delta_1\delta_2} \circ \ldots \{T(A)\}_{\delta_q\beta} < a_{\alpha\delta_1} \circ a_{\delta_1\delta_2} \circ \ldots \circ a_{\delta_q\beta}$ unde $\delta_1, \ldots \delta_q$ sînt numere diferite între ele, mai mici ca α și β, adică $\delta_i < \min\{\alpha, \beta\}$ pentru $1 \leqslant i \leqslant q$.

Să considerăm un operator T care are proprietatea că relația tranzitivă pe care o induce în mulțimea perechilor (α_i, β_i) verifică condițiile :

$$(\alpha, \beta) \subset (\gamma, \beta) \text{ și } (\beta, \alpha) \subset (\beta, \gamma) \text{ oricare ar fi} \tag{18}$$

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \text{ și } \gamma < \alpha.$$

Se demonstrează în mod analog și în acest caz că

$$\{T(A)\}_{\alpha\beta} < \{T(A)\}_{\alpha\delta_1} \circ \ldots \circ \{T(A)\}_{\delta_q\beta} < a_{\alpha\delta_1} \circ \ldots \circ a_{\delta_q\beta}\,,$$

unde $\delta_1, \ldots, \delta_q$ sînt numere diferite între ele și $\delta_i < \min\{\alpha, \beta\}$ pentru $1 \leqslant i \leqslant q$.

Se consideră mulțimea de numere $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta\ \}$ și se notează $\delta_{j_1} = \max\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_q\}$. Rezultă că $\delta_{j_1} < \min\{\alpha, \beta\}$ și deci $(\alpha, \beta) \subset \subset (\alpha, \delta_{j_1})$; $(\alpha, \beta) \subset (\delta_{j_1}, \beta)$ și mai departe se procedează la fel ca în cazul demonstrației teoremei 11.

Deci teorema 11 rămîne adevărată pentru orice operator T care verifică condițiile (18).

Să considerăm un operator T care are proprietatea că relația tranzitivă pe care o induce în mulțimea perechilor (α_i, β_i) verifică condițiile :

$$(\alpha, \beta) \subset (\gamma, \beta) \text{ și } (\beta, \alpha) \subset (\beta, \gamma) \text{ oricare ar fi} \tag{19}$$

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \text{ și } \gamma > \alpha.$$

În acest caz, $\{T(A)\}_{\alpha\beta} < \{T(A)\}_{\alpha\varepsilon_1} \circ \{T(A)\}_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \circ \ldots \circ \{T(A)\}_{\varepsilon_s\beta} < a_{\alpha\varepsilon_1} \circ \circ a_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \circ \ldots \circ a_{\varepsilon_s\beta}$, unde $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ sînt numere diferite între ele și $\varepsilon_i > \max\{\alpha, \beta\}$ pentru $1 \leqslant i \leqslant s$.

Demonstrația se face printr-un raționament dual celui relativ la condițiile (18), înlocuind maximum prin minimum. Se consideră $\varepsilon_{k_1} = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s\}$ și deci $\varepsilon_{k_1} > \max\{\alpha, \beta\}$ adică $(\alpha, \beta) \subset (\alpha, \varepsilon_{k_1})$ și $(\alpha, \beta) \subset (\varepsilon_{k_1}, \beta)$ ş.a.m.d.

TEOREMA 12. $VU(A) = UV(A) = A^{p-1}$ *dacă operatorul* U *verifică condițiile* (18) *și operatorul* V *verifică condițiile* (*19*) *și* $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ *cu* $a_{\alpha\beta} \in S$ *și* $a_{\alpha\alpha} = e$.

Vom demonstra că $\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta}$ și $\{UV(A)\}_{\alpha\beta} < a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta}$ unde $1 \leqslant r \leqslant p-2$; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r \neq \alpha, \beta$; $\gamma_1 \neq \gamma_2, \ldots, \gamma_1 \neq \gamma_r, \ldots, \gamma_{r-1} \neq \gamma_r$.

Fie $\alpha < \beta$. Mai întîi vom demonstra prin inducție după r că dacă $\alpha < \min\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r\}$ și $\beta > \max\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r\}$, atunci $\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \{U(A)\}_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_r\beta} < a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots a_{\gamma_r\beta}$ și $\{UV(A)\}_{\alpha\beta} < \{V(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \{V(A)\}_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ \{V(A)\}_{\gamma_r\beta} < a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots a_{\gamma_r\beta}$.

Pentru $r=1$, $\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \{VU(A)\}_{\gamma_1\beta} < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \{U(A)\}_{\gamma_1\beta}$ deoarece $(\alpha, \beta) \subset (\gamma_1, \beta)$, unde relația „$\subset$" se referă la operatorul V, deci operatorul $T_{\alpha\beta}$ precede operatorul $T_{\gamma_1\beta}$ în expresia lui V iar operatorul $T_{\alpha\gamma_1}$ se găsește și în U, deci după operatorul $T_{\alpha\beta}$ din V. La fel

$$\{UV(A)\}_{\alpha\beta} < \{UV(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \{V(A)\}_{\gamma_1\beta} < \{V(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \{V(A)\}_{\gamma_1\beta}.$$

În cazul mulțimii ordonate de numere diferite $\{\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r, \beta\}$ cu $\alpha < \min\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ și $\beta > \max\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$, nu sînt posibile decît următoarele două situații:

a) $\alpha < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_k < \gamma_{k+1} < \ldots < \gamma_r < \beta$ sau

b) există $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ așa ca $\gamma_i < \min\{\gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}\}$; $\gamma_j > \max\{\gamma_{j-1}, \gamma_{j+1}\}$, considerînd $\gamma_0 = \alpha$; $\gamma_{r+1} = \beta$.

În cazul a)

$$\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \{VU(A)\}_{\gamma_1\beta} < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \{U(A)\}_{\gamma_1\gamma_2} \circ \{VU(A)\}_{\gamma_2\beta} <$$
$$< \ldots < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_{r-1}\gamma_r} \circ \{VU(A)\}_{\gamma_r\beta} < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_r\beta}$$

și

$$\{UV(A)\}_{\alpha\beta} < \{UV(A)\}_{\alpha\gamma_r} \circ \{V(A)\}_{\gamma_r\beta} < \ldots < \{UV(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ$$
$$\circ \{V(A)\}_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ \{V(A)\}_{\gamma_r\beta} < \{V(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ \{V(A)\}_{\gamma_r\beta}.$$

În cazul b) folosind ipoteza inducției,

$$\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_{i-1}\gamma_{i+1}} \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_r\beta}.$$

Dar

$\{U(A)\}_{\gamma_{i-1}\gamma_{i+1}} < \{U(A)\}_{\gamma_{i-1}\gamma_i} \circ \{U(A)\}_{\gamma_i\gamma_{i+1}}$ deoarece $\gamma_i < \min\{\gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}\}$ și deci $(\gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}) \subset (\gamma_{i-1}, \gamma_i)$ și $(\gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}) \subset (\gamma_i, \gamma_{i+1})$ (relativ la U), deci $\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_r\beta}$.

$\{UV(A)\}_{\alpha\beta} < \{V(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ \{V(A)\}_{\gamma_{j-1}\gamma_{j+1}} \circ \ldots \circ \{V(A)\}_{\gamma_r\beta} < \{V(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ \{V(A)\}_{\gamma_{j-1}\gamma_j} \circ \{V(A)\}_{\gamma_j\gamma_{j+1}} \circ \ldots \circ \{V(A)\}_{\gamma_r\beta}$.

Dacă $\alpha > \beta$, atunci în cazul a) $\alpha > \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_r > \beta$ și $\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < \{VU(A)\}_{\alpha\gamma_r} \circ \{U(A)\}_{\gamma_r\beta} < \ldots < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_r\beta}$ și $\{UV(A)\}_{\alpha\beta} < \{V(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \{UV(A)\}_{\gamma_1\beta} < \ldots < \{V(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ \{V(A)\}_{\gamma_r\beta}$.

Fie acum $\alpha < \beta$ și $\alpha < \min\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r\}$. Vom demonstra că și în acest caz $\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_r\beta} < a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta}$.

Notăm cu $\gamma_{m_1}, \gamma_{m_2}, \ldots, \gamma_{m_s}$ toate numerele din mulțimea $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r\}$ care au proprietatea că $\gamma_{m_i} > \beta = \max\{\alpha, \beta\}$ și $m_i < m_{i+1}$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant s$. $VU(A) = V(U(A))$ și deci conform unei observații precedente, $\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < \{V(U(A))\}_{\alpha\gamma_{m_1}} \circ \{V(U(A))\}_{\gamma_{m_1}\gamma_{m_2}} \circ \ldots \circ \{V(U(A))\}_{\gamma_{m_s}\beta}$. Dacă $m_1 > 1$, atunci vom considera mulțimea $\{\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m_1}\}$ ale cărei numere sînt cuprinse între α și γ_{m_1} și deci $\{V(U(A))\}_{\alpha\gamma_{m_1}} < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \circ \{U(A)\}_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_{m_1-1}\gamma_{m_1}}$ iar dacă $m_1 = 1$, atunci $\{V(U(A))\}_{\alpha\gamma_1} < < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1}$.

Dacă $m_{j+1} > m_j + 1$, atunci vom considera numerele din mulțimea $\{\gamma_{m_j}, \gamma_{m_j+1}, \ldots, \gamma_{m_{j+1}}\}$ care sînt mai mici decît β cu excepția lui γ_{m_j} și $\gamma_{m_{j+1}}$ pentru orice $j = 1, \ldots, s-1$ și deci

$$\max\{\gamma_{m_j+1}, \ldots, \gamma_{m_{j+1}-1}\} < \min\{\gamma_{m_j}, \gamma_{m_{j+1}}\}$$

deci

$$\{VU(A)\}_{\gamma_{m_j}\gamma_{m_{j+1}}} < \{U(A)\}_{\gamma_{m_j}\gamma_{m_{j+1}}} < \{U(A)\}_{\gamma_{m_j}\gamma_{m_j+1}} \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_{m_{j+1}-1}\gamma_{m_{j+1}}}$$

pentru orice $j = 1, \ldots, s-1$, analog pentru $\{V(U(A))\}_{\gamma_{m_s}\beta}$.

Comparînd aceste rezultate se deduce $\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_r\beta} < a_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta}$. Dacă $\alpha < \beta$ și $\beta > \max\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r\}$, se demonstrează în mod asemănător că $\{UV(A)\}_{\alpha\beta} < \{V(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ \ldots \circ \{V(A)_{\gamma_r\beta} < a_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta}$ luînd în considerare toate numerele din mulțimea $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r\}$ care sînt mai mici ca $\alpha = \min\{\alpha, \beta\}$ și folosind rezultatele anterioare.

Fie numerele $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ cu $\gamma_i \neq \alpha, \beta$ și $\gamma_i \neq \gamma_j$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ și $i \neq j$. Notăm cu $\gamma_{p_1}, \gamma_{p_2}, \ldots, \gamma_{p_t}$ toate numerele din mulțimea $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r\}$ care au proprietatea că $\gamma_{p_i} > \alpha = \min\{\alpha, \beta\}$ și $p_i < p_{i+1}$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant t-1$.

Rezultă că $\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_{p_1}} \circ \{U(A)\}_{\gamma_{p_1}\gamma_{p_2}} \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_{p_t}\beta}$. Dacă $p_{j+1} > p_j + 1$, atunci numerele din mulțimea $\{\gamma_{p_j}, \gamma_{p_j+1}, \ldots, \gamma_{p_{j+1}}\}$ au proprietatea că $\max\{\gamma_{p_j+1}, \ldots, \gamma_{p_{j+1}-1}\} < \alpha < \min\{\gamma_{p_j}, \gamma_{p_{j+1}}\}$ și deci, deoarece operatorul U verifică (18), rezultă $\{U(A)\}_{\gamma_{p_j}\gamma_{p_{j+1}}} < \{U(A)\}_{\gamma_{p_j}\gamma_{p_j+1}} \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_{p_{j+1}-1}\gamma_{p_{j+1}}}$ pentru $j = 1, \ldots, t-1$, analog pentru $\{\alpha, \ldots, \gamma_{p_1}\}$ și $\{\gamma_{p_t}, \ldots, \beta\}$, deci am obținut

$$\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < \{U(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \{U(A)\}_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ \{U(A)\}_{\gamma_r\beta} < a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta},$$

deci $\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < a_{\alpha\beta}^{(p-1)}$.

Se demonstrează la fel că $\{UV(A)\}_{\alpha\beta} < \{V(A)\}_{\alpha\gamma_1} \circ \{V(A)\}_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \ldots \circ \{V(A)\}_{\gamma_r\beta} < \circ a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta}$ considerînd toate numerele din mulțimea $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r\}$ care sînt mai mici ca $\beta = \max\{\alpha, \beta\}$ și utilizînd rezultatele anterioare.

Deoarece $\{VU(A)\}_{\alpha\beta} < a_{\alpha\beta}^{(p-1)}$ și $\{VU(A)\}_{\alpha\beta} > \{(VU(A))^{p-1}\}_{\alpha\beta} = = a_{\alpha\beta}^{(p-1)}$, rezultă $\{VU(A)\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{(p-1)}$; la fel $\{UV(A)\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{(p-1)}$.

Demonstrația teoremei și a rezultatelor pregătitoare se face în mod analog pentru cazul $\alpha > \beta$.

Deoarece $UV(A) = VU(A) = A^{p-1}$, mai rezultă că $(UV)^2 = UV$; $(VU)^2 = VU$. Dacă operatorul T verifică (18), atunci operatorul T^* obținut din T prin inversarea ordinii tuturor operatorilor $T_{\mu\nu}$ care îl compun (adică $T_{\mu_1\nu_1}$ precede pe $T_{\mu_2\nu_2}$ în expresia lui T dacă și numai dacă $T_{\mu_2\nu_2}$ precede pe $T_{\mu_1\nu_1}$ în expresia lui T^*), verifică relațiile (19).

Deci obținem în particular $TT^*(A) = T^*T(A) = A^{p-1}$.

Operatorul T dat de (17) verifică condițiile (18). Operatorii T scriși mai jos verifică de asemenea condițiile (18):

$$T = T_{nn-1}\,T_{n-1n}\ldots T_{n2}\ldots T_{32}\,T_{2n}\ldots T_{24}\,T_{23}\,T_{n1}\ldots T_{31}\,T_{21}\,T_{1n}\ldots T_{13}\,T_{12};$$

$$T = T_{nn-1}\,T_{n-1n}\ldots T_{n2}\,T_{2n}\ldots T_{32}\,T_{23}\ldots T_{n1}\,T_{1n}\ldots T_{31}\,T_{13}\,T_{21}\,T_{12};$$

$$T = T_{n-1n}\ldots T_{2n}\,T_{1n}\ldots T_{n2}\ldots T_{32}\,T_{12}\,T_{n1}\ldots T_{31}\,T_{21}\ \text{etc.}$$

II

Algebra booleană a funcțiilor booleene de m variabile formează un semigrup semilaticial ordonat cu operațiile („$\circ$"; „$\wedge$") date respectiv de („$\cdot$"; „$\cup$"), relația de ordine parțială „$<$" este relația de includere „$\supset$" definită prin: $f \supset g$ dacă $f \cup g = f$ și elementul neutru e este funcția identic egală cu 1.

În [3] se definește matricea $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ a conductibilităților directe ale unui multipol cu p noduri astfel: $a_{\alpha\alpha} = 1$; $a_{\alpha\beta} = 0$ dacă nodurile x_α și x_β nu sînt legate direct în schemă și în caz contrar $a_{\alpha\beta}$ este funcția de lucru a dipolului π care unește nodul x_α cu nodul x_β. Matricea conductibilităților totale ale multipolului este matricea A^{p-1}.

Să considerăm un graf finit $G = (X, \Gamma)$ ale cărui vîrfuri sînt $x_1, x_2, \ldots, x_p$ și să definim graful $G' = (X, \Gamma')$, unde Γ' este definită prin $\Gamma'x = \{x\} \cup \Gamma x$ pentru orice $x \in X$.

Se definește matricea $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ asociată grafului $G' = (X, \Gamma')$ astfel: $a_{\alpha\beta} = 1$ dacă există un arc de la x_α la x_β și $a_{\alpha\beta} = 0$ în caz contrar. Rezultă că $a_{\alpha\alpha} = 1$ pentru $\alpha = 1, \ldots, p$. În [4] se definește închiderea tranzitivă $\hat{G} = (X, \hat{\Gamma})$ a grafului finit $G = (X, \Gamma)$, unde aplicația $\hat{\Gamma}$ este definită astfel:

$$\hat{\Gamma}x = \{x\} \cup \Gamma x \cup \Gamma^2 x \cup \ldots \cup \Gamma^{p-1}x$$

Matricea de incidență $\hat{A} = \{\hat{a}_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ asociată grafului $\hat{G} = (X, \hat{\Gamma})$ are proprietatea că $\hat{a}_{\alpha\alpha} = 1$ și pentru orice $\alpha \neq \beta$ elementul $\hat{a}_{\alpha\beta} = 1$ dacă și numai dacă în gradul inițial $G = (X, \Gamma)$ există un drum elementar care unește vîrful x_α cu vîrful x_β. Din [5] rezultă că matricea $\hat{A}$ este egală cu A^{p-1}.

În acest caz semigrupul semilaticial ordonat S este algebra booleană cu două elemente $L_2 = \{0, 1\}$ iar („$\circ$"; „$\wedge$"; „$<$"; e) sînt date respectiv de („$\cdot$"; „$\cup$"; „$\supset$"; 1).

Din [6], [7] rezultă metode matriciale pentru rezolvarea unor probleme de economia transporturilor. Să considerăm un graf finit $G = (X, \Gamma)$ cu p noduri și fără bucle, adică $x \cap \Gamma x = \varnothing$. Notînd cu U

mulţimea arcelor grafului, se defineşte o funcţie $l(u)$ care asociază fiecărui arc $u \in U$ un număr real nenegativ $l(u) \geqslant 0$ numit lungimea (costul, ponderea) arcului u. Se pune problema determinării minimului sumei $\sum_{u\in\mu} l(u)$ după toate drumurile $\mu = (x_\alpha, x_{k_1}, \ldots, x_{k_i}, x_\beta)$ de la nodul x_α la nodul x_β (în cazul în care există cel puţin un drum care uneşte aceste noduri).

Se defineşte matricea pătrată $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ astfel : $a_{\alpha\alpha} = 0$; $a_{\alpha\beta} = l(x_\alpha, x_\beta)$ dacă $(x_\alpha, x_\beta)\in U$ şi $a_{\alpha\beta} = \infty$ dacă $(x_\alpha, x_\beta)\notin U$. Simbolul ∞ are prin definiţie proprietatea că $\infty > a$ şi $\infty + a = \infty$ pentru orice $a \geqslant 0$.

Fiind date matricile B şi C cu $b_{\alpha\alpha} = c_{\alpha\alpha} = 0$ pentru orice $\alpha = 1, \ldots, p$ iar $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ aparţin mulţimii $\{x \mid x \geqslant 0\} \cup \{\infty\}$, se defineşte produsul $B\times C$ astfel :

$$\{B\times C\}_{\alpha\beta} = \min_{\gamma=1,\ldots p} \{(b_{\alpha\gamma} + c_{\gamma\beta})\} = \min\{b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}, \min_{\substack{\gamma=1,\ldots,p\\ \gamma\neq\alpha,\beta}} \{(b_{\alpha\gamma}+c_{\gamma\beta})\}\}$$

Matricea A^{p-1} (puterea fiind definită în raport cu acest produs) are proprietatea că $a_{\alpha\alpha}^{(p-1)} = 0$; $a_{\alpha\beta}^{(p-1)} = \infty$ dacă şi numai dacă nu există nici un drum de la x_α la x_β, iar dacă $a_{\alpha\beta}^{(p-1)} \neq \infty$, atunci această valoare reprezintă $\min_\mu \{\sum_{u\in\mu} l(u)\}$ după toate drumurile $\mu = (x_\alpha, \ldots, x_\beta)$ sau distanţa minimă dintre x_α şi x_β sau costul minim al transportului din x_α în x_β.

S este mulţimea $\{x\mid x\geqslant 0\}\cup\{\infty\}$ iar („$\circ$"; „$\wedge$"; „$<$"; e) sînt respectiv („$+$"; „min"; „$\leqslant$"; 0).

Se defineşte pe mulţimea U a arcelor grafului G o funcţie $c(u)$ care asociază fiecărui arc u un număr $c(u) \geqslant 0$ numit capacitatea arcului u. Dacă există un drum μ de la x_α la x_β, atunci capacitatea de transport de-a lungul acestui drum este dată de $\min_{u\in\mu}\{c(u)\}$. Se pune problema determinării $\max_\mu\{\min_{u\in\mu}\{c(u)\}\}$ după toate drumurile μ de la x_α la x_β, adică a capacităţii de transport maxime de la x_α la x_β. Se defineşte matricea A astfel : $a_{\alpha\alpha} = \infty$; $a_{\alpha\beta} = c(x_\alpha, x_\beta)$ dacă $(x_\alpha, x_\beta)\in U$ şi $a_{\alpha\beta} = 0$ dacă $(x_\alpha, x_\beta)\notin U$. În acest caz produsul matricilor B şi C cu elemente din mulţimea $\{x\mid x\geqslant 0\}$ şi cu $b_{\alpha\alpha} = c_{\alpha\alpha} = \infty$ se defineşte prin

$$\{B\times C\}_{\alpha\beta} = \max_{\gamma=1,\ldots,p}\{\min(b_{\alpha\gamma}, c_{\gamma\beta})\} = \max\{b_{o\beta}, c_{\alpha\beta}, \max_{\substack{\gamma=1,\ldots,p\\ \gamma\neq\alpha,\beta}}\{\min(b_{\alpha\gamma}, c_{\gamma\beta})\}\}$$

Matricea A^{p-1} are proprietatea că

$$a_{\alpha\alpha}^{(p-1)} = \infty \text{ iar } a_{\alpha\beta}^{(p-1)} = \max_\mu\{\min_{u\in\mu}\{c(u)\}\}, \text{ unde } \mu = (x_\beta, \ldots, x_\beta),$$

adică capacitatea maximă de transport de la x_α la x_β. (Prin definiţie dacă nu există nici un drum de la x_α la x_β, capacitatea de transport maximă de la x_α la x_β este nulă.)

În acest caz S este mulţimea $\{x\mid x\geqslant 0\}\cup\{\infty\}$ iar („$\circ$"; „$\wedge$"; „$<$"; e) sînt respectiv („min"; „max"; „$\geqslant$"; ∞).

Dacă $(x_\alpha, x_\beta)\in U$, notăm cu $p(x_\alpha, x_\beta)$ probabilitatea de reuşită a transportului din x_α în x_β.

Funcţia $p\,(u)$ este definită pe mulţimea U cu valori în $[0,\ 1]$. Dacă $\mu = (x_\alpha,\ x_{k_1},\ x_{k_2}, \dots,\ x_{k_i},\ x_\beta)$, atunci probabilitatea de reuşită a transportului pe acest drum este $\prod\limits_{u \in \mu} p\,(u) = p\,(x_\varkappa,\ x_{k_1})\ p\,(x_{k_1}\ \ x_{k_2})\dots p\,(x_{k_i},\ x_\beta)$.

Probabilitatea maximă de reuşită a transportului din x_α în x_β este $\max\limits_{\mu}\ \{\prod\limits_{u \in \mu} p\,(u)\}$, unde $\mu = (x_\varkappa, \dots,\ x_\beta)$ parcurge mulţimea tuturor drumurilor de la x_α la x_β. Matricea $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta = 1, \dots, p}$ are elementele $a_{\alpha\alpha} = 1$, $a_{\varkappa\beta} = p\,(x_\alpha,\ x_\beta)$ dacă $(x_\alpha,\ x_\beta) \in U$ şi $a_{\alpha\beta} = 0$ dacă $(x_\alpha,\ x_\beta) \notin U$.

Produsul matricilor B şi C cu elemente din mulţimea $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ şi cu $b_{\alpha\alpha} = c_{\alpha\alpha} = 1$ se defineşte prin $\{B \times C\}_{\alpha\beta} = \max\limits_{\gamma = 1, \dots, p}\ \{(b_{\alpha\gamma}\, c_{\gamma\beta})\} = \max\ \{b_{\alpha\beta},\ c_{\alpha\beta},\ \max\limits_{\substack{\gamma = 1, \dots, p \\ \gamma \neq \alpha, \beta}}\ \{(b_{\alpha\gamma}\, c_{\gamma\beta})\}\}$. Matricea A^{p-1} are proprietatea că $a_{\alpha\alpha}^{(p-1)} = 1$ iar $a_{\alpha\beta}^{(p-1)} = \max\limits_{\mu}\ \{\prod\limits_{u \in \mu} p\,(u)\}$, unde $\mu = (x_\alpha,\ \dots\ ,\ x_\beta)$, adică probabilitatea maximă de reuşită a transportului din x_α în x_β. (Prin definiţie dacă nu există nici un drum de la x_α la x_β, probabilitatea maximă de reuşită a transportului din x_α în x_β este nulă).

Semigrupul semilaticial ordonat S este în acest caz mulţimea $\{x \mid 0 \leqslant \leqslant x \leqslant 1\}$ iar („$\circ$"; „$\wedge$"; „$<$"; e) sînt respectiv („$\cdot$"; „max"; „$\geqslant$"; 1).

Primită la redacţie la 10 iunie 1966

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Gr. C. Moisil, *Asupra unor reprezentări ale grafurilor ce intervin in probleme de economia transporturilor.* Comunicările Acad. R.P.R., **X**, *8* (1960).
2. Fr. Klein-Barmen, *Beiträge zur Theorie der Verbände*, Math. Zeitschr., **39**, 227—239 (1935).
3. А. Г. Лунц, *Алгебраические методы анализа и синтеза контактных схем.* Изв. Ак. Наук СССР, Сер. матем., 19 2.
4. C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications.* Dunod, Paris, 1963.
5. K. Maghout, *Applications de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques.* Cahiers du Centre d'etudes de Rech. Opérationnelle, Bruxelles, **5**, *1—2* (1963).
6. Г. Н. Поваров, *Основные положения теории кумулятивных сетей.* Bul. Inst. Pol. Iaşi, seria nouă, **VI (X)**, *1—2* (1960).
7. A. Shimbel, *Structure in Communication Nets*, Proc. Symposium on Information Networks (April, 1954), Polytech. Inst. Brooklyn, N. Y., 1955.
8. T. C. Hu, *Revised matrix algorithms for shortest paths.* R.C. 1478, I.B.M. Research (în curs de publicare).
9. I. Tomescu, *Metodă pentru determinarea conductibilităţilor totale ale unui multipol*, St. cerc. mat. **17**, *7* (1965).
10. M. Yoeli, *A note on a generalization of Boolean matrix theory*, Am. Math. Month., **68**, *6* (June-July 1961).

TEOREMA CONTRACȚIILOR ÎN SPAȚII UNIFORME

DE
N. GHEORGHIU
(Iași)

În această Notă se demonstrează o generalizare a unei teoreme dată de G. Marinescu [1], p. 181.

Fie x un spațiu uniform separat în sensul lui Hausdorff, complet în raport cu șirurile a căror structură uniformă este definită de familia suficientă și saturată de „écart”-uri $\{\rho_a\}_{a \in A}$.

Fie $f: X \to X$ o aplicație pentru care există $\varphi: A \to A$ și numerele $q_\alpha \geqslant 0$ cu proprietatea (3) astfel încît seria (4) este convergentă pentru orice $x_1, x_2 \in X$. Atunci există un punct unic invariant al aplicației f în X.

Se dă apoi o aplicație a acestei teoreme la operatorii liniari și continui definiți pe spații local convexe, complete față de șiruri.

Nota de față își are originea în cartea lui G. Marinescu *Spații vectoriale topologice și pseudotopologice*, [1]. La pag. 181 se enunță și se demonstrează teorema 1, pe care o reproducem mai jos, teoremă care generalizează la spații local convexe, cunoscuta teoremă a contracțiilor a lui Banach pentru spații metrice [2]. Ulterior, I. Colojoară, [3], păstrînd aceleași condiții din [1], a generalizat teorema 1 la spații uniforme, observînd că demonstrația din [1] nu folosește decît structura de spațiu uniform a spațiului local convex.

În această Notă aducem încă unele generalizări, dînd o teoremă a contracțiilor pentru aplicații definite pe spații uniforme, renunțînd la condiția (1), care ar putea în unele cazuri să împiedice aplicarea teoremei și la condiția (ii). În încheiere schițăm unele posibilități de aplicare ale teoremei 2, la operatori liniari pe spații local convexe.

TEOREMA 1 (Marinescu). *Fie X un spațiu local convex, separat Hausdorff, complet față de șiruri și A mulțimea de indici care determină familia saturată și suficientă de seminorme $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$, prin care este definită topologia lui X.*

Fie φ o aplicație a mulțimii A în ea însăși, satisfăcînd conditia

$$\varphi(\varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha), \qquad \alpha \in A, \tag{1}$$

și M o mulțime din X, definită de inegalitățile

$$p_{\varphi(\alpha)}(x) \leqslant m_{\varphi(\alpha)}, \quad \alpha \in A. \tag{2}$$

Fie f o aplicație a mulțimii M în ea însăși, satisfăcînd condițiile următoare:

(i) *pentru orice $\alpha \in A$, există un număr $q_\alpha \geqslant 0$ astfel încît*

$$p_\alpha(fx_1 - fx_2) \leqslant q_\alpha\, p_{\varphi(\alpha)}(x_1 - x_2);$$

(ii) $q_{\varphi(\alpha)} < 1$ *pentru orice $\alpha \in A$.*

În aceste condiții, f admite un punct fix unic în M.

I. Să luăm X un spațiu uniform, separat Hausdorff, complet față de șiruri. După cum se știe, [4], [5], topologia unui asemenea spațiu se poate defini totdeauna cu ajutorul unei familii saturate de semidistanțe (ecarturi) $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ care separă punctele spațiului, adică familia este suficientă.

Definiția aplicației contractante. O aplicație $f : X \to X$ se numește contractantă, dacă există o aplicație φ a mulțimii A de indici în ea însăși, $\varphi : A \to A$, și constantele $q_\alpha \geqslant 0$, încît

$$\rho_\alpha(fx_1, fx_2) \leqslant q_\alpha\, \rho_{\varphi(\alpha)}(x_1, x_2), \quad \alpha \in A,\ x_1,\ x_2 \in X \tag{3}$$

iar seria

$$\rho_\alpha(x_1, x_2) + \sum_{n=1}^{\infty} q_\alpha\, q_{\varphi(\alpha)} \cdots q_{\varphi^{n-1}(\alpha)}\, \rho_{\varphi^n(\alpha)}(x_1, x_2) \tag{4}$$

este convergentă pentru orice $\alpha \in A$ și $x_1, x_2 \in X$, φ^0 fiind aplicația identică $\varphi^1 = \varphi$ și $\varphi^n(\alpha) = \varphi(\varphi^{n-1}(\alpha))$.

TEOREMA 2. *Fie X un spațiu uniform, separat Hausdorff complet față de șiruri, structura uniformă a lui X fiind definită cu familia saturată, suficientă de ecarturi $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$.*

O aplicație contractantă $f : X \to X$ are un punct fix și numai unul.

Demonstrație. Luăm un element $x_0 \in X$ și definim șirul

$$x_1 = fx_0, \quad x_n = fx_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Arătăm că șirul (5) este convergent către un element care satisface toate cerințele teoremei. Pentru $\alpha \in A$, urmează

$$\rho_\alpha(x_{n+1}, x_n) = \rho_\alpha(fx_n, fx_{n-1}) \leqslant q_\alpha\, \rho_{\varphi(\alpha)}(x_n, x_{n-1}) \leqslant$$

$$\leqslant q_\alpha\, q_{\varphi(\alpha)}\, \rho_{\varphi^2(\alpha)}(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant \cdots \leqslant q_\alpha\, q_{\varphi(\alpha)} \cdots q_{\varphi^{n-1}(\alpha)}\, \rho_{\varphi^n(\alpha)}(x_1, x_0)$$

$$\rho_\alpha(x_{n+1}, x_n) \leqslant q_\alpha\, q_{\varphi(\alpha)} \cdots q_{\varphi^{n-1}(\alpha)}\, \rho_{\varphi^n(\alpha)}(x_1, x_0), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Din

$$\rho_\alpha(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho_\alpha(x_n, x_{n+1}) + \rho_\alpha(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho_\alpha(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \tag{7}$$

și (6), datorită convergenței seriei (4), rezultă că șirul (x_n) este șir Cauchy pentru fiecare semidistanță, ceea ce echivalează cu faptul că este șir Cauchy în topologia de spațiu uniform. Spațiul fiind complet, există

$\overline{x} \in X$, încît $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \overline{x}$. Dar (3) asigură continuitatea lui f, aşa că trecînd la limită în $x_n = f\, x_{n-1}$, rezultă

$$\overline{x} = f\overline{x}, \tag{8}$$

adică $\overline{x}$ este un element invariant al aplicaţiei f.

Pentru unicitate, să presupunem că mai există un $\overline{\overline{x}} \in X$, încît

$$\overline{\overline{x}} = f\overline{\overline{x}}. \tag{9}$$

Avem succesiv pentru $\alpha \in A$

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) &= \rho_\alpha(f\overline{x}, f\overline{\overline{x}}) \leqslant q_\alpha\, \rho_{\varphi(\alpha)}(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \leqslant \cdots \leqslant \\ &\leqslant q_\alpha\, q_{\varphi(\alpha)} \cdots q_{\varphi^{n-1}(\alpha)}\, \rho_{\varphi^n(\alpha)}(\overline{x}, \overline{\overline{x}}). \end{aligned} \tag{10}$$

Din convergenţa seriei (4), avem că termenul general al seriei are limita zero cînd $n \to \infty$, aşa că din (10), $\rho_\alpha(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) = 0$ pentru orice $\alpha \in A$ şi cum familia $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ este suficientă, avem că $\overline{x} = \overline{\overline{x}}$ şi teorema este demonstrată.

Observaţii. Aplicaţia f are acelaşi punct fix, dacă familia de semidistanţe se schimbă cu o familie de semidistanţe echivalentă [5].

Pentru a avea concluziile teoremei 2, este suficient ca seria (4) să conveargă pentru o pereche (x_0, fx_0) şi termenul general să tindă la zero pentru orice $x_1, x_2 \in X$.

II. În analiza spectrală a operatorilor liniari continui pe spaţii Banach, primele rezultate cu caracter general se pot demonstra cu ajutorul teoremei contracţiilor.

Prima teoremă de acest fel este: dacă $T : X \to X$ este un operator liniar continuu definit pe spaţiul Banach X şi $\|T\| < 1$, atunci $I - T$ este inversabil cu invers continuu definit pe X, adică 1 aparţine mulţimii rezolvante a operatorului T. Condiţia $\|T\| < 1$ este echivalentă cu aceea că operatorul $\widetilde{T}x = y + Tx$ este contractant şi deci ecuaţia

$$x = y + Tx$$

are soluţie unică pentru orice $y \in X$.

Această teoremă se poate extinde la operatori liniari contractanţi definiţi pe spaţii local convexe.

Fie X un spaţiu local convex, separat Hausdorff, complet faţă de şiruri, a cărui topologie este definită cu familia saturată şi suficientă de seminorme $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Spaţiul X se poate identifica cu spaţiul uniform X, structura uniformă fiind dată de semidistanţele $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$, definite prin $\rho_\alpha(x_1, x_2) = p_\alpha(x_1 - x_2)$.

Dacă $T : X \to X$ este un operator liniar continuu, atunci există, [1], pag. 59, (necesar şi suficient), o aplicaţie $\varphi : A \to A$ şi constantele $q_\alpha \geqslant 0$, încît

$$p_\alpha(x) \leqslant q_\alpha\, p_{\varphi(\alpha)}(x), \quad \alpha \in A, \quad x \in X. \tag{11}$$

Să presupunem că pentru operatorul T seria

$$p_\alpha(x) + \sum_{n=1}^{\infty} q_\alpha\, q_{\varphi(\alpha)} \cdots q_{\varphi^{n-1}(\alpha)}\, p_{\varphi^{n}(\alpha)}(x) \tag{12}$$

este convergentă pentru orice $\alpha \in A$, $x \in X$, (seria (12) este corespunzătoare seriei (4)).

În această situație, dacă fixăm un $y \in X$, operatorul $\widetilde{T}$ definit prin $\widetilde{T}x = y + Tx$ este contractant și deci ecuația $x = y + Tx$ are soluție unică pentru orice $y \in X$ adică $I - T$ aplică biunivoc X pe el însuși și pentru orice $y \in X$, soluția este dată prin

$$x = (I - T)^{-1} y = y + Ty + \ldots + T^{n} y + \ldots \tag{13}$$

seria (13) fiind convergentă în topologia lui x pentru fiecare y. Seria (13) rezultă aplicînd metoda aproximațiilor succesive dată de teorema 2, luînd ca primă aproximantă pe y.

Important de știut este dacă operatorul $(I - T)^{-1}$ definit prin (13) este continuu. Aceasta sigur se întîmplă, dacă topologia lui X se poate defini cu o familie numărabilă de seminorme, deoarece în acest caz X este un spațiu F.

În rezumat, este demonstrată :

TEOREMA 3. *Fie X un spațiu local convex, separat, complet față de șiruri, topologia sa fiind definită cu familia saturată și suficientă de seminorme $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$.*

Dacă $T : X \to X$ este un operator liniar continuu definit pe X, $\varphi : A \to A$ o aplicație a lui A în A cu ajutorul căreia se caracterizează continuitatea lui T, $q_\alpha \geqslant 0$, constante cu care sînt satisfăcute inegalitățile (11) și pentru fiecare $x \in X$ seria (12) este convergentă, atunci $I - T$ aplică biunivoc X pe el însuși.

Dacă în plus topologia lui X se poate defini cu o familie numărabilă de seminorme, atunci $(I - T)^{-1}$ este continuu pe X.

Primită la redacție la 18 iunie 1966

Facultatea de matematică–mecanică a Universității
„Al. I. Cuza”, Iași

BIBLIOGRAFIE

1. G. Marinescu, *Spații vectoriale topologice și pseudotopologice.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1959.
2. L. A. Liusternic, V. I. Sobolev, *Elementî funcționalinovo analiza.* Ed. 2, Moscova, 1965, p. 43.
3. Ion Colojoară, *Asupra unei teoreme de punct fix în spații uniforme complete.* Com. Acad. R.P.R., **XI**, 281 (1961).
4. N. Bourbaki, *Topologie générale*, livre III, ed. 2. Ed. Hermann, Paris, 1956.
5. N. Bourbaki, *Topologie générale*, livre III. *Utilisation des membres réels en topologie générale*, ch. 9. Ed. Hermann, Paris, 1958.

O MIŞCARE PLANĂ STAŢIONARĂ CU SUPRAFAŢĂ LIBERĂ ÎNTR-UN MEDIU POROS OMOGEN

DE

VIOREL POPA

(Piteşti)

Lucrarea studiază o mişcare plană staţionară cu suprafaţă liberă într-un mediu poros omogen, în prezenţa unui perete vertical de lungime infinită, domeniul mişcării fiind cel din fig. 1. Folosind metoda reprezentărilor conforme se obţine potenţialul complex (5) precum şi suprafaţa liberă (10).

1. În studiul mişcărilor potenţiale plane staţionare ale fluidelor de filtraţie, cu suprafaţă liberă, se foloseşte un plan ajutător introdus prin funcţia lui Jucovski. Să notăm cu (D) domeniul mişcării în planul fizic $z = x + iy$, mediul poros fiind considerat omogen şi izotrop, de coeficient de filtraţie k; cu (D'), domeniul mişcării în planul potenţialului complex $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ şi cu (D''), domeniul corespunzător în planul funcţiei $J(z) = J_1 + iJ_2 = f + ikz = \varphi - ky + i(\psi + kx)$. Atunci, în planul (J), linia liberă va fi o dreaptă, datorită condiţiei pe suprafaţa liberă $\varphi - ky = \operatorname{Re}\{J\} = \text{constant}$ [1].

În cele ce urmează vom studia mişcarea de filtraţie a unui fluid perfect în prezenţa unui perete vertical, impermeabil de lungime infinită.

2. Fie deci mişcarea al cărei domeniu fizic este dat în figura 1. Vom folosi sistemul stîng de axe de coordonate cu axa Oy dirijată pe verticală în jos. Fluidul liber ocupă domeniul mărginit de dreptele $x = 0$, $y = 0$, $y = -H$, iar mediul poros este mărginit de dreptele $y = 0$, $x = a$ $(a > 0)$ în care se află peretele impermeabil BC de lungime dată c şi de grosime neglijabilă. Peretele LF este impermeabil şi se întinde în jos la infinit. Vom mai presupune că mişcarea este descrisă de legea lui Darcy [2].

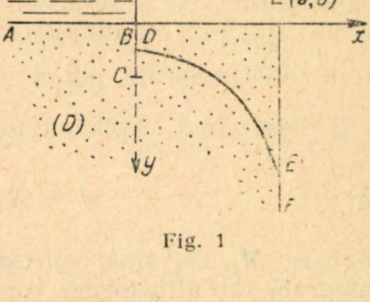


Fig. 1

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 123-129, BUCUREŞTI, 1967

Ne propunem să găsim distribuția de viteze (de filtrație), linia liberă și presiunea. În acest scop, vom aplica metoda reprezentărilor conforme, utilizată în mod curent în hidrogazodinamica subterană. Introducînd funcția $J = f + ikz$, avem următoarele condiții la limită :

— pe AB, $\varphi = kH$, $J_1 = -kH$

— pe BCD, linie de curent, $\psi = 0$, $J_2 = 0$;

— pe DE, linie de curent, $\psi = 0$, $J_1 = kh_c$

unde h_c = constant, reprezintă înălțimea de capilaritate [1] ;

— pe EF, linie de curent, $\psi = 0$, $J_2 = ka$.

În planele $f = \varphi + i\varphi$ și $J = J_1 + iJ_2$, domeniul mișcării este dat în figura 2 respectiv figura 3.

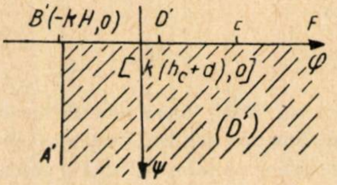


Fig. 2

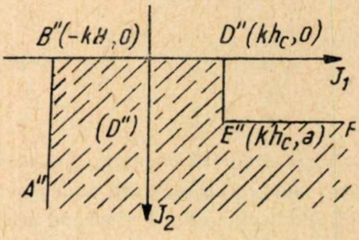


Fig. 3

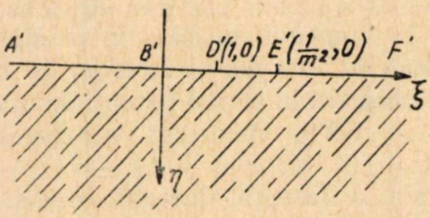


Fig. 4

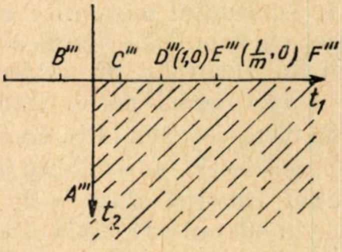


Fig. 5

În punctul D, $\varphi = k(h_c + d)$, iar în E, $\varphi = k(h_c + e)$, unde d și e $(d < e)$ sînt ordonatele punctelor D, respectiv E, constante ce urmează a fi determinate.

Vom reprezenta conform domeniul din planul (J) pe semiplanul superior al variabilei $\zeta = \xi + i\eta$, astfel încît să se corespundă punctele de la infinit, lui B să-i corespundă originea axelor iar lui D, punctul D' (1, 0) (fig. 4 ; considerăm sisteme stîngi). În acest caz punctului E îi va corespunde un punct $E'\left(\frac{1}{m^2}, 0\right)$ în care $m \in [0, 1]$ și m urmează a fi determinat. Aplicînd formula lui Schwarz-Christoffel vom obține :

$$J = M_1 \int_0^{\zeta} \sqrt{\frac{1 - m^2\zeta}{\zeta(1-\zeta)}}\, d\zeta + N_1 \tag{1}$$

în care M_1, N_1 sînt constante nedeterminate. Pentru a pune această integrală sub altă formă, vom trece la planul variabilei $t = t_1 + it_2$, prin relaţia $t = \sqrt{\zeta}\,(\zeta = t^2)$. Semiplanului din (ζ) îi corespunde primul cadran din planul (t); originile şi punctele de la infinit ce corespund respectiv, lui D' îi corespunde D''' $(1,\ 0)$ iar lui E' îi corespunde $E'''\left(\frac{1}{m},\ 0\right)$ (fig. 5).

Înlocuind pe ζ în raport de t, relaţia (1) devine :

$$J = M\int_0^t \sqrt{\frac{1-m^2t^2}{1-t^2}}\,dt + N = M\cdot E\,(t, m) + N \tag{2}$$

în care M şi N sînt constante oarecare ; am folosit, pentru integrala eliptică normală de specia a doua a lui Legendre, notaţia clasică (de ex .[3]) :

$$E\,(t, m) = \int_0^t \sqrt{\frac{1-m^2t^2}{1-t^2}}\,dt. \tag{3}$$

În punctul B, $t = 0$ şi $J = -kH$ iar relaţia (2) devine $-kH = E\,(0, m) + N$ din care rezultă $N = -kH$. În D, $t = 1$ şi $J = kh_c$ iar relaţia (2) devine $kh_c = M\cdot E\,(1,\ 0) - kH$ din care $M = \frac{k\,(H + h_c)}{E\,(m)}$, unde am folosit notaţia clasică $E\,(m) = E\,(1, m) = E$, pentru integrala eliptică completă de specia a doua, de modul m [3].

Prin relaţia :

$$f = At + B, \tag{4}$$

unde A, B sînt constante, facem corespondenţa între domeniile (D) şi (D') din planele (f) respectiv (t). În B, $t = 0$ şi $f = -kH$, care introduse în (4) ne dau $B = -kH$; în D, $t = 1$ şi $f = k\,(h_c + d)$, care introduse în (4) ne dau $A = k\,(H + h_c + d)$.

Înlocuind constantele, relaţiile (2) şi (4) devin :

$$\begin{cases} f = k\,(H + h_c + d)\,t - kH \\ J = \dfrac{k(H + h_c)}{E\,(m)}\cdot E\,(t, m) - kH = f + ikz. \end{cases} \tag{5}$$

3. Viteza complexă $w = u - iv = f'\,(z)$ se poate obţine parametric cu ajutorul relaţiilor (5). Eliminînd pe f, se obţine :

$$z = (H + h_c + d)\,it - \frac{H + h_c}{E\,(m)}\,i\cdot E\,(t, m). \tag{6}$$

Pentru determinarea vitezei pornim de la egalitatea

$$w = \frac{df}{dz} = \frac{df}{dt}\cdot\frac{dt}{dz}$$

şi înlocuind derivatele vom obţine :

$$w = \frac{ik\,(H + h_c + d)}{\dfrac{H + h_c}{E\,(m)}\sqrt{\dfrac{1 - m^2t^2}{1 - t^2}} - (H + h_c + d)}.$$

În punctul D viteza este nulă, iar în E, viteza este $-ik$; la infinit şi în B, rezultă, tot din (7):

$$w_\infty = \frac{ik.E(m)(H + h_c + d)}{m(H+h_c)-(H+h_c+D)\,E(m)}\,;\quad w_B = \frac{i\,k\,E(m)(H + h_c + d)}{H + h_c - (H + h_c + d)\,E(m)}$$

şi se observă că la infinit şi în B, $u = 0$, $v > 0$.

Trebuie să determinăm constantele m, d şi e. Pentru aceasta să scriem valorile lui f şi J în punctul E. Cînd $t = \frac{1}{m}$, relaţiile (5) devin:

$$\text{(5')}\quad \begin{cases} k(h_c + e) = k(H + h_c + d)\cdot \dfrac{1}{m} - kH, \\[2mm] kh_c + ika = \dfrac{k(H + h_c)}{E(m)}\cdot E\left(\dfrac{1}{m}, m\right) - kH. \end{cases}$$

Folosind relaţia (de ex. [3]):

$$E\left(\frac{1}{m}, m\right) = E(m) + i(K' - E')$$

în care K' este integrala eliptică completă de specia întîi de modul m', iar E' este integrala eliptică completă de specia doua de modul m', $(m'^2 + m^2 = 1)$, relaţiile (5') ne dau:

$$\text{(8)}\quad \frac{a}{H + h_c} = \frac{K' - E'}{E}\,;\quad \frac{H + h_c + d}{H + h_c + e} = m.$$

În punctul C, viteza este infinită; deci trebuie ca:

$$\text{(8')}\quad \frac{H + h_c}{E}\cdot\sqrt{\frac{1 - m^2 t_c^2}{1 - t_c^2}} = H + h_c + d,$$

unde am notat cu t_c valoarea lui t în punctul C'''.

Valoarea lui z, în punctul C, fiind cunoscută, relaţia (6) ne conduce la relaţia:

$$\text{(8'')}\quad C = (H + h_c + d)\,t_c - \frac{H + h_c}{E}\cdot E(t_c, m).$$

Relaţiile (8), (8') şi (8'') împreună, constituie un sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute: m, d, e, t_c.

Cum expresia $\frac{a}{H + h_c}$ este cunoscută şi pozitivă, urmează că expresia $\frac{K' - E'}{E}$ este pozitivă şi din tabele din [3] se poate găsi direct valoarea lui m. Din relaţia (8') se poate scoate condiţia pentru ca d să fie pozitiv şi anume:

$$\text{(9)}\quad \sqrt{\frac{1 - m^2 t_c^2}{1 - t_c^2}} \geqslant E(m) \text{ sau } t_c \geqslant \sqrt{\frac{E^2(m) - 1}{E^2(m) - m^2}}\,,$$

în care m şi t_c aparţin intervalului [0, 1]. În caz de egalitate în (9), rezultă $d = 0$.

Dacă ne dăm valorile lui a, H, h_c şi c, atunci se poate găsi m, d şi e din sistemul de mai sus, care este însă complicat. Menţionăm că putem evita calculele complicate procedînd în alt fel; ne dăm la început valorile lui a, H, h_c care determină unic pe $m \in [0, 1]$ şi alegem pentru t_c o valoare astfel ca $d \gg 0$. Astfel se poate determina c aşa cum vom arăta în două aplicaţii numerice. În acest caz sistemul se rezolvă mult mai uşor, deoarece valoarea lui $E(t_c, m)$ o găsim în tabele [3].

4. Pentru a determina linia liberă, pornim de la relaţia (6) în care vom separa partea reală şi coeficientul părţii imaginare.

Pe linia liberă DE, avem $1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{m}$ şi deci

$$E(t, m) = E(m) + \int_1^t \sqrt{\frac{1 - m^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt = E(m) + i \int_1^t \sqrt{\frac{m^2 t^2 - 1}{1 - t^2}}\, dt$$

fracţia de sub ultimul radical fiind pozitivă pentru $t \in \left(1, \frac{1}{m}\right)$.

Înlocuind în relaţia (6) se obţine:

$$x + iy = (H - h_c + d)\, it - (H + h_c)\, i + \frac{H + h_c}{E(m)} \int_1^t \sqrt{\frac{m^2 t^2 - 1}{1 - t^2}}\, dt$$

de unde rezultă:

$$(10) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{H + h_c}{E(m)} \displaystyle\int_1^t \sqrt{\frac{1 - m^2 t^2}{t^2 - 1}}\, dt \\ y = -(H + h_c) + (H + h_c + d)\, t. \end{cases} \qquad \left(1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{m}\right)$$

Relaţiile (10) constituie ecuaţiile parametrice ale liniei libere (t este real).

Din relaţiile (10), calculînd derivatele lui x şi y, se poate găsi uşor panta tangentei într-un punct al liniei libere. În punctul D tangenta este paralelă cu axa Ox, iar în E, tangenta este dreapta EF, ceea ce înseamnă că linia liberă se racordează cu peretele EF. În particular, cînd $a \to \infty$, $\frac{K' - E'}{E} \to \infty$ şi din tabele rezultă că $m \to 0$; în acest caz relaţiile (10) devin:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2(H + h_c)}{\pi} \operatorname{argch} t \\ y = (H + h_c + d)\, t - (H + h_c) \end{cases}$$

în care t este real şi $1 \leqslant t < \infty$. Din prima relaţie rezultă $t = \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2(H + h_c)}$, care introdus în ecuaţia a doua ne dă ecuaţia explicită a liniei libere,

$$(11) \qquad y = -(H + h_c) + (H + h_c + d) \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2(H + h_c)}$$

regăsind, astfel, cazul lui Jucovski [1].

Să considerăm şi cazul particular cînd $a \to 0$. Atunci $E(m) = 1$ iar $\frac{K' - E'}{E} = 0$ şi $m \to 1$. Din relaţia (8) rezultă $d = e$; relaţia (8′) devine $d \neq 0$, iar relaţia (8″) devine $c = d.t_c$. Cum ne este dat $t_c \leqslant 1$, $d \leqslant c$, trebuie să luăm $d = c$; $t_c = 1$. Viteza complexă se scrie acum $w = \frac{i\,k\,(H + h_{c+d})}{-d}$ şi cum $c \to \infty$ sau $d \to \infty$, rezultă viteza $w = -ik$, iar linia liberă devine $x = 0$.

Regăsim cazul simplu al unui curent paralel cu axa Oy.

5. Valoarea presiunii se poate scoate din relaţia lui Darcy [2], $\varphi = -k\left(\frac{p}{\gamma} - y\right)$ obţinîndu-se :

$$p = \gamma\left(y - \frac{\varphi}{k}\right) \tag{12}$$

în care p peste presiunea şi γ este greutatea specifică a fluidului. Vom exprima presiunea şi cu ajutorul lui t. Din relaţia (6) găsim $y = \mathrm{Im}\,\{z\}$, iar din prima relaţie (5), găsim $\varphi = \mathrm{Re}\,\{f\}$ şi atunci

$$p = \gamma\left[\mathrm{Im}\,\{z\} - \frac{1}{k}\cdot\mathrm{Re}\,\{f\}\right]$$

sau

$$\begin{aligned} p = \gamma\Bigg[\mathrm{Im}\left\{(H + h_c + d)\,it - \frac{H + h_c}{E(m)}\,i\cdot E(t, m)\right\} - \\ - \frac{1}{k}\,\mathrm{Re}\,\{k\,(H + h_c + d)\,t - kH\}\Bigg]\cdot \end{aligned} \tag{13}$$

Această ultimă relaţie se poate scrie şi sub forma

$$p = \gamma\,[y + H - t_1\,(H + h_c + D)]. \tag{13′}$$

Calculînd presiunea pe linia AB, regăsim uşor, din (12), $p = \gamma H$, iar pe linia liberă DE, $p = -\gamma h_c$. În punctul C obţinem :

$$p_c = \gamma\,[c + H - t_c\,(H + h_c + d)].$$

6. Ca aplicaţie numerică să luăm $h_c = 0$ şi raportul $\frac{a}{H} = 0{,}18025$, ceea ce înseamnă pentru $H = 40$ m, de exemplu, $a = 3{,}805$ m.

Din tabelele valorilor integralelor eliptice [3] găsim $\frac{K' - E'}{E} = 0{,}18025$, $m = 0{,}866$, $m^2 = 0{,}75$; $E\,(m) = 1{,}2110560$. Dacă luăm $t_c = m$, condiţia (9) este îndeplinită şi tot din tabele din [3] găsim

$$E\,(t_c, m) = E(\varphi, \theta) = \int_1^{\varphi} \sqrt{1 - m^2 \sin^2\varphi}\;\mathrm{d}\varphi = 0{,}9184$$

în care $m = \sin\theta$, $t_c = \sin\varphi$, adică $\varphi^\circ = \theta = 60^\circ$.

Relaţia (8′) devine

$$d = (H + h_c)\left[\frac{1}{E(m)}\sqrt{\frac{1 - m^2 t_c^2}{1 - t_c^2}} - 1\right] = (H + h_c)\cdot 0{,}0923 = 3{,}692 \text{ m}$$

iar din relaţia (8″) deducem $c = 7{,}563$ m. Mai găsim din relaţiile (8) $e = 10{,}453$ m; presiunea în punctul C este $p = 9{,}726\ \gamma$.

Să considerăm acum un alt caz particular interesant în care vom determina pe c, astfel ca să avem $d = 0$. Vom lua deci $d = 0$; pentru celelalte luăm: $H = 20$ m; $a = 20$ m; $h_c = 0$.

Rezultă $\dfrac{K' - E'}{E} = 1$; $m = 0{,}3$; $m^2 = 0{,}09$, $E = 1{,}5348335$, din tabele [3]. Din a doua relaţie (8), obţinem $e = 46{,}666$ m. Din a doua relaţie (9), găsim $t_c = 0{,}2991$. Apoi $E(t_c, m) = E(\varphi, \theta) = 0{,}3138$, în care $\varphi \simeq \theta = 17°30'$. Înlocuind în relaţia (8″) găsim $c = 2{,}094$ m. Mai găsim presiunea în punctul C din relaţia (13′), $p = 8{,}088\ \gamma$.

Primită la redacţie la 21 iunie 1966

Şcoala superioară de ofiţeri Piteşti

BIBLIOGRAFIE

1. П. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА, *Теория движения грунтовых вод.* Москва. 1952, Cap. IV.
2. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, *Capitole din teoria mişcărilor în medii poroase*, Bucureşti, 1957, p. 5—7.
3. Ф. Б. НЕЛСОН-СКОРНЯКОВ, *Фильтрация в однородной среде*, 1949, p. 348, 369.

PSEUDOCORECTAREA ERORILOR ÎN TEORIA CODURILOR

DE

DUMITRU ENE

În această Notă e descrisă o generalizare a noţiunii de „corectare a erorilor" din teoria algebrică a codurilor [1]. Problema e pusă şi rezolvată complet în cazul binar. Se prezintă în detaliu esenţa problemei, aplicaţiile schiţate la sfîrşit avînd un caracter cu totul secundar.

I

Presupunem că informaţiile ce urmează a fi transmise, sînt vectori cu k componente binare, adică elemente ale spaţiului liniar k-dimensional V peste $GF(2)$, faţă de adunarea modulo 2 şi înmulţirea obişnuită cu scalari. Fie $T \subseteq V$.

Dacă s-a transmis vectorul $u \in T$ şi s-a primit la recepţie vectorul $u' \in V$, a *corecta erorile* lui u înseamnă a restabili pe u din u'. Pentru corectarea eventualelor erori, se folosesc $n - k$ simboluri de verificare de paritate şi în loc de u se transmite vectorul v cu n componente binare, din care k componente sînt chiar componentele lui u, restul de $n - k$ fiind simbolurile de verificare de paritate ; primindu-se la recepţie vectorul cu n componente binare v', folosind simbolurile de verificare de paritate, se restabileşte v din v' apoi se regăseşte u, înlăturîndu-se simbolurile de verificare de paritate dintre componentele lui v. Pentru amănunte privind modul de corectare a erorilor trimitem la [1] şi bibliografia respectivă.

A pseudocorecta erorile lui $u \in T$ înseamnă a decide dacă $u' \in T$ sau nu. Se înţelege că T nu este complet cunoscută la recepţie, altfel pseudocorectarea nu mai are obiect, deoarece prin inspectarea vectorilor lui T, aflată şi la recepţie, s-ar decide imediat dacă $u' \in T$ sau nu.

---

[1] Toate noţiunile nedefinite şi afirmaţiile nedemonstrate aici ca şi notaţiile folosite, se găsesc în [1].

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 131–135, BUCUREŞTI, 1967

Totuşi, chiar şi în acest caz, dacă T are o structură particulară, dar un număr foarte mare de vectori, chiar simpla inspecţie a vectorilor lui T poate fi mai laborioasă ca pseudocorectarea.

Vom face ipoteza că T e parţial cunoscută (nu complet necunoscută) la recepţie, iar pentru pseudocorectarea erorilor, informaţiile ce urmează a fi transmise nu vor fi vectorii $u \in T$, ci vectorii us_T, unde s_T ne dă indicaţii despre T.

Dacă T are o structură particulară, s_T poate să caracterizeze pe T, deci T poate să fie complet necunoscută la recepţie iar pseudocorectarea să fie uşurată. În aplicaţii e avantajos să alegem pe T de acest fel.

De exemplu, dacă T e mulţimea tuturor vectorilor cu k componente binare, de pondere dată d, vom scrie numărul natural d ca vector cu componente binare (în baza 2) şi vom pune $s_T = d$.

II

Vom da mai departe descrierea pseudocorectării erorilor pentru T arbitrară. Întrucît se vor folosi în mod esenţial particularităţile lui GF (2), se pare că metoda nu se extinde nemijlocit la cazul nebinar. Consideraţiile de algebră finită ce se vor face, îndeobşte cunoscute, sînt expuse într-o prezentare personală, deci au şi un interes în sine.

1. T are un număr par $2j$ de vectori.

Fie $e = (0, \ldots, 0)$ vectorul-unitate din V şi $u_0 \in V$, $u_0 \neq e$.

Mulţimea $\{u_0, e\}$ este evident un subspaţiu ($\equiv$ subgrup) de dimensiune 1. Cum V conţine $2^k - 1$ vectori nenuli, avem $2^k - 1$ astfel de subspaţii.

Fiecăruia din aceste subspaţii 1-dimensionale i se ataşează 2^{k-1} clase de resturi[2]. În adevăr, fie $u \in V$.

Dacă $u = u_0$ sau $u = e$, atunci $\{u_0, e\} + u = \{u_0, e\}$, dacă nu, fie $u = r'$. Avem $\{r, e\} + r' = \{r + r', r'\} = \{r'', r'\}$, unde $r + r' = r'' \in V$ şi deci $\{r, e\} + r'' = \{r', r''\}$ aşa că sînt numai $2^k/2 = 2^{k-1}$ clase de resturi distincte (cei 2^k vectori din V dau cîte doi, o aceeaşi clasă de resturi).

Să mai observăm că două clase de resturi din sisteme diferite sînt de asemenea distincte (dacă prin absurd $\{r, e\} + r_1 \equiv \{t, e\} + t_1$ cu $r \neq t$, atunci $\{r + r_1, r_1\} \equiv \{t + t_1, t_1\}$ deci sau $r + r_1 = t + t_1$ şi $r_1 = t_1$ adică $r = t$, sau $r + r_1 = t_1$ şi $r_1 = t + t_1$ şi prin adunare $r = t$) şi că numărul total de clase de resturi distincte două cîte două din toate cele $2^k - 1$ sisteme de clase de resturi, ataşate celor $2^k - 1$ subspaţii 1-dimensionale, este $2^{k-1} (2^k - 1) = 2^k (2^k - 1)/2 = \binom{2^k}{2}$.

Deci oricare doi vectori din V formează o clasă de resturi (faţă de un anumit subspaţiu 1-dimensional). La această concluzie ajungem şi direct observînd că dacă $r_1, r_2 \in V$, atunci $\{r_1, r_2\} = \{r, e\} + r_2$, unde $r_1 + r_2 = r \in V$, $\{r, e\}$ fiind subspaţiu.

---

[2] Vom socoti şi subspaţiile clase de resturi în raport cu ele însele.

Prin urmare, dacă vom împărți pe T în mod arbitrar în j perechi de vectori, T va fi o reuniune de j clase de resturi disjuncte cîte două. Este posibil ca T să conțină și clase de resturi cu 2^t vectori, unde $1 < t \leqslant k$.

Fie S un subspațiu al lui V, de dimensiune t ($t \leqslant k$), deci conținînd 2^t vectori. Se știe [1] că vectorii $u \in S$ satisfac sistemului de $k - t$ ecuații independente scris vectorial $uH' = 0$, unde H' de tip $k \times (k - t)$ e transpusa matricii de verificare de paritate H a lui S și că cei 2^t vectori ai oricărei clase de resturi C atașate lui S, verifică de asemenea un sistem de $k - t$ ecuații independente scris vectorial $uH' = s_C$, unde s_C cu $k - t$ componente binare, e sindromul lui C.

Fie M_S și M_C matricile de tip $2^t \times k$ care au pe linii vectorii lui S respectiv C. Cum S are dimensiunea t, avem rang $M_S = t$.

Atașăm lui C și matricea $\overline{M}_C$, obținută din M_C adăugîndu-i o ultimă coloană avînd toate elementele egale cu 1.

Fie $\{r_1, \ldots, r_t\}$ o bază în S; ceilalți vectori nenuli din S sînt sumele vectorilor $r_1, \ldots, r_t$ cîte $2, 3, \ldots, t$, deoarece $r_1, \ldots, r_t$ împreună cu aceste sume (nenule deoarece $r_1, \ldots, r_t$ sînt liniar independenți) sînt $C_t^1 + \ldots + C_t^t = 2^t - 1$ vectori nenuli diferiți, adică toți vectorii nenuli din S.

Avem $C = S + r$, unde $r \notin S$. Vectorii $r_1 + r, \ldots, r_t + r$ din C sînt liniar independenți deoarece sumele lor cîte 2, 4, ... coincid cu sumele corespunzătoare pentru vectorii $r_1, \ldots, r_t$ deci sînt nenule, iar sumele $S_i^3, S_j^5, \ldots$ cîte 3, 5, ... ale vectorilor $r_1 + r, \ldots, r_t + r$ sînt egale cu sumele pentru $r_1, \ldots, r_t$ cărora li se adaugă r, deci tot nenule (contrar, r ar fi sumă a unora din vectorii $r_1, \ldots, r_t$ deși $r \notin S$). Totodată $S_i^3, S_j^5, \ldots, \in C$.

Fie $\bar{r} \in C$, $\bar{r} \neq r_1 + r, \ldots, r_t + r, S_i^3, S_j^5, \ldots$ Deci $\bar{r} = S^p + r$, unde S^p e suma unui număr par de vectori dintre $r_1, \ldots, r_t$.

Ca mai sus se arată că vectorii $r_1 + r, \ldots, r_t + r, \bar{r}$ sînt liniar independenți, iar sumele lor cîte 3, 5, ... sînt vectori de tipul $u + r$, unde $u \in S$, deci aceste sume sînt vectori diferiți din C. În plus, $r_1 + r, \ldots$ $\ldots, r_t + r$, $\bar{r}$ împreună cu aceste sume constituie $C_{t+1}^1 + C_{t+1}^3 + \ldots + C_{t+1}^{t'} = 2^t$ vectori diferiți din C (t' e cel mai mare întreg impar mai mic ca $t + 1$).

Așadar rang $\overline{M}_C = t + 1$, deoarece minorul din $\overline{M}_C$ ce conține în liniile sale pe $r_1 + r, \ldots, r_t + r, \bar{r}$ e nenul datorită independenței acestor vectori, iar celelalte linii din $\overline{M}_C$ sînt sume ale unui număr impar dintre liniile acestui minor, deci toți minorii cu $t + 2$ linii din $\overline{M}_C$ sînt nuli.

Fie din nou clasa de resturi C dată prin cei 2^t vectori ai săi. Sistemul asociat lui C, $uH' = s_C$ se deduce astfel: o ecuație oarecare a sistemului are forma

$$(1) \qquad \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta = 0$$

unde $\alpha_i, \beta \in GF(2)$ iar $u = (a_1, \ldots, a_k) \in C$.

Înlocuind cei 2^t vectori din C în (1), vom obține un sistem omogen de 2^t ecuații cu $k + 1$ necunoscute α_i, β, matricea sistemului fiind $\overline{M}_C$. Cum rang $\overline{M}_C = t + 1$, vom rezolva acest sistem în raport cu $t + 1$ dintre necunoscute, restul de $k - t$ rămînînd arbitrare. Înlocuind valorile acestor $t + 1$ necunoscute în (1), vom avea în (1) $k - t$ parametri dintre α_i, β

independenţi ; dînd factori comuni aceşti parametri, dacă ei apar în cel puţin doi termeni, datorită independenţei acestor parametri, trebuie ca coeficienţii lor (care depind de $a_1, \ldots, a_k, 1$) să se anuleze.

Obţinem astfel cele $k - t$ ecuaţii ale sistemului căutat.

Să observăm, în sfîrşit, că dacă vectorii lui C au t_0 componente nule, $\overline{M}_C$ va avea t_0 coloane nule, iar în sistemul omogen obţinut din (1) cu matricea $\overline{M}_C$, cei t_0 parametri care nu apar, sînt independenţi şi se adaugă celor $k - t - t_0$ parametri arbitrari care apar efectiv în acest sistem şi în raport cu care se exprimă cei $t + 1$ parametri dependenţi cînd rezolvăm sistemul omogen.

Deci, în final, (1) va conţine tot $k - t - t_0 + t_0 = k - t$ parametri independenţi şi concluzia se menţine.

Pentru realizarea pseudocorectării facem următorii paşi : (m) Alegem din T în toate modurile posibile o mulţime C_m cu 2^m vectori[3]) şi vom cerceta dacă C_m e o clasă de resturi astfel : fie $r \in C_m$ şi $S_m = C_m + r$. C_m e clasă de resturi $\Leftrightarrow S_m$ e subspaţiu $\Leftrightarrow$ rang $M_{S_m} = m$.

Dacă T conţine cel puţin o clasă de resturi cu 2^m vectori, vom repeta pasul (m) luînd în rolul lui T mulţimea $T \setminus C_m$ cu $2j - 2^m = 2j'$ vectori iar în rolul lui m pe m', cel mai mare număr natural cu $2^{m'} \leqslant 2j'$.

În caz contrar trecem la pasul $(m - 1)$.

Procesul poate fi continuat pînă cînd $m = 1$. Pentru $m = 1$, conform celor precedente, fiecare pereche de vectori formează o clasă de resturi.

Deci $T = C_{m_1} \cup \ldots \cup C_{m_t}$ cu $C_{m_i} \cap C_{m_j} = \emptyset$ pentru $i \neq j$ şi $m \geqslant m_1 \geqslant \ldots \ldots \geqslant m_t \geqslant 1$, iar C_{m_i} are 2^{m_i} vectori.

Fie $uH_i' = s_i$ sistemul de ecuaţii verificat de vectorii $u \in C_{m_i}$, unde H_i are tipul $(k - m_i) \times k$ iar s_i are $k - m_i$ componente.

Vom forma matricea de tip $(tk - \sum m_i) \times k$:

$$H_T = \left[\begin{array}{c} H_1 \\ \hline \vdots \\ \hline H_t \end{array}\right]$$

în care sînt cunoscute poziţiile liniilor orizontale care separă între ele pe $H_1 \ldots H_t$.

Vom forma de asemenea vectorul $s_T = (s_1, \ldots, s_t)$ cu $tk - \sum m_i$ componente binare.

Ansamblul (H_T, s_T) caracterizează complet pe T : $u \in T \Leftrightarrow$ există i cu $uH_i' = s_i$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$.

Acum vom lămuri sensul ipotezei din secţiunea I că T este parţial cunoscută la recepţie şi anume, vom presupune că H_T este cunoscută şi la recepţie (împreună cu poziţiile liniilor orizontale din structura ei).

Pseudocorectarea va decurge astfel : fie $u \in T$; în locul lui u vom transmite pe uv_T (v_T lipit după u), unde componentele lui v_T sînt formate din componentele lui s_T şi un număr de simboluri de verificare de paritate.

La recepţie vom obţine vectorul $u'v_T'$ şi după corectarea erorilor lui v_T' cu metodele obişnuite (vezi [1]) îl vom reobţine pe s_T.

---

[3]) m e cel mai mare număr natural cu $2^m \leqslant 2j$.

Vom separa în s_T pe $s_1, \ldots, s_t$ (conform poziției liniilor orizontale din structura lui H_T aflată la recepție), s_i avînd $k - m_i$ componente $(k - m_1 \leqslant \ldots \leqslant k - m_t)$.

Evident, $u' \in T \Leftrightarrow$ există i cu $u'H_i' = s_i$.

2. T are un număr impar $2j + 1$ de vectori.

Vom alege în mod arbitrar vectorii a, b, $c \in T$ și vom forma clasele de resturi $\{a, b\}$, $\{a, c\}$. Mulțimea $T \diagdown \{a, b, c\}$ are un număr par $2(j - 1)$ de vectori, deci luînd-o în rolul lui T îi putem aplica tratamentul de la punctul 1.

Claselor de resturi ce le vom obține de acolo, le vom adăuga și clasele de resturi $\{a, b\}$ și $\{a, c\}$ ale căror sisteme de ecuații se obțin tot ca la punctul 1; a, b, c vor fi aleși astfel ca în $T \diagdown \{a, b, c\}$ să găsim clase de resturi cît de mari este posibil (cu un număr minim de ecuații în sistemele asociate) pentru a ușura efectuarea pseudocorectării.

Observație. Dacă $u_0 \in V$, mulțimea $C = \{u_0\}$ e clasă de resturi față de subspațiul-unitate $E = \{e\}$ și verifică sistemul banal de ecuații $u_0H' = u_0$ deci $s_C = u_0$, unde H' e matricea-unitate diagonală de tip $k \times k$.

Pseudocorectarea pentru $T = \{u_0\}$ se reduce la corectarea erorilor lui u_0 doarece $s_T = u_0$, deci e în adevăr o generalizare a corectării erorilor.

Aplicații.

1°. Putem folosi pseudocorectarea erorilor pentru a vedea dacă la transmiterea lui $u \in V$ s-au produs erori: alegem T_1, $T_2 \subseteq V$ cu $T_1 \cap T_2 = \{u\}$ (T_1, T_2 avînd o structură particulară, pentru a ușura pseudocorectarea — vezi I).

Efectuînd pseudocorectarea, dacă u' e primit din u și $u' \notin T_1$ sau $u' \notin T_2$, atunci $u' \not\equiv u$ deci s-au produs erori.

2°. Dacă $u = (a_1, \ldots, a_k)$, fie $u_1 = a_1$, $u_2 = \{a_1, a_2\}, \ldots, u_k = u$ și fie $T_1^i \cap T_2^i = \{u_i\}$.

Efectuarea pseudocorectării folosind cele $2k$ mulțimi T_j^i $(i = 1, \ldots, \ldots, k;\ j = 1, 2)$ permite detectarea oricărei componente eronate a lui u, deci corectarea oricărui număr de erori din u.

În adevăr, dacă din u s-a primit la recepție $u' = (a_1', \ldots, a_k')$ în $u_1' = a_1'$ e posibilă o eroare unică pe care o detectăm ca la punctul 1°, deci restabilim pe $u_1 = a_1$, în $u_2' = (a_1, a_2')$ e posibilă o eroare unică și procedăm ca pentru u_1' etc.

Primită la redacție la 10 iunie 1966

Facultatea de matematică
și mecanică a Universității din
București

BIBLIOGRAFIE

1. W. W. PETERSON, *Error-Correcting Codes*, M.I.T. Press and Wiley, N. Y., 1961.

SPECTRUL UNEI LATICI

DE

C. BĂNICĂ şi O. STĂNĂŞILĂ

Lucrarea îşi propune o caracterizare a spaţiilor a căror topologie are proprietăţi asemănătoare topologiei preschemelor. Se defineşte noţiunea de spectru al unei latici, care extinde într-un anumit fel topologia spectrului prim al unui inel ([1]) şi se obţin condiţii necesare şi suficiente ca un spaţiu topologic să fie spectrul unei latici (teorema 1), apoi spectrul unui cvasiinel (teorema 3), dîndu-se o serie de exemple.

Într-o lucrare viitoare vom considera spaţiile inelate pentru care fasciculul structural, fasciculele coerente şi cvasicoerente au proprietăţi asemănătoare celor de la prescheme.

I. TOPOLOGIA SPECTRALĂ ASOCIATĂ UNEI LATICE RELATIV LA O MULŢIME DE ELEMENTE CVASIPRIME

Fie $\mathcal{L}$ o latice *completă*. Vom nota 0,1 respectiv cel mai mic şi cel mai mare element din $\mathcal{L}$.

Punem $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} - \{1\}$; un element $p \in \mathcal{L}^*$ se zice *cvasiprim* dacă $p \geqslant a \cap b \Rightarrow p \geqslant a$ sau $p \geqslant b$ $(a,\ b \in \mathcal{L})$.

Fixăm o mulţime $X \subset \mathcal{L}^*$ de elemente cvasiprime satisfăcînd următoarea condiţie de cofinalitate: $(\forall)$ $a \in \mathcal{L}^*$, există $x \in X$ astfel încît $a \leqslant x$. În cazurile particulare pe care le vom considera, există o astfel de mulţime nevidă X. $(\forall)$ $a \in \mathcal{L}$, punem:

$$V(a) = \{x \in X \mid x \geqslant a\},\quad D(a) = \complement_X V(a)$$

PROPOZIŢIA 1. *Familia* $\{V(a)\}_{a \in \mathcal{L}}$ *este familia mulţimilor închise dintr-o topologie* τ *a lui* X.

Demonstraţie. În adevăr, se verifică imediat conform definiţiei lui X:

(F_1) $V(0) = X,\ V(1) = \emptyset$;

(F_2) $V(a) \cup V(b) = V(a \cap b)$, pentru orice $a, b \in \mathcal{L}$;

(F_3) Pentru orice familie $(a_i)_{i \in I}$ de elemente din $\mathcal{L}$,

$$\bigcap_{i \in I} V(a_i) = V\Big(\bigcup_{i \in I} a_i\Big).$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 137–145, BUCUREŞTI, 1967

Topologia τ o numim *topologia spectrală asociată lui* $\mathscr{L}$ relativ la X, iar spaţiul topologic (X, τ) îl numim *spectrul laticii complete* $\mathscr{L}$ *relativ la* X (în cele ce urmează vom renunţa la a mai spune „relativ la").

Rezultatul principal al acestui capitol este :

TEOREMA 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca un spaţiu topologic să fie spaţiu Kolmogorov în care orice închis ireductibil are punct generic este ca el să fie spectrul unei latici complete (relativ la mulţimea tuturor elementelor cvasiprime).*

Demonstraţie. Fie S un spaţiu topologic. Considerăm laticea $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\mathcal{S}}$ *opusă* laticei închişilor lui S şi fie $X \subset \mathscr{L}^*$ mulţimea închişilor ireductibili din S (distincţi de S). Evident, elementele lui X sînt cvasiprime în $\mathscr{L}$, astfel că sînt îndeplinite condiţiile ca X să poată fi înzestrat cu topologia spectrală asociată lui $\mathscr{L}_{\mathcal{S}}$.

Fie $\varphi : S \to X$ aplicaţia de mulţimi definită astfel :

$$(\forall)\, s \in S,\quad \varphi(s) = \overline{\{s\}}.$$

1) φ este continuă : oricare ar fi închisul $V(F)$ din X, se arată imediat că $\varphi^{}(V(F)) = F$;

2) φ este aplicaţie închisă pe imagine : oricare ar fi închisul F din S, $\varphi(F) = V(F) \cap \varphi(S)$;

3) φ este injectivă $\rightleftarrows$ S este spaţiu Kolmogorov ;

4) φ este surjectivă $\rightleftarrows$ orice închis ireductibil din S are punct generic.

În consecinţă, dacă S este spaţiu Kolmogorov în care orice închis ireductibil are punct generic, atunci el este omeomorf cu spaţiul topologic X asociat laticei $\mathscr{L}_{\mathcal{S}}$; astfel, ultima parte a teoremei este demonstrată.

Cealaltă parte va rezulta din consideraţiile care urmează.

Fie $\mathscr{L}$ o latice completă şi X o mulţime cofinală în $\mathscr{L}$ cu $\mathscr{L}^*$ de elemente cvasiprime ; pentru $a \in \mathscr{L}^*$, numim X - *radicalul lui* a elementul $(\sqrt{a})_X = \bigcap\limits_{\substack{x \in X \\ x \geqslant a}} x$. Pentru coerenţa unor formule convenim : $\sqrt{1} = 1$.

Numim element X-radical un element $a \in \mathscr{L}$ astfel încît $a = (\sqrt{a})_X$.

Se demonstrează uşor următoarele afirmaţii :

1) Pentru orice $a, b \in L$, $x \in X$: $x = \sqrt{x}$, $a \leqslant \sqrt{a}$, $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$, $\sqrt{a \cap b} = \sqrt{a} \cap \sqrt{b}$, $\sqrt{a \cup b} = \sqrt{\sqrt{a} \cup \sqrt{b}}$;

2) Un element din $\mathscr{L}^*$ este element radical dacă şi numai dacă el este intersecţie a unei familii de elemente din X.

Considerînd X ca spaţiu topologic, atunci, evident, pentru orice $a, b \in \mathscr{L}$ avem :

$$V(a) = V(\sqrt{a}) \text{ şi } V(a) = V(b) \rightleftarrows \sqrt{a} = \sqrt{b}.$$

Pentru $Y \subseteq X$, punem $\mathcal{J}(Y) = \bigcap\limits_{x \in Y} x$ şi convenim $\mathcal{J}(\emptyset) = 1$.

Evident, $\mathcal{J}(X) = \sqrt{0}$.

PROPOZIȚIA 2. (1) *Aplicațiile* $V : \mathcal{L} \to \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{I} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ *sînt descrescătoare ca aplicații de mulțimi ordonate* ;

(2) $(\forall)\ a \in \mathcal{L}, \quad \mathcal{I}(V(a)) = \sqrt{a}$;

$(\forall)\ Y \subseteq X$, $V(\mathcal{I}(Y)) = \overline{Y}$ *(închiderea lui* Y *în topologia spectrală a lui* X*)* ;

(3) $\mathcal{I}(V(\mathcal{I}(Y))) = \mathcal{I}(Y), \quad V(\mathcal{I}(V(a))) = V(a).$

Demonstrație. (1) evident ;

$$(2)\ \mathcal{I}(V(a)) = \bigcap_{x \in V(a)} x = \sqrt{a}\ ;\ \text{apoi}$$

$V(\mathcal{I}(Y)) = \{x \in X \mid x \geqslant \bigcap_{y \in Y} y\}$. Evident, $Y \subseteq V(\mathcal{I}(Y))$; dar $V(\mathcal{I}(Y))$ este cel mai mic închis din X care conține Y (în adevăr, fie $b \in L$ a. î. $y \subseteq V(b)$; atunci $V(\mathcal{I}(Y)) \subseteq V(\mathcal{I}(V(b))) = V(\sqrt{b}) = V(b))$;

$$(3) \quad \mathcal{I}(V(\mathcal{I}(Y))) = \bigcap_{x \in V(I(Y))} x = \sqrt{\mathcal{I}(Y)} = \mathcal{I}(Y)\ \text{etc.}$$

COROLARUL 1. *Spațiul* (X, τ) *este spațiu Kolmogorov.*

Demonstrație. Dacă $x \in X$, atunci $\overline{\{x\}} = V(\mathcal{I}(\{x\})) = V(x)$. Fie $x \neq y$ în X ; sau $x \not\leqslant y$, sau $y \not\leqslant x$, deci sau $y \notin V(x)$ sau $x \notin V(y)$.

Evident, X este T_1-spațiu $\rightleftarrows$ elementele lui X sînt maximale în $\mathcal{L}$.

COROLARUL 2. *Aplicațiile* V, $\mathcal{I}$ *realizează o corespondență biunivocă antimonotonă (pe scurt, un antizomorfism) între mulțimea* $\mathcal{F}$ *a închișilor lui* X *și mulțimea elementelor radicale ale laticei* $\mathcal{L}$.

Remarcăm în plus că pentru orice subfamilie $(Y_i)_{i \in I}$ a lui $\mathcal{F}$, avem

$$\mathcal{I}(\bigcap_{i \in I} Y_i) = \sqrt{\bigcap_{i \in I} \mathcal{I}(Y_i)}, \quad \mathcal{I}(\bigcap_{i \in I} Y_i) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{I}(Y_i)$$

COROLARUL 3. *Dacă* $(p_i)_{i \in I}$ *este o familie de elemente cvasiprime din* $\mathcal{L}$, *atunci* $V(\bigcap_{i \in I} p_i) = \overline{\bigcup_{i \in I} V(p_i)}$.

PROPOZIȚIA 3. *Fie* $a \in \mathcal{L}$. *Sînt echivalente următoarele afirmații* :

(1) $V(a)$ *este închis ireductibil al lui* X ;

(2) $\sqrt{a}$ *este cvasiprim.*

Demonstrație : (1) $\Rightarrow$ (2). Fie $\sqrt{a} \geqslant b \cap c$ pentru $b, c \in \mathcal{L}$. Conform propozițiilor 1, 2, rezultă $V(\sqrt{a}) = V(a) \subseteq V(b) \cup V(c)$, deci $V(\sqrt{a}) \subseteq V(b)$ sau $V(\sqrt{a}) \subseteq V(c)$, adică $\sqrt{a} \geqslant b$ sau $\sqrt{a} \geqslant c$.

(2) $\Rightarrow$ (1), Fie $a, b, c \in \mathcal{L}$ astfel încît $V(a) \subseteq V(b) \cup V(c)$ cu $\sqrt{a}$ cvasiprim ; rezultă $\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b \cap c} = \sqrt{b} \cap \sqrt{c}$, deci, $\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b}$ sau $\sqrt{a} \geqslant \sqrt{c}$.

COROLARUL 1. X *este ireductibil* $\rightleftarrows$ $\sqrt{0}$ *este cvasiprim* :

COROLARUL 2. *Asocierea* $x \rightsquigarrow \overline{\{x\}}$ *stabilește o corespondență biunivocă între mulțimea* X *și submulțimea închișilor ireductibili din* X *care corespund la elemente cvasiprime din* X.

Demonstrație. Conform propoziției 3, $\overline{\{x\}} = V(x)$ este mulțime ireductibilă. Fie $a \in \mathscr{L}$ astfel încît $V(a)$ este închis ireductibil în X; atunci $\sqrt{a} \in X$ şi $V(a) = V(\mathscr{I}\{\sqrt{a}\}) = \overline{\{\sqrt{a}\}}$, deci orice închis ireductibil din X are punct generic.

Cum X este spațiu Kolmogorov (corolar 1 al propoziției 2) asocierea $x \rightsquigarrow \overline{\{x\}}$ este injectivă.

În acest moment putem considera încheiată demonstrația teoremei 1.

Facem încă cîteva considerații simple asupra topologiei date mai înainte.

Fiind dat $a \in \mathscr{L}$, $D(a)$ este deschis conex în $X \rightleftarrows$ pentru $a, b, c \in \mathscr{L}$ astfel încît $a \leqslant \sqrt{b \cap c}$ şi $\sqrt{b} \cap \sqrt{c} = \sqrt{0}$, rezultă $a \leqslant \sqrt{b}$ sau $a \leqslant \sqrt{c}$.

E suficient să observăm că $D(a) \subset D(b) \rightleftarrows \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

Rezultă deci că X este spațiu conex $\rightleftarrows \{a \cup b = l, a \cap b = \sqrt{0} \Rightarrow a = l$ sau $b = l\}$.

Este evident totodată că deschisul $D(a)$ este conex în X pentru orice $a \in \mathscr{L} \rightleftarrows \sqrt{0}$ este cvasiprim. (Un spațiu topologic este ireductibil $\rightleftarrows$ orice deschis al său este conex).

Elementul $a \in \mathscr{L}$ se zice de *tip finit* dacă pentru orice familie $(a_i)_{i \in I}$ de elemente din $\mathscr{L}^*$ astfel încît $a \leqslant \bigcup_{i \in I} a_i$, există $i_1, \ldots, i_p \in I$ cu $a \leqslant a_{i_1} \cup \ldots \cup a_{i_p}$. Laticea $\mathscr{L}$ se zice *cvasicompactă* dacă 1 este de tip finit.

Elementul $a \in \mathscr{L}^*$ se zice X-finit generat dacă pentru orice familie $(a_i)_{i \in I}$ de elemente din $\mathscr{L}^*$ astfel încît $a \leqslant \sqrt{\bigcup_{i \in I} a_i}$, există $i_1, \ldots, i_p \in I$ cu $a \leqslant \sqrt{a_{i_1} \cup \ldots \cup a_{i_p}}$.

PROPOZIȚIA 4. *Presupunem că* $\mathscr{L}$ *este o latice completă cu următoarea condiție de distributivitate: oricare ar fi* $a \in \mathscr{L}$ *și* $(b_i)_{i \in I}$ *o familie de elemente din* $\mathscr{L}$ *dirijată crescător, avem* $a \cap (\bigcup_{i \in I} b_i) = \bigcup_{i \in I} (a \cap b_i)$. *Sînt atunci echivalente următoarele afirmații:*

(1) $\mathscr{L}$ *este noetheriană*;

(2) *Orice familie de elemente din* $\mathscr{L}$ *are un element maximal*;

(3) *Orice element din* $\mathscr{L}$ *este de tip finit.*

Demonstrație, $1 \equiv 2$, $3 \Rightarrow 1$ sînt aproape evidente.

$1 \Rightarrow 3$. Fie $a \in \mathscr{L}$ și $a \leqslant \bigcup_{i \in I} a_i$, Fără restrîngerea generalității familia $(a_i)_{i \in I}$ se poate presupune dirijată crescător. Fie a_{i_1} din această familie; dacă pentru orice $i \in I$ am avea $a \cap a_{i_1} = a \cap (a_{i_1} \cup a_i)$, atunci $a \cap a_{i_1} = \bigcup [a \cap (a_{i_1} \cup a_i)] = a \cap (\bigcup a_i) = a$, deci $a \leqslant a_{i_1}$ și a ar rezulta de tip finit. Fie deci $i_2 \in I$ astfel încît $a \cap a_{i_1} < a < a \cap (a_{i_1} \cup a_{i_2})$; dacă pentru orice i am avea $a \cap (a_{i_1} \cup a_{i_2}) = a \cap (a_{i_1} \cup a_{i_2} \cup a_i)$, ar rezulta $a \leqslant a_{i_1} \cup a_{i_2}$; fie deci $i_3 \in I$ etc.

Observație. Laticea subobiectelor oricărui obiect dintr-o categorie abeliană cu AB5 satisface condiția de distributivitate de mai sus și propoziția 4 dă o caracterizare a obiectelor noetheriene dintr-o astfel de categorie.

PROPOZIȚIA 5. *Fie* $a \in \mathscr{L}$. *Sînt echivalente următoarele afirmații:*

(1) a *este* X- *finit generat*;

(2) *Deschisul* $D(a)$ *din* X *este cvasicompact.*

Demonstrație. $1 \Rightarrow 2$. Fie $D(a) \subset \bigcup_{i\in I} D(a_i)$ o acoperire deschisă a lui $D(a)$. Cum $\bigcup_{i\in I} D(a_i) = D(\bigcup_{i\in I} a_i)$, rezultă deci $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{\bigcup a_i}$; dar a este X-finit generat, deci există $i_1, \ldots, i_p \in I$ astfel încît $a \leqslant \sqrt{a_{i_1} \cup \ldots \cup a_{i_p}}$, adică $D(a) \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} D(a_{i_k})$.

$2 \Rightarrow 1$ verificare analoagă.

COROLARUL 1. *X este cvasicompact $\rightleftarrows$ laticea $\mathcal{L}$ este cvasicompactă.*

COROLARUL 2. 1 *Sînt echivalente următoarele afirmații :*

(1) *X e spațiu noetherian ;*

(2) *Orice element din $\mathcal{L}$ este X-finit generat ;*

(3) *Mulțimea elementelor radicale din $\mathcal{L}$ satisface condiția maximală.*

2. *Dacă $\mathcal{L}$ este latice noetheriană, atunci X este spațiu noetherian.*

Conform propoziției 5, echivalența $1 \equiv 2$ rezultă din caracterizarea spațiilor noetheriene prin cvasicompactitatea deschișilor lor.

Echivalența $1 \equiv 3$ rezultă din definiții și din corespondența stabilită în propoziția 2.

Zicem că $a \in \mathcal{L}^*$ *admite o X-descompunere* dacă există o familie finită $(a_i)_{i\in I}$ (I segment al lui $\underset{\sim}{N}$) astfel încît $a = \bigcap_{i\in I} a_i$ iar $\sqrt{a_i}$ sînt cvasiprime. Descompunerea se zice *redusă* dacă nu există $J \subsetneqq I$ a. î. $a = \bigcap_{i\in J} a_i$ și $\sqrt{a_i} \neq \sqrt{a_j}$ pentru $i \neq j$ $(i, j \in J)$.

Se arată cu ușurință că dacă elementul $a \in \mathcal{L}^*$ admite o X-descompunere, atunci admite o X-descompunere redusă și că $a \in \mathcal{L}^*$ admite cel mult o descompunere redusă. Existența X-descompunerilor nu poate fi abordată fără a supune $\mathcal{L}$ și X la condiții restrictive. Astfel, chiar dacă $\mathcal{L}$ ar fi noetheriană, și deci orice element este sau ireductibil sau intersecție finită de ireductibile, nu sînt ușor de găsit condiții în care radicalii elementelor ireductibile sînt cvasiprimi.

PROPOZIȚIA 6. *Dacă X este spațiu noetherian și $a \in \mathcal{L}^*$ este un element radical, atunci a admite o X-descompunere.*

Demonstrație. Cum X e spațiu noetherian, închisul $V(a)$ este reuniune finită incomprimabilă de închiși ireductibili din X $V(a) = \bigcup_{i\in I} F_i$ $I = [l, n]$ cu F_i componentele ireductibile ale lui $V(a)$.

Fie $F_i = V(a_i)$; atunci $V(a) = V(\bigcap_{i\in I} a_i)$, deci $a = \sqrt{a} = \bigcap_{i\in I} \sqrt{a_i}$.

Conform propoziției 3, $\sqrt{a_i}$ este cvasiprim, iar descompunerea lui a astfel obținută este chiar redusă.

II. EXEMPLE

Exemplul 1. Fie A un inel comutativ cu $1 \neq 0$ și fie $\mathcal{L}_A$ laticea idealelor lui A.

a) Dacă X este mulțimea idealelor cvasiprime din A, atunci spațiul topologic asociat îl numim *spectrul cvasiprim al lui A.*

b) Dacă X este mulțimea idealelor prime din A, se obține *spectrul prim al lui A*, care este un subspațiu în spectrul cvasiprim. În acest caz X-radicalul unui element este *radicalul nilpotent uzual.*

c) Dacă X este formată din toate idealele maximale din A, atunci se obține spectrul maximal, care este subspațiu în fiecare din cele două spații topologice de mai sus. X-radicalul unui element este radicalul *Jacobsohn*. În particular, dacă A este o algebră afină peste un corp algebric închis Ω, (adică A este cîtul unui inel de polinoame $\Omega\,[X_1, \ldots, X_n]$ printr-un ideal radical), atunci se obține un spațiu topologic omeomorf cu o varietate afină avînd inelul de coordonate izomorf cu A.

d) Dacă X este formată din toate idealele prime minimale, obținem un spațiu topologic numit *spectrul prim minimal*, X-radicalul fiind radicalul nilpotent uzual.

e) Definim în $\mathcal{L}_A$ următoarea relație de preordine : $\underline{a} \subseteq \underline{b}$ dacă și numai dacă $\sqrt{\underline{a}} \leqslant \sqrt{\underline{b}}$; dacă X este mulțimea idealelor primare, atunci X este cofinală în $\mathcal{L}_A$ cu $\mathcal{L}_A^*$ și este formată cu elemente cvasiprime ; se verifică imediat că $\{\tilde{V}(\underline{a})\}_{\underline{a} \in \mathcal{L}_A}$ încă definesc o topologie cu care înzestrat, X se zice *spectrul primar al lui A*.

f) Presupunem că A este un inel topologic și fie X mulțimea idealelor prime deschise ; X împreună cu topologia asociată se zice *spectrul prim deschis al lui A*. X-radicalul unui element este în acest caz *radicalul topologic-nilpotent*.

În particular, dacă A este un inel admisibil, se obține topologia uzuală a *schemei afine formală* definită de A.

g) Presupunem în fine că A este un inel graduat pozitiv ; notăm cu X mulțimea idealelor prime graduate care nu conțin $A_+ = \bigoplus_{n \in N} A_n$ X-radicalul este în acest caz $\underline{r}_+ = \underline{r} \cap A_+$ (unde $\underline{r}$ e radicalul nilpotent). Se obține astfel un spațiu topologic omeomorf cu Proj (A) cu topologia sa uzuală.

Exemplul 2. Fie (X, O_X) un spațiu inelat și $\mathcal{J}$ un Ideal al lui O_X ; definim în mod natural *radicalul lui* $\mathcal{J}$ ca fiind fasciculul $\sqrt{\mathcal{J}}$ asociat prefasciculului $U \rightsquigarrow \sqrt{\Gamma(U, \mathcal{J})} \subset \Gamma(U, O_X)$; se verifică imediat că $(\forall)$ $x \in X$, $(\sqrt{\mathcal{J}})_x \approx \sqrt{\mathcal{J}_x}$ și că morfismul canonic $\sqrt{\Gamma(U, \mathcal{J})} \to \Gamma(U, \sqrt{\mathcal{J}})$ este izomorfism pentru orice deschis cvasicompact U al lui X.

Spațiile inelate pe care le vom considera de-acum încolo le presupunem prescheme ; cu notațiile uzuale din [1], avem :

PROPOZIȚIA 7. *Dacă* $\mathcal{J}$ *este un Ideal cvasicoerent al lui* O_X, *atunci* $\sqrt{\mathcal{J}}$ *este de asemenea cvasicoerent ; dacă* (X, O_X) *este o schemă afină* (Spec $A, \widetilde{A}$) *și* $\mathcal{J} = \widetilde{\underline{a}}$ *cu* $\underline{a}$ *ideal în A, atunci* $\sqrt{\mathcal{J}} = \widetilde{\sqrt{\underline{a}}}$.

Demonstrație. Prima parte a propoziției este aproape evidentă ; este suficient apoi să observăm că operațiile de radical și trecere la fracții sînt permutabile și să amintim existența unei baze de deschiși cvasicompacți pe X.

De altfel, dacă notăm cu $\mathcal{B}$ Algebra cvasicoerentă $O_X/\mathcal{J}$ și $f : O_X \to \mathcal{B}$ morfismul canonic, rezultă imediat că $\sqrt{\mathcal{J}} = f^{-1}(r(\mathcal{B}))$, unde $r(\mathcal{B})$ este radicalul algebrei cvasicoerente $\mathcal{B}$ definit în [1].

Fie $Y = \text{Supp}\ O_X/\mathcal{J}$ și $Z = \text{Supp}\ O_X/\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ fiind un alt ideal cvasicoerent al lui O_X ; se verifică imediat – raționînd local pentru scheme afine – că $Y \subseteq Z \rightleftarrows \sqrt{\mathcal{J}} \supseteq \sqrt{\mathcal{G}}$ și deci $\text{Supp}\ O_X/\mathcal{J} = \text{Supp}\ O_X/\mathcal{G} \rightleftarrows \sqrt{\mathcal{J}} = \sqrt{\mathcal{G}}$. Pe de altă parte, orice mulțime Y închisă în X este de forma $\text{Supp}\ O_X/\mathcal{J}(Y)$, unde $\mathcal{J}(Y)$ este un ideal cvasicoerent radical care definește Y ca subpreschemă închisă a lui X. Rezultă o corespondență biunivocă între idealele cvasicoerente ale lui O_X de radical $\mathcal{I}(Y)$ și subpreschemele închise ale lui (X, O_X) care au Y ca spațiu topologic subiacent; anume, $\mathcal{J} \rightsquigarrow \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{J}$ $(\sqrt{\mathcal{J}} = \mathcal{I}(Y))$ și $(Y, O_X/\mathcal{I}|_Y) \rightsquigarrow \mathcal{I}$.

Așadar, dacă $\mathcal{L}$ este laticea idealelor cvasicoerente radicale ale lui O_X; avem antiizomorfismele reciproce $Y \rightsquigarrow \mathcal{I}(Y)$, $\mathcal{J} \rightsquigarrow \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{J}$ *între laticea închișilor lui* X *și* $\mathcal{L}$.

Propoziția 8. *Fie* $\mathcal{P} \in \mathcal{L}$ și $Y = \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{P}$; *sînt echivalente următoarele afirmații*:

(1) Y *este închis ireductibil în* X;

(2) $\mathcal{P}$ *este cvasiprim*;

(3) $\mathcal{P}$ *este prim (în sensul* $\mathcal{P} \supset \mathcal{I}\mathcal{J} \Rightarrow \mathcal{P} \supset \mathcal{I}$ *sau* $\mathcal{P} \supset \mathcal{J}$).

Demonstrație. $1 \Rightarrow 2$. Fie $\mathcal{P} \supset \mathcal{I}\mathcal{J} \Rightarrow \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{P} \subseteq \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{I}\mathcal{J} = \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{I} \cup \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{J}$; conform ipotezei, rezultă $Y \subseteq \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{I}$ sau $Y \subseteq \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{J}$, deci $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{I}$ sau $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{J}$.

$2 \Rightarrow 3$. Este suficient să observăm că $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} \supset \mathcal{I}\mathcal{J}$.

$3 \Rightarrow 1$. Fie $Y \subseteq F_1 \cup F_2$ cu F_1, F_2 închiși în X, distincți de X; atunci, conform propoziției 8, $F_1 = \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{I}$, $F_2 = \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{J}$ cu $\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathcal{L}$. Rezultă $Y \subseteq \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, deci $\mathcal{P} \supseteq \sqrt{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} = \sqrt{\mathcal{I}} \cap \sqrt{\mathcal{J}} = \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, de unde $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{I}$ sau $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{J}$; adică $Y \subseteq F_1$ sau $Y \subseteq F_2$.

Corolar. *Fie* X' *mulțimea idealelor cvasiprime (adică conf. propoziției 9, prime) din* $\mathcal{L}$. *Antiizomorfismele reciproce de mai sus induc un antiizomorfism între închișii ireductibili din* X *și elementele lui* X'.

Urmărind demonstrația teoremei 1 din capitolul I, rezultă din cele de mai sus:

Teorema 2. *Dată preschema* (X, O_X), *spațiul topologic* X *este spectrul laticii* $\mathcal{L}$ *a idealelor cvasicoerente radicale ale lui* O_X *(*X *este omeomorf cu* X'*).*

Observație. Un Ideal prim cvasicoerent *nu* este, în general, ideal radical; aceasta are loc, de exemplu dacă X este o preschemă *noetheriană*. (În adevăr, dacă $\mathcal{I}$ este ideal cvasicoerent, atunci există $n \in \underset{\sim}{N}$ astfel încît $(\sqrt{\mathcal{I}})^n \subseteq \mathcal{I}$, fapt care rezultă imediat local și se globalizează căci există o acoperire finită afină noetheriană); tot în acest caz, dacă $\mathcal{F}$ este un O_X-Modul cvasicoerent și $\operatorname{Supp} \mathcal{F} \subseteq \operatorname{Supp} O_X/\mathcal{I}$ cu $\mathcal{I}$ cvasicoerent, atunci există $n \in \underset{\sim}{N}$ astfel încît $\mathcal{I}^n \mathcal{F} = 0$, deoarece $\operatorname{Supp} \mathcal{F} = \operatorname{Supp} O_X/\operatorname{Ann} \mathcal{F}$.

Exemplul 3. Fie $\mathcal{L}$ o latice completă care este și monoid asociativ; presupunem că $a(\bigcup_{i \in I} a_i) = \bigcup_{i \in I} aa_i$; $(\bigcup_{i \in I} a_i)\, a = \bigcup_{i \in I} a_i a$ $a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc$ și $ca \leqslant cb$ pentru orice $a, b, c \in \mathcal{L}$ și orice familie $(a_i)_{i \in I}$ de elemente din $\mathcal{L}$. Numim element prim al lui $\mathcal{L}$ orice element $p \neq 1$ cu proprietatea $p \geqslant ab \Rightarrow p \geqslant a$ sau $p \geqslant b$. Laticea $\mathcal{L}$ o numim *cvasiîntreagă* dacă pentru orice $a, b \in \mathcal{L}$, avem $a \cap b \geqslant ab$; în acest caz, orice element prim este cvasiprim. Observăm în plus că dacă $1 (= \sup_{a \in \mathcal{L}} a)$ este element unitate al monoidului, atunci orice element maximal este prim. (În adevăr, fie $m \in \mathcal{L}$ maximal și $m \geqslant ab$, $m \ngeqslant a \Rightarrow m \cup a > m$ (strict, deci $m \cup a = 1$, de unde $b = b(m \cup a) = bm \cup ba \leqslant m$). Rezultă atunci folosind lema lui Zorn — că dacă $\mathcal{L}$ este cvasicompactă, atunci orice element $a \in \mathcal{L}^*$ este majorat de un element maximal. Se obține astfel o topologie pe spectrul prim al unei latici cvasiîntregi.

Fie A un semigrup aditiv și multiplicativ, cu ambele legi de compoziție comutative și înmulțirea distributivă față de adunare. Zicem pe scurt că A are o structură de cvasiinel. Se introduc în mod natural într-un cvasiinel noțiunile de ideal, ideal prim și se refac unele din proprietățile uzuale din cazul inelelor.

Fie $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A$ laticea idealelor lui A și $X = \operatorname{Spec} A$ mulțimea idealelor prime din A. $\mathcal{L}$ satisface condiții de la începutul acestui exemplu, deci X se poate înzestra cu o topologie ; raționînd ca în cazul inelelor, este imediat că mulțimile $D(f) = \{p \mid p \in X,\ f \notin p\}$ cu $f \in A$ formează o bază de deschiși pentru această topologie. Apoi $D(f)$ sînt deschiși cvasicompacți, ca și $X = D(1)$. Teorema următoare dă răspuns întrebării : în ce caz un spațiu topologic este spectrul unui cvasiinel?

TEOREMA 3. *Spațiul topologic X este de forma Spec A, unde A este un cvasiinel, dacă și numai dacă orice închis ireductibil din X are un punct generic și numai unul, X este cvasicompact și admite o bază de deschiși cvasicompacți astfel încît intersecția a doi deschiși din bază să fie încă în bază (deci cvasicompact).*

Demonstrație. Necesitatea a fost dovedită mai sus.

Pentru suficiență, notăm cu A mulțimea deschișilor compacți ai lui X.

1) Definim pe A o structură de semigrup aditiv și multiplicativ în modul următor : $(\forall)\ D, D' \in A$, punem $D + D' = D \cup D' \in A$ și $D.D' = D \cap D' \in A$ (căci $D = D_1 \cup \ldots \cup D_m$, $D' = D'_1 \cup \ldots \cup D'_n$ cu D_i și D'_j din baza de deschiși din enunț, deci $D \cap D' = \bigcup\limits_{i,j} (D_i \cap D'_j)$ este cvasicompact deoarece $D_i \cap D'_j$ este cvasicompact). Se verifică imediat că A este cvasiinel, elementul unitate pentru adunare fiind $\emptyset$, iar pentru înmulțire X (care este, conform ipotezei, cvasicompact).

2) Definim o aplicație $\varphi : X \to \operatorname{Spec} A$, anume $(\forall)\ x \in X$, $\varphi(x) = \{D \mid D \in A \text{ cu } x \notin D\}$. $\varphi(x)$ este un ideal și chiar un ideal prim deoarece $DD' \in \varphi(x) \Rightarrow x \notin D \cap D' \Rightarrow x \notin D$ sau $x \notin D'$ adică $D \in \varphi(x)$ sau $D' \in \varphi(x)$.

Aplicația φ este continuă : $(\forall)\ D \in A$, $\varphi^{-1}(V(D)) = \complement D$. (În adevăr, $x \in \complement D \rightleftarrows x \notin D \rightleftarrows D \in \varphi(x) \rightleftarrows \varphi(x) \in V(D)$).

3) Construim și o aplicație ψ : Spec $A \to X$, anume : $(\forall)\ \underline{p} \in \operatorname{Spec} A$, $\psi(\underline{p})$ este unicul punct generic al închisului ireductibil $F = \bigcap\limits_{D \in p} \complement D$. F este evident închis în X și este ireductibil deoarece dacă U, V sînt deschiși în X astfel încît $U \cap F \neq \emptyset$ și $V \cap F \neq \emptyset$, atunci $U \cap V \cap F \neq \emptyset$. În adevăr, fie, prin absurd, $U \cap V \cap F = \emptyset$. Relațiile $U \cap F \neq \emptyset$, $V \cap F \neq \emptyset$ arată că $U \notin \underline{p}$, $V \notin \underline{p}$. Fie $(\forall)\ z \in U \cap V$, deci $z \notin F$, adică există $D_z \in \underline{p}$ cu $z \in D_z$, conform definiției lui F. Considerînd z variabil în $U \cap V$, găsim $U \cap V \subseteq \bigcup\limits_{z \in U \cap V} D_z$ cu $D_z \in \underline{p}$. Cum $U \cap V$ este cvasicompact, $U \cap V \subseteq D_{z_1} \cup \ldots \cup D_{z_k} \in \underline{p}$, deci $(U \cap V)(D_{z_1} \cup \ldots \cup D_{z_k}) = (U \cap V) \cap (D_{z_1} \cup \ldots \cup D_{z_k}) = U \cap V \in \underline{p}$, căci $\underline{p}$ este ideal. Am ajuns la o absurditate căci $\underline{p}$ este prim și $U \notin \underline{p}$, $V \notin \underline{p}$.

4) Aplicația ψ este continuă deoarece $(\forall)\ U \in A$, $\psi^{-1}(U) = D(U)$. În adevăr, fie $p \in \psi^{-1}(U)$, deci $\psi(p) \in U$, deci punctul generic al închisului ireductibil $F = \bigcap\limits_{D \in p} \complement D$ este în U, deci $U \notin p$; reciproc, fie $p \in D(U)$;

$\psi(p)$ este punct generic al lui F, deci aparține fiecărei mulțimi $\complement D$ cu $D \notin p$. Să arătăm că $\psi(p) \in U$. Fie, prin absurd, $\psi(p) \notin U \Rightarrow \psi(p) \in \complement U \Rightarrow F \subseteq \subseteq \complement U \subseteq \bigcap \complement D \subseteq \complement U \Rightarrow U \subset \bigcup\limits_{D \in p} D$ și U fiind cvasicompact, $U \subseteq D_1 \cup \dots \dots \cup D_k$ cu $D_i \in p \Rightarrow U \in p$, absurd căci $p \in D(U)$.

5) Se verifică cu ușurință că $\varphi\psi = \mathrm{id}$, $\psi\varphi = \mathrm{id}$.

Teorema 3 este complet demonstrată.

Observații. 1) Dacă X este un spațiu topologic Kolmogorov în care orice închis ireductibil are un punct generic și luăm drept A mulțimea tuturor închișilor lui X, atunci și în acest caz se poate construi aplicația φ care este continuă și deschisă pe imagine; așadar, X se identifică cu un subspațiu al lui Spec A.

2) Dacă A este cvasiinel, atunci i se poate asocia în mod natural un inel A (asocierea este functorială și mai mult, apare ca adjunct al unui functor), în felul următor : ca mulțime, A^* este $A \times A$, cu următoarele legi de compoziție :

Pentru $a, b, c, d \in A$, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ definim : $(a, b).(c, d) = (ac + bd, ad + bc)$.

Verificările necesare sînt imediate.

Se vede lesne că Spec A este subspațiu al lui Spec A^* și, cu observația anterioară, rezultă că un spațiu topologic în care orice închis ireductibil are un punct generic și unul singur este un subspațiu topologic al spectrului prim al unui inel.

Primită la redacție la 19 mai 1966

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. A. Grothendieck, *Éléments de Géométrie Algébrique.* ch. I, Paris, 1960.
2. N. Bourbaki, *Algèbre commutative,* Paris.

ASUPRA TEOREMEI VITALI

DE

CLAUDIA SIMIONESCU

(Brașov)

În Nota de față se dă o extindere teoremei lui Vitali, așa cum a fost expusă în [2].

În problema derivabilității măsurilor reale se face apel la o teoremă care pentru spațiile euclidiene și măsura Lebesgue se datorează lui Vitali. O expunere clasică a acestei teoreme pentru R^1 respectiv R^n este dată în [1], [2], [3], urmîndu-se principiul demonstrației lui Banach.

Se cunoaște de asemenea extinderea acestei teoreme la spațiile metrice σ- compacte, extindere posibilă datorită introducerii noțiunii de măsură Vitali [2].

În Nota de față se dă o extindere cazului considerat în [3], prin înlocuirea condiției globale asupra măsurii Vitali cu una analoagă cu caracter local [1]).

★

Fie T un spațiu metric compact, $\mathcal{L}$ clanul de părți boreliene ale lui T, cu $T \in \mathcal{L}$, iar $\mu \geqslant 0$ o măsură boreliană pe T

DEFINIȚIA 1. Familia de sfere închise $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ constituie o acoperire în sensul lui Vitali a mulțimii $A \in \mathcal{L}$, dacă pentru orice punct $t \in A$ există un șir de sfere din $\mathcal{S}$ centrate în t de rază oricît de mică.

DEFINIȚIA 2. Numim μ o măsură Vitali, dacă μ-a.p.t. $t \in T$, $v(t, \theta) < \infty$ înțelegînd prin

$$v(t, \theta) = \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\mu(S(t, \theta r))}{\mu(S(t, r))}$$

iar $\theta \in (1, \infty)$.

---

[1]) Problema a fost pusă în cadrul seminarului de Matematici moderne al Institutului politehnic din Brașov, seminar realizat în colaborare cu Institutul de matematică al Academiei Republicii Socialiste România. Profităm de această ocazie pentru a mulțumi colegului V. Popescu pentru observațiile utile pe care ni le-a făcut.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 147–153, BUCUREȘTI, 1967

Se observă că dacă pentru $\theta_0 > 1$, $v(t, \theta_0) < \infty$, μ-a.p.t. $t \in T$, atunci $v(t,\theta) < \infty$, μ-a.p.t. $t \in T$, pentru orice $\theta \in (1, \infty)$.

În adevăr, dacă $\theta < \theta_0$, datorită faptului că $v(t, \theta)$ ca funcție de θ este crescătoare,

$$v(t, \theta) \leqslant v(t, \theta_0) < \infty \qquad \mu\text{-a.p.t. } t \in T.$$

Dacă $\theta > \theta_0$, cum $\theta_0 > 1$, există un număr natural n, în așa fel încît $\theta_0^n > \theta$ și cum

$$\overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\mu(S(t, \theta_0^n r))}{\mu(S(t, r))} = \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\mu(S(t, \theta_0^n r))}{\mu(S(t, \theta_0^{n-1} r))} \dots \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\mu(S(t, \theta_0 r))}{\mu(S(t, r))} = [v(t, \theta_0)]^n$$

rezultă

$$v(t, \theta) \leqslant v(t, \theta_0^n) = [v(t, \theta_0)]^n < \infty \qquad \mu\text{-a.p.t.}\, t \in T$$

Se consideră mulțimile

$$T_n = \left\{ t \in T ;\ \frac{\mu(S(t, Sr))}{\mu(S(t, r))} \leqslant n \quad \text{pentru orice } r < \frac{1}{n} \right\}.$$

Atunci $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ abstracție făcînd de o mulțime de măsură nulă.

Fie mulțimea $A \in \mathcal{L}$ și $\mathcal{S}$ o acoperire Vitali a sa $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ cu sfere. Notăm $A_n = A \cap T_n$; deci $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, abstracție făcînd de o mulțime de măsură nulă.

LEMĂ[2]. *Din familia $\mathcal{S}$ care acoperă Vitali mulțimea A, se poate extrage pentru A_n o acoperire cel mult numărabilă cu mulțimi disjuncte*

$$\mathcal{S}_0 = \{S_i\}_{i \in \mathcal{N}}$$

astfel încît

$$\mu\left(A_n - \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = 0.$$

Demonstrație. Este evident că putem presupune $A_n = A_n \cap \operatorname{supp} \mu$.

Construim șirul de sfere în modul următor : considerăm o subacoperire din $\mathcal{S}$ (de asemenea Vitali), $\mathcal{S}_n$, cu sfere centrate în punctele lui A_n. Să luăm o sferă oarecare $S_1 \in \mathcal{S}_n$. Dacă $A_n \subset S_1$ teorema este demonstrată ; în caz contrar notăm cu

$$\delta_1 = \sup_{\substack{S \in \mathcal{S}_n \\ S \cap S_1 = \emptyset}} \delta(S)$$

și considerăm acea mulțime $S_2 \in \mathcal{S}$ cu proprietatea $S_2 \cap S_1 = \emptyset$ și $\delta(S_2) > \frac{\delta_1}{2}$. Dacă $A_n \subset S_1 \cup S_2$, rezultă măsura diferenței zero ; de nu, luînd

$$\delta_2 = \sup_{\substack{S \in \mathcal{S}_n \\ S \cap (S_1 \cup S_2) = \emptyset}} \delta(S)$$

---

[2] Vezi [2].

alegem mulţimea $S_3 \in \mathcal{S}_n$, astfel încît $S_3 \cap (S_1 \cup S_2) = \emptyset$ iar $\delta(S_3) > \frac{\delta_2}{2}$.

Continuînd, dacă există p cu proprietatea $A_n \subset \bigcup_{i=1}^{p} S_i$, teorema este demonstrată ; în caz contrar alegem mulţimea $S_{p+1} \in \mathcal{S}_n$ astfel încît

$$S_{p+1} \cap (S_1 \cup \ldots \cup S_p) = \emptyset$$

iar $\delta(S_{p+1}) > \frac{\delta_p}{2}$, δ_p fiind

$$\delta_p = \sup_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ S \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} S_i\right) = \emptyset}} \delta(S)$$

şi obţinem în modul acesta şirul $\{S_i\}_{i \in \mathcal{N}}$. Să arătăm că acest şir este cel căutat.

Notăm cu

$$B = A_n - \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$$

şi vom arăta că $\mu(B) = 0$. Presupunem contrariul şi anume $\mu(B) > 0$ şi să ataşăm fiecărei sfere S_i o sferă concentrică cu aceasta $\widetilde{S}_i$ de rază de 5 ori mai mare. Atunci

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\widetilde{S}_i) \leqslant n \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_i) < \infty.$$

Există deci pentru $\varepsilon > 0$ un număr natural i_0, astfel încît

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \mu(\widetilde{S}_i) < \varepsilon$$

şi dacă luăm $\varepsilon = \mu(B)$

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \mu(\widetilde{S}_i) < \mu(B).$$

Rezultă că există cel puţin un punct $t_0 \in B$, astfel încît el să nu aparţină sferelor

$$\widetilde{S}_{i_0+1}, \quad \widetilde{S}_{i_0+2}, \ldots$$

Pe de altă parte, $t_0 \in B$ implică $t_0 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Fie $S_0 \in \mathcal{S}$ o sferă care conţine pe t_0 astfel încît

$$S_0 \cap S_i = \emptyset, \qquad i = 1, 2, \ldots, i_0.$$

Mulţimea S_0 nu poate fi disjunctă de toţi S_i. În caz contrar

$$0 < \delta(S_0) \leqslant \delta_k \leqslant 2\delta(S_{k+1}).$$

Dar $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$. În adevăr, $\{\delta_k\}_{k\in\mathcal{N}}$ este un şir monoton descrescător. Dacă nu tinde la zero, atunci există $\varepsilon>0$, astfel încît pentru orice $k\in\mathcal{N}$, $\delta_k \geqslant 4\varepsilon$, adică $2\delta(S_{k+1})\geqslant 4\varepsilon$, adică $\delta(S_{k+1})\geqslant 2\varepsilon$, deci

$$\mu(S_{k+1}) \geqslant \mu(S_{k+1}(\varepsilon)),$$

unde $S_{k+1}(\varepsilon)$ este o sferă de rază $\varepsilon>0$, concentrică cu S_{k+1}. Deoarece seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(S_k)<\infty$ rezultă

$$\lim_{k\to\infty} \mu(S_{k+1})=0.$$

deci

$$\lim_{k\to\infty} \mu(S_{k+1}(\varepsilon))=0.$$

Şirul centrelor acestor sfere, $\{t_k\}_{k\in\mathcal{N}}$, are un punct de acumulare $t_0\in T_n$ în virtutea compacităţii acestui spaţiu. Deci există un subşir al acestuia convergent către t_0, adică pentru orice $\varepsilon>0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încît

$$\rho(t_{k_\iota}, t_0) < \frac{\varepsilon}{3}$$

cînd $\iota > N(\varepsilon)$. Fie $t_1 \in S\left(t_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)$, atunci

$$\rho(t_1, t_{k_\iota}) \leqslant \rho(t_1, t_0)+\rho(t_0, t_{k_\iota}) < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon,$$

deci

$$S\left(t_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)\subset S(t_{k_\iota}, \varepsilon)=S_{k_\iota}(\varepsilon).$$

şi deci

$$\mu\left(S\left(t_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)=0.$$

Cum $t_0\in \operatorname{supp}\mu$, rezultă $\mu\left(S\left(t_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)>0$, deci o contradicţie. Înseamnă că $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k = 0$ şi în consecinţă $\delta(S_0)=0$ iar cum pe de altă parte $\delta(S_0)>0$, înseamnă că există cel puţin un număr natural $l>i_0$ aşa încît $S_0\cap S_l\neq\emptyset$ şi fie acesta cel mai mic pentru care $S_0\cap S_l\neq\emptyset$. Deoarece $l>i_0$, din cele spuse mai sus deducem $t_0 \notin \widetilde{S}_l$ Atunci

$$\delta(S_0)\geqslant 2\delta(S_l) > \delta_{l-1}.$$

Dar cînd $i<l$, $S_0\cap S_i=\emptyset$ şi atunci $\delta(S_0)<\delta_{l-1}$ deci o contradicţie, deci $\mu(B)=0$ c.c.t.d.

TEOREMĂ. *Dacă familia de sfere închise $\mathcal{S}$ acoperă Vitali mulţimea $A\subset T$, atunci se poate extrage din $\mathcal{S}$ o acoperire numărabilă cu sfere disjuncte*

$$\mathcal{S}_0=\{S_n\}_{n\in\mathcal{N}}$$

pentru A, *astfel încît*

$$\mu\left(A - \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = 0.$$

Demonstrație. Descompunem spațiul T în $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$ abstracție făcînd de o mulțime de măsură nulă, unde

$$T_n = \left\{t \in T\,;\ \frac{\mu(S(t, 5r))}{\mu(S(t,r))} \leqslant n_0 \text{ pentru orice } r < \frac{1}{n}\right\}$$

și notăm $A_n = A \cap T_n$, deci $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Să arătăm că putem defini prin recurență un șir de familii finite de mulțimi disjuncte din $\mathcal{S}$, astfel încît:

1) dacă

$$m > n,$$

orice mulțime din $\mathcal{S}_n$ este disjunctă de orice mulțime din $\mathcal{S}_m$;

2) dacă notăm cu

$$S_n = \bigcup_{s \in \mathcal{S}_n} S,$$

avem

$$\mu\left(A_n - \bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) < \varepsilon_n,$$

unde $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ este un șir de numere pozitive tinzînd la zero cînd n tinde la infinit.

Presupunem că am definit șirul

$$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_p,$$

cu proprietățile 1), 2). Deci

$$\mu\left(A_p - \bigcup_{i=1}^{p} S_i\right) < \varepsilon_p.$$

Vom defini familia $\mathcal{S}_{p+1}$ în felul următor. Deoarece șirul de mulțimi $\{A_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ este ascendent,

$$A_p \subset A_{p+1};$$

notăm cu

$$B_p = A_{p+1} - \bigcup_{i=1}^{p} S_i$$

și să considerăm familia de sfere Σ_{p+1} din S cuprinse în complementara mulțimii $\bigcup\limits_{i=1}^{p} S_i$, adică

$$\Sigma_{p+1} = \left\{S\,;\ S \subset \complement\left(\bigcup_{i=1}^{p} S_i\right)\right\}.$$

Această familie acoperă Vitali mulţimea B_p, deci conform lemei demonstrate anterior, putem extrage pentru B_p o acoperire numărabilă cu mulţimi disjuncte

$$\{S_{p+1}^i\}_{i\in\mathcal{N}}.$$

astfel încît

$$\mu\left(B_p-\bigcup_{i=1}^{\infty}S_{p+1}^i\right)=0.$$

Din convergenţa seriei $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(S_{p+1}^i)$ rezultă că pentru $\varepsilon_{p+1}>0$ există un $k>1$ astfel încît

$$\sum_{i=k}^{\infty}\mu(S_{p+1}^i)<\varepsilon_{p+1}.$$

Vom alege atunci familia $\mathcal{S}_{p+1}$ compusă din sferele

$$\mathcal{S}_{p+1}=\{S_{p+1}^1,\ S_{p+1}^2,\ \ldots,\ S_{p+1}^k\}.$$

În adevăr, acestea sînt disjuncte de oricare din sferele familiilor $\mathcal{S}_1\ \mathcal{S}_2,\ldots,\ \mathcal{S}_p$ în virtutea modului în care au fost alese. De asemenea, notînd cu

$$S_{p+1}=\bigcup_{i=1}^{k}S_{p+1}^i$$

avem

$$A_{p+1}-\bigcup_{i=1}^{p+1}S_i=\left[B_p\cup\left(\bigcup_{i=1}^{p}S_i\right)\right]-$$

$$-\left[\bigcup_{i=1}^{p+1}S_i\right]=B_p-\bigcup_{i=1}^{k}S_{p+1}^i\subseteq\left(B_p-\bigcup_{i=1}^{\infty}S_{p+1}^i\right)\cup\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty}S_{p+1}^i\right).$$

deci

$$\left(A_{p+1}-\bigcup_{i=1}^{p+1}S_i\right)\leqslant\mu\left(B_p-\bigcup_{i=1}^{k}S_{p+1}^i\right)\leqslant\mu\left(B_p-\bigcup_{i=1}^{\infty}S_{p+1}^i\right)+$$

$$+\mu\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty}S_{p+1}^i\right)<\varepsilon_{p+1}$$

şi cu aceasta şi condiţia 2) este îndeplinită. Deoarece $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ tinde la zero cînd n tinde la infinit, rezultă

$$\mu\left(A-\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)=0.$$

iar acoperirea pentru A cu mulţimi disjuncte este dată de familia

$$\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2\cup\cdots\cup\mathcal{S}_n\cup\cdots$$

c.c.t.d.

Observația 1. Teorema rămîne adevărată pentru spații σ-compacte (vezi [2]).

Observația 2. Teorema rămîne adevărată și pentru acoperiri cu mulțimi $\{E_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ închise din $\mathcal{L}$, prin introducerea parametrului de regularitate (vezi [2]).

Primită la redacție la 26 aprilie 1966

Institutul Pedagogic Brașov

BIBLIOGRAFIE

1. I. P. Natanson, *Teoria funcțiilor de variabilă reală.* Ed. tehnică, București, 1957.
2. Miron Nicolescu, *Analiza matematică*, vol. III, Ed. tehnică, București, 1960.
3. G. E. Silov și B. L. Gurevici, Интеграл, мера и производная. Moscova, 1964.

O GENERALIZARE A PROBLEMEI RIEMANN OMOGENE

DE

ANDREI SUSEA

Lucrarea de faţă are ca scop extinderea problemei Riemann omogene la următoarea problemă :

Să se găsească funcţia olomorfă pe porţiuni avînd un ordin finit la infinit, cu condiţia la limită :

$$(\Phi^{+}(t))^{\alpha(t)} = G(t)(\Phi^{-}(t)\mathrm{I})^{\beta(t)}$$

unde $\alpha(z)$ şi $\beta(z)$ sînt funcţii olomorfe de z respectiv pe S^{+} şi S^{-}, astfel ca $\alpha(t)$ şi $\beta(t)$ să nu se anuleze pe L, iar funcţia $G(t)$ este dată pe L, satisface condiţia Hölder şi nu se anulează, domeniul fiind dat de figură.

Fie S^{+} un domeniu multiplu conex, mărginit de contururile L_0, $L_1, \ldots, L_p$, netede, închise şi disjuncte două cîte două, dintre care primul conţine în interiorul lui pe celelalte. (vezi figura). Conturul L_0 poate lipsi şi atunci S^{+} este un domeniu infinit (planul cu găuri).

Vom însemna prin L mulţimea contururilor $L_0, L_1, \ldots, L_p$ (sensul pozitiv pe L va fi socotit, ca întotdeauna, acel sens, care lasă pe S^{+} la stînga), prin S^{-} vom nota complementara faţă de plan a lui $S + L$, prin $S_0^{-}, S_1^{-}, \ldots, S_p^{-}$ părţile componente ale lui S^{-}, mărginite respectiv de contururile $L_0, L_1, \ldots, L_p$ (primul dintre aceste domenii lipseşte dacă lipseşte L_0, în cazul existenţei lui, S_0^{-} este infinit).

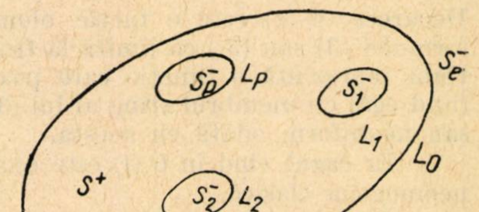


Fig. 1

Definiţia 1. Se numeşte problemă Riemann omogenă clasică următoarea problemă [1]).

---

[1]) Vezi F. D. Gahov [1], p. 135.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 155–161, BUCUREŞTI, 1967

Să se găsească funcţia olomorfă pe porţiuni $\Phi(z)$ de un ordin finit la infinit cu condiţia la limită :

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\,\Phi^{-}(t) \quad \text{pe } L, \tag{1}$$

unde $G(t)$ este o funcţie de punctul t, dată pe L, care satisface condiţia Hölder şi nu se anulează.

Problema a fost formulată de D. Hilbert [4], [5] care a rezolvat-o în condiţii mai restrînse.

Rezolvarea problemei cu ajutorul integralelor de tip Cauchy a fost dată, într-un caz particular, de J. Plemelj [10] şi E. Picard [9], iar în caz general de F. D. Gahov [2], [3] şi B. V. Hvedelidze [6].

Nota de faţă are ca scop generalizarea acestei probleme şi pentru aceasta vom da următoarea definiţie :

DEFINIŢIA 2. Numim problemă Riemann omogenă extinsă următoarea problemă :

Să se găsească funcţia olomorfă pe porţiuni avînd un ordin finit la infinit, cu condiţia la limită :

$$(\Phi^{+}(t))^{\alpha(t)} = G(t)(\Phi^{-}(t))^{\beta(t)}, \tag{2}$$

unde $\alpha(z)$ şi $\beta(z)$ sînt funcţii olomorfe de z respectiv pe S^{+} şi S^{-}, astfel ca $\alpha(t)$ şi $\beta(t)$ să nu se anuleze pe L, iar funcţia $G(t)$ este dată pe L, satisface condiţia Hölder şi nu se anulează.

TEOREMA 1 de echivalenţă. *Dacă* ln $G(t)$ *este o funcţie uniformă, problema Riemann omogenă extinsă este echivalentă cu o problemă Riemann neomogenă clasică.*

Logaritmînd (2) se obţine :

$$\alpha(t)(\ln \Phi^{+}(t)) - \beta(t)(\ln \Phi^{-}(t)) = \ln G(t) \tag{3}$$

sau, notînd $\ln \Phi(z) = \Psi(z)$,

$$\alpha(t)\,\Psi^{+}(t) - \beta(t)\,\Psi^{-}(t) = \ln G(t) \tag{3'}$$

Deoarece $\Phi(z)$ este o fucţie olomorfă pe porţiuni, membrul stîng al formulei (3) sau (3′) ca limită la frontieră a unei funcţii olomorfe pe porţiuni reprezintă o funcţie care poate fi uniformă sau neuniformă. ln G fiind egal cu membrul stîng al lui (3) sau (3′) vom spune că este uniform sau neuniform odată cu acesta.

În cazul cînd ln $G(t)$ este uniformă, (3′) este o problemă Riemann neomogenă clasică.

Reciproc, fie problema Riemann neomogenă clasică :

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\,\Phi^{-}(t) + g(t).$$

Dacă notăm cu $\Phi(z) = \ln \Psi(z)$ şi $g(t) = \ln g^{*}(t)$, obţinem :

$$\ln \Psi^{+}(t) = G(t) \ln \Psi^{-}(t) + g(t)$$

sau

$$\Psi^{+}(t) = g^{*}(t)\,(\Psi^{-}(t))^{G(t)}, \tag{5}$$

deci echivalenţa este demonstrată.

Observația 1. În cazul problemei Riemann omogene clasice $g(t) \equiv 0$ iar $g^*(t) \equiv 1$ și relația (5) devine:

$$\Psi^+(t) = (\Psi^-(t))^{G(t)} \tag{5'}$$

Observația 2. Uniformizarea funcției $\ln G(t)$ din (3′) se face prin procedeul folosit în [7] și [8].

În baza teoremei de echivalență vom considera două cazuri:

a. CAZUL NEUNIFORMITĂȚII LUI ln G (t)

Definiția 3. Se numește indice al problemei Riemann omogene extinse, relativ la cazul neuniformității lui $\ln G(t)$, numărul întreg χ dat de expresia:

$$\chi = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L = \frac{2}{2\pi i}\sum_{k=0}^{p}[\ln G(t)]_{L_k} = \sum_{k=0}^{p}\lambda_k, \tag{6}$$

unde prin $\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L$ se înțelege variația logaritmului lui $G(t)$ cînd t parcurge conturul L, variația efectuîndu-se în planul funcției complexe $G(t)$.

Fie funcția ajutătoare $\Psi(z)$ definită astfel:

$$\Psi(z) = \begin{cases} (\pi(z))^{1/\alpha(z)} \cdot \Phi(z) & z \in S^+ \\ z^{\varkappa/\beta(z)} \cdot \Phi(z) & z \in S^-. \end{cases} \tag{7}$$

(2) devine prin substituția lui (7)

$$(\Psi^+(t))^{\alpha(t)} = G_0(t)\,(\Psi^-(t))^{\beta(t)}, \tag{8}$$

unde $\pi(z) = (z - a_1)^{\lambda_1}(z - a_2)^{\lambda_2} \ldots (z - a_p)^{\lambda_p}$ cu $a_i \in S_i^-$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ iar $G_0(t) = t^{-\varkappa} \cdot \pi(t) \cdot G(t)$.

Un calcul simplu ne arată că funcția $\ln G_0(t)$ este uniformă.

Relația (8) reprezintă o problemă Riemann omogenă extinsă în cazul cînd $\Psi(z)$ este olomorfă pe porțiuni.

Se observă din (7) că $\Psi(z)$ este olomorfă pe porțiuni dacă și numai dacă funcțiile $\alpha(z)$ și $\beta(z)$ sînt constante și egale cu inversul a două numere naturale.

Dacă $\alpha(z) = \frac{1}{m}$ și $\beta(z) = \frac{1}{k}$, atunci $\Psi(z)$ va fi:

$$\Psi(z) = \begin{cases} (\pi(z))^{m} \cdot \Phi(z) & z \in S^+ \\ z^{k\varkappa} \cdot \Phi(z) & z \in S^-. \end{cases} \tag{9}$$

(8) devine:

$$(\Psi^+(t))^{1/m} = G_0(t)\,(\Psi^-(t))^{1/k} \tag{10}$$

Logaritmăm (10) și notînd $\ln \Psi(z) = \Theta(z)$ obținem:

$$\frac{1}{m}\Theta^+(z) = \frac{1}{k}\Theta^-(t) + \ln G_0(t) \tag{11}$$

sau

$$\Theta^+(t) = \frac{m}{k}\Theta^-(t) + m \ln G_0(t).$$

Fie soluţia canonică a problemei omogene clasice corespondentă lui (11′) :

$$(12) \qquad \widetilde{\Theta}(z) = \begin{cases} \dfrac{m}{k} & z \in S^+ \\ 1 & z \in S^- \end{cases}$$

de unde soluţia generală a lui (11′) va fi :

$$(13) \qquad \Theta(z) = \frac{\widetilde{\Theta}(z)}{2\pi i}\,\frac{k}{m}\int_L \frac{\ln G_0(t)}{t - z}\,\mathrm{d}t.$$

Dacă notăm cu :

$$(*) \qquad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_L \frac{\ln G_0(t)}{t - z}\,\mathrm{d}t.$$

$\Theta(z)$ se scrie :

$$(14) \qquad \Theta(z) = \begin{cases} \Gamma(z) & z \in S^+ \\ \dfrac{m}{k}\Gamma(z) & z \in S^- \end{cases}$$

de unde se obţine expresia lui $\Psi(z)$:

$$(15) \qquad \Psi(z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\Gamma(z)} & z \in S^+ \\ \mathrm{e}^{\frac{k}{m}\Gamma(z)} & z \in S^- \end{cases}$$

şi, în sfîrşit, soluţia lui (10) :

$$(16) \qquad \widetilde{\Phi}(z) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{\Gamma(z)}}{(\pi(z))^m} & z \in S^+ \\ z^{-k\varkappa}\,\mathrm{e}^{\frac{k}{m}\Gamma(z)} & z \in S^-. \end{cases}$$

Se observă că $\widetilde{\Phi}(z)$ este corespondenţa soluţiei canonice de la problema Riemann omogenă clasică. Noi o vom numi tot canonică ; ea are următoarele proprietăţi :

a) Nu se anulează nicăieri la distanţă finită.

b) Are cel mai mic ordin posibil la infinit (egal cu $-k\chi$).

c) Orice soluţie e reprezentabilă în acest caz sub forma :

$$(17) \qquad \Phi(z) = \widetilde{\Phi}(z).\,P(z),$$

unde $P(z)$ este un polinom definit astfel :

$$P(z) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } k \neq m \\ \text{polinom arbitrar} & \text{dacă } k = m \end{cases}$$

Dacă n este gradul polinomului $P(z)$, atunci ordinul soluţiei (17) la infinit este egal cu $-k\chi + n$ şi prin urmare nu este mai mic decît ordinul $-k\chi$ al soluţiei canonice.

Din punct de vedere al aplicaţiilor, un interes deosebit prezintă soluţia problemei Riemann omogene extinse care se anulează la infinit.

Dacă $\chi \leqslant 0$, problema nu admite soluţii care se anulează la infinit (afară de soluţia banală $\Phi(z) \equiv 0$).

Dacă $\chi > 0$, ea admite exact $k\chi$ soluţii liniar independente care se anulează la infinit :

$$\widetilde{\Phi}(z),\ z\widetilde{\Phi}(z),\ \ldots,\ z^{k\chi-1}\widetilde{\Phi}(z) \text{ (pentru } k = m). \tag{18}$$

Într-adevăr, orice soluţie, care se anulează la infinit, este dată evident de formula (17), în care polinomul trebuie să fie de grad cel mult egal cu $k\chi - 1$.

De aceea toate soluţiile, care se anulează la infinit, în cazul $k = m$ sînt date de formula :

$$\Phi(z) = P_{k\chi-1}(z).\widetilde{\Phi}(z) \tag{19}$$

unde :

$$P_{k\chi-1}(z) = c_0 z^{k\chi-1} + c_1 z^{k\chi-2} + \ldots + c_{k\chi-1}, \text{ iar } c_0, c_1, \ldots, c_{k\chi-1}$$

sînt constante arbitrare.

Observaţia 3. Tot ce s-a spus anterior rămîne valabil cînd conturul L_0 lipseşte, în acest caz trebuie socotit $\lambda_0 = 0$ în toate formulele precedente.

b. CAZUL NEUNIFORMITĂŢII LUI ln G(t)

În acest caz se poate studia direct (3′) fără ca, iniţial, să folosim o funcţie ajutătoare.

Ecuaţia (3′) devine :

$$\Psi^{+}(t) = \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\,\Psi^{-}(t) + \frac{\ln G(t)}{\alpha(t)}.$$

DEFINIŢIA 4. Se numeşte indice al problemei Riemann omogene extinse, relativ la cazul uniformităţii lui $\ln G(t)$, numărul χ dat de relaţia :

$$\chi = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\right]_L = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\right]_L.$$

Datorită teoremei de echivalenţă stabilită anterior, este suficient să rezolvăm problema Riemann neomogenă clasică (3″) ; $\widetilde{\Psi}(z)$ este dată de :

$$\widetilde{\Psi}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(z)}\,e^{\Gamma_1(z)} & z \in S^{+} \\ z^{-\chi}.e^{\Gamma_1(z)} & z \in S^{-}, \end{cases} \tag{20}$$

unde $\pi(z)$ este un polinom de tipul celui din cazul precedent iar $\Gamma_1(z)$ este dată de :

$$\Gamma_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\left[t^{-\chi}.\ \pi(t)\,\dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)}\right]}{t - z}\,dt.$$

Soluţia generală a problemei (3″) va fi :

$$\Psi(z) = \frac{\widetilde{\Psi}(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(t)\,\mathrm{d}t}{\alpha(t)\,\widetilde{\Psi}(t)\,(t-z)}, \tag{21}$$

unde $\widetilde{\Psi}^+(t)$ este dată de una din formulele lui Plemelj :

$$\widetilde{\Psi}^+(t_0) = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta(t_0)}{\alpha(t_0)} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)}}{t-t_0}\,\mathrm{d}t. \tag{22}$$

Notînd

$$\Gamma_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(t)}{\alpha(t)\,\widetilde{\Psi}^+(t)\,(t-z)}\,\mathrm{d}t \tag{23}$$

putem scrie :

$$\psi(z) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma_2(z)}{\pi(z)}\,e^{\Gamma_1(z)} & z \in S^+ \\ z^{-\chi}\cdot e^{\Gamma_1(z)}\cdot\Gamma_1(z) & z \in S^-. \end{cases} \tag{24}$$

Şi ţinînd seama de expresia lui $\psi(z)$, obţinem soluţia canonică a ecuaţiei (2) pentru acest caz :

$$\widetilde{\Phi}(z) = \begin{cases} e^{\frac{\Gamma_2(z)\,e^{\Gamma_1(z)}}{\pi(z)}} & z \in S^+ \\ e^{z^{-\chi}\cdot e^{\Gamma_1(z)}\cdot\Gamma_2(z)} & z \in S^- \end{cases} \tag{25}$$

Soluţia generală va fi dată de :

$$\Phi(z) = \widetilde{\Phi}(z)\cdot P(z), \tag{26}$$

unde $P(z)$ este definit astfel :

$$P(z) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \alpha(t) \neq \beta(t) \\ \text{polinom arbitrar} & \text{dacă } \alpha(t) = \beta(t) \end{cases}$$

Se vede că $\lim\limits_{z\to\infty} \widetilde{\Phi}(z) \neq 0$ oricare ar fi χ deci, deşi are cel mai mic ordin la infinit, soluţia canonică nu se anulează în acel punct.

Concluzie 1. În cazul uniformităţii lui $\ln G(t)$, problema Riemann omogenă extinsă nu admite soluţii care să se anuleze la infinit.

Primită la redacţie la 14 ianuarie 1966

Institutul de cercetare şi proiectare pentru
Industria Electrotehnică (I.C.P.E), Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Ф. Д. ГАХОВ, *Краевые задачи.* Гостехиздат, 1963.
2. Ф. Д. ГАХОВ, *О краевой задаче Римана.* Матем. сб. 2/44, *4*, 673—683 (1937).
3. Ф. Д. ГАХОВ, *Линейные краевые задачи теории функций комплексного переменного.* Изв. Казанск. физ-матем. об-ва при Казанск. Ун-те, 3 сер., X, 39—79 (1938).

4. D. Hilbert, *Grundzunge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*. Leipzig—Berlin, 2-tw Aufl. 1924, Dritten Abschnitt.
5. D. Hilbert, *Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie*, Verhandl des III Internat. Math. Kongr., Heidelberg, 1904.
6. Б. В. ХВЕДЕЛИДЗЕ, *О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области*, Сообщ. АН Груз. ССР, т. 2, **7**, *10*, 571—578, 865—872 (1941).
7. M. Morse, *Topological methods in the theory of functions of a complex variable*, Princeton University, 1947.
8. Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Сингулярные интегральные уравнения*. Физматгиз, 1962.
9. E. Picard, *Leçons sur quelques types d'équations aux dérivées partielles*. Paris, 1927.
10. J. Plemely, *Ein Ergänzungssatz zur Cauchy'schen integraldarstellung analytischer Funktionen*. Randwert betreffend, Monatsch für Math. u. Phys., **XIX**, Jahrgang, 205--210 (1908).
11. S. Stoillow, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, vol. I, vol. II, 1962, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1958.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1963

Abonaţi-vă pentru anul 1967
la publicaţiile periodice editate de

ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
STUDII ŞI CERCETĂRI DE ASTRONOMIE
ANUARUL OBSERVATORULUI DIN BUCUREŞTI
STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
REVUE ROUMAINE DE PHYSIQUE

Abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor din text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1967 FEB 21.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU şi M. TURCHESCU. Topologie. **Categorii. Suprafeţe riemanniene**, 1966, 394 p., 21,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

SILVIU GUIAŞU şi RADU THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 1966, 669 p., 38 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 1, P. 1—162, BUCUREŞTI, 1967

I. P. „Informaţia" — c. 4052

43 831

Lei 12.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

2

TOMUL 19
1967

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa : Str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

TOM. 19, Nr. 2
1967

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

SUMAR

Pag.

RADU ROŞCA, Asupra transformărilor infinitezimale de dilataţie superficială nulă din spaţiul eliptic 165

MARIUS I. STOKA, Asupra grupurilor izomorfe cu grupul transformărilor ortogonale din spaţiul E_3 şi cu subgrupurile lui 177

NICOLAE POPESCU, Elemente de teoria fasciculelor (VI) 205

ION MUNTEAN, Simplificarea funcţiilor de variabile polivalente . 241

TEODOR RUS, Tratarea algebrică a limbajelor formalizate . . . 259

T. WESZELY, M. SZILÁGYI, O interpretare diferenţial geometrică a curbelor integrale ale unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi 273

CONSTANTIN NICULESCU, Un exemplu de curbă care umple un cub k-dimensional 281

PETRE STAVRE, Curbe pe varietăţi V_n^m dintr-un spaţiu Riemann V_n 285

DAN VOICULESCU, Spaţii cu convexitate (I) 295

DAN VOICULESCU, Spaţii cu convexitate (II) 303

RECENZIE 313

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 2, P. 163–314, BUCUREŞTI, 1967

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

ASUPRA TRANSFORMĂRILOR INFINITEZIMALE DE DILATAȚIE SUPERFICIALĂ NULĂ DIN SPAȚIUL ELIPTIC

DE

RADU ROȘCA

Se adaptează unui spațiu eliptic $\sum_3$, anumite transformări infinitezimale din spațiul euclidian E_3 și se studiază transformările infinitezimale de dilatație superficială nulă, specifice spațiului $\sum_3$.

Într-o lucrare recentă, M. R. Boudet [1] după ce definește unele noțiuni din teoria cîmpurilor vectoriale într-un spațiu euclidian E_3, studiază apoi cu ajutorul lor o serie de transformări infinitezimale ale suprafețelor din acest spațiu. Ne propunem în această Notă să extindem cîteva din aceste definiții unui spațiu eliptic Σ_3 (a cărui curbură a fost redusă la unitate printr-o omotetie prealabilă) și să le aplicăm unor anumite transformări infinitezimale specifice spațiului Σ_3. Afară de o mențiune expresă, vom considera diferitele puncte din Σ_3 ca normate (avînd drept coordonate, coordonatele omogene ale lui Weierstrass) și vom presupune diferitele mărimi geometrice sau scalare de o clasă suficient de mare pentru a justifica calculele.

I. Fie $\mathbf{M}(u^i)$ și $\mathbf{C}(u^i)$ două puncte din Σ_3 care descriu respectiv suprafețele ($\mathbf{M}$) și ($\mathbf{C}$). Dacă ε este o constantă infinitezimală, vom nota cu ($\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$) transformarea infinitezimală ce înlocuiește orice punct $\mathbf{M}$ cu punctul $\mathbf{M}^*$ dat de

$$\rho\mathbf{M}^* = \cos\varepsilon\ \mathbf{M} + \sin\varepsilon\ \mathbf{C},\ (\rho = \text{factor de normare}). \tag{1}$$

Vom spune că ($\mathbf{M}$) este *suprafața supusă transformării* ($\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$) și ($\mathbf{C}$) *suprafața transformatoare* și utilizînd punctul ca simbolul produsului interior, să introducem tensorul covariant b_{ik} definit de

$$b_{ik} = \partial\mathbf{M}/\partial u^1 \cdot \partial\mathbf{C}/\partial u^k .$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 2, P. 165–175, BUCUREȘTI, 1967

Notînd cu g_{ik} tensorul metric al suprafeţei (**M**), vom defini invariantul

$$\sigma = g^{ik}b_{ik} \tag{2}$$

ca *dilataţie superficială* a suprafeţei (**M**) cînd aceasta este supusă transformării (**M**, **C**) sau încă (prin analogie cu teoria cîmpurilor din E_3) divergenţa cîmpului **C** pe suprafaţa (**M**). De altfel este uşor de constatat că se poate scrie (ca şi în E_3 [2])

$$\sigma = \nabla(\mathbf{M}, \mathbf{C}), \tag{2'}$$

unde ∇ este parametrul diferenţial mixt al lui Beltrami relativ la tensorul g_{ik}. Mai observăm că desemnînd cu $(\overline{\mathbf{M}})$ *suprafaţa suplimentară* faţă de absolutul Q (care defineşte metrica lui Σ_3) a lui (**M**) şi cu H curbura mijlocie a suprafeţei (**M**), avem

$$\nabla(\mathbf{M}, \overline{\mathbf{M}}) = -H, \quad \nabla(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = 2. \tag{3}$$

Înainte de a merge mai departe, vom stabili o nouă expresie a lui σ, care se bazează pe noţiunea de *produse de puncte* din Σ_3. Reamintim [4] că fiind date trei puncte $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$, vom obţine un nou punct **M** prin operaţia de *produs exterior* şi scriem

$$[\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3] = \mu_1 \mathbf{M},$$

unde μ_1 este un scalar numit *sinusul de amplitudine* al punctelor $\mathbf{M}_i (i = 1, 2, 3)$. Produsul interior al lui $[\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3]$ cu un punct $\mathbf{M}_4$ se numeşte *produsul mixt* a patru puncte şi se scrie

$$(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4) = \mu_2 \tag{3'}$$

μ_2 fiind un scalar a cărui valoare constituie un caracter geometric al figurii formate de punctele considerate. Pe de altă parte, pentru o suprafaţă oarecare (**M**) avem

$$\begin{aligned} [\partial\mathbf{M}/\partial u^2, \mathbf{M}, \overline{\mathbf{M}}) &= \frac{g_{22}\,\partial\mathbf{M}/\partial u^1 - g_{12}\,\partial\mathbf{M}/\partial u^2}{g} \\ [\partial\mathbf{M}/\partial u^1, \mathbf{M}, \overline{\mathbf{M}}] &= \frac{g_{12}\,\partial\mathbf{M}/\partial u^1 - g_{11}\partial\mathbf{M}/\partial u^2}{g} \end{aligned} \tag{4}$$

$$(g^2 = \det(g_{ik}))$$

şi cum o permutare în ordinea punctelor multiplică produsele cu + 1 sau − 1 după cum este pară sau impară, rezultă din (4), (3) şi (2) că expresia anunţată a lui σ este

$$\sigma = \frac{(\partial\mathbf{C}/\partial u^1, \partial\mathbf{M}/\partial u^2, \mathbf{M}, \overline{\mathbf{M}})}{g} + \frac{(\partial\mathbf{M}/\partial u^1, \partial\mathbf{C}/\partial u^2, \mathbf{M}, \overline{\mathbf{M}})}{g} \tag{5}$$

În fine, o altă formă pentru σ, uneori comodă pentru aplicaţii, este următoarea. Notînd cu q, $\overline{q}$, q^1, q^2 coordonatele normate ale punctului **C** faţă de reperul local constituit de **M**, $\overline{\mathbf{M}}$, şi punctele nenormate $\partial\mathbf{M}/\partial u^1$, $\partial\mathbf{M}/\partial u^2$, putem scrie

$$\mathbf{C} = q^1\,\partial\mathbf{M}/\partial u^1 + q^2\,\partial\mathbf{M}/\partial u^2 + q\,\mathbf{M} + \overline{q}\,\overline{\mathbf{M}}.$$

Așadar vom avea în virtutea unei proprietăți cunoscute [2] a operatorului ∇,

$$\nabla(\mathbf{M}, \mathbf{C}) = \nabla(\mathbf{M}, q^1 \partial\mathbf{M}/\partial u^1) + \nabla(\mathbf{M}, q^2 \partial\mathbf{M}/\partial u^2) + \nabla(\mathbf{M}, q\mathbf{M}) + \\ + \nabla(\mathbf{M}, \bar{q}\mathbf{M}).$$

Pe de altă parte, $[i, j, k]$ fiind simbolurile lui Christoffel de prima speță, avem

$$\partial\mathbf{M}/\partial u^1 \cdot \partial^2\mathbf{M}/(\partial u^1)^2 = [11,1], \ \partial\mathbf{M}/\partial u^1 \cdot \partial^2\mathbf{M}/\partial u^1 \partial u^2 = [12,1]$$

$$\partial\mathbf{M}/\partial u^2 \cdot \partial^2\mathbf{M}/(\partial u^1)^2 = [11,2], \ \partial\mathbf{M}/\partial u^2 \cdot \partial^2\mathbf{M}/\partial u^1 \partial u^2 = [12,2]$$

de unde se deduce

$$\nabla(\mathbf{M}, q^1 \partial\mathbf{M}/\partial u^1) = \frac{\partial(q^1 q)/\partial u^1}{g}, \ \nabla(\mathbf{M}, q^2 \partial\mathbf{M}/\partial u^2) = \frac{\partial(q^2 g)\ \partial u^2}{g}$$

și ținînd seama și de (3), se găsește

$$\nabla(\mathbf{M}, q\mathbf{M}) = 2q, \ \nabla(\mathbf{M}, \bar{q}\overline{\mathbf{M}}) = -\bar{q}H.$$

Putem deci scrie în final

$$\sigma = \nabla(\mathbf{M}, \mathbf{C}) = \frac{\partial(q^1 g)\ \partial u^1}{g} + \frac{\partial(q^2 g)\ \partial u^2}{g} + 2q - \bar{q}H \tag{6}$$

și această expresie a lui σ constituie o generalizare a formulei lui Vincensini [2] din E_3. Dacă considerăm acum cele patru produse exterioare p_{ik} definite de

$$\mathbf{p}_{ik} = [\mathbf{M}, \partial\mathbf{M}/\partial u^i, \partial\mathbf{C}/\partial u^k] \tag{7}$$

vom numi mărimea geometrică (sau punctul nenormat)

$$2\mathbf{R} = g^{ik}\ \mathbf{p}_{ik} \tag{8}$$

prin analogie cu spațiul E_3, rotaționalul cîmpului $\mathbf{C}$ pe suprafața $(\mathbf{M})$. Aceste definiții din spațiul Σ_3 fiind date, o transformare $(\mathbf{M}, \mathbf{C})$ este de *dilatație superficială nulă* dacă $\sigma = 0$ și *irotațională* dacă

$$\mathbf{p}_{11} = 0 = \mathbf{p}_{22}, \quad \mathbf{p}_{12} + \mathbf{p}_{21} = 0. \tag{9}$$

Principiul dualității care este fundamentul în spațiul eliptic sugerează imediat să căutăm dacă există o suprafață $(\mathbf{M})$ astfel ca transformările $(\mathbf{M}, \mathbf{C})$ și $(\overline{\mathbf{M}}, \mathbf{C})$ ($(\overline{\mathbf{M}})$ fiind suplimentara lui $(\mathbf{M})$) să fie ambele de dilatație superficială nulă. Desemnînd cu $\bar{g}_{ik}$ tensorul metric fundamental al suprafeței $(\overline{\mathbf{M}})$ și cu $\bar{b}_{ik}$ tensorul definit de

$$\bar{b}_{ik} = \partial\overline{\mathbf{M}}/\partial u^i \cdot \partial\mathbf{C}/\partial u^k, \tag{10}$$

problema care am formulat-o se traduce, în virtutea lui (2), prin condițiile

$$g^{ik}\, b_{ik} = 0, \tag{11}$$ $$\bar{g}^{jl}\, \bar{b}_{jl} = 0. \tag{11'}$$

Dar ecuațiile lui Weingarten din Σ_3 putîndu-se scrie

(12) $\partial \overline{\mathbf{M}} / \partial u^{\alpha} = - \delta_{\alpha l}\, g^{l\beta}\, \partial \mathbf{M} / \partial u^{\beta}$ ($\delta_{\alpha l}$ = tensorul formei exterioare a lui ($\mathbf{M}$))

și cum pe de altă parte, $\overline{g}_{ik}$ are ca expresie [5]

$$- \overline{g}_{ik} = K_0\, g_{ik} + H \delta_{ik}$$

(K_0 și H fiind respectiv curbura relativă și cea mijlocie a lui ($\mathbf{M}$)), deducem din (10) și (12) că (11′) ia forma

$$g^{\alpha\beta}\, g^{ik}\, \delta_{ik}\, b_{\alpha\beta} + g^{4}\, b_{ik}\, g^{ik} = 0. \tag{12′}$$

Dar curbura mijlocie H avînd ca expresie $\delta_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ condiția (12) se reduce la

$$K_0 \{g\, H\, b_{ik}\, g^{ik} + b_{11}\, \delta_{22} - (b_{12} + b_{21})\, \delta_{12} + b_{22}\, \delta_{11}\} = 0$$

și ținînd seama de (11), avem cele două soluții

$$K_0 = 0, \;\; \delta_{ik} = \rho'\, g_{ik} \quad (\rho' = \text{factor de proporționalitate}).$$

Așadar suprafețele ($\mathbf{M}$) din spațiul Σ_3 care admit transformare infinitezimală definită de (11) și (11′) *sînt sau suprafețele desfășurabile pe planul eliptic sau sferele* [1])

Să considerăm acum o suprafață ($\mathbf{M}$) parametrată printr-un sistem ortogonal și avînd drept tensori fundamentali pe g_{ik} și δ_{ik}. Dacă $\tau \equiv \{\mathbf{M}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \overline{\mathbf{M}}\}$ este tetraedrul rectangular normat construit pe normala $\mathbf{M}\overline{\mathbf{M}}$ și pe tangentele $\mathbf{M}\mathbf{M}_i$, ($i = 1, 2$) la curbele parametrice, formulele lui Bianchi pentru deplasarea infinitezimală a lui τ se pot scrie sub forma condensată

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{M} &= \sqrt{g_{11}}\, \mathrm{d}u^{i}\, \mathbf{M}_i \\
\mathrm{d}\mathbf{M}_1 &= - \sqrt{g_{11}}\, \mathrm{d}u^1\, \mathbf{M} + \frac{(\partial g_{22}/\partial u^1)\, \partial u^2 - (\partial g_{11}/\partial u^2)\, \mathrm{d}u^1}{2g}\, \mathbf{M}_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} (\delta_{1k}\, \mathrm{d}u^k) \overline{\mathbf{M}} \\
\mathrm{d}\mathbf{M}_2 &= - \sqrt{g_{22}}\, \mathrm{d}u^2\, \mathbf{M} + \frac{(\partial g_{11}/\partial u^2)\, \mathrm{d}u^1 - (\partial g_{22}/\partial u^1)\, \mathrm{d}u^2}{2g}\, \mathbf{M}_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} (\delta_{2k}\, \mathrm{d}u^k) \overline{\mathbf{M}} \\
\mathrm{d}\overline{\mathbf{M}} &= - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} (\delta_{1k}\, \mathrm{d}u^k)\, \mathbf{M}_1 - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} (\delta_{2k}\, \mathrm{d}u^k)\, \mathbf{M}_2 .
\end{aligned}$$

(13)

Desemnînd cu q, q^1, q^2, $\overline{q}$ coordonatele normate față de τ ale punctului $\mathbf{C}$ care definește o transformare ($\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$), putem scrie :

$$\mathbf{C} = q\mathbf{M} + q^1\, \mathbf{M}_1 + q^2\, \mathbf{M}_2 + \overline{q}\mathbf{M}. \tag{14}$$

---

[1]) Reamintim că în spațiul Σ_3, suprafața suplimentară a unei sfere S este o sferă $\overline{S}$ concentrică cu S.

Acestea fiind, să căutăm suprafețele (**M**) astfel ca pentru un același cîmp **C** transformările (**M**, **C**) și ($\overline{\mathbf{M}}$, **C**) să fie irotaționale. Conform expresiilor (7) și (8) va trebui să avem

$$[\mathbf{M}, \partial\mathbf{M}/\partial u^1, \partial\mathbf{C}/\partial u^1] = 0, \quad [\mathbf{M}, \partial\mathbf{M}/\partial u^2, \partial\mathbf{C}/\partial u^2] = 0, \tag{15}$$

$$[\overline{\mathbf{M}}, \partial\overline{\mathbf{M}}/\partial u^1, \partial\mathbf{C}/\partial u^1] = 0, \quad [\overline{\mathbf{M}}, \partial\overline{\mathbf{M}}/\partial u^2, \partial\mathbf{C}/\partial u^2] = 0. \tag{16}$$

Derivînd expresia lui **C** din (14) și apoi introducînd în (15), și ținînd seama de proprietățile produselor exterioare de puncte, obținem

$$\partial\overline{q}^2/\partial u^1 - \frac{q^1}{2g}\,\partial g_{11}/\partial u^1 - \frac{\overline{q}\,\delta_{12}}{\sqrt{g_{22}}} = 0, \quad \partial q^1/\partial u^2 - \frac{q^2}{2g}\,\partial g_{22}/\partial u^1 - \frac{\overline{q}\,\delta_{12}}{\sqrt{g_{11}}} = 0. \tag{17}$$

$$\partial\overline{q}/\partial u^1 + \frac{q^1\delta_{11}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{g^2\delta_{12}}{\sqrt{g_{22}}} = 0, \quad \partial\overline{q}/\partial u^2 + \frac{q^1\delta_{12}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{q^2\delta_{22}}{\sqrt{g_{22}}} = 0. \tag{18}$$

În mod analog, condițiile (16) dau în primul rînd $\delta_{12} = 0$, cu alte cuvinte curbele (u^i) sînt liniile de curbură, și în plus

$$\partial q/\partial u^1 - q^1\sqrt{g_{11}} = 0, \qquad \partial q/\partial u^2 - q^2\sqrt{g_{22}} = 0. \tag{19}$$

Condițiile de integrabilitate ale ecuațiilor (18) și ale ecuațiilor (19) dau, primele cu ajutorul formulelor lui Codazzi și celelalte cu ajutorul condițiilor (17) (unde s-a făcut $\delta_{12} = 0$), aceeași relație și anume

$$q^2\,\partial\sqrt{g_{22}}\,/\partial u^1 = q^1\,\partial\sqrt{g_{11}}\,/\partial u^2. \tag{20}$$

Dar punctul **C** fiind normat, putem scrie

$$q = \cos\alpha, \quad q^1 = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \quad q^2 = \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma, \quad \overline{q} = \sin\alpha\cos\beta \tag{21}$$

și relațiile (20) și (19) devenind respectiv

$$(\sqrt{g_{22}}\,/\partial u^1)\ \cos\gamma = (\sqrt{g_{11}}\,/\partial u^2)\ \sin\gamma$$

$$\partial\alpha/\partial u^1 + \sqrt{g_{11}}\sin\beta\sin\gamma = 0\,; \quad \partial x/\partial u^2 + \sqrt{g_{22}}\sin\beta\cos\gamma = 0$$

deducem că g_{11} și g_{22} trebuie să fie de forma

$$g_{11} = U^1(u^1)\,\mathrm{e}^{F(u^1, u^2)}, \qquad g_{22} = U^2(u^2)\,\mathrm{e}^{F(u^1, u^2)}.$$

Așadar suprafețe (**M**) căutate sînt cu *linii de curbură izoterme* și aceste suprafețe joacă un rol important în spațiul Σ_3, studiul lor fiind legat de cel al cuplurilor Bonnet și a sistemelor cinematic autoconjugate din E_3, [6]. Printr-un calcul pe care nu-l vom mai dezvolta, se găsește că punctele nenormate $\partial\mathbf{C}/\partial u^1$ și $\partial\mathbf{C}/\partial u^2$ au ca expresie

$$\partial\mathbf{C}/\partial u^1 = c^1\mathbf{M}_1, \qquad \partial\mathbf{C}/\partial u^2 = c^2\mathbf{M}_2, \tag{22}$$

unde

$$c^1 = \partial q^1/\partial u^1 + q\sqrt{g_{11}} + \frac{q^2\,\partial g_{11}/\partial u^2}{2g} - \overline{q}\,\frac{\delta_{11}}{\sqrt{g_{11}}}, \; c^2 = \partial q^2/\partial u^2 + $$

$$+ q\sqrt{g_{22}} + \frac{q^1\partial g_{22}/\partial u^1}{2g} - \frac{\overline{q}\,\delta_{22}}{\sqrt{g_{22}}}.$$

Ţinînd seama de expresia (14) a lui $\mathbf{C}$, unde s-au înlocuit coeficienţii q, q^1, q^2, $\bar{q}$ cu expresiile lor date de (21) şi cu ajutorul regulii de permutare a vîrfurilor tetraedrului τ [4], se găseşte că suprafaţa suplimentară $(\bar{\mathbf{C}})$ a suprafeţei $(\mathbf{C})$ este descrisă de punctul

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\rho}\ [\mathbf{C}, \partial,\ \mathbf{C}/\partial u^1,\ \partial \mathbf{C}/\partial u^2] = \bar{\rho}(\cos \alpha\, \bar{\mathbf{M}} - \sin \alpha \cos \beta\, \mathbf{M}) \quad (\bar{\rho} = \text{factor de normare}) \tag{22'}$$

Pe de altă parte, deducem din (22) cu ajutorul ecuaţiilor (13)

$$\partial^2 \mathbf{C}/\partial u^1\, \partial u^2 = \partial c^1/\partial u^2\, \mathbf{M}_1 + \frac{\partial g_{22}/\partial u^1}{2g}\, \mathbf{M}_2$$

astfel încît avem

$$\bar{\mathbf{C}}\cdot \partial^2 \mathbf{C}/\partial u^1\, \partial u^2 = 0$$

Această relaţie, împreună cu (22), arată că în problema studiată liniile de curbură se conservă cînd se trece de la suprafaţa $\mathbf{M}$ supusă transformării la suprafaţa transformatoare $(\mathbf{C})$ şi deci în virtutea unei proprietăţi cunoscute ele se conservă şi pentru suplimentarele lor. Mai mult decît atît, este uşor de văzut că *liniile de curbură se conservă şi pe suprafaţa transformată* $(\mathbf{M}^*)$ definită de relaţia (1). Într-adevăr, factorul de normare ρ avînd ca expresie

$$\rho^2 = 1 + \cos \alpha \sin 2\varepsilon, \quad (\mathbf{M}\cdot\mathbf{C} = \cos \alpha)$$

şi $\sin^2 \varepsilon$ fiind o mărime neglijabilă, deducem din (1), (13) şi (22′) :

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{M}^*/\partial u^1 &= \frac{\partial \alpha/\partial u^1 \sin \alpha \sin 2\varepsilon}{2\rho^3}\, \mathbf{M} + \frac{\sqrt{g_{11}} \cos \varepsilon + c^1 \sin \varepsilon}{\rho}\, \mathbf{M}_1 \\ \partial \mathbf{M}^*/\partial u^2 &= \frac{\partial \alpha/\partial u^2 \sin \alpha \sin 2\varepsilon}{2\rho^3}\, \mathbf{M} + \frac{\sqrt{g_{22}} \cos \varepsilon + c^2 \sin \varepsilon}{\rho}\, \mathbf{M}_2 \end{aligned} \tag{23}$$

ceea ce dă imediat

$$\partial \mathbf{M}^*/\partial u^1 \cdot \partial \mathbf{M}^*/\partial u^2 = 0. \tag{24}$$

Făcînd produsul exterior al punctului $\mathbf{M}^*$ cu punctele nenormate $\partial \mathbf{M}^*/\partial u^1$ şi $\partial \mathbf{M}^*/\partial u^2$, găsim, cu ajutorul ecuaţiilor (13) şi ţinînd seama de (14) :

$$\mathbf{M} = \rho^*[\mathbf{M}^*,\ \partial \mathbf{M}^*/\partial u^1,\ \partial \mathbf{M}^*/\partial u^2] = \mu \cos \varepsilon\, \mathbf{M} + \bar{\mu} \sin \varepsilon\, \bar{\mathbf{M}}$$

μ şi $\bar{\mu}$ fiind doi scalari care nu interesează. Este suficient de a calcula cu ajutorul ecuaţiilor (13) (unde s-a făcut $\delta_{12} = 0$) valoarea lui $\partial^2 \mathbf{M}^*/\partial u^1\, \partial u^2$ dedusă din una din expresiile (23) pentru a obţine relaţia

$$\bar{\mathbf{M}}^* \cdot \partial^2 \mathbf{M}^*/\partial u^1\, \partial u^2 = 0, \tag{25}$$

care împreună cu (24) demonstrează aserţiunea făcută.

Putem deci enunţa următorul rezultat :

1°. *Suprafeţele din spaţiul* Σ_3 *care admit împreună cu suplimentara lor şi pentru un acelaşi cîmp* $\mathbf{C}$ *o transformare infinitezimală de dilataţie superficială nulă, sînt sferele şi suprafeţele de curbură relativă nulă.*

În aceleași condiții, suprafețele care admit o transformare infinitezimală irotațională sînt suprafețe izoterme (cu linii de curbură izoterme) și în acest caz liniile de curbură se conservă și pe suprafața transformatoare și pe suprafața transformată.

II. Expresia (22′) a punctului $\overline{\mathbf{C}}$ care descrie suprafața suplimentară a suprafeței ($\mathbf{C}$) în problema pe care am studiat-o, duce la cercetarea unei transformări ($\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$), de dilatație superficială nulă, astfel ca deplasarea infinitezimală să aibe loc de-a lungul normalei la $\mathbf{M}$. Va trebui să avem

$$\mathbf{C} = \cos\theta\ \mathbf{M} + \sin\theta\ \overline{\mathbf{M}}, \tag{26}$$

θ fiind o funcție de u^1, u^2 care urmează să fie determinată prin condiția

$$\nabla(\mathbf{M},\ \mathbf{C}) = 0.$$

Dar tetraedrul $\tau \equiv \{\mathbf{M}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \overline{\mathbf{M}}\}$ fiind rectangular și pe de altă parte în virtutea proprietăților operatorului ∇, a ecuațiilor (13) și a formulelor (3), putem scrie

$$\nabla(\mathbf{M},\ \cos\theta\,\mathbf{M}) = \cos\theta\ \nabla(\mathbf{M},\ \mathbf{M}) + \mathbf{M}\nabla\ (\cos\theta,\ \mathbf{M}) = 2\ \cos\theta$$

$$\nabla(\mathbf{M},\ \sin\theta\,\overline{\mathbf{M}}) = \sin\theta\ \nabla(\mathbf{M},\ \overline{\mathbf{M}}) + \overline{\mathbf{M}}\nabla\ (\sin\theta,\ \mathbf{M}) = -\ H\ \sin\theta$$

de unde rezultă formula simplă

$$\operatorname{cotg}\theta - \frac{H}{2} = 0 \qquad (H = \text{curbura mijlocie a lui } (\mathbf{M})). \tag{27}$$

Impunînd în plus transformării ($\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$) considerate, condiția ca să fie și irotațională, deducem din (15) (unde $\mathbf{C}$ s-a înlocuit cu expresia (26)) și cu ajutorul ecuațiilor (13), că unghiul θ este constant și prin urmare conform formulei (27), ($\mathbf{M}$) este de curbură medie constantă. Suprafețele de curbură medie constantă formează în spațiul Σ_3 o clasă importantă de suprafețe izoterme pentru care cuplul Bonnet corespunzător din spațiul E_3 este format tot de suprafețe de curbură medie constantă [6]. Așadar în spațiul Σ_3 suprafețele de curbură medie constantă se bucură de proprietatea de a *admite o transformare infinitezimală de-a lungul normalei, care să fie de dilatație superficială nulă și irotațională.*

III. În legătură cu suprafețele de curbură totală [2]) nulă din Σ_3 și care, după cum se știe, au un rol important în acest spațiu, vom arăta că ele se regăsesc în cadrul problemei *autotransformărilor infinitezimale* de dilatație superficială nulă. Vom spune, prin analogie cu definiția dată în spațiul E_3, că ($\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$) este o autotransformare infinitezimală dacă este efectuată tangențial la suprafața ($\mathbf{M}$). Această definiție fiind dată, să căutăm suprafețele ($\mathbf{M}$) care să admită două autotransformări infinitezi-

---

[2]) Reamintim că în spațiul Σ_3 curbura totală K a unei suprafețe ($\mathbf{M}$) este curbura tensorului metric al lui ($\mathbf{M}$), iar cea relativă K_0, care este egală cu produsul razelor de curbură principală, este legată de K prin formula

$$K_0 = K - \frac{1}{R^2}\,,\quad \left(\frac{1}{R^2} = \text{curbura spațiului } \Sigma_3\right).$$

male (**MC**) şi (**M$\overline{\mathbf{C}}$**) astfel ca punctele **C** şi $\overline{\mathbf{C}}$ să fie rectangulare şi să fie situate pe dreapta suplimentară normalei la **M**. Expresia celor două cîmpuri va fi deci

$$\mathbf{C} = \cos\theta\ \mathbf{M}_1 + \sin\theta\ \mathbf{M}_2, \qquad \overline{\mathbf{C}} = \sin\theta\ \mathbf{M}_1 - \cos\theta\ \mathbf{M}_2 \tag{28}$$

şi va trebui să avem

$$\nabla(\mathbf{M}, \mathbf{C}) = 0, \qquad \nabla(\mathbf{M}, \overline{\mathbf{C}}) = 0$$

ceea ce, conform formulei (6), echivalează cu

$$\begin{aligned} &\partial(\sqrt{g_{11}}\sin\theta)/\partial u^2 + \partial(\sqrt{g_{22}}\cos\theta)/\partial u^1 = 0,\\ &\partial(\sqrt{g_{11}}\cos\theta)/\partial u^2 - \partial(\sqrt{g_{22}}\sin\theta)/\partial u^1 = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Dar condiţia de integrabilitate a ecuaţiilor (29) fiind

$$\partial^2 g_{11}/(\partial u^2)^2 + \partial^2 g_{22}/(\partial u^1)^2 = (\partial g_{11}/\partial v^2)\ (\partial \lg g)/\partial v^2 + \\ + (\partial g_{22}/\partial v^1)\ \partial(\lg g)/\partial v^1$$

se găseşte că simbolul lui Riemann R_{1212} este nul şi prin urmare

$$K = \frac{R_{12}\,R_{12}}{g} = 0.$$

Dacă introducem funcţiile Φ şi $\overline{\Phi}$ definite de

$$\partial\Phi/\partial u^1 = \sqrt{g_{11}}\sin\theta, \qquad \partial\Phi/\partial u^2 = -\sqrt{g_{22}}\cos\theta$$
$$\partial\overline{\Phi}\partial u^1 = \sqrt{g_{11}}\cos\theta, \qquad \partial\overline{\Phi}/\partial u^2 = \sqrt{g_{22}}\sin\theta$$

găsim

$$\nabla(\Phi, \Phi) = 1, \qquad \nabla(\overline{\Phi}, \overline{\Phi}) = 1.$$

Aşadar curbele $\Phi = \text{const.}$ ca şi curbele $\overline{\Phi} = \text{const.}$ sînt *geodezic paralele*, iar Φ şi $\overline{\Phi}$ sînt lungimile curbelor geodezice măsurate respectiv de la curbele $\Phi = 0$ şi $\overline{\Phi} = 0$. În fine, cele două suprafeţe transformatoare (**C**), ($\overline{\mathbf{C}}$) şi suprafaţa ($\overline{\mathbf{M}}$) (suplimentara lui (**M**)) au între ele o situaţie de poziţie care merită să fie semnalată. În primul rînd se obţine din (29)

$$\partial\theta/\partial u^1 = \frac{\partial g_{11}/\partial u^2}{2g}, \qquad \partial A/\partial u^2 = -\frac{\partial g_{22}/\partial u^1}{2g}$$

şi cu ajutorul acestor valori şi a ecuaţiilor (13) se deduce

$$\partial\mathbf{C}/\partial u^1 = -\sqrt{g_{11}}\cos\theta\,\mathbf{M} + \left(\frac{\delta_{12}}{\sqrt{g_{22}}}\sin\theta + \frac{\delta_{11}\cos\theta}{\sqrt{g_{11}}}\right)\overline{\mathbf{M}}$$
$$\partial\mathbf{C}/\partial u^2 = -\sqrt{g_{22}}\sin\theta\,\mathbf{M} + \left(\frac{\delta_{12}}{\sqrt{g_{11}}}\cos\theta + \frac{\delta_{22}\sin\theta}{\sqrt{g_{22}}}\right)\overline{\mathbf{M}}$$

$$\partial\overline{\mathbf{C}}/\partial u^1 = -\sqrt{g_{11}}\sin\theta\,\mathbf{M} - \left(\frac{\delta_{12}}{\sqrt{g_{22}}}\cos\theta - \frac{\delta_{11}\sin\theta}{\sqrt{g_{11}}}\right)\overline{\mathbf{M}}$$

$$\partial\overline{\mathbf{C}}/\partial u^2 = \sqrt{g_{22}}\cos\theta\,\mathrm{M} + \left(\frac{\delta_{12}}{\sqrt{g_{11}}}\sin\theta - \frac{\delta_{22}\cos\theta}{\sqrt{g_{22}}}\right)\overline{\mathbf{M}}$$

Formînd produsul exterior al lui **C** cu $\partial\mathbf{C}/\partial u^1$ și $\partial\mathbf{C}/\partial u^2$, găsim

$$\overline{\mathbf{C}} = r[\mathbf{C},\ \partial\mathbf{C}/\partial u^1,\ \partial\mathbf{C}/\partial u^2], \quad (r = \text{factor de normare}).$$

ceea ce arată că suprafețele (**C**) și ($\overline{\mathbf{C}}$) *sînt suplimentare* și în plus, tot cu ajutorul ecuațiilor (13), mai deducem

$$d\overline{\mathbf{M}}\cdot d\mathbf{C} = 0, \qquad d\mathbf{M}\cdot d\overline{\mathbf{C}} = 0$$

ceea ce arată că (**C**) și ($\overline{\mathbf{C}}$) corespund suprafeței ($\overline{\mathbf{M}}$) prin *ortogonalitate de elemente liniare.* Putem deci formula următoarea propoziție :

Suprafețele din spațiul Σ_3, *susceptibile de a admite două autotransformări infinitezimale* (**M**, **C**) *și* (**M**, $\overline{\mathbf{C}}$) *de dilatație superficială nulă și astfel încît cîmpurile* **C** și $\overline{\mathbf{C}}$ *să fie rectangulare și situate pe suplimentara normalei la* **M**, *sînt de curbură totală nulă* (izometrice planului euclidian). *În acest caz cele două suprafețe transformatoare* (**C**) *și* ($\overline{\mathbf{C}}$) *sînt suplimentare și corespund suprafeței suplimentare lui* ($\overline{\mathrm{M}}$) *prin ortogonalitate de elemente liniare.*

IV. După ce în problemele precedente am legat de transformările $\nabla(\overline{\mathbf{M}}, \mathbf{C})$ de dilatație superficială nulă, suprafețele de curbură relativă nulă și cele de curbură totală nulă, vom considera în final *transformările izogonale* ale suprafețelor de curbură totală constante. Combinînd definiția lui Bianchi [7] cu cea dată de noi la paragraful I, vom spune că o transformare infinitezimală (**M**, **C**) este o deformație izogonală, dacă punctul **C** care descrie suprafața transformatoare este de forma

$$\mathbf{C} = \cos\alpha\,(\sin\varphi\,\mathbf{M}_1 - \cos\varphi\,\mathbf{M}_2) + \sin\alpha\,\overline{\mathbf{M}}, \tag{30}$$

α fiind o constantă oarecare.

Presupunînd suprafața (M) de curbură totală constantă și raportată la un sistem (u^i) ortogonal, se deduce din (13) (unde $g_{12} = 0$)

$$\partial\mathbf{C}/\partial u^1 = -\sqrt{g_{11}}\cos\alpha\sin\varphi\,\mathbf{M} + \left(A_1\cos\alpha\cos\varphi - \frac{\delta_{11}}{\sqrt{g_{11}}}\sin\alpha\right)\mathbf{M}_1 +$$

$$+ \left(A_1\cos\alpha\sin\varphi - \frac{\delta_{12}}{\sqrt{g_{12}}}\sin\alpha\right)\mathbf{M}_2 + \left(\frac{\delta_{11}}{\sqrt{g_{11}}}\cos\alpha\sin\varphi - \frac{\delta_{12}}{\sqrt{g_{22}}}\cos\alpha\cos\varphi\right)\overline{\mathbf{M}}$$

$$\partial\mathbf{C}/\partial u^2 = \sqrt{g_{22}}\cos\alpha\cos\varphi\,\mathbf{M} + \left(A_2\cos\alpha\cos\varphi - \frac{\delta_{12}}{\sqrt{g_{11}}}\sin\alpha\right)\mathbf{M}_1 +$$

$$+ \left(A_2\cos\alpha\sin\varphi - \frac{\delta_{22}}{\sqrt{g_{22}}}\sin\alpha\right)\mathbf{M}_2 + \left(\frac{\delta_{12}}{\sqrt{g_{11}}}\cos\alpha\sin\varphi - \frac{\delta_{22}}{\sqrt{g_{22}}}\cos\alpha\cos\varphi\right)\overline{\mathbf{M}}, \tag{31}$$

unde s-a pus

$$A_1 = \partial\varphi/\partial u^1 - \frac{1}{2g}\,\partial g_{11}/\partial u^2, \quad A_2 = \partial\varphi/\partial u^2 + \frac{1}{2g}\,\partial g_{22}/\partial u^1. \tag{32}$$

Pe de altă parte, conform rezultatelor lui Bianchi [7], A_1 şi A_2 în ipoteza unei deformări izogonale ale lui (**M**) au ca expresii

$$\begin{aligned} A_1 &= \operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\delta_{11}}{\sqrt{g_{11}}}\cos\varphi + \frac{\delta_{12}}{\sqrt{g_{22}}}\sin\varphi\right) + \sqrt{g_{11}}\operatorname{cotg}\lambda\sin\varphi, \\ A_2 &= \operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\delta_{12}}{\sqrt{g_{11}}}\cos\varphi + \frac{\delta_{22}}{\sqrt{g_{22}}}\sin\varphi\right) - \sqrt{g_{22}}\operatorname{cotg}\lambda\cos\varphi, \end{aligned} \tag{33}$$

scalarul λ fiind în mod necesar constant pentru ca condiţia de integrabilitate a ecuaţiilor (33) să aibe loc. În aceste condiţii să impunem deformării izogonale considerate ca să fie de dilataţie superficială nulă. Scriind condiţia

$$\nabla(\mathbf{M}, \mathbf{C}) = 0$$

sub forma

$$g^{ik}\, b_{ik} = 0$$

deducem cu ajutorul ecuaţiilor (31), (13) şi înlocuind apoi pe A_1, A_2 cu expresiile lor din (33), relaţia simplă

$$\delta_{11}\, g_{22}\cos^2\varphi + \delta_{22}\, g_{11}\sin^2\varphi - g^2 H = 0. \tag{34}$$

Aşadar, pentru o suprafaţă de curbură totală dată din Σ_3, există două deformaţii izogonale de unghi α şi de dilataţie superficială nulă a căror direcţii sînt date de (34). Dar ceea ce este mai interesant este faptul că relaţiile care caracterizează deformările continue ale unei suprafeţe din Σ_3 fiind aceleaşi ca E_3, ecuaţia (34) se situează în cadrul important al deformărilor continue de *tip liniar* (în care coeficienţii δ_{ik} sînt legaţi printr-o relaţie liniară). Dacă $H \neq 0$ şi cum prin ipoteza $\sin\varphi\cos\varphi \neq 0$, ecuaţia (34) caracterizează deformările cu reţea persistentă cinematic conjugată [3].

Dacă $H = 0$ (suprafaţa este minimală), atunci ecuaţia diferenţială

$$g_{11}\sin^2\varphi\,(\mathrm{d}u^1)^2 + g_{22}\cos^2\varphi\,(\mathrm{d}u^2)^2 = 0$$

defineşte pe (**M**) o reţea conjugală care rămîne conjugată în deformarea continuă a lui (**M**) definită de (34). Astfel, în general: *Deformările izogonale de dilataţie superficială nulă a unei suprafeţe de curbură (totală) constantă din* Σ_3 *sînt deformări cu reţea persistentă cinematic conjugată.*

Primită la redacţie la 28 mai 1966

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. R. Boudet, *Sur quelques propriétés géométriques des transformations infinitésimales des surfaces*. Thèse — Fac. de Sci. de l'Univ. d'Aix. Marseille, 1961.
2. P. Vincensini, *Sur le problème des transformations équivalentes infinitésimales d'une surface et ses relations avec la théorie des congruences de sphères*. Ann. Scient. Fc. Norm. Sup. 2ème série **79**. (1962).
3. — *Sur la déformation des réseaux cinématiquement conjugués* Journal de Math., **XLII** (1963).
4. R. Garnier, *Géométrie et cinématique Cayleyannes*. Gauthiers, Villars, Paris, 1951.
5. L. Bianchi, *Lezioni di Geom. diff.*, vol. II, Part. II. Zanichelli, Bologna, 1930.
6. — *Sulle superficie a linee dicurvatura izoterme*. Rend. Aee. Muz. din Lincei, **(3)** (1903).
7. — *Sopra le deformazioni isogonali delle superficie a curvatura constante in geometrie ellitica ed iperbolica*. Annali di Matem., **(3)** (1911).

ASUPRA GRUPURILOR IZOMORFE CU GRUPUL TRANSFORMĂRILOR ORTOGONALE DIN SPAŢIUL E_3 ŞI CU SUBGRUPURILE LUI

DE

MARIUS I. STOKA

În această lucrare se determină formele canonice la care pot fi reduse transformările infinitezimale ale grupurilor tranzitive izomorfe cu grupul transformărilor ortogonale din spaţiul E_3 şi cu subgrupurile lui.

Fie E_3 spaţiul euclidian de coordonate carteziene ortogonale, x^1, x^2, x^3 şi G_6 grupul transformărilor ortogonale definit de operatorii

$$(1)\quad X_i f = \partial_i f,\ (i = 1, 2, 3),\ X_{ij} f = x^i \partial_j f - x^j \partial_i f,\ (i < j = 1, 2, 3),$$

unde $\partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ şi avînd structura (notăm $X_4 = X_{12}, X_5 = X_{23}, X_6 = X_{31}$)

$$(X_1X_2) = (X_1X_3) = (X_2X_3) = (X_1X_5) = (X_2X_6) = (X_3X_4) = 0,$$

$$(X_1X_4) = -(X_3X_5) = X_2,\ (X_2X_5) = -(X_1X_6) = X_3,\ (X_3X_6) = -(X_2X_4) = X_1,$$

$$(2)\quad (X_4X_5) = -X_6,\ (X_5X_6) = X_4,\ (X_6X_4) = -X_5.$$

Într-o lucrare anterioară [2] au demonstrat că grupul (1) admite următoarele subgrupuri cu trei şi patru parametri :

$$G_3^1 \equiv [X_1, X_2, X_3],\ G_3^2 \equiv [X_1, X_2, X_4],\ G_3^3 \equiv [X_4, X_5, X_6],$$

$$G_4 \equiv [X_1, X_2, X_3, X_4]$$

şi nu admite nici un subgrup de cinci parametri.

În această lucrare determinăm formele canonice la care pot fi reduse transformările infinitezimale ale grupurilor tranzitive cu două, trei şi patru variabile, izomorfe, cu grupul (1) şi cu subgrupurile lui de mai sus. Aceste rezultate ne sînt necesare la anumite probleme de geometrie integrală din spaţiul euclidian E_3.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 2, P. 177–204, BUCUREŞTI, 1967

I

Fie R_2 un spaţiu cu două dimensiuni de coordonate y^1, y^2.

Să considerăm un grup G_3 tranzitiv definit de operatorii

$$Y_h f = \xi_h^i(y)\,\partial_i f, \qquad (i = 1, 2,;\ h = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Dacă grupul G_3 este izomorf cu grupul G_3^1, putem presupune, printr-o schimbare de variabile, că

$$Y_1 f = \partial_1 f.$$

În acest caz din ecuaţia $(Y_1 Y_2) = 0$ rezultă

$$\xi_2^i = \xi_2^i(y^2).$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^1 - \int \frac{\xi_2^1(y_2)}{\xi_2^2(y^2)}\,\mathrm{d}y^2, \quad \overline{y}^2 = \int \frac{\mathrm{d}y^2}{\xi_2^2(y^2)},$$

care conservă forma operatorului Y_1, obţinem

$$Y_2 f = \partial_2 f.$$

Cu aceste valori, ecuaţiile $(Y_1 Y_3) = (Y_2 Y_3) = 0$ ne dau

$$\xi_3^i = a_3^i \qquad \text{(const.)}$$

adică

$$Y_3 = a_3^1\, Y_1 + a_3^2\, Y_2,$$

ceea ce este imposibil fiindcă operatorii Y_h sînt independenţi.

Deci, *nu există grupuri tranzitive în două variabile, izomorfe cu grupul* G_3^1.

Să presupunem acum că grupul (3) este izomorf cu grupul G_3^2.

În acest caz, ecuaţiile de structură ale grupului sînt

$$(Y_1 Y_2) = 0, \quad (Y_1 Y_3) = Y_2, \quad (Y_2 Y_3) = -\,Y_1$$

şi putem presupune că, printr-o schimbare de variabile, avem una din situaţiile

$$1^\circ\ Y_1 f = \partial_1 f, \quad 2^\circ\ Y_3 f = \partial_1 f.$$

În cazul 1°, dacă $\xi_2^2 \neq 0$, putem considera, ca şi în cazul precedent, că

$$Y_2 f = \partial_2 f$$

şi ecuaţiile de structură ne dau

$$Y_3 f = (a - y^2)\,\partial_1 f + (y^1 + b)\,\partial_2 f,$$

de unde, prin schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^1 + b, \quad \overline{y}^2 = y^2 - a,$$

rezultă

$$Y_3 f = y^1 \partial_2 f - y^2 \partial_1 f.$$

Dacă $\xi_2^2 = 0$, ținînd seama că grupul este tranzitiv, rezultă că $\xi_3^2 \neq 0$. Din ecuația $(Y_1 Y_2) = 0$, obținem

$$\xi_2^1 = \alpha(y^2)$$

iar ecuația $(Y_1 Y_3) = Y_2$ ne dă

$$\xi_3^1 = \alpha(y^2) y^1 + \beta(y^2), \quad \xi_3^2 = \gamma(y^2).$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^1 + \lambda_1(y^2), \quad \overline{y}^2 = \lambda_2(y^2),$$

deducem

$$Y_3 f = \left[\alpha(y^2)\overline{y}^1 + \gamma(y^2)\frac{d\lambda_1}{dy^2} - \alpha(y^2)\lambda_1 + \beta(y^2)\right]\partial_{\overline{1}} f + \left[\gamma(y^2)\frac{d\lambda_2}{dy^2}\right]\partial_{\overline{2}} f.$$

Avînd în vedere că $\gamma(y^2) \neq 0$, rezultă că putem determina funcțiile $\lambda_1(y^2)$, $\lambda_2(y^2)$ astfel încît

$$\gamma\frac{d\lambda_1}{dy^2} - \alpha\lambda_1 + \beta = 0, \quad \gamma\frac{d\lambda_2}{dy^2} = 1,$$

deci putem presupune că

$$Y_3 f = \alpha(y^2) y^1 \partial_1 f + \partial_2 f.$$

Cu această valoare ecuația $(Y_2 Y_3) = - Y_1$ ne dă

$$\alpha = \operatorname{tg}(y^2 + a)$$

și printr-o schimbare de variabile putem presupune că $a = 0$.

Avem deci grupul

$$Y f = \partial_1 f, \ Y f = \operatorname{tg} y^2 \partial_1 f, \ Y f = y^1 \operatorname{tg} y^2 \partial_1 f + \partial_2 f.$$

În cazul 2°, din ecuațiile $(Y_1 Y_3) = Y_2$, $(Y_2 Y_3) = - Y_1$ deducem

$$\partial_1 \xi_1^i = - \xi_2^i, \ \partial_1 \xi_2^i = \xi_1^i,$$

de unde rezultă

$$\xi_1^i = \alpha_i(y^2)\cos y^1 + \beta_i(y^2)\sin y^1, \ \xi_2^i = \alpha_i(y^2)\sin y^1 - \beta_i(y^2)\cos y^1.$$

Printr-o schimbare de variabile de forma

$$\overline{y}^1 = y^1 + \lambda_1(y^2), \ \overline{y}^2 = \lambda_2(y^2),$$

putem presupune că $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$.

Cu aceste valori, ecuația $(Y_1 Y_2) = 0$ ne dă

$$\frac{d\alpha_1}{dy^2} + \alpha_1^2 = 0, \quad \frac{d\alpha_2}{dy^2} + \alpha_1\alpha_2 = 0$$

de unde deducem

$$\alpha_1 = \frac{1}{y^2 + b}, \alpha_2 = \frac{a}{y^2 + b}.$$

Prin schimbarea de variabilă

$$\overline{y}^1 = y^1 - \operatorname{arctg} \frac{a}{y^2 + b}, \overline{y}^2 = \sqrt{(y^2 + b)^2 + a^2}$$

putem presupune $a = b = 0$, deci operatorii grupului se scriu

$$Y_1 f = \frac{\cos y^1}{y^2} \partial_1 f + \sin\ y^1 \partial_2 f,\ Y_2 f = \frac{\sin y^1}{y^2} \partial_1 f - \cos y^1\, \partial_2 f,\ Y_3 f = \partial_1 f.$$

În sfîrşit, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^2 \sin y^1,\ \overline{y}^2 = -\, y^2 \cos\ y^1,$$

regăsim grupul de la cazul 1°.

Deci, *grupurile tranzitive în două variabile izomorfe cu grupul* G_3^2, *pot fi reduse, prin schimbări de variabile, la una din formele*

$$[\mathrm{I}]\ Y_1 f = \partial_1 f,\ Y_2 f = \partial_2 f,\ Y_3 f = y^1 \partial_2 f - y^2 \partial_1 f$$

$$[\mathrm{II}]\ Y_1 f = \partial_1 f,\ Y_2 f = \operatorname{tg} y^2 \partial_1 f,\ Y_3 f = y^1 \operatorname{tg} y^2 \partial_1 f + \partial_2 f.$$

Să considerăm acum cazul în care grupul $G_3\,(3)$ este izomorf cu grupul G_3^3. În acest caz ecuaţiile de structură ale grupului sînt

$$(Y_1 Y_2) = -\, Y_3,\quad (Y_2 Y_3) = -\, Y_1,\quad (Y_3 Y_1) = -\, Y_2$$

şi putem presupune că

$$Y_1 f = \partial_1 f.$$

Din ecuaţiile de structură rezultă că

$$\partial_1 \xi_2^i = -\, \xi_3^i,\ \partial_1\, \xi_3^i = \xi_2^i$$

şi deci

$$\xi_2^i = \alpha_i\,(y^2) \cos y^1 + \beta_i\,(y^2) \sin y^1,\ \ \xi_3^i = \alpha_i\,(y^2) \sin y^1 - \beta_i\,(y^2) \cos y^1.$$

Ca şi în cazul precedent, printr-o schimbare de variabile putem presupune că $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ şi ecuaţia $(Y_2 Y_3) = -\, Y_1$ ne dă

$$\frac{d\alpha_1}{dy^2} + \alpha_1^2 + 1 = 0,\quad \frac{d\alpha_2}{dy^2} + \alpha_1 \alpha_2 = 0,$$

de unde

$$\alpha_1 = \operatorname{tg}\,(b - y^2),\ \alpha_2 = \frac{a}{\cos\,(b - y^2)}.$$

Prin schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^1 + \operatorname{arctg} \frac{a}{\cos\,(b - y^2)}, \overline{y}^2 = \arccos \frac{\sin\,(b - y^2)}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

putem presupune $a = b = 0$ și avem deci operatorii

$$(4) \qquad Y_1 f = \partial_1 f,\ Y_2 f = -\operatorname{tg} y^2 \cos y^1\, \partial_1 f + \sin y^1\, \partial_2 f,\ Y_2 f =$$
$$= -\operatorname{tg} y^2 \sin y^1\, \partial_1 f - \cos y^1\, \partial_2 f.$$

Deci, *grupurile tranzitive în două variabile izomorfe cu grupul* G_3^3, *pot fi reduse, prin schimbări de variabile, la forma* (4).

Să considerăm acum un grup tranzitiv cu patru parametri, definit de operatorii

$$Y_k f = \xi_k^i(y)\, \partial_i f, \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Presupunînd că acest grup este izomorf cu grupul $G_4 = [X_1, X_2, X_3, X_4]$, rezultă că are structura

$$(Y_1 Y_2) = (Y_1 Y_3) = (Y_2 Y_3) = (Y_3 Y_4) = 0,\ (Y_1 Y_4) = Y_2,\ (Y_2 Y_4) = -Y_1.$$

În acest caz, printr-o schimbare de variabile, avem una din situațiile

$$1^\circ\ Y_1 f = \partial_1 f, \qquad 2^\circ\ Y_4 f = \partial_1 f.$$

În cazul 1°, avem de considerat două cazuri după cum ξ_2^2 este diferit de zero sau nul.

Dacă $\xi_2^2 \neq 0$, printr-o schimbare de variabile putem presupune că

$$Y_2 f = \partial_2 f$$

și din ecuațiile $(Y_1 Y_3) = (Y_2 Y_3) = 0$ rezultă

$$\xi_3^i = a_3^i, \qquad \text{(const.)}$$

deci $Y_3 = a_3^1 Y_1 = a_3^2 Y_2$ ceea ce este imposibil.

Dacă $\xi_2^2 = 0$, din ecuațiile $(Y_1 Y_2) = (Y_1 Y_3) = (Y_2 Y_3) = 0$ deducem

$$\xi_3^2 = 0,\ \xi_2^1 = \xi_2^1(y^2),\ \xi_3^1 = \xi_3^1(y^2).$$

De aici rezultă că $\xi_4^2 \neq 0$ și din ecuația $(Y_1 Y_4) = Y_2$ obținem

$$\xi_4^1 = \xi_2^1(y^2)\, y^1 + \alpha(y),\ \xi_4^2 = \beta(y^2).$$

Prin schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^2 + \lambda_1(y^2),\ \overline{y}^2 = \lambda_2(y^2),$$

unde λ_1 și λ_2 sînt soluții ale ecuațiilor

$$\beta \frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}y^2} - \xi_2^1 \lambda_1 + \alpha = 0, \quad \beta \frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}y^2} = 1.$$

putem presupune că $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Ecuația $(Y_2 Y_4) = -Y_1$ ne dă

$$\xi_2^1 = \operatorname{tg}(y^2 + a),$$

iar ecuația $(Y_3 Y_4) = 0$,

$$\xi_3^1 = \frac{b}{\cos(y^2 + a)}.$$

Printr-o schimbare de variabile și de parametri putem presupune $a = 0$, $b = 1$ și deci grupul este definit de operatorii

$$Y_1 f = \partial_1 f,\ Y_2 f = \operatorname{tg} y^2\, \partial_1 f,\ Y_3 f = \frac{1}{\cos y^2}\, \partial_1 f,\ Y_4 f = y^1 \operatorname{tg} y^2\, \partial_1 f + \partial_2 f.$$

În sfîrșit, dacă facem schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^2,\ \overline{y}^2 = y^1 \cos y^2,$$

obținem grupul

$$Y_1 f = \cos y^1\, \partial_2 f,\ Y_2 f = \sin y^1\, \partial_2 f,\ Y_3 f = \partial_2 f,\ Y_4 f = \partial_1 f. \tag{5}$$

În cazul 2°, din ecuația $(Y_3 Y_4) = 0$, rezultă că

$$\xi_3^i = \xi_3^i (y^2).$$

Dacă $\xi_3^2 \neq 0$, printr-o schimbare de variabile putem presupune că

$$Y_3 f = \partial_2 f$$

și ecuațiile $(Y_1 Y_3) = (Y_2 Y_3) = 0$ ne dau

$$\xi_1^i = \xi_1^i (y^1),\ \xi_2^i = \xi_2^i (y^1).$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile $(Y_1 Y_4) = Y_2$, $(Y_2 Y_4) = - Y_1$, obținem

$$\frac{\mathrm{d}\xi_1^i}{\mathrm{d}y^1} = - \xi_2^i,\ \frac{\mathrm{d}\xi_2^i}{\mathrm{d}y} = \xi_1^i$$

de unde

$$\xi_1^i = a_i \cos y^1 + b_i \sin y^1, \quad \xi_2^i = a_i \sin y^1 - b_i \cos y^1.$$

În sfîrșit, ecuația $(Y_1 Y_2) = 0$ ne dă

$$a_1^2 + b_1^2 = 0, \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0,$$

adică

$$a_1 = b_1 = 0$$

și deci

$$Y_1 f = (a_2 \cos y^1 + b_2 \sin y^1)\, \partial_2 f, \quad Y_2 f = (a_2 \sin y^1 - b_2 \cos y^1)\, \partial_2 f.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^1 + \alpha, \quad \overline{y}^2 = y^2 + \beta,$$

unde α și β sînt dați de ecuațiile

$$a_2 \cos \alpha - b_2 \sin \beta = 1, \quad a_2 \sin \alpha + b_2 \cos \beta = 0$$

putem presupune $b_2 = 0$, $a_2 = 1$, deci avem grupul definit de operatorii (5).

Să presupunem acum că $\xi_3^2 = 0$. Din ecuațiile $(Y_1 Y_4) = Y_2$, $(Y_2 Y_4) = - Y_1$ rezultă

$$\xi_1^i = \alpha_i (y^2) \cos y^1 + \beta_i (y^2) \sin y^1, \quad \xi_2^i = \alpha_i (y^2) \sin y^1 - \beta_i (y^2) \cos y^1,$$

iar ecuația $(Y_1 Y_3) = 0$ ne conduce la relația imposibilă $\alpha_i = \beta_i = 0$.

Deci, *grupurile tranzitive în două variabile, izomorfe cu grupul* G_4, *pot fi reduse, prin schimbări de variabile, la forma* (5).

Să considerăm acum un grup tranzitiv cu şase parametri, definit de operatorii

$$(6) \qquad Y_h f = \xi_h^i(y)\,\partial_i f, \quad (i = 1, 2\,;\ h = 1, \dots, 6)$$

izomorf cu grupul (1).

Acest grup admite subgrupul definit de operatorii Y_1, Y_2, Y_4.

Să presupunem întîi că subgrupul $[Y_1, Y_2, Y_4]$ este tranzitiv. În acest caz, ţinînd seama de rezultatele obţinute mai sus, rezultă că acest subgrup poate fi redus la una din formele

$$1^\circ\ Y_1 f = \partial_1 f,\ Y_2 f = \partial_2 f,\ Y_4 f = y^1 \partial_2 f - y^2 \partial_1 f,$$

$$2^\circ\ Y_1 f = \partial_1 f,\ Y_2 f = \mathrm{tg}\ y^2 \partial_1 f,\ Y_4 f = y^1 \mathrm{tg}\, y^2 \partial_1 f + \partial_2 f.$$

În cazul 1°, din ecuaţiile $(Y_1 Y_3) = (Y_2 Y_3) = 0$ rezultă că

$$\xi_3^i = a_3^i, \qquad \text{(const.)}$$

adică

$$Y_3 f = a_3^1\, Y_1 f + a_3^2\, Y_2 f$$

ceea ce este imposibil.

În cazul 2°, din ecuaţiile $(Y_1 Y_3) = (Y_2 Y_3) = (Y_3 Y_4) = 0$ obţinem

$$\xi_3^1 = \frac{a}{\cos y^2},\ \xi_3^2 = 0$$

şi printr-o schimbare de parametri rezultă

$$Y_3 f = \frac{1}{\cos y^2}\,\partial_1 f.$$

Cu aceste valori, ecuaţiile $(Y_1 Y_6) = -\,Y_3$, $(Y_2 Y_6) = 0$, $(Y_3 Y_6) = Y_1$ ne conduc la o relaţie imposibilă.

Să presupunem acum că subgrupul $[Y_1, Y_2, Y_4]$ este intrazitiv. În acest caz avem

$$\xi_2^i = \lambda\, \xi_1^i, \quad \xi_4^i = \mu\, \xi_1^i$$

Din ecuaţia $(Y_1 Y_2) = 0$ deducem

$$\xi_1^i \frac{\partial \lambda}{\partial y^i} = 0,$$

iar din $(Y_1 Y_4) = Y_2$ găsim

$$\xi_1^j \frac{\partial \mu}{\partial y^j} = \lambda.$$

Ţinînd seama de aceste valori, ecuaţia $(Y_2 Y_4) = -\,Y_1$ ne dă relaţia imposibilă.

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Deci, *nu există nici un grup în două variabile izomorf cu grupul* (1).

II

Fie R_3 un spaţiu cu trei dimensiuni de coordonate y^1, y^2, y^3.

Să considerăm în acest spaţiu un grup tranzitiv G_3, definit de operatorii

$$Y_h f = \xi_h^i(y)\,\partial_i\, f, \quad (i, h = 1,\ 2,\ 3). \tag{7}$$

Dacă grupul G_3 este izomorf cu grupul G_3^1, putem presupune, printr-o schimbare de variabile, că

$$Y_1 f = \partial_1 f.$$

În acest caz, din ecuaţia $(Y_1 Y_2) = 0$ rezultă

$$\xi_2^i = \xi_2^i(y^2, y^3).$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^1 + \lambda_1(y^2, y^3),\ \overline{y}^2 = \lambda_2(y^2,\ y^3),\ \overline{y}^3 = \lambda_3(y^2, y^3),$$

care conservă forma operatorului $Y_1 f$, obţinem

$$Y_2 f = (\xi_2^1 + \xi_2^j\,\partial_j\,\lambda_1)\,\partial_{\bar{1}} f + (\xi_2^j\,\partial_j\,\lambda_2)\,\partial_{\bar{2}} f + (\xi_2^j\,\partial_j\,\lambda_3)\,\partial_{\bar{3}} f, \quad (j = 2, 3).$$

Ţinînd seama că cel puţin una dintre funcţiile ξ_2^j nu este identic nulă, rezultă că putem determina funcţiile λ_1, λ_2, λ_3 din ecuaţiile

$$\xi_2^j\,\partial_j\,\lambda_1 + \xi_2^j = 0,\ \ \xi_2^j\,\partial_j\,\lambda_2 = 1,\ \ \xi_2^j\,\partial_j\,\lambda_3 = 0,$$

deci, putem presupune că

$$Y_2 f = \partial_2 f.$$

Cu aceste valori ale operatorilor Y_1 şi Y_2, celelalte ecuaţii de structură ne dau

$$\xi_3^i = \xi_3^i(y^3)$$

şi printr-o schimbare de variabile obţinem

$$Y_3 f = \partial_3 f$$

Deci, *grupurile tranzitive în trei variabile, izomorfe cu grupul* G_3^1, *pot fi reduse, prin schimbări de variabile, la forma*

$$Y_1 f = \partial_1 f,\ Y_2 f = \partial_2 f,\ Y_3 f = \partial_3 f.$$

Să presupunem acum că grupul G este izomorf cu grupul G_3^2, deci că el are structura

$$(Y_1 Y_2) = 0,\ (Y_1 Y_3) = Y_2,\ (Y_2 Y_3) = -\,Y_1.$$

Printr-o schimbare de variabile putem considera că avem una din situaţiile

$$1^\circ \quad Y_1 f = \partial_1 f;\quad 2^\circ \quad Y_3 f = \partial_1 f.$$

În cazul 1°, din ecuaţia $(Y_1 Y_2) = 0$ deducem

$$\xi_2^i = \xi_2^i(y^2, y^3).$$

Să facem acum schimbarea de variabile

$$\bar{y}^1 = y^1 + \lambda_1(y^2, y^3), \quad \bar{y}^j = \lambda_j(y^2, y^3), \qquad (j = 2, 3).$$

Cu aceasta operatorul $Y_2 f$ devine

$$Y_2 f = (\xi_2^j \partial_j \lambda_1 + \xi_2^1)\partial_{\bar{1}} f + (\xi_2^j \partial_j \lambda_k)\partial_{\bar{k}} f, \qquad (k = 2, 3).$$

Ținînd seama că cel puțin una din funcțiile ξ_2^2, ξ_2^3 este nenulă, rezultă că putem determina funcțiile λ_1, λ_2, λ_3 astfel încît

$$\xi_2^j \partial_j \lambda_1 + \xi_2^1 = 0, \quad \xi_2^j \partial_j \lambda_2 = 1, \quad \xi_2^j \partial_j \lambda_3 = 0.$$

Putem deci presupune că

$$Y_2 f = \partial_2 f.$$

Din celelalte ecuații de structură, rezultă

$$\xi_3^1 = -y^2 + \alpha_1(y^3), \quad \xi_3^2 = y^1 + \alpha_2(y^3), \quad \xi_3^3 = \alpha_3(y^3).$$

Avînd în vedere că grupul este tranzitiv, avem $\alpha_3 \neq 0$.

Făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{y}^1 = y^1 + \mu_1(y^3), \quad \bar{y}^2 = y^2 + \mu_2(y^3), \quad \bar{y}^3 = y^3 + \mu_3(y^3),$$

obținem

$$Y_3 f = \left(-\bar{y}^2 + \alpha_3 \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}y^3} + \mu_2 + \alpha^1\right)\partial_{\bar{1}} f + \left(\bar{y}^1 + \alpha_3 \frac{\mathrm{d}\mu_2}{\mathrm{d}y^3} - \right.$$

$$\left. - \mu_1 + \alpha_2\right)\partial_{\bar{2}} f + \left(\alpha_3 \frac{\mathrm{d}\mu_3}{\mathrm{d}y^3}\right)\partial_{\bar{3}} f.$$

Ținînd seama că $\alpha_3 \neq 0$, rezultă că putem determina funcțiile μ_1, μ_2, μ_3 astfel încît să avem

$$\alpha_3 \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}y^3} + \mu_2 + \alpha_1 = 0, \quad \alpha_3 \frac{\mathrm{d}\mu_2}{\mathrm{d}y^3} - \mu_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_3 \frac{\mathrm{d}\mu_3}{\mathrm{d}y^3} = 1.$$

Deci, în acest caz avem grupul

$$G_3 \equiv [\partial_1 f, \partial_2 f, y^1 \partial_2 f - y^2 \partial_1 f + \partial_3 f].$$

În cazul 2°, din ecuațiile $(Y_1 Y_3) = Y_2$, $(Y_2 Y_3) = -Y_1$ rezultă

$$\partial_1 \xi_1^i = -\xi_2^i, \quad \partial_1 \xi_2^i = \xi_1^i,$$

de unde

(8) $$\xi_1^i = \alpha_i(y^2, y^3)\cos y^1 \beta_i(y^2, y^3)\sin y^1, \quad \xi_2^i = \alpha_i(y^2, y^3)\sin y^1 -$$

$$- \beta_i(y^2, y^3)\cos y^1.$$

Făcînd schimbarea de variabile

(9) $$\bar{y}^1 = y^1 + \lambda_1(y^2, y^3), \ \bar{y}^2 = \lambda_2(y^2, y^3), \ \bar{y}^3 = \lambda_3(y^2, y^3),$$

obținem

$$Y_1 f = [\bar{\alpha}_i(y^2, y^3)\cos \bar{y}^1 + \bar{\beta}_i(y^2, y^3)\sin \bar{y}^1]\partial_{\bar{i}} f,$$

unde am notat

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
&\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \cos \lambda_1 - \beta_1 \sin \lambda_1 + (\alpha_j \cos \lambda_1 - \beta_j \sin \lambda_1)\, \partial_j \lambda_1, && (j = 2, 3),\\
&\bar{\beta}_1 = \alpha_1 \sin \lambda_1 + \beta_1 \cos \lambda_1 + (\alpha_j \cos \lambda_1 - \beta_j \sin \lambda_1)\, \partial_j \lambda_1, &&\\
&\bar{\alpha}_k = (\alpha_j \cos \lambda_1 - \beta_j \sin \lambda_1)\, \partial_j \lambda_k, && (k = 2, 3),\\
&\bar{\beta}_k = (\alpha_j \sin \lambda_1 + \beta_j \cos \lambda_1)\, \partial_j \lambda_k. &&
\end{aligned}
$$

Avînd în vedere că grupul (7) este tranzitiv, rezultă că funcţiile α_j, β_j nu pot fi toate nule şi deci putem determina funcţiile λ_i astfel încît să avem

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_j \sin \lambda_1 + \beta_j \cos \lambda_1)\, \partial_j \lambda_1 + \alpha_1 \sin \lambda_1 + \beta_1 \cos \lambda_1 = 0,\\
&(\alpha_j \sin \lambda_1 + \beta_j \cos \lambda_1)\, \partial_j \lambda_2 = 1,\\
&(\alpha_j \sin \lambda_1 + \beta_j \cos \lambda_1)\, \partial_j \lambda_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Deci, putem presupune că în (8) avem $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = 1$. Cu aceasta, ecuaţia $(Y_1 Y_2) = 0$ ne dă

$$
\alpha_1 = \frac{1}{y^2 + k_1(y^3)}, \quad \alpha_2 = \frac{k_2(y^3)}{y^2 + k_1(y^3)}, \quad \alpha_3 = \frac{k_3(y^3)}{y^2 + k_1(y^3)}.
$$

Făcînd acum din nou o schimbare de variabile de forma (9), obţinem

$$
Y_1 f = [\alpha_i^* \ (y^2,\ y^3) \cos \bar{y}^1 + \beta_i^* \ (y^2,\ y^3) \sin \bar{y}^1]\partial_{\bar{i}} f,
$$

unde

$$
\begin{aligned}
\alpha_1^* &= \left(\frac{k_2 \cos\lambda_1}{y^2 + k_1} - \sin\lambda_1\right)\partial_2\lambda_1 + \frac{k_3 \cos\lambda_1}{y^2 + k_1}\,\partial_3\lambda_1 + \frac{\cos\lambda_1}{y^2 + k_1},\\
\beta_1^* &= \left(\frac{k_2 \sin\lambda_1}{y^2 + k_1} + \cos\lambda_1\right)\partial_2\lambda_1 + \frac{k_3 \sin\lambda_1}{y^2 + k_1}\,\partial_3\lambda_1 + \frac{\sin\lambda_1}{y^2 + k_1},\\
\alpha_j^* &= \left(\frac{k_2 \cos\lambda_1}{y^2 + k_1} - \sin\lambda_1\right)\partial_2\lambda_j + \frac{k_3 \cos\lambda_1}{y^2 + k_1}\,\partial_3\lambda_j, \ (j = 2, 3),\\
\beta_j^* &= \left(\frac{k_2 \sin\lambda_1}{y^2 + k_1} + \cos\lambda_1\right)\partial_2\lambda_j + \frac{k_3 \sin\lambda_1}{y^2 + k_1}\,\partial_3\lambda_j.
\end{aligned}
$$

Luînd funcţiile λ_1, λ_2, λ_3 ca soluţii ale sistemului complet integrabil

$$
\begin{aligned}
&\partial_2\lambda_1 = -\frac{\sin\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \partial_3\lambda_1 = \frac{k_2 \sin\lambda_1 + (y^2 + k_1) \cos \lambda_1 - \lambda_2}{k_3\lambda_2}\\
&\partial_2\lambda_2 = \cos\lambda_1, \quad \partial_3\lambda_2 = \frac{-\, k_2 \cos\lambda_1 + (y^2 + k_1) \sin \lambda_1}{k_3\lambda_2}\\
&\partial_2\lambda_3 = -\frac{\sin\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \partial_3\lambda_3 = \frac{k_2 \sin\lambda_1 + (y^2 + k_1) \cos \lambda_1}{k_3\lambda_2}
\end{aligned}
$$

rezultă că

$$\alpha_1^* = \alpha_3^* = \frac{1}{\lambda_2},\ \beta_2^* = 1,\ \alpha_2^* = \beta_1^* = \beta_3^* = 0$$

şi avînd în vedere că $\lambda_2 = \overline{y}^2$, rezultă că putem presupune că

$$k_1 = k_2 = 0,\ k_3 = 1,$$

deci

$$Y_1 f = \frac{\cos y^1}{y^2}\partial_1 f + \sin y^1 \partial_2 f + \frac{\cos y^1}{y^2}\partial_3 f,\ Y_2 f = \frac{\sin y^1}{y^2}\partial_1 f -$$

$$- \cos y^1 \partial_2 f + \frac{\sin y^1}{y^2}\partial_3 f\cdot$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^2 \sin y^1,\ \overline{y}^2 = - y^2 \cos y^1,\ \overline{y}^3 = y^3,$$

operatorii grupului devin

$$Y_1 f = \partial_{\bar 1} f - \frac{\overline{y}^2}{(\overline{y}^1)^2 + (\overline{y}^2)^2}\partial_{\bar 3} f,\ Y_2 f = \partial_{\bar 2} f + \frac{\overline{y}^1}{(\overline{y}^1)^2 + (\overline{y}^2)^2}\partial_3 f,$$

$$Y_3 f = \overline{y}^1 \partial_{\bar 2} f - \overline{y}^2\, \partial_{\bar 1} f.$$

Rezultă că *grupurile tranzitive în trei variabile, izomorfe cu grupul* G_3^2, *pot fi reduse, prin schimbări de variabile, la formele*

$$[\text{I}]\quad Y_1 f = \partial_1 f,\ Y_2 f = \partial_2 f,\ Y_3 f = y^1\partial_2 f - y^2 \partial_1 f,$$

$$[\text{II}]\quad Y_1 f = \partial_1 f - \frac{y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2}\partial_3 f,\ Y_2 f = \partial_2 f + \frac{y^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2}\partial_3 f,$$

$$Y_3 f = y^1 \partial_2 f - y^2 \partial_1 f.$$

Să presupunem acum că grupul (7) este izomorf cu grupul G_3^3, deci ecuaţiile de structură ale grupului sînt

$$(Y_1 Y_2) = - Y_3,\ (Y_2 Y_3) = - Y_1,\ (Y_3 Y_1) = - Y_2. \tag{11}$$

Printr-o schimbare de variabile putem lua

$$Y_1 f = \partial_1 f$$

şi ecuaţiile (11) ne dau

$$\partial_1 \xi_2^i = - \xi_3^i,\ \partial_1 \xi_3^i = \xi_2^i$$

de unde

$$\xi_2^i = \alpha_i (y^2,\ y^3)\ \cos y^1 + \beta_i (y^2,\ y^3)\ \sin y^1, \tag{12}$$

$$\xi_3^i = \alpha_i (y^2,\ y^3)\ \sin y^1 - \beta_i (y^2,\ y^3)\ \cos y^1.$$

Făcînd schimbarea de variabile (9) obţinem

$$Y_2 f = [\overline{\alpha}_i (y^2,\ y^3)\ \cos \overline{y}^1 + \overline{\beta}_i (y^2,\ y^3)\ \sin \overline{y}^1]\partial_{\bar i} f,$$

unde $\overline{\alpha}_i$ şi $\overline{\beta}_i$ sînt daţi de (10).

Avînd în vedere că grupul (7) este tranzitiv, rezultă că funcţiile α_j, β_j nu pot fi toate nule, deci putem determina funcţiile astfel încît să avem

$$\begin{cases} (\alpha_j \cos\lambda_1 - \beta_j \sin\lambda_1)\, \partial_j \lambda_1 + \alpha_1 \cos\lambda_1 - \beta_1 \sin\lambda_1 = 0 \\ (\alpha_j \cos\lambda_1 - \beta_j \sin\lambda_1)\, \partial_j \lambda_2 = 0, \\ (\alpha_j \cos\lambda_1 - \beta_j \sin\lambda_1)\, \partial_j \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Deci, în (12) putem presupune că $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$. Cu aceasta, ecuaţia $(Y_2 Y_3) = - Y_1$ ne dă

$$\beta_1 = \operatorname{tg}\,[y^3 + k_1(y^2)],$$

$$\beta_2 = \frac{k_2(y^2)}{\cos\,[y^3 + k_1(y^2)]}, \quad \beta_3 = \frac{k_3(y^2)}{\cos\,[y^3 + k_1(y^2)]},$$

iar condiţia ca grupul să fie tranzitiv se scrie

$$k_2(y^2) \neq 0\,.$$

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$\bar{y}^1 = y^1,\ \bar{y}^2 = y^2,\ \bar{y}^3 = y^3 + k_1(y^2) - \frac{\pi}{2}$$

putem presupune că cei trei operatori sînt

$$Y_1 f = \partial_1 f,\ \ Y_2 f = - \sin y^1 \operatorname{cotg} y^3\, \partial_1 f - \\ - \frac{\varphi(y^2)\sin y^1}{\sin y^3}\, \partial_2 f + \left[\cos y^1 - \frac{\psi(y^2)\sin y^1}{\sin y^3}\right] \partial_3 f;$$

$$Y_3 f = \cos y^1 \operatorname{cotg} y^3\, \partial_1 f + \\ + \frac{\varphi(y^2)\cos y^1}{\sin y^3}\, \partial_2 f + \left[\sin y^1 + \frac{\psi(y^2)\cos y^1}{\sin y^3}\right] \partial_3 f\,.$$

Vom face acum din nou schimbarea de variabile (9). Luînd funcţiile λ_i ca soluţii ale sistemului cu diferenţiale totale complet integrabil,

$$\partial_2 \lambda_1 = \frac{[\psi(y^2)\sin\lambda_1 + \cos\lambda_1 \sin y^3]\operatorname{cotg}\lambda_3 - \cos y^3}{\varphi(y^2)},\ \partial_3\lambda_1 = -\sin\lambda_1 \operatorname{cotg}\lambda_3,$$

$$\partial_2 \lambda_2 = \frac{\psi(y^2)\sin\lambda_1 + \cos\lambda_1 \sin y^3}{\varphi(y^2)\sin y^3},\quad \partial_3\lambda_2 = - \frac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda_3},$$

$$\partial_2 \lambda_3 = \frac{\sin\lambda_1 \sin y^3 - \psi(y^2)\cos\lambda_1}{\varphi(y^2)},\ \partial_3\lambda_3 = \cos\lambda_1,$$

putem presupune $\varphi(y^2) = 1$, $\psi(y^2) = 0$ şi deci avem operatorii

$$Y_1 f = \partial_1 f,\ Y_2 f = - \sin y^1 \operatorname{cotg} y^3\, \partial_1 f - \frac{\sin y'}{\sin y^3}\, \partial_2 f + \cos y^1\, \partial_3 f, \tag{13}$$
$$Y_3 f = \cos y^1 \operatorname{cotg} y^3\, \partial_1 f + \frac{\cos y^1}{\sin y^3}\partial_2 f + \sin y^1\, \partial_3 f.$$

Rezultă că, *grupurile în trei variabile tranzitive, izomorfe cu grupul* G_3^3, *pot fi reduse, prin schimbări de variabile la forma* (13).

Să considerăm acum un grup tranzitiv cu patru parametri, definit de operatorii

$$Y_k f = \xi_k^i (y)\, \partial_i f, \qquad (i = 1, 2, 3\,;\ k = 1, 2, 3, 4) \tag{14}$$

izomorf cu grupul G_4.

Printr-o schimbare de variabile putem presupune că avem una din situaţiile

$$1^\circ \quad Y_1 f = \partial_1 f, \qquad 2^\circ \quad Y_4 f = \partial_1 f.$$

În cazul 1° avem de asemenea de considerat două situaţii şi anume $\xi_2^2 = \xi_2^3 = 0$ şi $\xi_2^2 \neq 0$.

Dacă $\xi_2^2 = \xi_2^3 = 0$, ţinînd seama că grupul este tranzitiv, rezultă că $(\xi_3^2)^2 + (\xi_3^3)^2 \neq 0$ şi deci putem presupune că $\xi_3^3 \neq 0$.

Din ecuaţia $(Y_1 Y_3) = 0$ rezultă

$$\xi_3^i = \xi_3^i (y^2, y^3)$$

şi printr-o schimbare de variabile de forma (9) putem presupune că

$$Y_3 f = \partial_3 f.$$

Cu aceste valori, ecuaţiile $(Y_1\, Y_2) = (Y_2\, Y_3) = 0$ ne dau

$$\xi_2^1 = \xi_2^1 (y^2).$$

Din ecuaţiile $(Y_3\, Y_4) = 0$ şi $(Y_1, Y_4) = Y_2$, deducem

$$\xi_4^1 = y^1 \xi_2^1 (y^2) + \alpha (y^2), \quad \xi_4^2 = \beta (y^2), \quad \xi_4^3 = \gamma (y^2)$$

şi condiţia de tranzitivitate a grupului se scrie $\beta (y^2) \neq 0$.

Prin schimbarea de variabile

$$\bar{y}^1 = y^1 + \mu_1 (y^2), \quad \bar{y}^2 = \mu_2 (y^2), \quad \bar{y}^3 = y^3 + \mu_3 (y^2),$$

unde μ_i sînt soluţii ale ecuaţiilor

$$\beta \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}y^2} - \xi_2^1 \mu_1 + \alpha = 0, \quad \beta \frac{\mathrm{d}\mu_2}{\mathrm{d}y^2} = 1, \quad \beta \frac{\mathrm{d}\mu_3}{\mathrm{d}y^2} + \gamma = 0,$$

putem presupune că $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$.

Ecuaţia $(Y_2\, Y_4) = -\, Y_1$ ne dă

$$\xi_2^1 = \mathrm{tg}\, (y^2 + a)$$

şi prin schimbarea de variabile

$$\bar{y}^1 = y^1, \quad \bar{y}^2 = y^2 + a, \quad \bar{y}^3 = y^3$$

putem lua $a = 0$.

Deci operatorii grupului sînt

$$Y_1 f = \partial_1 f, \quad Y_2 f = \mathrm{tg}\, y^2\, \partial_1 f, \quad Y_3 f = \partial_3 f, \quad Y_4 f = y^1\, \mathrm{tg}\, y^2\, \partial_1 f + \partial_2 f. \tag{15}$$

Dacă $\xi_2^2 \neq 0$, ecuaţia $(Y_1 Y_2) = 0$ ne dă

$$\xi_2^i = \xi_2^i(y^2, y^3)$$

şi printr-o schimbare de variabile de forma (9) putem presupune

$$Y_2 f = \partial_2 f.$$

Ecuaţiile $(Y_1\, Y_3) = (Y_2\, Y_3) = 0$ ne dau

$$\xi_3^i = \xi_3^i(y^3).$$

Dacă $\xi_3^3 \neq 0$, printr-o schimbare de variabile

$$\bar{y}^1 = y^1 + \mu_1(y^3), \quad \bar{y}^2 = y^2 + \mu_2(y^3), \quad \bar{y}^3 = \mu_3(y^3) \tag{16}$$

putem presupune că

$$Y_3 f = \partial_3 f.$$

Din ecuaţiile $(Y_3 Y_4) = 0$, $(Y_1\, Y_4) = Y_2$, $(Y_2\, Y_4) = -\,Y_1$ rezultă

$$\xi_4^1 = -\,y^2 + b, \quad \xi_4^2 = y^1 + a, \quad \xi_4^3 = c$$

şi printr-o schimbare de variabile şi parametri putem lua $a = b = c = 0$.

Deci, operatorii grupului sînt

$$Y_1 f = \partial_1 f,\ Y_2 f = \partial_2 f,\ Y_3 f = \partial_3 f,\ Y_4 f = y^1 \partial_2 f - y^2 \partial_1 f. \tag*{15')}$$

Dacă $\xi_3^3 = 0$, condiţia de tranzitivitate a grupului se scrie $\xi_4^3 \neq 0$. Ecuaţiile $(Y_1\, Y_4) = Y_2$, $(Y_2\, Y_4) = -\,Y_1$ ne dau

$$\xi_4^1 = -\,y^2 + \alpha(y^3),\ \xi_4^2 = y^1 + \beta(y^3),\ \xi_4^3 = \gamma(y^3)$$

şi făcînd o schimbare de variabile de forma (16) putem presupune că $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$.

Din celelalte ecuaţii de structură ale grupului deducem

$$\xi_3^1 = a \cos y^3 + b \sin y^3,\ \xi_3^2 = a \sin y^3 - b \cos y^3.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{y}^1 = y^1,\ \bar{y}^2 = y^2,\ \bar{y}^3 = y^3 - \operatorname{arctg} \frac{b}{a},$$

putem presupune $a = 1$, $b = 0$.

Deci operatorii grupului sînt

$$\begin{gathered} Y_1 f = \partial_1 f,\ Y_2 f = \partial_2 f,\ Y_3 f = \cos y^3 \partial_1 f + \sin y^3 \partial_2 f, \\ Y f = y^1 \partial_2 f - y^2 \partial_1 f + \partial_3 f. \end{gathered} \tag{15''}$$

În cazul 2° avem de considerat două situaţii, după cum $(\xi_3^2)^2 + (\xi_3^3)^2 \neq 0$ sau $\xi_3^2 = \xi_3^3 = 0$.

Dacă $(\xi_3^2)^2 + (\xi_3^3)^2 \neq 0$, putem considera că $\xi_3^3 \neq 0$. Ecuaţia $(Y_3\, Y_4) = 0$ ne dă

$$\xi_3^i = \xi_3^i(y^2, y^3)$$

şi printr-o schimbare de variabile de forma (9) putem presupune că

$$Y_3 f = \partial_3 f.$$

În acest caz ecuaţiile $(Y_1 Y_3) = (Y_2 Y_3) = 0$, $(Y_1 Y_4) = Y_2$, $(Y_2 Y_4) = - Y_1$ ne dau

$$\xi_1^i = \alpha_i(y^2)\cos y^1 + \beta_i(y^2)\sin y^1, \quad \xi_2^i = \alpha_i(y^2)\sin y^1 - \beta_i(y^2)\cos y^1.$$

Condiţia de tranzitivitate a grupului devine $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$.
Printr-o schimbare de variabile de forma (16), putem presupune că

$$\beta_1 = \beta_3 = 0, \quad \beta_2 = 1.$$

Ecuaţia $(Y_1 Y_2) = 0$ ne dă

$$\frac{d\alpha_1}{dy^2} + \alpha_1^2 = 0, \quad \frac{d\alpha_2}{dy^2} + \alpha_1\alpha_2 = 0, \quad \frac{d\alpha_3}{dy^2} + \alpha_1\alpha_3 = 0,$$

adică

$$\alpha_1 = \frac{1}{y^2 + a}, \quad \alpha_2 = \frac{b}{y^2 + a}, \quad \alpha_3 = \frac{c}{y^2 + a}.$$

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$\bar{y}^1 = y^1 + \operatorname{arctg}\frac{c}{y^2 + a}, \quad \bar{y}^2 = \sqrt{(y^2 + a)^2 + c^2}, \quad \bar{y}^3 = y^3 - b\operatorname{arctg}\frac{y^2 + a}{c}$$

putem presupune că $a = b = 0$ şi operatorii grupului se scriu

$$Y_1 f = \frac{\cos y^1}{y^2}\partial_1 f + \sin y^1\,\partial_2 f + \frac{k\cos y^1}{y^2}\partial_3 f,$$

$$Y_2 f = \frac{\sin y^1}{y^2}\partial_1 f - \cos y^1\,\partial_2 f + \frac{k\sin y^1}{y^2}\partial_3 f,$$

$$Y_3 f = \partial_3 f, \quad Y_4 f = \partial_1 f, \qquad (k = \text{const.})$$

În sfîrşit, prin schimbarea de variabile

$$\bar{y}^1 = y^2\sin y^1, \quad \bar{y}^2 = - y^2\cos y^1, \quad \bar{y}^3 = y^3,$$

obţinem grupul

$$Y_1 f = \partial_1 f - \frac{ky^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2}\partial_3 f, \quad Y_2 f = \partial_2 f + \frac{ky^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2}\partial_3 f,$$

$$Y_3 f = \partial_3 f, \quad Y_4 f = y^1\partial_2 f - y^2\partial_1 f.$$

Dacă $k = 0$, acest grup devine identic cu (15′), deci putem presupune că $k \neq 0$ şi prin schimbarea de variabile

$$\bar{y}^1 = y^1, \quad \bar{y}^2 = y^2, \quad \bar{y}^3 = \frac{1}{k}y^3$$

putem lua $k = 1$, adică

$$(15''')\quad \begin{aligned} &Y_1 f = \partial_1 f - \frac{y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2}\partial_3 f,\ Y_2 f = \partial_2 f + \frac{y^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2}\partial_3 f,\\ &Y_3 f = \partial_3 f,\quad Y_4 f = y^1\partial_2 f - y^2\partial_1 f. \end{aligned}$$

Să considerăm acum cazul în care $\xi_3^2 = \xi_3^3 = 0$. Grupul (14) fiind tranzitiv, deducem că subgrupul lui definit de operatorii $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_4 f$ este tranzitiv. În acest caz, ținînd seama de rezultatele anterioare, rezultă că

$$\begin{aligned} Y_1 f &= \frac{\cos y^1}{y^2}\partial_1 f + \sin y^1\,\partial_2 f + \frac{\cos y^1}{y^2}\partial_3 f,\\ Y_2 f &= \frac{\sin y^1}{y^2}\partial_1 f - \cos y^1\,\partial_2 f + \frac{\sin y^1}{y^2}\partial_3 f. \end{aligned}$$

Cu aceste valori ecuațiile $(Y_1\,Y_3) = (Y_2\,Y_3) = (Y_3\,Y_4) = 0$ ne dau $\xi_3^1 = 0$, ceea ce este imposibil.

Deci, *grupurile tranzitive în trei variabile, izomorfe cu grupul G_4, pot fi reduse, prin schimbări de variabile la una din formele* (15), (15'), (15''), (15''').

Să considerăm acum un grup tranzitiv cu șase parametri definit de operatorii

$$(17)\qquad Y_k f = \xi_k^i(y)\,\partial_i f,\qquad (k = 1, \ldots, 6),$$

izomorf cu grupul G_6 (1).

Printr-o schimbare de variabile putem presupune că sîntem într-una din situațiile

$$1^\circ\quad Y_1 f = \partial_1 f,\qquad 2^\circ\quad Y_4 f = \partial_1 f.$$

În cazul 1° ecuațiile $(Y_1\,Y_2) = (Y_1\,Y_3) = 0$ ne dau

$$\xi_2^i = \xi_2^i(y^2, y^3),\quad \xi_3^i = \xi_3^i(y^2, y^3).$$

Dacă $(\xi_2^2)^2 + (\xi_2^3)^2 \neq 0$, putem considera că $\xi_2^2 \neq 0$ și printr-o schimbare de variabile obținem

$$Y_2 f = \partial_2 f.$$

Ecuația $(Y_2\,Y_3) = 0$ ne dă

$$\xi_3^i = \xi_3^i(y^3).$$

În cazul în care $\xi_3^3 \neq 0$, printr-o schimbare de variabile putem presupune că

$$Y_3 f = \partial_3 f.$$

Cu aceste valori, celelalte ecuații de structură ne dau

$$Y_4 f = y^1\partial_2 f - y^2\partial_1 f,\ Y_5 f = y^2\partial_3 f - y^3\partial_2 f,\ Y_6 f = y^3\partial_1 f - y^1\partial_3 f.$$

Deci operatorii grupului sînt tocmai operatorii grupului (1).

Să presupunem acum că $\xi_3^3 = 0$. Din ecuațiile $(Y_1\, Y_4) = Y_2$, $(Y_2\, Y_4) = -\, Y_1$ deducem

$$\xi_4^1 = -\,y^2 + \alpha\,(y^3), \quad \xi_4^2 = y^1 + \beta\,(y^3), \quad \xi_4^3 = \gamma\,(y^3),$$

iar ecuația $(Y_3\, Y_4) = 0$ ne dă

$$\gamma\,\frac{\mathrm{d}\,\xi_3^1}{\mathrm{d}y^3} + \xi_3^2 = 0, \quad \gamma\,\frac{\mathrm{d}\,\xi_3^2}{\mathrm{d}y^3} - \xi_3^1 = 0. \tag{18}$$

De aici rezultă că $\gamma \neq 0$ și, printr-o schimbare de variabile, putem presupune că $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, deci

$$Y_4 f = y^1 \partial_2 f - y^2 \partial_1 f + \partial_3 f$$

iar din (18) deducem

$$\xi_3^1 = a \cos y^3 + b \sin y^3, \quad \xi_3^2 = a \sin y^3 - b \cos y^3.$$

Printr-o schimbare de variabile de forma

$$\overline{y}^1 = y^1, \ \overline{y}^2 = y^2, \ \overline{y}^3 = y^3 + k,$$

putem presupune că $a = 1$, $b = 0$ și deci

$$Y_3 f = \cos y^3\, \partial_1 f + \sin y^3\, \partial_2 f.$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile $(Y_1\, Y_5) = 0$, $(Y_2\, Y_5) = Y_3$, $(Y_3\, Y_5) = -\, Y_2$, obținem o relație imposibilă.

Să presupunem acum că $\xi_2^2 = \xi_2^3 = 0$. Ecuațiile $(Y_1 Y_2) = (Y_1 Y_3) = 0$ ne dau

$$\xi_2^1 = \xi_2^1\,(y^2, y^3), \quad \xi_3^i = \xi_3^i\,(y^2, y^3).$$

Dacă $(\xi_3^2)^2 + (\xi_3^3)^2 \neq 0$, putem considera că $\xi_3^3 \neq 0$ și printr-o schimbare de variabile luăm

$$Y_3 f = \partial_3 f.$$

În acest caz din ecuația $(Y_2\, Y_3) = 0$ deducem

$$\xi_2^1 = \xi_2^1\,(y^2)$$

iar din $(Y_3\, Y_4) = 0$, $(Y_1\, Y_4) = Y_2$,

$$\xi_4^1 = y^1\, \xi_2^1\,(y^2) + \alpha_1\,(y^2), \quad \xi_4^2 = \alpha_2\,(y^2), \quad \xi_4^3 = \alpha_3\,(y^2).$$

Cu aceste valori ecuația $(Y_2\, Y_4) = -\, Y_1$ devine

$$\alpha_2\,\frac{\mathrm{d}\,\xi_2^1}{\mathrm{d}y^2} = (\xi_2^1)^2 + 1, \tag{19}$$

deci $\alpha_2 \neq 0$ și printr-o schimbare de variabile putem presupune $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 1$, iar din (19) rezultă

$$\xi_2^1 = \operatorname{tg}\,(y^2 + a).$$

Printr-o nouă schimbare de variabile putem lua $a = 0$, deci

$$Y_2 f = \operatorname{tg} y^2 \, \partial_1 f, \quad Y_4 f = y^1 \operatorname{tg} y^2 \, \partial_1 f + \partial_2 f.$$

Cu aceste valori ecuaţiile $(Y_1 Y_5) = 0$, $(Y_2 Y_5) = Y_3$, $(Y_3 Y_5) = - Y_2$ ne conduc la o relaţie imposibilă.

Deci trebuie să presupunem că $\xi^2_3 = \xi^3_3 = 0$.

Din ecuaţia $(Y_1 \, Y_4) = Y_2$ rezultă

$$\xi^1_4 = y^1 \xi^1_2 (y^2, y^3) + \beta_1 (y^2, y^3), \quad \xi^2_4 = \beta_2 (y^2, y^3), \quad \xi^3_4 = \beta_3 (y^2, y^3),$$

iar ecuaţia $(Y_2 \, Y_4) = - Y_1$ ne dă

$$\beta_2 \, \partial_2 \, \xi^1_2 + \beta_3 \, \partial_3 \, \xi^1_2 = (\xi^1_2)^2 + 1, \tag{20}$$

de unde deducem că cel puţin una dintre funcţiile β_2, β_3 este nenulă. Putem presupune că $\beta_2 \neq 0$ şi printr-o schimbare de variabilă obţinem $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = 1$.

Cu aceasta ecuaţia (20) ne dă

$$\xi^1_2 = \operatorname{tg} \, [y^2 + \varphi_1 (y^3)],$$

iar ecuaţia $(Y_3 \, Y_4) = 0$,

$$\xi^1_3 = \frac{\varphi (y^3)}{\cos \, [y^2 + \varphi_1 (y^3)]}.$$

Printr-o schimbare de variabilă putem presupune că $\varphi_1 = 0$.

Din ecuaţiile $(Y_1 \, Y_5) = 0$, $(Y_2 \, Y_5) = Y_3$, $(Y_3 \, Y_5) = - Y_2$, deducem

$$\xi^1_5 = \alpha (y^2, y^3), \quad \xi^2_5 = - \varphi (y^3) \cos y^2, \quad \xi^3_5 \frac{d\varphi}{dy^3} = (1 + \varphi^2) \sin y^2.$$

De aici rezultă că $\varphi (y^3) \neq \text{const.}$ şi printr-o schimbare de variabile putem lua $\varphi (y^3) = y^3$ şi deci

$$\xi^1_5 = \alpha \, (y^2, y^3), \quad \xi^2_5 = - y^3 \cos y^2, \quad \xi^3_5 = [1 + (y^3)^2] \sin y^2.$$

Din ecuaţiile $(Y_2 \, Y_6) = 0$, $(Y_1 \, Y_6) = - Y_3$, $(Y_3 \, Y_6) = Y_1$ obţinem

$$\xi^1_6 = - \frac{y^1 \, y^3}{\cos y^2} + \beta (y^2, y^3), \quad \xi^2_6 = - y^3 \sin y^2, \quad \xi^3_6 = - [1 + (y^3)^2] \cos y^2.$$

În sfîrşit, din ultimele ecuaţii de structură găsim

$$\alpha = \beta = 0.$$

Avem deci operatorii

$$Y_1 f = \partial_1 f, \; Y_2 f = \operatorname{tg} y^2 \partial_1 f, \; Y_3 f = \frac{y^3}{\cos y^2} \partial_1 f, \; Y_4 f = y^1 \operatorname{tg} y^2 \partial_1 f + \partial_2 f, \tag{21}$$

$$Y_5 f = - y^3 \cos y^2 \partial_2 f + [1 + (y^3)^2] \sin y^2 \partial_3 f, \; Y_6 f = - \frac{y^1 y^3}{\cos y^2} \partial_1 f -$$

$$- y^3 \sin y^2 \partial_2 f - [1 + (y^3)^2] \cos y^2 \partial_3 f.$$

Să considerăm acum cazul 2°, adică

$$Y_4 f = \partial_1 f$$

Să presupunem întîi că subgrupul $G_3 \equiv [Y_4,\ Y_5,\ Y_6]$ este tranzitiv.

În acest caz, ţinînd seama de un rezultat anterior, rezultă că operatorii $Y_4 f$, $Y_5 f$, $Y_6 f$ sînt

$$Y_4 f = \partial_1 f,\ Y_5 f = -\sin y^1 \operatorname{cotg} y^3 \partial_1 f - \frac{\sin y^1}{\sin y^3}\partial_2 f + \cos y^1 \partial_3 f,$$

$$Y_6 f = \cos y^1 \operatorname{cotg} y^3 \partial_1 f + \frac{\cos y^1}{\sin y^3}\partial_2 f + \sin y^1 \partial_3 f \cdot$$

Înlocuind aceste expresii în ecuaţiile de structură ale grupului obţinem

$$Y_1 f = \sin y^1 \sin y^3 \partial_2 f,\ Y_2 f = -\cos y^1 \sin y^3 \partial_2 f,$$

$$Y_3 f = \cos y^3 \partial_2 f.$$

Avem deci operatorii

$$Y_1 f = \sin y^1 \sin y^3 \partial_2 f,\ Y_2 f = -\cos y^1 \sin y^3 \partial_2 f,\ Y_3 f = \cos y^3 \partial_2 f,$$

$$(21')\quad Y_4 f = \partial_1 f,\ Y_5 f = -\sin y^1 \operatorname{cotg} y^3 \partial_1 f - \frac{\sin y^1}{\sin y^3}\partial_2 f + \cos y^1 \partial_3 f,$$

$$Y_6 f = \cos y^1 \operatorname{cotg} y^3 \partial_2 f + \frac{\cos y^1}{\sin y^3}\partial_2 f + \sin y^1 \partial_3 f \cdot$$

Să presupunem acum că subgrupul $G_3 = [Y_4,\ Y_5,\ Y_6]$ este intranzitiv. În acest caz operatorii $Y_4 f$, $Y_5 f$, $Y_6 f$ se pot scrie [1]

$$Y_4 f = \partial_1 f,\ Y_5 f, = -\sin y^1 \operatorname{cotg} y^3 \partial_1 f + \cos y^1 \partial_3 f,\ Y_6 f =$$

$$= \cos y^1 \operatorname{cotg} y^3 \partial_1 f + \sin y^1 \partial_3 f.$$

Cu aceste valori, ecuaţiile de structură ne dau

$$Y_1 f = \alpha(y^2) \sin y^1 \sin y^3 \partial_2 f,\ Y_2 f = -\alpha(y^2) \cos y^1 \sin y^3 \partial_2 f,\ y_3 f =$$

$$= \alpha(y^2) \cos y^3 \partial_2 f, \text{ unde } \alpha = 0.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^1,\ \overline{y}^2 = \int \frac{dy^2}{\alpha(y^2)},\ \overline{y}^3 = y^3,$$

putem presupune $\alpha = 1$, şi deci operatorii grupului sînt

$$Y_1 f = \sin y^1 \sin y^3 \partial_2 f,\ Y_2 f = -\cos y^1 \sin y^3 \partial_2 f,\ Y_3 f = \cos y^3 \partial_2 f,$$

$$(21'')\quad Y_4 f = \partial_1 f,\ Y_5 f = -\sin y^1 \operatorname{cotg} y^3 \partial_1 f + \cos y^1 \partial_3 f,\ Y_6 f =$$

$$= \cos y^1 \operatorname{cotg} y^3 \partial_1 f + \sin y^1 \partial_3 f.$$

Deci, *grupurile tranzitive în trei variabile, izomorfe cu grupul G_6, pot fi reduse, prin schimbări de variabile, la una din formele* (1), (21), (21′), (21″).

III

Fie R_4 un spaţiu cu patru dimensiuni de coordonate y^1, y^2, y^3, y^4.

Să considerăm în acest spaţiu un grup tranzitiv cu patru parametri definit de operatorii

$$Y_h f = \xi_h^i (y)\, \partial_i f, \qquad (i, h = 1, 2, 3, 4), \tag{22}$$

izomorf cu grupul G_4.

Printr-o schimbare de variabile putem presupune că avem una din situaţiile

$$1^\circ \; Y_1 f = \partial_1 f,$$

$$2^\circ \; Y_4 f = \partial_1 f.$$

În cazul 1°, ţinînd seama că grupul este tranzitiv, rezultă că cel puţin una din funcţiile $\xi_2^2, \xi_2^3, \xi_2^4$ este nenulă şi putem presupune că $\xi_2^2 \neq 0$.

Din ecuaţia $(Y_1\, Y_2) = 0$ rezultă

$$\xi_2^i = \xi_2^i\, (y^2, y^3, y^4)$$

şi printr-o schimbare de variabile de forma

$$\overline{y}^1 = y^1 + \lambda_1 (y^2, y^3, y^4), \quad \overline{y}^j = \lambda_j (y^2, y^3, y^4), \quad (j = 2, 3, 4) \tag{23}$$

putem presupune că

$$Y_2 f = \partial_2 f.$$

În acest caz ecuaţiile $(Y_1\, Y_3) = (Y_2\, Y_3) = 0$ ne dau

$$\xi_3^i = \xi_3^i\, (y^3, y^4).$$

Avînd în vedere că grupul este tranzitiv, rezultă că $\xi_3^3)^2 + (\xi_3^4)^2 \neq 0$ şi deci putem considera că $\xi_3^3 \neq 0$.

Făcînd o schimbare de variabile de forma

$$\overline{y}^1 = y^1 + \mu_1 (y^3, y^4), \; \overline{y}^2 = y^2 + \mu_2 (y^3, y^4), \; \overline{y}^k = \mu_k (y^3, y^4), \; (k = 3, 4)$$

putem presupune că

$$Y_3 f = \partial_3 f.$$

Înlocuind expresiile operatorilor $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$ în ecuaţiile $(Y_1\, Y_4) = Y_2$, $(Y_2\, Y_4) = - Y_1$ şi $(Y_3\, Y_4) = 0$, obţinem

$$\xi_4^1 = - y^2 + \alpha_2 (y^4), \quad \xi_4^2 = y^1 + \alpha_1 (y^4), \quad \xi_4^k = \alpha_k (y^4), \qquad (k = 3, 4).$$

Condiţia de tranzitivitate devine $\alpha_4 \neq 0$.

Să facem acum o schimbare de variabile de forma

$$\overline{y}^1 = y^1 + \nu_1 (y^4),\ \overline{y}^2 = y^2 + \nu_2 (y^4),\ \overline{y}^3 = y^3 + \nu_3 (y^4),\ \overline{y}^4 = \nu_4 (y^4).$$

Cu aceasta, operatorul $Y_4 f$ devine

$$Y_4 f = \left(- \overline{y}^2 + \alpha_4 \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}y^4} + \nu_2 + \alpha_2\right) \partial_{\bar{1}} f + \left(\overline{y}^1 + \alpha_4 \frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}y^4} - \nu_1 + \alpha_1\right) \partial_{\bar{2}} f +$$
$$+ \left(\alpha_4 \frac{\mathrm{d}\nu_3}{\mathrm{d}y^4} + \alpha_3\right) \partial_{\bar{3}} f + \left(\alpha_4 \frac{\mathrm{d}\nu_4}{\mathrm{d}y^4}\right) \partial_{\bar{4}} f.$$

Ținînd seama că $\alpha_4 \neq 0$, rezultă că putem determina funcțiile ν_i cu condițiile

$$\alpha_4 \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}y^4} + \nu_2 + \alpha_2 = 0,\ \alpha_4 \frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}y^4} - \nu_1 + \alpha_1 = 0,\ \alpha_4 \frac{\mathrm{d}\nu_3}{\mathrm{d}y^4} + \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 \frac{\mathrm{d}\nu_4}{\mathrm{d}y^4} = 1.$$

Deci, putem presupune că operatorul $Y_4 f$ are forma

$$Y_4 f = - y^2 \partial_1 f + y^1 \partial_2 f + \partial_4 f.$$

Rezultă că în cazul 1° grupul are operatorii

$$(24) \qquad Y_1 f = \partial_1 f,\ Y_2 f = \partial_2 f,\ Y_3 f = \partial_3 f,\ Y_4 f = - y^2 \partial_1 f + y^1 \partial_2 f + \partial_4 f.$$

Să presupunem acum că sîntem în cazul 2°, adică

$$Y_4 f = \partial_1 f.$$

Grupul (22) fiind tranzitiv, rezultă $(\xi_3^2)^2 + (\xi_3^3)^2 + (\xi_3^4)^2 \neq 0$ și printr-o schimbare de variabile de forma (23) putem presupune că

$$Y_3 f = \partial_4 f.$$

Cu aceste valori ecuațiile $(Y_1\, Y_3) = (Y_2\, Y_3) = 0$, $(Y_1\, Y_4) = Y_2$, $(Y_2\, Y_4) = - Y_1$ ne dau

$$\xi_1^i = \alpha_i (y^2, y^3) \cos y^1 + \beta_i (y^2, y^3) \sin y^1,\ \xi_2^i = \alpha_i (y^2, y^3) \sin y^1 -$$
$$- \beta_i (y^2, y^3) \cos y^1.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$(25) \qquad \overline{y}^1 = y^1 + \lambda_1 (y^2, y^3),\quad \overline{y}^2 = \lambda_2 (y^2, y^3),\quad \overline{y}^3 = \lambda_3 (y^2, y^3),$$
$$\overline{y}^4 = y^4 + \lambda_4 (y^2, y^3),$$

unde funcțiile $\lambda_i\, (y^2, y^3)$ statisfac sistemul

$$(\alpha_2 \sin \lambda_1 + \beta_2 \cos \lambda_1)\, \partial_2 \lambda_1 + (\alpha_3 \sin \lambda_1 + \beta_3 \cos \lambda_1) \partial_3 \lambda_1 +$$
$$+ \alpha_1 \sin \lambda_1 + \beta_1 \cos \lambda_1 = 0,$$
$$(\alpha_2 \sin \lambda_1 + \beta_2 \cos \lambda_1)\, \partial_2 \lambda_2 + (\alpha_3 \sin \lambda_1 + \beta_3 \cos \lambda_1)\, \partial_3 \lambda_2 = 1,$$
$$(\alpha_2 \sin \lambda_1 + \beta_2 \cos \lambda_1)\, \partial_2 \lambda_3 + (\alpha_3 \sin \lambda_1 + \beta_3 \cos \lambda_1)\, \partial_2 \lambda_3 = 0,$$
$$(\alpha_2 \sin \lambda_1 + \beta_2 \cos \lambda_1)\, \partial_2 \lambda_4 + (\alpha_3 \sin \lambda_1 + \beta_3 \cos \lambda_1)\, \partial_3 \lambda_4 +$$
$$+ \alpha_4 \sin \lambda_1 + \beta_4 \cos \lambda_1 = 0,$$

putem presupune că $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 0,\ \beta_2 = 1$.

În acest caz, ecuaţia $(Y_1\, Y_2) = 0$ ne dă

$$\alpha_1 = -\frac{1}{y^2 + k_1(y^3)},\ \alpha_2 = \frac{k_2(y^3)}{y^2 + k_1(y^3)},\ \alpha_3 = \frac{k_3(y^3)}{y^2 + k_1(y^3)},\ \alpha_4 = \frac{k_4(y^3)}{y^2 + k_1(y^3)}$$

iar condiţia de tranzitivitate devine $k_3(y^3) \neq 0$.

Făcînd acum din nou o schimbare de variabile de forme (25), obţinem

$$Y_1 f = [\overline{\alpha}_i(y^2, y^3) \cos \overline{y}^1 + \overline{\beta}_i(y^2, y^3) \sin \overline{y}^1]\, \partial_{\bar{i}} f,$$

unde

$$\overline{\alpha}_1 = \left(\frac{k_2 \cos \lambda_1}{y^2 + k_1} - \sin \lambda_1\right) \partial_2 \lambda_1 + \frac{k_3 \cos \lambda_1}{y^2 + k_1} \partial_3 \lambda_1 + \frac{\cos \lambda_1}{y^2 + k_1},$$

$$\overline{\beta}_1 = \left(\frac{k_2 \sin \lambda_1}{y^2 + k_1} + \cos \lambda_1\right) \partial_2 \lambda_1 + \frac{k_3 \sin \lambda_1}{y^2 + k_1} \partial_3 \lambda_1 + \frac{\sin \lambda_1}{y^2 + k_1},$$

$$\overline{\alpha}_j = \left(\frac{k_2 \cos \lambda_1}{y^2 + k_1} - \sin \lambda_1\right) \partial_2 \lambda_j + \frac{k_3 \cos \lambda_1}{y^2 + k_1} \partial_3 \lambda_j, \qquad (j = 2, 3),$$

$$\overline{\beta}_j = \left(\frac{k_2 \sin \lambda_1}{y^2 + k_1} + \cos \lambda_1\right) \partial_2 \lambda_j + \frac{k_3 \sin \lambda_1}{y^2 + k_1} \partial_3 \lambda_j,$$

$$\overline{\alpha}_4 = \left(\frac{k_2 \cos \lambda_1}{y^2 + k_1} - \sin \lambda_1\right) \partial_2 \lambda_4 + \frac{k_3 \cos \lambda_1}{y^2 + k_1} \partial_3 \lambda_4 + \frac{k_4 \cos \lambda_1}{y^2 + k_1},$$

$$\overline{\beta}_4 = \left(\frac{k_2 \sin \lambda_1}{y^2 + k_1} + \cos \lambda_1\right) \partial_2 \lambda_4 + \frac{k_3 \sin \lambda_1}{y^2 + k_1} \partial_3 \lambda_4 + \frac{k_4 \sin \lambda_1}{y^2 + k_1}.$$

Luînd funcţiile $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ca soluţii ale sistemului complet integrabil

$$\partial_2 \lambda_1 = -\frac{\sin \lambda_1}{\lambda_2},\quad \partial_3 \lambda_1 = \frac{k_2 \sin \lambda_1 + (y^2 + k_1) \cos \lambda_1 - \lambda_2}{k_3\, \lambda_2}$$

$$\partial_2 \lambda_2 = \cos \lambda_1, \qquad \partial_3 \lambda_2 = \frac{-k_2 \cos \lambda_1 + (y^2 + k_1) \sin \lambda_1}{k_3}$$

$$\partial_2 \lambda_3 = -\frac{\sin \lambda_1}{\lambda_2},\quad \partial_3 \lambda_3 = \frac{k_2 \sin \lambda_1 + (y^2 + k_1) \cos \lambda_1}{k_3\, \lambda_2}$$

iar λ_4 ca soluţie a ecuaţiei

$$\left(\frac{k_2 \sin \lambda_1}{y^2 + k_1} - \cos \lambda_1\right) \partial_2 \lambda_4 + \frac{k_3 \sin \lambda_1}{y^2 + k_1} \partial_3 \lambda_4 + \frac{k_4 \sin \lambda_1}{y^2 + k_1} = 0$$

rezultă că

$$\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_3 = \frac{1}{\lambda_2},\ \overline{\beta}_2 = 1,\ \overline{\alpha}_2 = \overline{\beta}_1 = \overline{\beta}_3 = \overline{\beta}_4 = 0$$

şi avînd în vedere că $\lambda_2 = \overline{y}^2$, rezultă că putem presupune că operatorii $Y_1 f$ şi $Y_2 f$ sînt

$$Y_1 f = \frac{\cos y^1}{y^2}\,\partial_1 f + \sin y^1 \partial_2 f + \frac{\cos y^1}{y^2}\,\partial_3 f + \alpha\,(y^2, y^3)\ \cos y^1\,\partial_4 f,$$

$$Y_2 f = \frac{\sin y^1}{y^2}\,\partial_1 f - \cos y^1 \partial_2 f + \frac{\sin y^1}{y^2}\,\partial_3 f + \alpha\,(y^2, y^3)\ \sin y^1 \partial_4 f.$$

Scriind că aceşti operatori sînt permutabili, deducem

$$\alpha = \frac{\varphi\,(y^3)}{y^2}.$$

Deci, grupul are operatorii

$$Y_1 f = \frac{\cos y^1}{y^2}\,\partial_1 f + \sin y^1 \partial_2 f + \frac{\cos y^1}{y^2}\,\partial_3 f + \frac{\varphi\,(y^3)\ \cos y^1}{y^2}\,\partial_4 f,\ Y_3 f = \partial_4 f,$$

$$(24') \qquad Y_2 f = \frac{\sin y^1}{y^2}\,\partial_1 f - \cos y^1 \partial_2 f + \frac{\sin y^1}{y^2}\,\partial_3 f + \frac{\varphi\,(y^3)\ \sin y^1}{y^2}\,\partial_4 f,\ Y_4 f = \partial_1 f.$$

Rezultă că *grupurile tranzitive în patru variabile izomorfe cu grupul* G_4 *pot fi reduse, prin schimbări de variabile, la una din formele* (24) *şi* (24′).

Să considerăm acum un grup tranzitiv cu şase parametri definit de operatorii

$$(26) \qquad Y_h f = \xi_h^i\,(y)\,\partial_i f, \qquad (i = 1, \ldots, 4\,;\ h = 1, \ldots, 6),$$

izomorf cu grupul G (1).

Printr-o schimbare de variabile putem presupune că avem una din situaţiile

$$1^\circ\ Y_1 f = \partial_1 f;$$
$$2^\circ\ Y_4 f = \partial_1 f.$$

În cazul 1°, ecuaţia $(Y_1\,Y_2) = 0$ ne dă

$$\xi_2^i = \xi_2^i\,(y^2, y^3, y^4).$$

Vom considera întîi că $(\xi_2^2)^2 + (\xi_2^3)^2 + (\xi_2^4)^2 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $\xi_2^2 \neq 0$ şi printr-o schimbare de variabile de forma

$$(27) \qquad \overline{y}^1 = y^1 + \lambda_1\,(y^2, y^3, y^4),\ \overline{y}^j = \lambda_j\,(y^2, y^3, y^4), \qquad (j = 2, 3, 4)$$

obţinem

$$Y_2 f = \partial_2 f.$$

Ţinînd seama de expresiile operatorilor $Y_1 f$ şi $Y_2 f$, ecuaţiile $(Y_1\,Y_3) = (Y_2\,Y_3) = 0$ ne dau

$$\xi_3^i = \xi_3^i\,(y^3, y^4).$$

Dacă $(\xi_3^3)^2 + (\xi_3^4)^2 \neq 0$ putem presupune că $\xi_3^3 \neq 0$ şi printr-o schimbare de variabile de forma

$$(27') \quad \overline{y}^1 = y^1 + \mu_1(y^3, y^4), \; \overline{y}^2 = y^2 + \mu_2(y^3, y^4), \; \overline{y}^k = \lambda_k(y^3, y^4), \quad (k = 3, 4),$$

obţinem

$$Y_3 f = \partial_3 f.$$

Din ecuaţiile $(Y_3\, Y_4) = 0$, $(Y_1\, Y_4) = Y_2$, $(Y_2\, Y_4) = -\, Y_1$, deducem

$$Y_4 f = [-y^2 + \alpha_2(y^4)]\, \partial_1 f + [y^1 + \alpha_1(y^4)]\, \partial_2 f + \alpha_k(y^4)\, \partial_k f.$$

Dacă $\alpha_4 = 0$, înlocuind operatorii $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$, $Y_4 f$ în celelalte ecuaţii de structură obţinem $\xi_5^4 = \xi_6^4 = 0$, ceea ce este imposibil fiindcă grupul este tranzitiv.

Dacă $\alpha_4 \neq 0$, printr-o schimbare de variabile de forma

$$\overline{y}^1 = y^1 + \nu_1(y^4), \; \overline{y}^2 = y^2 + \nu_2(y^4), \; \overline{y}^3 = y^3 + \nu_3(y^4), \; \overline{y}^4 = \nu_4(y^4),$$

obţinem

$$Y_4 f = -\, y^2 \partial_1 f + y^1 \partial_2 f.$$

Cu aceste expresii ale operatorilor $Y_h f$, ecuaţiile de structură ne dau o relaţie imposibilă

Deci $\xi_3^3 = \xi_3^4 = 0$, adică

$$Y_3 f = \xi_3^1(y^3, y^4)\, \partial_1 f + \xi_3^2(y^3, y^4)\, \partial_2 f.$$

Din ecuaţiile $(Y_1\, Y_4) = Y_2$, $(Y_2\, Y_4) = -\, Y_1$, deducem

$$Y_4 f = [-y^2 + \alpha_2(y^3, y^4)]\, \partial_1 f + [y^1 + \alpha_1(y^3, y^4)]\, \partial_2 f + \alpha_k(y^3, y^4)\, \partial_k f.$$

Dacă $\alpha_3^2 + \alpha_4^2 \neq 0$, putem presupune că $\alpha_4 \neq 0$ şi printr-o schimbare de variabile de forma (27′) obţinem

$$Y_4 f = -\, y^2 \partial_1 f + y^1 \partial_2 f + \partial_4 f.$$

În acest caz, ecuaţia $(Y_3 Y_4) = 0$ ne dă

$$Y_3 f = [\beta_1(y^3) \cos y^4 + \beta_2(y^3) \sin y^4]\, \partial_1 f +$$
$$+ [\beta_1(y^3) \sin y^4 - \beta_2(y^3) \cos y^4]\, \partial_2 f.$$

Avînd în vedere că $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$, rezultă că prima schimbare de variabile

$$\bar{y}^1 = y^1, \bar{y}^2 = y^2, \bar{y}^3 = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}, \; \bar{y}^4 = y^4 - \operatorname{arctg} \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

putem presupune $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = y^3$, deci

$$Y_3 f = y^3 \cos y^4\, \partial_1 f + y^3 \sin y^4\, \partial_2 f.$$

Ecuaţiile $(Y_1\, Y_5) = 0$, $(Y_2\, Y_5) = Y_3$, $(Y_3\, Y_5) = -\, Y_2$ ne dau

$$Y_5 f = [y^2 y^3 \cos y^4 + \varphi_1(y^3, y^4)]\, \partial_1 f + [y^2 y^3 \sin y^4 +$$
$$+ \varphi_2(y^3, y^4)]\, \partial_2 f + [(y^3)^2 + 1] \sin y^4\, \partial_3 f + \frac{\cos y^4}{y^3}\, \partial_4 f$$

iar ecuațiile $(Y_2\,Y_6) = 0$, $(Y_1\,Y_6) = -Y_3$, $(Y_3\,Y_6) = Y_1$,

$$Y_6 f = [-y^1 y^3 \cos y^4 + \psi_1(y^3, y^4)]\,\partial_1 f + [-y^1 y^3 \sin y^4 + \\ + \psi_2(y^3, y^4)]\,\partial_2 f - [(y^3)^2 + 1] \cos y^4\,\partial_3 f + \frac{\sin y^4}{y^3}\,\partial_4 f.$$

Cu aceste valori, celelalte ecuații de structură ale grupului nu sînt verificate.

Rezultă că $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ și printr-o schimbare de variabile de forma (27′) obținem

$$Y_4 f = -y^2\,\partial_1 f + y^1\,\partial_2 f.$$

În acest caz, ecuația $(Y_3\,Y_4) = 0$ ne dă relația imposibilă $Y_3 f = 0$. Deci trebuie să presupunem că $\xi_2^2 = \xi_2^3 = \xi_2^4 = 0$, adică

$$Y_2 f = \xi_2^1(y^2, y^3, y^4)\,\partial_1 f.$$

Ecuația $(Y_1\,Y_3) = 0$ ne dă

$$\xi_3^i = \xi_3^i(y^2, y^3, y^4).$$

Să considerăm întîi că $(\xi_3^2)^2 + (\xi_3^3)^2 + (\xi_3^4)^2 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $\xi_3^3 \neq 0$ și printr-o schimbare de variabile de forma (27) obținem

$$Y_3 f = \partial_3 f.$$

Ecuația $(Y_2\,Y_3) = 0$ ne dă

$$\xi_2^1 = \xi_2^1(y^2, y^4)$$

iar ecuațiile $(Y_3\,Y_4) = 0$, $(Y_1\,Y_4) = Y_2$ ne dau

$$\xi_4^1 = y^1\,\xi_2^1(y^2, y^4) + \alpha_1(y^2, y^4), \quad \xi_4^1 = \alpha_j(y^2, y^4), \qquad (j = 2, 3, 4).$$

Cu aceste valori, ecuația $(Y_2\,Y_4) = -Y_1$ devine

$$\alpha_2\,\partial_2\,\xi_2^1 + \alpha_4\,\partial_4\,\xi_2^1 = 1 + (\xi_2^1)^2,$$

de unde rezultă că ξ_2^1 nu este o constantă și deci putem presupune că $\partial_2 \xi_2^1 \neq 0$.

În acest caz, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^1,\ \overline{y}^2 = \xi_2^1(y^2, y^4),\ \overline{y}^3 = y^3,\ \overline{y}^4 = y^4,$$

obținem

$$Y_2 f = y^2\,\partial_1 f,\ Y_4 f = [y^1 y^2 + \alpha_1(y^2, y^4)]\,\partial_1 f + [1 + \\ + (y^2)^2]\,\partial_2 f + \alpha_k(y^2, y^4)\,\partial_k f, \qquad (k = 3, 4).$$

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^1 + \lambda_1(y^2, y^4),\ \overline{y}^2 = y^2,\ \overline{y}^3 = y^3 + \lambda_3(y^2, y^4),\ \overline{y}^4 = \lambda_4(y^2, y^4),$$

unde funcțiile λ_1, λ_3, λ_4 sînt date de ecuațiile

$$[1 + (y^2)^2]\ \partial_2\,\lambda_1 + \alpha_4\,\partial_4\,\lambda_1 - y^2\,\lambda_1 + \alpha_1 = 0,$$
$$[1 + (y^2)^2]\ \partial_2\,y_3 + \alpha_4\,\partial_4\,\lambda_3 + \alpha_3 = 0,$$
$$[1 + (y^2)^2]\ \partial_2\,\lambda_4 + \alpha_4\,\partial_4\,\lambda_4 = 0,$$

putem presupune că primii patru operatori ai grupului sînt

$$Y_1 f = \partial_1 f,\ \ Y_2 f = y^2 \partial_1 f,\ \ Y_3 f = \partial_3 f,\ \ Y_4 f = y^1 y^2 \partial_1 f + (1 + (y^2)^2]\, \partial_2 f.$$

Cu aceste expresii, celelalte ecuații de structură nu sînt verificate. Rezultă că $\xi_3^2 = \xi_3^3 = \xi_3^4 = 0$, adică

$$Y_3 f = \xi_3^1 (y^2, y^3, y^4)\, \partial_1 f$$

Ecuația $(Y_1\, Y_4) = Y_2$ ne dă

$$\xi_4^1 = y^1 \xi_2^1 + \alpha_1 (y^2, y^3, y^4),\ \ \xi_4^j = \alpha_j (y^2, y^3, y^4), \qquad (j = 2, 3, 4),$$

iar ecuația $(Y_2\, Y_4) = - Y_1$,

$$\alpha_j\, \partial_j\, \xi_2^1 = 1 + (\xi_2^1)^2. \tag{28}$$

De aici rezultă că ξ_2^1 nu este constantă și deci putem considera că

$$\partial_2\, \xi_2^1 \neq 0.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^1,\ \overline{y}^2 = \xi_2^1 (y^2, y^3, y^4),\ \overline{y}^3 = y^3,\ \overline{y}^4 = y^4,$$

putem presupune că

$$Y_2 f = y^2\, \partial_1 f$$

și din (28) deducem

$$\alpha_2 = 1 + (y^2)^2.$$

Vom face acum schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^1 + \lambda_1 (y^2, y^3, y^4),\ \overline{y}^2 = y^2,\ \overline{y}^k = \lambda_k (y^2, y^3, y^4), \qquad (k = 3,\ 4).$$

Luînd funcțiile $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ ca soluții ale ecuațiilor

$$\begin{gathered}
[1 + (y^2)^2]\ \partial_2 \lambda_1 + \alpha_k\, \partial_k\, \lambda_1 - y^2 \lambda_1 + \alpha_1 = 0,\\
[1 + (y^2)^2]\ \partial_2 \partial_3 + \alpha_k\, \partial_k\, \lambda_3 = 1,\\
[1 + (y^2)^2]\ \partial_2 \lambda_4 + \alpha_k\, \partial_k\, \lambda_4 = 0,
\end{gathered}$$

putem presupune că

$$Y_4 f = y^1 y^2 \partial_1 f + [1 + (y^2)^2]\ \partial_2 f.$$

Ecuația $(Y_3\, Y_4) = 0$ ne dă

$$Y_3 f = \alpha (y^3, y^4) \sqrt{1 + (y^2)^2}\, \partial_1 f.$$

Din ecuația $(Y_1\, Y_5) = 0$ deducem

$$\xi_5^i = \xi_5^i (y^2, y^3, y^4),$$

iar din $(Y_2\, Y_5) = Y_3$,

$$\xi_5^2 = - \alpha \sqrt{1 + (y^2)^2}.$$

Cu aceste valori, ecuaţia $(Y_3\, Y_5) = -\, Y_2$ devine

$$\xi_5^k\, \partial_k\, \alpha = \frac{y^2\,(1+\alpha^2)}{\sqrt{1+(y^2)^2}}, \tag{29}$$

de unde rezultă că α nu este o constantă şi deci putem considera că $\partial_3\, \alpha \neq 0$.

Făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{y}^1 = y^1,\ \overline{y}^2 = y^2,\ \overline{y}^3 = \alpha\,(y^3, y^4),\ \overline{y}^4 = y^4,$$

putem presupune că $\alpha = y^3$, adică

$$Y_3 f = y^3 \sqrt{1+(y^2)^2}\ \partial_1 f.$$

Cu aceasta ecuaţia (29) ne dă

$$\xi_5^3 = \frac{y^2\,[1+(y^3)^2]}{\sqrt{1+(y^2)^2}.}.$$

Din ecuaţiile $(Y_2\, Y_6) = 0$, $(Y_1\, Y_6) = -\, Y_3$, $(Y_3\, Y_6) = Y_1$ deducem

$$\xi_6^1 = y^1\, y^3 \sqrt{1+(y^2)^2} + \alpha_1\,(y^2, y^3, y^4),\ \xi_6^2 = y^2\, y^3 \sqrt{1+(y^2)^2},\ \xi_6^3 =$$
$$= \frac{1-(y^3)^2}{\sqrt{1+(y^2)^2}},\ \xi_6^4 = \alpha_4\,(y^2, y^3, y^4).$$

Cu aceste valori, celelalte ecuaţii de structură nu sînt verificate.

Să considerăm acum că sîntem în cazul 2°, adică

$$Y_4 f = \partial_1 f.$$

Dacă subgrupul $[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]$ este tranzitiv, ţinînd seama de un rezultat anterior, rezultă că operatorii $Y_1 f, \ldots, Y_4 f$ au expresiile (24′). Înlocuind aceste expresii în ecuaţiile de structură ale grupului, obţinem o relaţie imposibilă.

Avem deci de considerat cazul în care $Y_4 f = \partial_1 f$ şi subgrupul $[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]$ este intranzitiv.

Din ecuaţia $(Y_3\, Y_4) = 0$ rezultă că

$$\xi_3^i = \xi_3^i\,(y^2, y^3, y^4).$$

Vom presupune întîi că $(\xi_3^2)^2 + (\xi_3^3)^2 + \xi_3^4)^2 \neq 0$. În acest caz putem considera că $\xi_3^4 \neq 0$ şi printr-o schimbare de variabile obţinem

$$Y_3 f = \partial_4 f.$$

În acelaşi mod în care am obţinut expresiile (24′) ale operatorilor subgrupului tranzitiv Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, găsim în acest caz

$$Y_1 f = \frac{\cos y^1}{y^2}\, \partial_1 f + \sin y^1\, \partial_2 f + \frac{\varphi\,(y^3)}{y^2} \cos y^1\, \partial_4 f,\quad Y_2 f =$$
$$= \frac{\sin\, y^1}{y^2}\, \partial_1 f - \cos\, y^1\, \partial_2 f + \frac{\varphi\,(y^3)}{y^2} \sin\, y^1\, \partial_4 f.$$

Înlocuind aceste valori în celelalte ecuaţii de structură ale grupului (26), obţinem o relaţie imposibilă.

Să considerăm acum că $\xi_3^2 = \xi_3^3 = \xi_3^4 = 0$, adică

$$Y_3 f = \xi_3^1 (y^2, y^3, y^4)\, \partial_1 f.$$

Din ecuaţiile $(Y_1\, Y_2) = (Y_2\, Y_3) = 0$ deducem

$$\xi_1^1 = (\xi_1^k\, \partial_k \ln \xi_3^1)\, y^1 + \alpha_1 (y^2, y^3, y^4), \quad \xi_1^k = \alpha_k (y^2, y^3, y^4), \qquad (k = 2, 3, 4)$$
$$\xi_2^1 = (\xi_2^k\, \partial_k \ln \xi_3^1)\, y^1 + \beta_1 (y^2, y^3, y^4), \quad \xi_2^k = \beta_k (y^2, y^3, y^4).$$

Înlocuind aceste expresii în ecuaţiile $(Y_1\, Y_4) = Y_2$, $(Y_1\, Y_4) = - Y_1$ obţinem

$$Y_1 f = 0$$

ceea ce este imposibil.

Rezultă că *nu există nici un grup tranzitiv în patru variabile izomorf cu grupul* G_6 (1).

Primită la redacţie la 2 iulie 1966

Centrul de statistică matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Stoka, *Asupra grupurilor de mişcare ale spaţiilor riemanniene* V_2 *cu curbura constantă.* St. cerc. mat., **XI**, *1* (1960).
2. M. Stoka, *Asupra subgrupurilor grupului transformărilor ortogonale din spaţiul* E_3. St. cerc. mat., **XIX**, *3* (1967).

ELEMENTE DE TEORIA FASCICULELOR (VI)

DE

NICOLAE POPESCU

CAPITOLUL V (PARTEA A DOUA)

STRUCTURA TOPOSURILOR ABELIENE

Partea a II-a a capitolului V are ca scop să prezinte rezultatele de bază privind structura obiectelor unui topos abelian. Aici sînt considerate cazurile importante ale categoriilor local nötheriene şi local finite. Un loc important este ocupat de teoria descompunerilor clasice şi varianta sa modernă.

În partea a II-a a capitolului V se abordează problema structurii obiectelor unui topos abelian ; formal această problemă este rezolvată de căte membrii seminarului de faţă [7]. O altă problemă este cea a teoriei descompunerilor şi aici se dau condiţiile necesare şi suficiente pentru rezolvarea şi a acestei probleme. Un rol important îl ocupă fără îndoială categoriile cu dimensiunea Krull definită şi printre ele cele local finite.

Pentru acestea din urmă se dă o teorie a dualităţii datorită lui Gabriel [1].

Materialul acestui capitol nu a fost încă în întregime expus în cadrul unui seminar, afară doar de categoriile local nötheriene şi categoriile local finite. Ne-am abătut de la fondul principal al seminarului, deoarece faptele, noi, interesante impuneau aceasta.

§ 15. **OBIECTE CONEXE ŞI DISCONEXE**

Peste tot, $\mathscr{C}$ va fi considerat ca fiind un U-topos abelian, pînă la menţiunea contrarie.

DEFINIŢIA 5.52. a) Fie $X \in \mathrm{Ob}\ \mathscr{C}$. Vom spune că X este un obiect coireductibil sau conex dacă pentru orice două subobiecte nenule X', X'' ale sale $X' \cap X'' \neq 0$.

b) Vom spune că X este un obiect disconex, dacă nu conţine nici un obiect coireductibil nenul.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 2, P. 205–240, BUCUREŞTI, 1967

Evident că X este disconex dacă pentru orice subobiect nenul X' al său, există două subobiecte nenule ale sale X'', X''', cu $X'' \cap X''' = 0$.

Evident, orice subobiect al unui obiect conex (disconex) are încă aceeași proprietate. Mai mult, este valabilă următoarea :

Propoziția 5.53. *Fie I o mulțime filtrată superior, și pentru orice $\alpha \in I$, X_α un subobiect al lui X, cu $X_z \subseteq X_\beta$ dacă $\alpha \leqslant \beta$. Dacă pentru orice $\alpha \in I$, X_α este conex* (disconex) *la fel este și $\sup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha = X'$.*

Demonstrație. Admitem că toți X sînt conecși și fie X_1', X_2' două subobiecte nenule din X'.

Atunci :

$$X_1' \cap X_2' = X_1' \cap X_2' \cap X' = X_1' \cap X_2' \cap \sup_\alpha X_\alpha = \sup\,(X_1' \cap X_2' \cap X_\alpha).$$

Dacă $X_1' \cap X_2' = 0$, atunci, pentru orice α, $X_1' \cap X_2' \cap X_\alpha = 0$, ceea ce este contrar cu faptul X_1 și X_2 sînt ambele nenule. La fel se dovedește partea a doua a afirmației.

Propoziția 5.54. *O extensie esențială a unui obiect conex* (*disconex*) *este un obiect conex* (*disconex*).

Demonstrația este simplă.

Vom demonstra acum cîteva propoziții relativ la obiectele conexe, folositoare în cele ce urmează.

Definiția 5.55. Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian și Q un obiect injectiv din $\mathcal{C}$. Vom spune că Q este injectiv indecompozabil dacă Q nu se poate descompune în suma directă a două subobiecte ale sale nenule.

Evident că orice obiect injectiv indecompozabil este conex și anvelopa injectivă a unui obiect conex este indecompozabilă ; această proprietate caracterizează obiectele conexe. Relativ la obiectele injective indecompozabile avem următoarea caracterizare.

Propoziția 5.56. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian și Q un injectiv din $\mathcal{C}$. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

a) *Q este injectiv indecompozabil.*

b) *Q este anvelopa injectivă a oricărui subobiect nenul al său.*

c) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ *(Q, Q) este un inel local.*

Demonstrație. a) $\Rightarrow$ b) deoarece orice subobiect nenul din Q este conex. b) $\Rightarrow$ a), deoarece, dacă $Q = Q_1 \oplus Q_2$, atunci, cum $Q_i \subset Q$, $i = 1, 2$, deducem că $Q = Q_1 = Q_2$, ceea ce este fals, cu aceea că $Q_1 \cap Q_2 = 0$.

a) $\Rightarrow$ c). Vom dovedi că toate elementele din $A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, Q)$, care nu sînt inversibile, formează un ideal din A. Într-adevăr, fie $\underline{a}$ mulțimea elementelor ce nu sînt inversibile ; evident, $f \in \underline{a}$ dacă și numai dacă $\operatorname{Ker} f \neq 0$. Atunci, dacă $f, g \in \underline{a}$, $\operatorname{Ker}(f + g) \supseteq \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \neq 0$ (după cum se vede din construcția sumei a doua morfisme într-o categorie abeliană). Dacă $\alpha \in A$, și $f \in \underline{a}$, atunci $\operatorname{Ker}(\alpha \circ f) \supseteq \operatorname{Ker} f$ și $\operatorname{Ker}(f \circ \alpha) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} \alpha \neq 0$, dacă $\alpha \neq 0$; deci, oricum $f \circ \alpha$ sau $\alpha \circ f \in \underline{a}$. $\underline{a}$ este deci ideal și A este local.

c) $\Rightarrow$ a). Fie, într-adevăr, A local ; dacă $Q = Q_1 \oplus Q_2$ și $\alpha_i : Q_i \to Q$ sînt morfismele structurale, iar p_i retracțiile lor, atunci $1_Q = \alpha_i \circ p_1 + \alpha_2 \circ p_2$, ceea ce contrazice faptul că A este local (dacă $Q_1 \neq 0 \neq Q_2$).

Observaţie. Condiţiile propoziţiei de mai sus cît şi ultima afirmaţie sînt valabile în orice categorie abeliană. Observăm de asemenea că, dacă $\mathcal{C}$ este o categorie abeliană care verifică axioma Ab5, şi $X_\alpha \subseteq Q_\alpha$ sînt familii crescător filtrate de subobiecte ale lui X, astfel că pentru orice α, Q_α este o extensie esenţială a lui X_α, atunci $\sup_\alpha Q_\alpha$ este o extensie esenţială a lui $\sup_\alpha X_\alpha$; conchidem de aici că dacă Q_α este pentru orice $\alpha \in I$, $I \in U$, o extensie esenţială (într-o categoria abeliană cu AB5) a lui X_α, atunci $\coprod_\alpha Q_\alpha$ este o extensie esenţială a lui $\coprod_\alpha X_\alpha$. Vom folosi implicit, în cele ce urmează, aceste rezultate.

Fie acum $\mathcal{C}$ o categorie abeliană şi $Q_1, \ldots, Q_n$, n obiecte injective indecompozabile din $\mathcal{C}$. Fie $Q' \subseteq \coprod_i Q_i = Q$ un obiect injectiv; atunci există submulţimea $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, cu $Q' \simeq Q_{i_1} \oplus Q_{i_2} \oplus \ldots \oplus Q_{i_n}$. Pentru dovedirea acestui fapt, folosim inducţia, şi, după cum se vede uşor (propoziţia 5.56), fie valabilă propoziţia pentru $n \leqslant m - 1$. Dacă aşa este, fie că există $1 \leqslant i \leqslant m$ cu $Q' \cap Q_i = 0$ (altfel Q' conţine un subobiect izomorf cu Q_i pentru orice i şi suma lor directă, deci $Q' \simeq Q$); atunci Q' este conţinut în Q/Q_i şi totul rezultă în baza inducţiei.

Cele demonstrate mai sus le strîngem în următoarea propoziţie, cunoscută sub numele de ,,teorema schimbului'' pentru cazul finit.

PROPOZIŢIA 5.57. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană, $Q_1, \ldots, Q_n$, n obiecte injective indecompozabile din $\mathcal{C}$ şi $Q' \subseteq Q = \coprod_i Q_i$ un subobiect injectiv; atunci există o submulţime $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ astfel că $Q' \simeq \coprod_{1 \leqslant j \leqslant k} Q_{i_j}$.*

Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian şi $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$; vom defini un schelet conex al lui X în felul următor: dacă X este disconex, atunci orice schelet al său este socotit ca fiind vid. Dacă X conţine subobiecte conexe, atunci familia tuturor sumelor directe de subobiecte conexe maximale ale lui X este, relativ la incluziune, inductivă şi deci are un element maximal: X'_c.

Observaţie. Dacă $X_1 = \coprod_{\alpha \in I} X_\alpha$, $X_2 = \coprod_{\beta \in J} X_\beta$ sînt două subobiecte, ale lui X, sume directe de obiecte coireductibile maximale, atunci $X_1 \leqslant X_2$ dacă există o injecţie: $f: I \to J$ cu $X_\alpha = X_{f(\alpha)}$; aceasta este ordonarea care se consideră mai sus.

Dacă X este o extensie esenţială a lui X'_c, atunci vom spune că X este local conex; dacă nu, există un subobiect $X_d \neq 0$ maximal, cu proprietatea că $X_d \cap X'_c = 0$. Fie X_c un subobiect al lui X maximal cu proprietatea că $X_d \cap X_c = 0$; atunci $X'_c \subseteq X_c$ şi X este o extensie esenţială a lui X'_c, deci local conex. Evident, obiectul X_d este disconex, în caz contrar am contrazice maximalitatea lui X'_c. În concluzie am dovedit următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 5.58. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian şi $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$. X este extensia esenţială a unei sume directe formată dintr-un obiect local conex şi un obiect disconex.*

Iată o propoziţie care caracterizează obiectele local conexe.

PROPOZIȚIA 5.59. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian și $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

a) *X este local conex.*

b) *Orice subobiect nenul al lui X conține un subobiect conex nenul.*

c) *X nu conține subobiecte disconexe nenule.*

Demonstrație. a) $\Rightarrow$ b). Fie X local conex, $X' = \coprod X_\alpha$ o sumă directă de subobiecte conexe ale lui X, astfel că X este o extensie enunțată a lui X'. Fie X_1 un subobiect nenul din X; atunci $X_1 \cap X' \neq 0$. Fie indicii $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ cu $X_2 = X_1 \cap X_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus X_{\alpha_n} \neq 0$. Anvelopa injectivă Q' a lui X_2 este atunci conținută în suma directă $Q_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus Q_{\alpha_n}$, unde Q_{α_i} este anvelopa injectivă a lui X_{α_i}, $1 \leqslant i \leqslant n$; conform propoziției 5.57, Q' este o sumă directă finită de injective indecompozabile, de unde implicația a) $\Rightarrow$ b).

b) $\Rightarrow$ c) evidentă.

c) $\Rightarrow$ a) Într-adevăr, din propoziția de mai sus X este extensia esențială a unei sume directe $X_1 \oplus X_2$ cu X_1 local conex și X_2 disconex; dar atunci $X_2 = 0$ și deci $X = X_1$.

§ 16. SPECTRUL UNUI TOPOS ABELIAN

Prin $\mathcal{C}$ vom nota exclusiv un U-topos abelian.

DEFINIȚIA 5.60. Fie $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$; numim tipul lui X și notăm cu $[X]$, clasa tuturor obiectelor lui $\mathcal{C}$ izomorfe cu X. Dacă $Y \in [X]$, atunci Y se va numi o realizare a tipului $[X]$.

Notăm cu $\operatorname{Sp} \mathcal{C}$ și numim spectrul lui $\mathcal{C}$ familia tuturor tipurilor obiectelor injective indecompozabile nenule din $\mathcal{C}$. Vom nota de obicei cu $\alpha, \beta, \ldots$ elementele lui $\operatorname{Sp} \mathcal{C}$.

PROPOZIȚIA 5.61. *Spectrul $\operatorname{Sp} \mathcal{C}$ al lui $\mathcal{C}$ este o mulțime, element al lui U.*

Demonstrație. Remarcăm mai întîi că putem admite ca $\mathcal{C}$ să aibă un singur generator U și deci familia obiectelor cît ale lui U este o mulțime A, element al lui U. Iată cum se definește o aplicație injectivă f de la $\operatorname{Sp} \mathcal{C}$ la A : fie $\alpha \in \operatorname{Sp} \mathcal{C}$ și Q_α o realizare a sa; există un morfism nenul $p_\alpha : U \to Q_\alpha$, iar Q_α este anvelopa injectivă a lui $\operatorname{Im} p_\alpha \simeq U/\operatorname{Ker} p_\alpha$; punem (folosind axioma alegerii) $f(\alpha) = [\operatorname{Im} p_\alpha]$ (un obiect cît fiind prin forța lucrurilor un tip). Dacă $\alpha \neq \beta$, atunci pentru orice morfism nenul $p_\beta : U \to Q_\beta$, $[\operatorname{Im} p_\beta] \neq [\operatorname{Im} p_\alpha]$, conform propoziției 5.56 și din faptul că Q_α nu este izomorf cu Q_β.

Fie acum X un obiect local conex al lui $\mathcal{C}$ și $X' = \coprod\limits_i X'_i$ un subobiect al lui X, sumă directă de obiecte conexe, astfel încît X este o extensie esențială a lui X' ; vom spune că X' este un „schelet conex" al lui X. Q_i anvelopa injectivă a lui X'_i și diagrama : (Q este anvelopa injectivă a lui X)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & X \arrow[d] \\
 & Q' = \sum\limits_i Q_i \arrow[r, "u"] & Q
\end{tikzcd}$$

în care liniile şi coloanele sînt exacte, iar u este un monomorfism, după cum se deduce uşor; mai mult, Q este o extensie esenţială a lui Q' (v este canonic calculat), conchidem deci că Q este extensia esenţială a lui Q', adică a unei sume directe de obiecte injective indecompozabile. Iată un rezultat care stabileşte o strînsă legătură între obiectele local conexe din $\mathcal{C}$ şi spectrul categoriei $\mathcal{C}$.

PROPOZIŢIA 5.62. *Fie* $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$. *Următoarele afirmaţii relativ la* X *sînt echivalente*;

a) X *este un obiect local conex.*

b) *Anvelopa injectivă a lui* X *este extensia esenţială a unei sume directe de injective indecompozabile.*

Demonstraţie. Implicaţia a) $\Rightarrow$ b) fiind mai sus dovedită, arătăm că b) $\Rightarrow$ a), şi pentru aceasta este suficient să dovedim că, conform propoziţiei 5.59, X nu conţine subobiecte disconexe nenule. Aceasta este adevărat, căci dacă ar fi altfel, adică $X_1 \subset X$ este un subobiect nenul disconex, atunci $X_2 = X_1 \cap (\coprod\limits_i Q_i) \neq 0$, $\coprod Q_i$ fiind o sumă directă de injective indecompozabile, inclusă în Q, şi esenţială în Q, (adică Q este o extensie esenţială a acestei sume directe); conform propoziţiei 5.59, X_1 conţine subobiecte conexe ceea ce este în mod stringent o contradicţie.

Fie $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ un obiect oarecare; notăm şi fixăm pentru cele ce urmează un subobiect X_c local conex şi unul X_d local disconex, astfel încît X este extensie esenţială a lui $X_c \oplus X_d$; afirmăm că X/X_d este o extensie esenţială a lui X_c şi deci este local conex; pentru a verifica aceasta, fie $p: X \to X/X_d$ epimorfosmul canonic şi $i: X_c \to X$ monomorfismul canonic; evident, $p^\circ\, i$ este un monomorfism. Dacă $\overline{X}_3$ este un subobiect nenul al lui $\overline{X} = X/X_d$, cu $\overline{Y}_3 = p\,(X_3)$ ($X_3 \supseteq X_d$ este un subobiect din X) şi $\overline{X}_3 \cap \overline{X}_c = 0$, $\overline{X}_c = \mathrm{Im}\ (p \circ i)$, atunci $(X_c \oplus X_d) \cap X_3 = X_d$ şi din legea de modularitate avem:

$$X_3 \cap (X_c \oplus X_d) = (X_3 \cap X_c) \oplus (X_3 \cap X_d) =$$
$$= (X_3 \cap X_c) \oplus X_1 = X_1,$$

de unde conchidem că $X_3 \cap X_c = 0$ şi deci $X_3 = X_d$, după cum sînt alese cele două obiecte X_c şi X_d. Aşadar $\overline{X}_3 = 0$ şi deci $\overline{X}$ este extensie esenţială a lui X, adică local conex. În concluzie:

PROPOZIŢIA 5.63. *Fie* X *un obiect din* $\mathcal{C}$; *atunci în* $\mathcal{C}$ *există şirul exact*

$$0 \to X_d \to X \to X_c \to 0$$

în care X_d *este disconex şi* X_c *este local conex.*

Fie acum mulţimea $\mathrm{Sp}\ \mathcal{C}$, şi subcategoria localizantă a lui $\mathcal{C}$ formată din toate obiectele M cu

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\ (M,\ Q_\alpha) = 0 \text{ pentru orice } \alpha \in \mathrm{Sp}\ \mathcal{C},$$

şi Q_α o realizare a sa; notăm cu $\mathcal{A}_d$ această categorie localizantă.

PROROZIŢIA 5.64. *Pentru* $\mathcal{C}$, *următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

a) *Un obiect cît al unui obiect disconex este disconex.*

b) $M \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}_d$ *dacă şi numai dacă* M *este disconex.*

Demonstraţie. Este suficient să dovedim că a) $\Rightarrow$ *b*) şi fie M disconex, iar $f: M \to Q_\alpha$ un morfism din $\mathcal{C}$ ($\alpha \in \mathrm{Sp}\mathcal{C}$, Q_α o realizare a sa);

$\operatorname{Im} f \subset Q_\alpha$ şi este conex, deci $f = 0$ şi $M \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}_d$. Invers, fie $M \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}_d$; e clar atunci că $M_c = 0$, altfel avem o contradicţie; deci $M = M_d$.

DEFINIŢIA 5.65. Un topos abelian care satisface una din afirmaţiile propoziţiei 5.64 se zice separabil.

Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian şi $\mathcal{A}_d$ categoria localizantă definită de spectrul lui $\mathcal{C}$; orice obiect al lui $\mathcal{A}_d$ este, evident, disconex. Fie $\mathcal{C}_c$ categoria cît $\mathcal{C}/\mathcal{A}_d$ şi $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_c$ functorul canonic, iar S un adjunct al său la dreapta.

Iată un rezultat foarte important pentru cele ce urmează :

PROPOZIŢIA 5.66. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian. Vom spune că $\mathcal{C}$ este o l. c. categorie dacă verifică următoarele afirmaţii echivalente :*

a) *Orice obiect nenul din $\mathcal{C}$ conţine un subobiect conex nenul.*

b) *Orice injectiv nenul din $\mathcal{C}$ conţine un injectiv indecompozabil nenul.*

c) *Orice obiect din $\mathcal{C}$ este local conex.*

d) *Orice injectiv al lui $\mathcal{C}$ este anvelopa injectivă a unei sume directe de injective indecompozabile.*

e) *$\mathcal{C}$ este un topos separabil şi $\mathcal{A}_d = 0$.*

Demonstraţie. Implicaţiile a) $\Leftrightarrow$ b), c) $\Leftrightarrow$ b), c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ b) sînt imediate din cele de mai sus; este deci suficient să dovedim că a) $\Rightarrow$ c) şi demonstraţia rezultă, observînd că pentru orice $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, $X_d = 0$.

§ 17. STUDIUL UNEI l. c. CATEGORII

Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian şi $\operatorname{Sp} \mathcal{C}$ spectrul său ; dacă $\mathcal{A}$ este o subcategorie localizantă a lui $\mathcal{C}$ şi $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ este un injectiv indecompozabil, în $\mathcal{A}$, atunci $\bar{A}$, anvelopa sa injectivă din $\mathcal{C}$, este încă injectiv indecompozabil şi asocierea $A \rightsquigarrow \bar{A}$ defineşte o aplicaţie de la $\operatorname{Sp} \mathcal{A}$ la $\operatorname{Sp} \mathcal{C}$ care este injectivă, după cum se deduce uşor. Fie $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ categoria cît, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{A}$ functorul canonic şi S un adjunct al său la dreapta ; dacă Q este un injectiv indecompozabil din $\mathcal{C}/\mathcal{A}$, atunci SQ este injectiv indecompozabil din $\mathcal{C}$ şi în plus asocierea $Q \rightsquigarrow SQ$ defineşte o injecţie de la $\operatorname{Sp} \mathcal{C}/\mathcal{A}$ la $\operatorname{Sp} \mathcal{C}$. În ambele cazuri identificăm $\operatorname{Sp} \mathcal{A}$ respectiv $\operatorname{Sp} \mathcal{C}/\mathcal{A}$ cu imaginile aplicaţiilor mai sus stabilite. Evident, $\operatorname{Sp}\mathcal{A} \cap \operatorname{Sp}\mathcal{C}/\mathcal{A} = \emptyset$ şi $\operatorname{Sp} \mathcal{C} = \operatorname{Sp} \mathcal{A} \cup \operatorname{Sp} \mathcal{C}/\mathcal{A}$. $\operatorname{Sp} \mathcal{A} = \emptyset$ dacă şi numai dacă $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_d$, $\operatorname{Sp} \mathcal{C}/\mathcal{A} = 0$ dacă şi numai dacă $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ este total disconexă, adică nu conţine nici un subobiect conex.

PROPOZIŢIA 5.67. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian şi $\mathcal{A}$ o subcategorie localizantă a sa ; următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

a) *$\mathcal{C}$ este l. c. categorie.*

b) *$\mathcal{A}$ şi $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ sînt l. c. categorii.*

Demonstraţie. a) $\Rightarrow$ b). Fie $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$, $A \neq 0$; evident că A conţine subobiecte coireductibile nenule.

Dacă Q este un injectiv din $\mathcal{C}/A$, atunci SQ conţine un injectiv indecompozabil nenul etc.

b) $\Rightarrow$ a). Fie $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$; dacă X are subobiecte nenule din A, atunci X are subobiecte conexe nenule. Dacă X nu are subobiecte nenule din $\mathcal{A}$, atunci anvelopa sa injectivă este $\mathcal{A}$-închis şi conţine injective indecompozabile nenule c.c.t.d.

Observaţie. $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{A}$ este functorul canonic, iar S un adjunct al său la dreapta. Vom folosi în continuare aceste notaţii.

Iată acum cîteva propoziţii referitoare la unele tipuri de obiecte din l. c. categorii.

DEFINIŢIA 5.68. Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană şi $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$; vom spune că X este un obiect de lungime finită dacă el nu conţine sume directe infinite.

PROPOZIŢIA 5.69. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian şi M un obiect de lungime finită al său. În aceste condiţii orice subobiect nenul al lui M conţine un subobiect conex nenul şi există un întreg pozitiv n astfel că*:

a) *Orice sumă directă de subobiecte nenule din M posedă cel mult n componente nenule.*

b) *Un subobiect N al lui M are proprietatea că M este o extensie esenţială a sa dacă şi numai dacă N conţine o sumă directă de n subobiecte conexe nenule.*

Întregul nenul n, mai sus definit, se va numi dimensiunea lui X şi se va nota cu $\dim X$.

Demonstraţia acestei propoziţii este imediată şi deci lăsată cititorului.

PROPOZIŢIA 5.70. *Fie $\mathcal{C}$ o l. c. categorie şi $M \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

a) *M este de dimensiune finită.*

b) *M este o extensie esenţială a unei sume directe finite de obiecte conexe.*

c) *Anvelopa injectivă a lui M este o sumă directă finită de obiecte injective indecompozabile.*

Demonstraţie. Implicaţiile a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) sînt evidente; pentru a dovedi că c) $\Rightarrow$ a), observăm mai întîi că M este extensia esenţială a unei sume directe de obiecte conexe şi deci de lungime finită, după cum se constată imediat.

Rezultă, din cele de mai sus, că dacă $\{M_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sînt obiecte de dimensiune finită, atunci $M = \coprod_i M_i$ este un obiect de lungime finită şi $\dim M = \sum_i \dim M_i$.

Din propoziţia de mai sus putem extrage următorul corolar:

COROLAR. *Fie $\mathcal{C}$ o l. c. categorie, în care considerăm şirul exact*:

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

Dacă M', M'' sînt obiecte de dimensiune finită, atunci M este de dimensiune finită şi în plus

$$\dim M \leqslant \dim M' + \dim M''.$$

Demonstraţie. Fie Q', Q, Q'' anvelopele injective respectiv ale celor 3 obiecte; există evident monomorfismul canonic: $Q \to Q' \oplus Q''$, dedus din diagrama comutativă, canonic construită:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "i'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "i"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "i''"] & 0 \\
& Q' & Q \arrow[l] \arrow[r] & Q'' &
\end{tikzcd}$$

Din propoziţia 5.69 deducem că Q este o sumă directă finită de obiecte injective indecompozabile, de unde rezultatul, conform propoziţiei precedente.

Iată cum se caracterizează obiectele unei subcategorii localizante (în funcţie de spectrul categorie cît), pentru o l. c. categorie.

PROPOZIŢIA 5.71. *Fie $\mathcal{C}$ o l. c. categorie, $\mathcal{A}$ o subcategorie localizantă a sa, iar $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ categoria cît. Pentru obiectul A al lui $\mathcal{C}$, următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

a) $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$,

b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Q_\alpha) = 0$, *pentru orice* $\alpha \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{C}/\mathcal{A}$,

Q_α *fiind o realizare a sa.*

Demonstraţie. Este suficient să dovedim implicaţia b) $\Rightarrow$ a). Fie, pentru aceasta, $\mathcal{B}$ subcategoria localizantă formată din toate obiectele X cu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Q_\alpha) = 0$, pentru orice $\alpha \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{C}/\mathcal{A}$. Evident, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Fie $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$; $X \neq 0$, $X \notin \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, putem admite că X nu are subobiecte nenule din $\mathcal{A}$ şi mai mult, că X este conex. Anvelopa injectivă a lui X defineşte atunci un element din $\mathrm{Sp}\,\mathcal{C}/\mathcal{A}$, ceea ce contrazice alegerea lui X. Aşadar $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. c.c.t.d.

COROLAR. *Fie $\mathcal{C}$ o l. c. categorie şi $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ două subcategorii localizante ale sale. Următoarele afirmaţii sînt echivalente*

a) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

b) $\mathrm{Sp}\mathcal{A} \equiv \mathrm{Sp}\,\mathcal{B}$.

Demonstraţa este imediată din cele de mai sus.

Fie acum X mulţimea obţinută adăugînd spectrului unui topos abelian $\mathcal{C}$, un element 0 care nu este în mulţime şi care va corespunde tipului de injective indecompozabile nule. Admitem acum că $\mathcal{C}$ este o l. c. categorie şi $X' \subset X$; notăm cu $j(X')$ subcategoria localizantă a lui $\mathcal{C}$ formată din obiectele M cu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q_\alpha) = 0$ pentru orice $\alpha \in X'$. În felul acesta am definit o aplicaţie de la mulţimea părţilor lui X în familia subcategoriilor localizante ale lui $\mathcal{C}$. Notăm $V(X') = \mathrm{Sp}\,\mathcal{C}/j(X')$.

PROPOZIŢIA 5.72. *Asocierea $X' \rightsquigarrow V(X')$ este un operator de închidere în mulţimea X.*

Demonstraţie. Evident că $V(\{0\}) = \emptyset$ şi $V(X) = X$.

$V(V(X')) = V(X')$; pentru a dovedi aceasta, observăm că $V(V(X')) = \mathrm{Sp}\,\mathcal{C}/j(V(X'))$ iar $V(X') = \mathrm{Sp}\,\mathcal{C}/j(X')$; conform propoziţiei 5.71, $j(V(X')) = j(X')$ şi deci $V(V(X')) = \mathrm{Sp}\,\mathcal{C}/j(X') = V(X')$. Faptul că $X' \subseteq V(X')$, este imediat.

Pentru a termina demonstraţia, trebuie să dovedim că $V(X' \cup X'') = V(X') \cup V(X'')$ şi aceasta se face astfel :

Observăm că $j(X' \cup X'') = j(X') \cap j(X'')$ pe de o parte şi fie $\alpha \in V(X' \cup X'')$; rezultă că Q_α este $j(X' \cup X'')$-închis ; dacă admitem că tipul lui Q_α nu este în $V(X') \cup V(X'')$, deducem că Q_α nu este nici $j(X')$ şi $j(X'')$-închis şi deci el conţine subobiectele nenule M' şi M'' din $j(X')$ şi $j(X'')$ respectiv ; dar atunci $M' \cap M'' \in j(X') \cap j(X'')$, fapt care conduce la o contradicţie, aşadar : $V(X') \cup V(X'') \subseteq V(X' \cup X'')$. Incluziunea opusă fiind evidentă, am dovedit de fapt totul.

DEFINIŢIA 5.75. Fie $\mathcal{C}$ o l. c. categorie ; atunci mulţimea $\mathrm{Sp}\,\mathcal{C} \cup \{0\} = X$ dotată cu topologia de mai sus se numeşte spaţiul topologic natural asociat cu $\mathcal{C}$, iar topologia se zice topologia naturală.

Observăm din cele de mai sus că mulţimile deschise în topologia naturală se corespund biunivoc cu subcategoriile localizante din $\mathcal{C}$.

§ 18. CÎTEVA l. c. CATEGORII

Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian pentru orice ordinal α; notăm cu $\mathcal{A}_\alpha$ subcategoria localizantă din $\mathcal{C}$ construită astfel:

$A_{-1} = 0$ (subcategoria nulă).

— A_0 este cea mai mică subcategorie localizantă ce conține toate obiectele de lungime finită.

Dacă α este un ordinal care admite un predecesor β, adică $\alpha = \beta + 1$, atunci $\mathcal{A}_\alpha$ este cea mai mică subcategorie localizantă ce conține toate obiectele $\mathcal{A}_\beta$ închise și de lungime finită.

Dacă α este un ordinal limită, atunci $\mathcal{A}_\alpha$ este prin definiție subcategoria „reuniunea" tuturor subcategoriilor $\mathcal{A}_\beta$ cu $\beta < \alpha$, adică cea mai mică subcategorie localizantă ce conține toate subcategoriile localizante A_β cu $\beta < \alpha$.

Notăm cu $\mathcal{A}_\omega$ cea mai mică subcategorie localizantă care conține toate subcategoriile localizante $\mathcal{A}_\alpha$. Categoria cît $\mathcal{C}/\mathcal{A}_\omega$ nu posedă nici un obiect simplu, conform lemei lui Schur și construcției lui $\mathcal{A}_\omega$. Dacă $\mathcal{A}_\omega \equiv \mathcal{C}$, vom spune că $\mathcal{C}$ este o categorie de dimensiunea Krull definită; în acest caz, cel mai mic ordinal α cu $A_\alpha = \mathcal{C}$ se va numi dimensiunea Krull a lui $\mathcal{C}$. Dacă $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ și $\mathcal{C}$ este cu dimensiunea Krull definită, atunci cel mai mic ordinal α, cu $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}_\alpha$, se zice dimensiunea lui X; evident, α este un ordinal ce admite un predecesor.

Fie deci $\mathcal{C}$ un topos abelian a cărui dimensiune Krull este definită și $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, astfel încît dimensiunea Krull este $\dim X = \alpha$; fie β, cu $\beta + 1 = \alpha$, și functorul canonic: $T_\beta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{A}_\beta$, iar S_β un adjunct al său la dreapta; $T_\beta X$ conține un subobiect simplu M și SM este un subobiect conex din $S_\beta\, T_\beta\, X$. Vom dovedi prin inducție transfinită după dimensiunea lui X, că orice obiect din $\mathcal{C}$ conține un subobiect coireductibil nenul.

Fie $\dim X = 0$; atunci totul este verificat, căci X conține un subobiect de lungime finită și deci unul coireductibil nenul. Fie $\alpha = \dim X$ și admitem că totul este dovedit pentru obiectele a căror dimensiune Krull este inferioară lui α. Fie β predecesorul lui α; dacă X are subobiectele nenule din A, totul este clar; dacă nu, atunci $T_\beta\, X$ conține un subobiect conex nenul M și deci $S_\beta\, M \subset S_\beta\, T_\beta\, X$ iar $S_\beta M \cap X \neq 0$, ceea ce termină demonstrația. În concluzie:

PROPOZIȚIA 5.74. *Orice categorie cu dimensiunea Krull definită este o l. c. categorie.*

O clasă foarte importantă de categorii cu dimensiunea Krull definită este constituită din categoriile local noetheriene, al cărora studiu va fi efectuat în cele ce urmează.

§ 19. CÎTEVA CONSIDERAȚII ASUPRA SUBCATEGORIILOR LOCALIZANTE ALE UNUI TOPOS ABELIAN

Toate cele ce urmează nu sînt direct legate de materialele capitolului de față; acest paragraf poate de asemenea să fie omis la o primă lectură sau din contra, citit înaintea altor paragrafe sau chiar capitole.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană satisfăcînd axioma AB5 și $\mathcal{A}$ o subcategorie a sa, iar $i : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ functorul canonic ; dacă i este deplin fidel și exact, atunci $\mathcal{A}$ se zice o subcategorie exactă a lui $\mathcal{C}$.

Un rol important printre subcategoriile exacte îl joacă subcategoriile dese, iar printre subcategoriile dese sînt importante cele localizante. A spune că subcategoria exactă A a lui $\mathcal{C}$ este localizantă, revine la a spune că functorul canonic $i : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ are un adjunct la dreapta $s : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, astfel că morfismul de adjuncție $\Phi : i \circ s \to \mathrm{Id}\ \mathcal{C}$ să fie monomorfism. Dacă functorul s este exact, atunci $\mathcal{A}$ este o subcategorie localizantă specială. Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie de module (cadru care acoperă necesitățile cel puțin ale articolului de față). Conform propoziției 5.26 care dă o caracterizare a toposurilor abeliene, știm că subcategoriile localizante din $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} = \mathrm{Mod}\ A$) sînt în corespondență biunivocă cu topologiile abeliene de pe A și deci, dacă A este o subcategorie localizantă a lui $\mathcal{C}$ iar F sistemul topologizant asociat, atunci $\mathcal{A}$ este localizantă specială dacă și numai dacă pentru orice obiect X din Mod A orice subobiect al său X', și orice $x \in X$, astfel că $\{X' : x\} \in F$, atunci există $y \in X$ cu $y - x \in X'$ și $\mathrm{Ann}\, y \in F$. În condițiile de mai sus deducem că $\mathcal{A}$ satisface axioma Ab4* și deci $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ va avea dimensiunea modulară cel mult 2. Dacă functorul s este exact, atunci i va păstra proiectivele și invers.

În orice caz o discuție în legătură cu aceste categorii este utilă pentru cititor.

Remarcăm încă printre subcategoriile localizante din Mod A, cele cu proprietatea că sînt închise la produse directe, adică dacă A este o astfel de subcategorie localizantă în Mod A și $A_\alpha \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}$ pentru orice $\alpha \in I \in U$, atunci $\prod\limits_{\alpha} A_\alpha \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}$. În cazul acesta categoria cît Mod $A/\mathcal{A}$ are dimensiunea modulară cel mult 1 și invers. Într-adevăr, fie F topologia asociată cu $\mathcal{A}$ și pentru orice $a \in F$, fie $\varphi_{\underline{a}} : A \to A/\underline{a}$ morfismul canonic. Morfismele $\varphi_{\underline{a}}$, $\underline{a} \in F$ definesc un morfism unic $\varphi : A \to \prod\limits_{a \in F} A/a$ și $\mathrm{Ker}\ \varphi = \bigcap \underline{a}$ este un element din F etc.

Fie A un inel (ca de obicei cu element identitate) și $\mathcal{T}$ mulțimea tuturor topologiilor lui A (topologii de ideale drepte). $\mathcal{T}$ este în mod natural o mulțime parțial ordonată și inductivă, după cum se deduce ușor, deci dispune de elemente maximale ; de asemenea o intersecție de topologii din A este încă o topologie din A și deci are și elemente minimale.

Fie F_1 și F_2 două topologii pe A și $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ subcategoriile localizante asociate. Dacă $F = F_1 \cap F_2$, atunci subcategoria localizantă asociată cu F este $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, unde prin $A_1 \cap A_2$ înțelegem subcategoria plină a lui Mod A formată din toate obiectele X ce sînt simultan în ambele subcategorii. Dovedirea acestui fapt este imediată și afirmația se extinde la orice familie de topologii pe A. Conchidem deci că o intersecție de subcategorii localizante este încă o subcategorie localizantă. Același lucru se va întîmpla și cu reuniunea unei familii total ordonate de subcategorii localizante.

Fie acum $\mathcal{C}$ un topos abelian și $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două subcategorii localizante ale sale. Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/A$ functorul canonic și S un adjunct la dreapta al său. Notăm cu $\mathcal{B}'$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ formată din toate obiectele

X, cu $X \simeq TB$, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$. $\mathcal{B}'$ este o subcategorie localizantă a lui $\mathcal{C}/\mathcal{A}$. Pentru a dovedi aceasta, fie în $\mathcal{C}/A$ șirul exact:

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

în care X', $X'' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}'$; atunci în $\mathcal{C}$ avem diagrama cu linii și coloane exacte:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] \\
 & B' \arrow[d, "i'"'] & & B'' \arrow[d, "i''"] \\
0 \arrow[r] & SX' \arrow[r] & SX \arrow[r] & SX''
\end{tikzcd}$$

și B', $B'' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$. Dacă $(Y'', p'') = \mathrm{Coker}\; i''$ și (B, i) este nucleul lui $p'' \circ v$, atunci observăm că există în $\mathcal{C}$ șirul exact

$$0 \to B' \to B \to B'' \to 0,$$

astfel că $TB \simeq X$. Deci $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}'$. Analog se va proceda pentru a dovedi că X', $X'' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}'$, dacă $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}'$. Faptul că $\mathcal{B}'$ este localizantă, decurge acum ușor din construcția limitelor inductive din $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ și din aceea că $\mathcal{B}$ este localizantă. Mai mult, $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}$ este o subcategorie localizantă în $\mathcal{B}$ și $\mathcal{B}/\mathcal{B} \cap \mathcal{A}$ este canonic echivalentă cu $\mathcal{B}'$, fapt care se constată imediat. Așadar pentru subcategoriile localizante din $\mathcal{C}$ funcționează unele teoreme de „izomorfism". Cititorul va putea ușor trage concluzia că subcategoriile localizante din $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ sînt în corespondență biunivocă cu subcategoriile localizante din $\mathcal{C}$ care conțin pe $\mathcal{A}$. În particular, dacă $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ nu are nici o subcategorie localizantă, atunci $\mathcal{A}$ este o subcategorie localizantă maximală în $\mathcal{C}$ și dacă Q este un injectiv din $\mathcal{C}/\mathcal{A}$, iar $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}/\mathcal{A}$, atunci $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Q) \neq 0$.

§ 19. l. c. INELE

DEFINIȚIA 5.75. Fie A un inel cu element identitate nenul, aparținînd universului U. Vom spune că A este un L. C.-inel (inel Krull) dacă și numai dacă categoria Mod A este o l. c. categorie (are dimensiunea Krull definită).

PROPOZIȚIA 5.76. *Pentru inelul A următoarele afirmații sînt echivalente:*

a) *A este un l. c. inel.*

b) *Pentru orice ideal $\underline{a}$ stîng a dim A, $\underline{a} = \underline{b} \cap \underline{c}$ intersecția fiind ireductibilă și cel puțin unul din idealele stîngi b sau c este ireductibil.*

c) *Pentru orice ideal stînga a, există $x \in A$, astfel că $a''x$ este ireductibil.*

Demonstrație. a) $\Rightarrow$ b) deoarece, dacă Q este anvelopa injectivă a lui $A/\underline{a}$, atunci $Q = Q_1 \oplus Q'$ cu Q_1 injectiv indecompozabil și $X = Q_1 \cap A/\underline{a} \neq 0$, $Y = Q' \cap A/\underline{a} \neq 0$ iar $X \cap Y = 0$; deci există două ideale l. c. care conțin pe a și astfel că $\underline{b} \cap \underline{c} = \underline{a}$, $\underline{b}$ fiind ireductibil, iar intersecția fiind ireductibilă.

b) $\Rightarrow$ c). Într-adevăr, fie, ca mai sus, implicația a) $\Rightarrow$ b) $\overline{x} \in X$ și $x \in A$, a cărui imagine prin omomorfismul canonic : $A \to A/\underline{a}$ este $\overline{x}$; atunci $(\overline{x}) = A/\{\underline{a} : x\}$ și este conex, deci $\{\underline{a} : x\}$ este ireductibil. c) $\Rightarrow$ a). Fie $X \in \mathrm{Ob}$ Mod A și $x \in X$; atunci $(\overline{x}) \simeq A/\underline{a}$; fie $x \in A$ cu $\{0 : x\}$ ireductibil; atunci $A/\{a : x\} \subseteq \{\overline{x}\}$ și deci X conține un subobiect conex.

Exemple de l. c. inele. Fie A un inel în care familia idealelor este total ordonată; (printre astfel de inele întîlnim inelele de valuare), atunci A este un l. c. inel.

Observație. Vom spune că A este un inel de valuare dacă A este un domeniu de integritate și în plus dacă a și b sînt două elemente ale sale, a divide pe b sau b divide pe a. Acest fapt este echivalent cu aceea că mulțimea tuturor idealelor principale din A este total ordonată.

Topologiile pe inelul de valoare A se descriu imediat : în inelul A nu există decît cel mult două topologii nebanale :

I) Topologia formată din toate idealele nenule; într-adevăr, este suficient să verificăm că idealele nenule formează o topologie pe A, ceea ce este valabil pentru orice domeniu de integritate; se obține astfel cea mai largă topologie nebanală pe A; subcategoria localizantă care îi va corespunde este cea formată din toate modulele de torsiune.

II) Subcategoria localizantă a modulelor semisimple. Într-adevăr, pentru un inel de valuare, modulele semisimple formează o subcategorie localizantă. Pentru aceasta, este suficient să dovedim că cea mai mică subcategorie localizantă din Mod A care conține toate obiectele de lungime finită conține și orice obiect semisimplu și invers; o limită inductivă filtrată de obiecte de lungime finită este un obiect semisimplu. Cititorul va dovedi singur aceste fapte.

Fie A un inel de valuare nediscretă și $\mathcal{A}$ subcategoria localizantă dată de topologia II de mai sus; categoria cît Mod $A/\mathcal{A}$ nu are nici un obiect simplu și conform propoziției 5.67, este o l. c. categorie. Așadar există l. c. categorii cu dimensiunea Krull nedefinită.

Orice inel noetherian este un l. c. inel deoarece, orice ideal este intersecția ireductibilă a două ideale din care cel pentru unul este ireductibil.

§ 20. CATEGORII LOCAL NOETHERIENE (l. n.)

Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian și $\mathcal{N}$ subcategoria plină din $\mathcal{C}$ formată din toate obiectele noetheriene; $\mathcal{N}$ este o subcategorie deasă a sa. Vom spune că $\mathcal{N}$ este subcategoria noetheriană asociată cu $\mathcal{C}$.

PROPOZIȚIA 5.77. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian și $\mathcal{A}$ o subcategorie localizantă din $\mathcal{C}$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}/\mathcal{A}$ categoria cît, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ functorul canonic, iar S un adjunct al său la dreapta. Fie $\mathcal{N}$ subcategoria noetheriană asociată cu $\mathcal{C}$ și $\mathcal{N}'$ subcategoria noetheriană asociată cu $\mathcal{D}$. Dacă $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{N}$, atunci $TX \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{N}$.*

Demonstrație. Dacă $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{N}$ și $0 \subseteq Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \ldots$ este un șir strict crescător de subobiecte din T, atunci în STX avem șirul strict crescător de subobiecte $SY_1 \subset SY_2 \subset \ldots$ Dacă $\Psi : \mathrm{Id}\ \mathcal{C} \to S \circ T$ este o săgeată de adjuncție a lui S cu T, atunci $\Psi_X^{-1}(SY_i)$ este un șir strict crescător de subobiecte din X şi care va fi staţionar ; fie $n \in N$, cu $\Psi_X^{-1}(SY_n) = \Psi_X^{-1}(SY_{n+1}) = \ldots$ Atunci în $\mathcal{C}$ avem diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
\Psi_X(SY_n) \arrow[r, equal] \arrow[d, "u"'] & \Psi_X(SY_{n+1}) \arrow[d, "v"] \\
SY_n \arrow[r, "t"] & SY_{n+1}
\end{tikzcd}$$

cu u şi v induse de Ψ_X iar t incluziunea canonică. Aplicînd functorul T, vom obţine că $TSY_n \simeq Y$ şi $T(u)$, $T(v)$ sînt izomorfisme, de unde se deduce că $T(t)$ este izomorfism, adică $Y_n = Y_{n+1}$ etc.

Fie acum $\mathcal{A}$ o subcategorie localizantă din $\mathcal{C}$; e clar că dacă X este un obiect noetherian din $\mathcal{A}$, atunci X este noetherian şi în $\mathcal{C}$ şi invers. Aşadar dacă $\mathcal{N}'$ este subcategoria noetheriană asociată cu $\mathcal{A}$, atunci $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cap \mathcal{A}$.

Definiţia 5.78. Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian; vom spune că $\mathcal{C}$ este categorie local noetheriană, dacă $\mathcal{C}$ posedă o mulţime de generatori noetherieni.

Direct din definiţie se deduce că cea mai mică subcategorie localizantă a lui $\mathcal{C}$ care conţine toate obiectele noetheriene este chiar categoria $\mathcal{C}$. Din propoziţia precedentă şi din observaţia de mai sus se deduce că orice subcategorie localizantă şi orice categorie cît a unei l. n. categorii este o l. n. categorie.

Propoziţia 5.79. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană, element al lui U, în care orice element este noetherian. Atunci* Sex ($\mathcal{C}$, Ab) *este l. n. categorie.*

Demonstraţie. Fie $\overline{h} : \mathcal{C} \to$ Sex ($\mathcal{C}$, Ab) $= \mathcal{S}$ functorul canonic; evident că $\overline{h}$ identifică pe $\mathcal{C}$ cu o subcategorie plină a lui $\mathcal{S}$ care constituie o familie de generatori noetherieni pentru $\mathcal{S}$. Pentru a termina demonstraţia, vom dovedi următoarea :

Lemă. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană element al lui U şi $\mathcal{S} =$* Sex ($\mathcal{C}$, Ab) ; *atunci orice subobiect al unui obiect reprezentabil din $\mathcal{C}$ este marginea superioară de functori reprezentabili.*

Demonstraţie. Fie, într-adevăr, $Y \in$ Ob $\mathcal{C}$ şi $i : F \to Y$ un monomorfism din $\mathcal{S}$ (privim pe Y ca un obiect din $\mathcal{S}$). Fie $X \in$ Ob $\mathcal{C}$ şi $\varphi : X \to F$ un morfism nenul; $i \circ \varphi : X \to Y$ este un morfism din $\mathcal{C}$ şi Im $(i \circ \varphi)$ este un subobiect reprezentabil, ceea ce arată că F conţine subobiectele reprezentabile nenule; fie $F' = \sup X$ cu X subobiectele reprezentabile din F; atunci morfismul canonic : $F' \to F$ este un izomorfism, altfel am contrazice faptul că obiectele reprezentabile formează o familie de generatori pentru $\mathcal{S}$.

Odată lema dovedită, fie $X \in$ Ob $\mathcal{C}$ şi $\overline{X}$ acelaşi obiect privit în $\mathcal{S}$; dacă $\overline{X}'$ este un subobiect nenul în $\overline{X}$, atunci există un subobiect X' în X, cu $\overline{h}(X') = \overline{X}'$. Pentru aceasta, conform lemei, observăm că $\overline{X}' = \sup\limits_{\alpha} \overline{X}'_\alpha$ cu $\overline{X}'_\alpha$ o familie superior filtrată de subobiecte din X, astfel că $\overline{X}'_\alpha = h(X'_\alpha)$, X'_α fiind un subobiect al obiectului X din $\mathcal{C}$. Familia $(\overline{X}'_\alpha)$ are un element maximal X', şi neapărat $h(X') = \overline{X}'$.

Iată o propoziţie care caracterizează l.n. categoriile ca fiind neapărat de forma Sex ($\mathcal{C}$, Ab) cu $\mathcal{C}$ categorie abeliană mică, noetheriană.

Propoziţia 5.80. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian. Următoarele afirmaţii sînt echivalente.*

a) *$\mathcal{C}$ este o l.n. categorie.*

b) *Există o categorie abeliană U-mică, noetheriană* $\mathcal{D}$, *încît* $\mathcal{C}$ *este echivalentă cu Sex* ($\mathcal{D}$, Ab).

Demonstrație. Începem cu cîteva considerente de ordin general; fie $\mathcal{D}$ o categorie abeliană element al lui U, $\mathcal{D}^1$ respectiv $\mathcal{S}$ categoria prefasciculelor abeliene, respectiv categoria Sex ($\mathcal{D}$, Ab). Fie $\mathcal{E}$ o categorie abeliană cu Ab3 și $T : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ un functor aditiv; există, conform propoziției 2.4, un functor $T^* : \mathcal{D}^1 \to \mathcal{E}$ care prelungește pe T (adică $T^* \circ h = T$, $h : \mathcal{D} \to \mathcal{D}^1$ fiind functorul canonic) și care admite un adjunct la dreapta (teorema de prelungire forte). Fie $a : \mathcal{D}^1 \to$ Sex ($\mathcal{D}$, Ab) functorul canonic, adjunct la stînga functorului incluziune de la functorii exacți la stînga (contravarianți) la prefascicule abeliene. Cu notațiile de mai sus, există un functor T_1 : Sex ($\mathcal{D}$, Ab) la $\mathcal{E}$ care prelungește pe T și are adjunct la dreapta, dacă T este exact la stînga. Într-adevăr, este suficient să dovedim că pentru orice $E \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{E}$, $S(E)$ ($S : \mathcal{E} \to \mathcal{D}^1$ este un adjunct la dreapta lui T^*) este un functor exact la stînga; și aceasta este adevărat, căci dacă

$$X' \to X \to X'' \to 0$$

este un șir exact din $\mathcal{D}$, atunci în $\mathcal{E}$ avem șirul exact:

$$TX' \to TX \to TX'' \to 0$$

din care deducem șirul exact

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(TX'', E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(TX, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(TX', E)$$

sau cu notațiile de mai sus

$$0 \to S(E)(X'') \to S(E)(X) \to S(E)(X')$$

ceea ce arată că S ia valori în Sex ($\mathcal{D}$, Ab).

Odată observațiile încheiate, revenim la problema noastră și demonstrăm că a) $\Rightarrow$ b) (implicația b) $\Rightarrow$ a) este trivială). Fie $\mathcal{C}''$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată din generatorii săi (care sînt noetherieni) și fie $\mathcal{C}'$ subcategoria deasă a lui $\mathcal{C}$ formată din toate obiectele noetheriene; e clar că $\mathcal{C}'$ are un schelet care este o U-categorie unică pe care continuăm să-l notăm cu $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}'$ este deci o categorie noetheriană mică și functorul incluziune: $t : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ este exact. Fie $h : \mathcal{C}' \to$ Sex ($\mathcal{C}'$, Ab) și $t_1 : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ functorul canonic; evident că functorul t_1 are un adjunct la stînga. Vom dovedi că t_1 este o echivalență de categorii și pentru aceasta este suficient de dovedit că adjunctul său la dreapta s este o echivalență de categorii.

s este fidel; într-adevăr, fie $f : X \to Y$ un morfism din $\mathcal{C}$ astfel că $s(f) = 0$; aceasta înseamnă că pentru orice $X' \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}'$, avem:

$$s(f)_{X'} : s(X)(X') \to s(Y)(X')$$

este nul, sau ceea ce este același lucru, morfismul

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', f) = 0$, oricare ar fi $X' \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}'$; calitatea lui $\mathcal{C}'$ implică însă că $f = 0$.

s este deplin fidel; pentru aceasta trebuie să dovedim următoarea lemă:

LEMĂ. *Fie* $\mathcal{C}$ *un topos abelian și* N *un obiect noetherian din* $\mathcal{C}$; *fie că* $X = \sup\limits_{i \in X_i} X$, X_i *fiind o familie filtrată crescător de subobiecte din* X $(X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C})$. *Atunci morfismul canonic*:

$$\alpha : \sup_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, X_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \sup_i X_i)$$

este un izomorfism.

Demonstrație. Este suficient să dovedim că α este un epimorfism și pentru aceasta fie $f : N \to \sup\limits_i X$ un morfism; atunci $f^{-1}(X_i)$ este o familie filtrată crescător de subobiecte din N care în baza ipotezelor are un element maximal $f^{-1}(X_0)$ care prin forța lucrurilor este egal cu N, așadar f se poate factoriza prin X_i, ceea ce dovedește lema.

Fie acum X, Y obiecte din $\mathcal{C}$ și $s(X) \to s(Y)$ un morfism din $\mathcal{D}$. Dacă X și Y sînt noetherieni, atunci $\alpha = s(\beta)$ cu $\beta : X \to Y$, morfism din $\mathcal{C}$. Fie mai întîi că X este noetherian; atunci pentru orice obiect Z din $\mathcal{C}'$ avem:

$$\alpha_Z : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y).$$

Dar $Y = \sup\limits_i Y_i$, I fiind filtrată și Y_i noetheriene (Y este superiorul unei familii filtrate de obiecte noetheriene). Atunci avem

$$\sup_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$$

și deci:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(s(X), s(Y)) \overset{\sim}{\text{——}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^1}(s(X), s(Y)) \simeq$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(s(X), \sup_i s(Y_i)) \simeq \sup_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(s(X), s(Y_i))$$

$$\simeq \sup_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i),$$

ceea ce arată că morfismul $\alpha : s(X) \to s(Y)$ se poate realiza deja în $\mathcal{C}$. Cazul cu X oricare se tratează exact la fel, și cititorul este invitat să facă aceasta.

Fie acum $D \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}$; atunci $D = \sup X_i'$ cu $X_i' \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}'$; evident că obiectul $X = \sup\limits_i X_i$ din $\mathcal{C}$ este astfel că $s(X) = D$, deoarece, pentru orice $Y' \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}'$, $s(X)(Y') = D(Y')$. În felul acesta propoziția este complet dovedită.

Din propoziția dovedită obținem cîteva consecințe:

CONSECINȚA 1. *Fie* $\mathcal{C}$ *un topos abelian l.n. și* $Q \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$. Q *este un obiect injectiv, dacă și numai dacă prin identificarea precedentă,* $s(Q)$ *este un functor exact.*

Demonstrație. Fie Q un obiect injectiv din Sex $(\mathcal{D}, \mathrm{Ab})$, unde $\mathcal{D}$ este o categorie abeliană oarecare, element al lui U; atunci $Q : \mathcal{D} \to \mathrm{Ab}$ este un functor exact, proprietate care se constată imediat.

Fie acum $\mathcal{D}$ noetheriană și $Q : \mathcal{D} \to \mathrm{Ab}$ un functor contravariant exact, fie $0 \to G' \to \overline{h}X$ un șir exact din Sex $(\mathcal{D}, \mathrm{Ab})$, $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}$ $h : \mathcal{D} \to$ $\to$ Sex $(\mathcal{D}, \mathrm{Ab})$ functorul canonic; în ipotezele făcute, G' este de tipul

$\overline{h}G$ şi totul decurge, datorită ipotezelor din lema 1 a propoziţiei 1.10.1 ((1), Cap. I).

Faptul că Ab verifică Ab5, şi faptul că o limită inductivă de fascicule se face ca o limită inductivă de prefascicule, ne pun în posesia următoarei consecinţe :

CONSECINŢA 2. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian l.n. şi I o categorie mică filtrată, $F : I \to \mathcal{C}$ un functor ale cărui valori sînt obiecte injective. Atunci $\varinjlim F$ este un obiect injectiv din $\mathcal{C}$.*

CONSECINŢA 3. *Fie $\mathcal{A}$ o subcategorie localizantă din toposul abelian atunci $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ sînt toposuri l.n. Mai mult, dacă $S : \mathcal{C}/\mathcal{A} \to \mathcal{C}$ este functorul secţiune, atunci el comută cu limitele inductive filtrate.*

Este suficient să dovedim că S comută cu limitele inductive şi aceasta se face astfel : fie T un adjunct la stînga lui S şi $\varinjlim_i N_i$ un sistem inductiv filtrat din $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ şi fie morfismul canonic din $\mathcal{C}$; $u : \varinjlim SN_i \to S(\varinjlim N_i)$.

Fie $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$; admitem pentru început că X este noetherian ; atunci avem morfismul canonic :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, U) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \varinjlim_i S\ N_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S \varinjlim_i N_i)$$

de unde deducem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, SN_i) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S \varinjlim_i N_i) \arrow[d, equal] \\
\varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(TX, N) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(TX, \varinjlim_i N_i)
\end{tikzcd}$$

în care săgeţile verticale şi cea de jos sînt izomorfisme. La fel va fi şi cea de sus. Restul rezultă fără dificultăţi :

Fie acum $\mathcal{C}$ un l.n. topos şi $\mathcal{C}'$ subcategoria deasă a lui $\mathcal{C}$ formată din toate obiectele sale noetheriene. Dacă $\mathcal{A}$ este o subcategorie localizantă a lui $\mathcal{C}$, notăm $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap \mathcal{C}'$.

CONSECINŢA 4. *Asocierea $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ este o aplicaţie bijectivă de la ansamblul subcategoriilor localizante din $\mathcal{C}$ la ansamblul subcategoriilor dese din $\mathcal{C}'$.*

Demonstraţie. Este suficient să observăm că subcategoriile localizante din $\mathcal{C}$ se identifică cu topologiile mai fine decît topologia canonică pe $\mathcal{C}'$ şi care sînt în corespondenţă biunivocă cu subcategoriile dese din $\mathcal{C}'$. Cititorului nu-i rămîn decît cîteva calcule.

PROPOZIŢIA 5.81. *Orice l.n. categorie este un topos abelian cu dimensiunea Krull definită.*

Demonstraţie. Fie, cu notaţiile din § 18, $\mathcal{A}_\omega$ subcategoria localizantă „limită" : a l.n. toposului abelian $\mathcal{C}$. Atunci $\mathcal{C}/\mathcal{A}_\omega$ nu are nici un obiect de dimensiune finită şi este, conform celor de mai sus, o l.n. categorie, ceea ce este o contradicţie. Mulţimea subobiectelor proprii ale unui obiect noetherian avînd un element maximal ($\mathscr{C}/\mathscr{A}_\omega$ are obiecte noetheriene nenule). c.c.t.d.

Din consecința 2 a propoziției de mai sus, se deduce că într-o categorie l.n. orice sumă directă de injective este un injectiv; atunci, conform propoziției 5.66, orice obiect injectiv al unei categorii l.n. este o sumă directă de obiecte injective indecompozabile.

Iată un rezultat privind l.c. categoriile și care se aplică mai ales la l.n. categorii, demonstrat pentru toposuri cu dimensiunea Krull definită de către Gabriel.

PROPOZIȚIA 5.82. *Fie $\mathscr{C}$ un l.c. topos și $(Q_\alpha)_{\alpha \in I}$ o mulțime de injective indecompozabile din $\mathscr{C}$, iar Q o anvelopă injectivă a obiectului $\coprod\limits_{\alpha} Q_\alpha$. Dacă Q' este un sumand direct din Q, există o parte I' a lui I satisfăcînd următoarea condiție: orice extensie esențială maximală a lui $\coprod\limits_{\alpha' \in I'} Q_{\alpha'}$ în Q este un suplimentar al lui Q'.*

Demonstrație. Fie N un element maximal în ansamblul (ordonat după incluziune) părçilor I'' ale lui I care verifică condiția: Q' și $\coprod Q_\alpha$ au intersecția nulă.

Vom dovedi că Q este o extensie esențială a sumei $Q' \oplus \coprod\limits_{\alpha} Q_\alpha$; într-adevăr, dacă $\overline{Q}$ este anvelopa injectivă a acestei sume directe, atunci $\overline{Q} \subset Q$ și $Q = \overline{Q} \oplus Q_1$ și dacă $Q_1 \neq Q$, atunci el conține un injectiv indecompozabil, necesar egal cu un Q_α pentru un $\alpha \in I$, conform teoremei schimbului pentru cazul finit, care ar constitui o contradicție cu alegerea lui N. c.c.t.d.

Trimitem cititorul la [1] Cap. IV, § 2, pentru a constata că orice l.n. categorie este un produs de l.n. categorii conexe (o categorie abeliană $\mathscr{C}$ se zice conexă dacă ea nu este produsul a două categorii nenule).

§ 21. CATEGORIA SPECTRALĂ ASOCIATĂ UNUI TOPOS ABELIAN

Fie $\mathscr{C}$ un topos abelian. Definim categoria Spec $\mathscr{C}$ asociată lui $\mathscr{C}$ în felul următor: obiectele lui Spec $\mathscr{C}$ sînt obiectele lui $\mathscr{C}$; dacă $A, B \in \mathrm{Ob}$ Spec $\mathscr{C}$, atunci $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,\mathscr{C}}(A, B) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A', B)$ cu $A' \subseteq A$, este un subobiect esențial al lui A. Pentru a justifica unele afirmații viitoare, facem, la început cîteva observații. Fie $A'' \subseteq A' \subseteq A$ trei obiecte din $\mathscr{C}$, astfel încît A'' este esențial în A' și A' este esențial în A; atunci A'' este esențial în A, deoarece, dacă $B \subset A$ este un subobiect, astfel încît $B \cap A'' = 0$, atunci $(B \cap A') \cap A'' = 0$ și deci $B \cap A' = 0$, deci $B = 0$. Fie, de asemenea, $A' \subseteq A$ un subobiect esențial și $f: B \to A$ un morfism din $\mathscr{C}$; atunci $B' = B \prod_A A' \subset B$ este un subobiect esențial. Pentru aceasta observăm că dacă $B'' \subseteq B$ și $B'' \cap B' = 0$, atunci $f(B'') \cap A' = 0$ și deci $f(B'') = 0$ deci $B'' \subseteq \mathrm{Ker}\, f \subseteq B'$, ceea ce implică clar că $B'' = 0$. În fine, dacă B', B'' sînt două subobiecte esençiale din B, atunci $B' \cap B''$ este esențial deoarece, dacă $B' \cap B'' \cap B''' = 0$, atunci $B'' \cap B''' = 0$ și deci $B''' = 0$. Din cele de mai sus, conchidem că familia Es X a subobiectelor esențiale ale lui X este dirijată la stînga (și la dreapta) și în plus, monomorfismele esențiale sînt stabile la schimbarea bazei.

Aşadar în definiţia grupului $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B)$ (Spec $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$) avem de a face cu o limită inductivă filtrată de obiecte, din Ab. Compunerea morfismelor în categoria $\mathcal{C}'$ se face în mod evident, conform diagramei:

$$\begin{tikzcd}
A & & B & & C \\
& A' \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "f"'] & & B' \arrow[ul, "j"'] \arrow[ur, "g"] & \\
& & A' \prod_{B} B' \arrow[ul, "j'"] \arrow[ur, "f'"'] & &
\end{tikzcd}$$

în care i şi j sînt monomorfisme esenţiale şi deci $i \circ j'$ este esenţial. Unele calcule mărunte vor pune pe cititor în posesia faptului că $\mathcal{C}'$ este întradevăr o categorie *).

Propoziţia 5.83. Spec $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ *este un topos abelian, în care orice morfism este fisibil* (*adică nucleul şi conucleul oricărui morfism sînt sumanzi direcţi, ceea ce este echivalent cu faptul că orice subobiect este sumand direct*).

Demonstraţie. Din construcţia categoriei Spec $\mathcal{C}$, se deduce imediat că ea este o categorie aditivă şi că există un functor canonic $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ care este aditiv. Fie $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B)$ şi (i, f) un reprezentant al său în limita inductivă, respectivă. Atunci avem de-a face cu diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
A & & B & & B \\
& A' \arrow[ul, "j"'] \arrow[ur, "f"] & & f(A) \oplus B_1 \arrow[ul, "k"'] \arrow[ur, "k"'] & \\
& \mathrm{Ker}\, f \oplus A \arrow[u] \arrow[urr, "f"'] & & &
\end{tikzcd}$$

în care A_1 este un subobiect maximal din A', cu $A \cap \mathrm{Ker}\, f = 0$ şi B_1 maximal din B, cu $B_1 \cap f(A_1) = 0$, iar f este canonic construit încît diagrama este comutativă. E clar că i, j, k sînt esenţiale şi deci $P(f'')$ şi $p(f')$ sînt izomorfe. E clar de asemenea că $\mathcal{C}'$ este categorie abeliană şi P este exact la stînga. Deoarece o sumă directă de monomorfisme esenţiale din $\mathcal{C}$ este un mononorfism esenţial, deducem că P comută cu sumele directe oarecare şi $\mathcal{C}'$ este o categorie cu sume directe oarecare. Fie I o familie crescător filtrată şi pentru orice $i \in I$, $A_i' \subset A_i''$, astfel că A_i' este esenţial în A_i'' (toate sînt subobiecte ale unui obiect A) şi astfel că între obiectele A_i', (A_i'') este valabilă relația de incluziune dată de ordonarea lui I. Atunci $\sup A_i'$ este esențial în $\sup A_i''$. Conchidem că $\mathcal{C}'$ este o categorie cu Ab5. Mai mult, dacă U este un generator din $\mathcal{C}$, atunci PU este generator din $\mathcal{C}'$.

---

*) Cititorul poate observa că există o legătură strînsă cu categoriile de fracţii din cap. III.

DEFINIȚIA 5.84. Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian în care orice morfism este fisibil; vom spune că $\mathcal{C}$ este o categorie spectrală.

Iată o lemă folositoare în cele ce urmează:

LEMA. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian și A, $B \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$; fie $\mathcal{C}'$ categoria spectrală asociată și $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ functorul canonic. Următoarele afirmații sînt echivalente.*

a) *PA este izomorf cu PB.*

b) *Există un obiect C în $\mathcal{C}$ și monomorfismele esențiale $i : C \to A$ și $j : C \to B$.*

c) *A și B are anvelopele injective izomorfe.*

Demonstrație. E clar că b), c) $\Rightarrow$ a) și b) $\Rightarrow$ c); a) $\Rightarrow$ b). Într-adevăr, fie $\bar{f} : PA \to PB$ un izomorfism și în $\mathcal{C}$ diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
A' \arrow[u, "i"] \arrow[urr, "f"] & & B' \arrow[u, "j"'] \arrow[ull, "g"']
\end{tikzcd}$$

în care (i, f) reprezintă pe f, iar (j, g) pe $f^{-1} = \bar{g}$. Calculele obiectului C se face punînd condiția ca $\bar{f}$ să fie inversul lui $\bar{g}$ și invers.

Conchidem din lema dovedită că P aplică clasele de obiecte injective izomorfe din $\mathcal{C}$ pe clasele de obiecte izomorfe din Spec $\mathcal{C}$; de asemenea obiectul X din $\mathcal{C}$ este conex dacă și numai dacă PX este simplu, ceea ce se deduce ușor.

Fie acum $\mathcal{C}$ un topos abelian, categorie spectrală și $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$. X este suma directă a soclului său (adică suma subobiectelor sale simple și a radicalului său, adică intersecția subobiectelor sale maximale. Într-adevăr, dacă X este un subobiect simplu din X, atunci complementul său este maximal dacă S_0X este soclul său, atunci $X = S_0X \oplus X''$, evident că $X'' \subseteq X'$, pentru orice subobiect maximal din X, și deci $R_aX = X'' \oplus \overline{X}$; dar $\overline{X} \cap S_0X = \overline{X}$ și deci $\overline{X}$ conține cel puțin un subobiect simplu, deci stă cel puțin în afara unui subobiect maximal, ceea ce este în contradicție cu $\overline{X} \neq 0$.

Fie acum $\mathcal{C}_d$ respectiv $\mathcal{C}_c$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată din obiectele de radical, unul respectiv de soclu nul. Evident că cele două categorii sînt toposuri abeliene și $\mathcal{C}$ este echivalentă cu produsul lor direct. Categoria $\mathcal{C}_d$ (d, de la discret, c, de la continuu) este o categorie în care orice obiect este semisimplu. Iată cum se caracterizează categoriile semisimple. Fie L o mulțime de reprezentanți ai claselor de obiecte simple izomorfe (putem afla aceasta deoarece contăm din nou pe existența generatorului lui $\mathcal{C}$). Pentru orice $\alpha \in L$, fie K_α corpul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\alpha, X_\alpha)$ cu X_α un reprezentant al clasei α; fie, de asemenea, $\mathcal{C}_\alpha$ categoria spațiilor vectoriale drepte peste corpul K, al cărui ansamblu subiacent este în universul U, cu care lucrăm mereu. Ca un exercițiu ușor, cititorul poate dovedi că $\mathcal{C}_d$ este echivalentă cu produsul categoriilor $\prod\limits_{\alpha\in L} \mathcal{C}$. Fie $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ și $\alpha \in L$; notăm cu $r_\alpha(X)$ dimensiunea spațiului vectorial $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\alpha, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\alpha, S_0 X)$. „Numerele" $r_\alpha(X)$ caracterizează soclul lui X pînă la un izomorfism, mai precis ele verifică următoarele afirmații:

a) Dacă X și Y sînt izomorfe, atunci $r_\alpha(X) = r_\alpha(Y)$ pentru orice $\alpha \in L$.

b) Dacă $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$, atunci $r_\alpha(X) = \sum\limits_i r_\alpha(X_i)$.

c) Dacă S_0X este simplu, atunci $r_\alpha(X) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } X_\alpha \simeq X \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$

d) Dacă $S_0X = 0$, atunci $r_\alpha(X) = 0$ pentru orice $\alpha \in L$.

Iată o aplicație imediată a rezultatelor de mai sus.

a) Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian și $\mathcal{C}'$ toposul său spectral asociat iar $P: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ functorul canonic. Fie $L = \mathrm{Sp}\,\mathcal{C}$; evident că $P(Q_\alpha) = X_\alpha$ este, pentru orice $\alpha \in L$, un obiect simplu din $\mathcal{C}$ și invers, orice obiect simplu din $\mathcal{C}'$ provine din astfel de obiecte. Așadar, mulțimea L poate fi luată drept mulțime de reprezentanți pentru obiectele simple din $\mathcal{C}'$ (conform lemei de mai sus).

Fie acum Q un injectiv din $\mathcal{C}$ și $\coprod\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$, $\coprod\limits_{\alpha\in J} Q_\beta$ două sume directe de injective indecompozabile esențiale în Q. Atunci $PQ \simeq \coprod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha \simeq \coprod\limits_{\beta\in J} X_\beta$ cu $X = PQ$, și deci PQ este un obiect discret (radicalul său este nul) și, încă, din descrierea categoriei $\mathcal{C}'_d$, există o bijecție f a lui I pe J astfel că $Q_\alpha \simeq Q_{f(\alpha)}$, $\alpha \in I$. Așadar:

Propoziția 5.85. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian și A un obiect din $\mathcal{C}$ extensia esențială a două subobiecte ale sale A_1, A_2, cu $A_1 = \coprod\limits_{\alpha\in I} C_\alpha$, $A_2 = \coprod\limits_{\beta\in J} C_\beta$, C_α, C_β fiind, pentru orice $\alpha \in I$ și $\beta \in J$, obiecte conexe. Atunci există o bijecție $f: I \to J$, astfel că C_α și $C_{f(\alpha)}$ au aceeași anvelopă injectivă.*

Iată cum se pot caracteriza l.c. categoriile cu conceptul de categorie spectrală.

Propoziția 5.86. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian și $\mathcal{C}'$ toposul său spectral. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

a) *$\mathcal{C}$ este o l.c. categorie.*

b) *$\mathcal{C}'$ este o categorie discretă, adică $\mathcal{C}'$ este echivalentă cu $\mathcal{C}'_d$.*

Demonstrație. Este suficient să dovedim implicația b) $\Rightarrow$ a). Fie deci $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$; dacă $X \neq 0$, atunci $PX \neq 0$, $P: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ fiind functorul canonic. Dar $PX = \coprod X_\alpha$ cu $\alpha \in L$, L fiind mulțimea de tipuri de obiecte simple din $\mathcal{C}'$. Fie monomorfismul $f_{\alpha_0}: X_{\alpha_0} \to PX$; atunci $X_{\alpha_0} = PY$ și f_{α_0} este clasa perechii (i, g) cu $i: Y' \to Y$ un monomorfism esențial și $g: Y' \to X$ un morfism din X. Obiectul Y este conex și deci Y' este la fel. Considerăm schema:

$$\begin{tikzcd} Y & & X \\ & Y' \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Dacă $Y'' = \operatorname{Ker} g \neq 0$, atunci avem diagrama $Y'' \xrightarrow{i'} Y' \xrightarrow{i} Y$, care induce morfismul:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \xrightarrow{i^*} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X) \xrightarrow{i'^*} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y'', X)$$

și evident că $i^*(g) = g \circ i = 0$. Conchidem deci că imaginea lui (i, g) în limita inductivă este nulă, ceea ce este fals, ținînd cont de alegerea imaginii ei. Așadar $i' = 0$ și deci g este un monomorfism. Așadar X conține un subobiect conex nenul c.c.t.d.

Fie acum $\mathcal{C}$ un topos abelian și $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$; știm, propoziția 5.58, că X este extensia esențială a sumei directe $X_c \oplus X_a$; deducem deci că în categoria spectrală asociată, PX este suma directă $PX_d \oplus PX_e$. Mai mult:

PROPOZIȚIA 5.87. *Fie* $\mathcal{C}$ *un topos abelian și* $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, X_c *și* X_d *subobiectele sale maximale pseudoconexe și disconexe. Atunci în* Spec $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, PX *este suma directă* $PX_c \oplus PX_d$, *iar* PX_c *este* S_0PX *și* $PX_d = R_aPX$.

Demonstrație. Este suficient să dovedim că $S_0PX \simeq PX_c$. Observăm, pentru aceasta, că $PX_c \subseteq S_0 PX$; dacă $X_\alpha \subseteq PX$ este un obiect simplu, atunci există (repetăm demonstrația de mai sus) un subobiect conex $Y \subset X$, astfel că $PY = X_\alpha$. Dar necesar $Y \subset X_c$ după construcția lui X_c și a lui X_d. c.c.t.d.

Iată acum o caracterizare a obiectului X_d, pentru orice obiect X din toposul abelian $\mathcal{C}$. Mai întîi fie $X' \subset X$; vom spune că X' este un subobiect c-maximal din X, dacă suplimentul său virtual (acesta este un subobiect X'' maximal în X cu $X'' \cap X' = 0$) este conex, iar complementul virtual al lui X'' este X'. Cu această definiție, $X_d = \bigcap\limits_{m \in I} X'_m$, X'_m parcurge mulțimea tuturor obiectelor c-maximale. Pentru a dovedi acest fapt, observăm mai întîi că $X_d \subset X'_m$ pentru orice $m \in I$. Observăm apoi că pentru orice subobiect conex maximal $X'' \subset X$, complementul său virtual este c-maximal, și în plus $X'' \subset X_c$. Fie acum $Y \subset X_1 = \bigcap X'_m$ un subobiect nenul, atunci $Y \cap X_c = 0$, altfel am conchide că el conține măcar un subobiect conex Y' nenul și deci X s-ar afla în complementul virtual al lui Y', ceea ce este absurd cu faptul că $Y' \neq 0$. Așadar $Y' \subset X_d$ și în ultimă instanță $X_1 \subseteq X_d$ c.c.t.d.

Observație. Deoarece în categoria spectrală Spec $\mathcal{C}$ a lui $\mathcal{C}$, $PX_d = R_aPX$, vom mai spune că X_d este radicalul lui X. Ar fi interesant de studiat în general radicalul unui obiect într-un topos abelian, sau măcar într-o categorie de module. Este interesant faptul că anvelopa injectivă a unui obiect radical este un obiect radical (un obiect X este radical dacă $R_aX = X$).

Observăm încă, că dacă Q este un injectiv indecompozabil din toposul abelian $\mathcal{C}$, atunci limita inductivă: $\varinjlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q)$, unde M parcurge toate subobiectele nenule din Q, nu este altcineva decît K, corpul rezidual al lui $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, Q)$. În felul acesta, toposul spectral asociat unui l.c. topos se descrie imediat dacă se cunosc injectivele indecompozabile ale acestuia și inelele endomorfismelor lor. Spre exemplu, pentru Ab, toposul spectral este imediat: el este produsul unei familii numărabile de toposuri de spații vectoriale peste corpurile Q și Q_p, $p \in P$ (P, familia numerelor prime din N) Q fiind inelul întregilor p-adici, factorizat la idealul său maximal, iar Q corpul fracţiilor lui Z.

Fie acum $(T, S) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$ un morfism de toposuri abeliene ($T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$ un functor exact şi S un adjunct al său la dreapta). Vom spune că (T, S) este un e-morfism de toposuri, dacă S păstrează extensiile esenţiale. Cititorul va dovedi, ca un exerciţiu util, că există un functor $S' : \mathcal{C}_1' \to \mathcal{C}'$ între toposurile spectrale, astfel că $P \circ S \simeq S' \circ P'$, P şi P' fiind functorii canonici.

§ 22. DESCOMPUNEREA PRIMARĂ ÎN l.c. CATEGORII

Fie $\mathcal{C}$ un l.c. topos şi $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$; vom spune că $\alpha \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{C}$ este asociat cu X dacă EX, anvelopa injectivă a lui X, conţine un subobiect injectiv indecompozabil Q de tip α; spunem că X este α-izotopic, dacă EX este extensia esenţială a unei sume directe de injective indecompozabile toate de tip α. În fine, vom nota cu $\mathrm{ass}(X)$ toate tipurile de injective indecompozabile ce intră în componenţa lui EX.

PROPOZIŢIA 5.88. *Fie M un obiect de dimensiune finită, din l.c. toposul $\mathcal{C}$. Există o aplicaţie $\alpha \rightsquigarrow N_\alpha$ a unei părţi finite L a lui* $\mathrm{Sp}\,\mathcal{C}$ *în ansamblul subobiectelor lui M care satisface condiţiile*:

a) *M/N_α este α-izotopic.*

b) $\bigcap\limits_{\alpha} N_\alpha = 0$.

c) *Dacă P este o parte proprie a lui L, atunci intersecţia $\bigcap\limits_{\alpha \in P} N_\alpha$ este nenulă.*

Dacă aceste condiţii sînt verificate de o parte L a lui $Sp\,\mathcal{C}$, atunci $L = \mathrm{ass}\,(M)$.

Demonstraţie. Fie Q anvelopa injectivă a lui M; identificăm pe M cu un subobiect din Q. E clar că Q este o sumă directă finită de injective indecompozabile (conform propoziţiei 5.62).

Fie $L = \mathrm{ass}\,(M)$. $Q = \coprod\limits_{\alpha \in L'} Q_\alpha$. Notăm cu Q' subobiectul lui Q suma directă a tuturor injectivelor ce au acelaşi tip α; obţinem o partiţie a lui L' şi mulţimea cît L este exact $\mathrm{ass}(M)$. Notăm cu $\overline{Q} = \coprod\limits_{\beta \in L - \{\alpha\}} Q'\beta$ şi $N_\alpha = M \cap \overline{Q}_\alpha$.

E clară că $M/N_\alpha = M/M \cap \overline{Q}_\alpha = M + \overline{Q}_\alpha/\overline{Q}_\alpha \subset Q/\overline{Q}_\alpha = Q'_\alpha$.

Aşadar M/N_α este α-izotopic. În mod cu totul evident se deduce că $\bigcap\limits_{\alpha \in L} N = 0$. Dacă $P \subset L$ $P \neq L$, atunci e clar că $\bigcap\limits_{\alpha \in P} N_\alpha \neq 0$. Aşadar prima parte a propoziţiei noastre este dovedită.

Reciproc, admitem că este dată L şi aplicaţia $\alpha \to N_\alpha$, cu cele 3 afirmaţii de mai sus. Atunci morfismul canonic $M \to \coprod\limits_{\alpha \in L} M/N_\alpha = N$ este un monomorfism (nucleul său este $\bigcap\limits_{\alpha \in L} N_\alpha = 0$).

E clar că $EM \subseteq EN$, şi orice injectiv indecompozabil din EN intersectează pe M, nenul (într-adevăr, M/N_α este izotopic şi dacă $N'_\alpha = \bigcap\limits_{\beta \in L - \{\alpha\}} N$, atunci morfismul canonic : $M \to M/N_\alpha$ restrîns la N' este un monomorfism şi deci intersecţia unui injectiv de tip α din anvelopa injectivă a lui N cu M este nenulă ; se deduce direct că ass $(M) = L$.

Din propoziţia de mai sus se degajă întreaga teorie de descompunere :

DEFINIŢIA 5.89. Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian şi A un obiect fix al său. Notăm cu $\mathcal{P}(A)$ mulţimea subobiectelor lui A. Vom spune că s-a dat o teorie a descompunerii pe $\mathcal{C}$ dacă s-a dat o funcţie care asociază oricărui obiect M din $\mathcal{C}$ o submulţime din $\mathcal{P}(A)$, notată $\Gamma(M)$, astfel că :

I) Dacă $\{M_\tau\}_{\tau\in I}$ este o familie filtrată crescătoare de subobiecte din M şi dacă $M = \sup\limits_{\tau} M_\tau$, atunci $\Gamma(M) = \bigcup\limits_{\tau}(M_\tau)$.

II) Pentru şirul exact $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ avem

$$\Gamma(M')\subseteq\Gamma(M)\subseteq\Gamma(M')\cup\Gamma(M'')$$

III) $\Gamma(M) = \varnothing$ dacă şi numai dacă $M = 0$.

IV) Pentru orice obiect de dimensiune finită, există subobiectele sale $M_1,\ldots,M_r$, astfel că :

a) $\Gamma(M/M_i) = P_i$, $i = 1,\ldots,r$; (adică $\Gamma(M/M_i)$ este formată doar dintr-un singur subobiect P_i din A).

b) $M_1\cap\ldots\cap M_r = 0$ şi această intersecţie este redusă (adică, eliminînd una din componentele intersecţiei, ceea ce rezultă nu mai este nul).

c) $\Gamma(M/M_i) \neq \Gamma(M/M_j)$, pentru $i \neq j$.

d) $\Gamma(M) = \{P_1,\ldots,P_r\}$.

E clar că dacă se dă o teorie Γ de descompunere pe $\mathcal{C}$ şi Q este un injectiv indecompozabil, atunci $\Gamma(Q)$ este formată dar dintr-un singur obiect.

Într-adevăr, Q este de dimensiune finită şi are dimensiunea egală cu 1 ; deci, conform proprietăţii a) din, IV) $\Gamma(Q) = P$. Aşadar, oricărei teorii de descompunere îi putem asocia unic o aplicaţie f_Γ : Sp $\mathcal{C}\to\mathcal{P}(A)$. Iată o propoziţie care arată că pentru l.c. toposuri, este valabil şi un rezultat reciproc :

PROPOZIŢIA 5.90. *Fie $\mathcal{C}$ un l.c. topos şi f* : Sp $\mathcal{C}\to\mathcal{P}(A)$ *o aplicaţie ; există o singură teorie de descompunere Γ_f pe $\mathcal{C}$ astfel că $f_{\Gamma_f} = f$, adică astfel că pentru orice injectiv indecompozabil Q al lui $\mathcal{C}$, $\Gamma_f(Q) = f(\alpha)$, α fiind tipul lui Q.*

Asocierea $f \rightsquigarrow \Gamma_f$ este o corespondenţă biunivocă între funcţiile f: Sp $\mathcal{C}\to\mathcal{P}(A)$ *şi teoriile de descompunere pe $\mathcal{C}$ cu valori în A.*

Demonstraţie. Din cele de mai sus rezultă că este suficient să dovedim că oricărei funcţii f : Sp $\mathcal{C}\to\mathcal{P}(A)$ i se asociază o teorie de descompunere Γ_f, cu $f_{\Gamma_f} = f$. Fie M un obiect din $\mathcal{C}$ şi EM anvelopa sa injectivă ; EM este extensia esenţială a unei sume directe $\coprod\limits_{\alpha\in L} Q_\alpha$, de injective indecompozabile. Punem $\Gamma\ (M) =$ mulţimea $\{f(\alpha),\ \alpha\in L\}$.

Dacă $M = 0$, atunci definim $\Gamma_f(M) = \varnothing$. E clar că axioma III) este automat verificată. Rămîne să verificăm restul axiomelor.

I) Fie $M\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ şi $\{M_i\}$ o submulţime filtrată crescător de subobiecte ale sale, astfel că $\sup\limits_{i} M_i = M$.

Ne vom baza în mod esenţial pe următoarea lemă :

LEMĂ. *Fie $\mathcal{C}$ un l.c. topos abelian şi $M\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. M este extensia esenţială a unei sume directe de obiecte conexe $\coprod\limits_{r\in J} C_r$; astfel că EM este ex-*

tensia esențială a sumei directe $\coprod_{R\in J} EC_r$; *tipurile obiectelor* EC_r *cît și mulțimea* J *nu depind decît de* M. *Notăm cu* $\dim M = J$ *și ass* M *submulțimea lui* Sp *formată din tipurile* EC_r. *Dacă* $M' \subseteq M$ *este un subobiect nenul din* M, *atunci* $\dim M' \leqslant \dim M$ *și* $\operatorname{ass} M' \subseteq \operatorname{ass} M'$.

Demonstrația lemei decurge imediat din proprietățile categoriei spectrale asociate unui topos abelian. Cititorul poate ușor să facă unele calcule.

Trecem la a dovedi I). Fie deci $\{M_i\}_{i\in I}$ o mulțime filtrată de subobiecte ale lui M cu $\sup_i M_i = M$. Atunci, pentru orice $\alpha \in \operatorname{ass} M$, există i astfel că $\alpha \in \operatorname{ass} M_i$; și acest fapt este clar, căci dacă $M' \subseteq M$ este un subobiect conex astfel că tipul lui EM' este α, atunci există i cu $M' \cap M_i \neq 0$ și deci $\alpha \in \operatorname{ass} M_i$; deci $\operatorname{ass} M \subseteq \sup_i \operatorname{ass} M_i$ adică $\operatorname{ass} M = \sup_i \operatorname{ass} M_i$.

II) Fie șirul exact

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

din $\mathscr{C}$; deoarece $\operatorname{ass} M' \subseteq \operatorname{ass} M$, atunci $\Gamma_f(M') \subseteq \Gamma_f(M)$. Considerăm diagrama comutativă, dedusă în mod canonic:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & M \arrow[rr, "t"] \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & M'' \arrow[r] & 0 \\
& EM' \arrow[rr, shift left, "r"] & & M'' \amalg EM' \arrow[ll, shift left, "q"] \arrow[ur, "p"'] & &
\end{tikzcd}$$

în care $v \circ u = i$; r este monomorfismul canonic și α are componentele t și $v \circ \alpha$ este un monomorfism, deoarece, dacă q, p sînt proiecțiile caonice, deducem că $p \circ \alpha = t$ și $q \circ \alpha = v$ sau $q \circ \alpha \circ u = v \circ u = i$, deci $\alpha \circ u$ este un monomorfism și deci $\operatorname{Ker} \alpha \cap M' = 0$. Dar atunci restricția lui t la $\operatorname{Ker} \alpha$ este un monomorfism și deci restricția lui $p \circ \alpha$ la $\operatorname{Ker} \alpha$ este un monomorfism ceea ce conduce la ceva fals dacă $\operatorname{Ker} \alpha \neq 0$. Așadar α induce morfismul $\beta : EM \to EM' \oplus EM''$ conform lemei de mai sus.

IV) Dacă M este un obiect de dimensiunea finită, atunci aplicăm propoziția 5.88 și totul este cu prisosință dovedit.

Este apoi foarte clar că $f_{\Gamma_f} = f$ și deci propoziția noastră este complet dovedită.

Iată acum cîteva exemple foarte importante.

Exemplul 1. Teoria descompunerii primare (Lasker-Noether). Fie A un inel comutativ, unitar și noetherian; e clar că Mod A este un topos local noetherian și deci el se pretează la teoria descompunerilor. Dacă $M \in \operatorname{Ob} \operatorname{Mod} A = \mathscr{C}$ și $a \in A$, notăm cu $\varphi_a : M \to M$ omotetia indusă de a asupra lui M. Vom spune că M este coprimar dacă condițiile următoare sînt verificate:

i) $M \neq 0$.

ii) Pentru orice element $a \in A$, $\varphi_a : M \to M$ este fie o injecție, fie un element nilpotent.

Este clar apoi că orice obiect noetherian este de dimensiune finită și în plus orice obiect conex și noetherian este coprimar (căci dacă φ_a :

$: M \to M$ nu este nici monomorfism nici nilpotent, atunci $0 \neq \operatorname{Ker} \varphi_a \subseteq \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_{a^2} \subseteq \dots$ și există $n \in N$, cu $\operatorname{Ker} \varphi_{a^n} = \operatorname{Ker} \varphi_{a^{n+1}} = \dots$; dar φ_a nu este nici nilpotent, atunci $\operatorname{Im} \varphi_{a^m} \neq 0$ pentru orice m și deci $\operatorname{Ker} \varphi_{a^n} \cap \operatorname{Im} \varphi_{a^n} = 0$ ceea ce contrazice faptul că M este conex. Vom spune că submodulul N al lui M este primar dacă M/N este comprimar).

Fie M un modul comprimar; mulțimea elementelor lui A pentru care φ_a este nilpotent este un ideal prim, deoarece complementara sa este multiplicativ stabilă. Așadar dacă $N \subset M$ este primar, atunci radicalul lui N se definește ca fiind idealul prim al elementelor nilpotente pentru M/N; vom nota cu $R(N, M)$ acest ideal. Fie Q un injectiv indecompozabil din Mod A și M un subobiect noetherian al său; M este atunci coireductibil și $R(O, M)$ nu depinde decît de Q.

Într-adevăr, fie $M \subset Q$, noetherian și $x \in M$; notăm $M' = (x)$; atunci $(x) = A/\underline{a}$. Dovedim că $R(0, M) = R(0, M')$. E clar că $\underline{a}$ este ireductibil; dacă $\varphi_a : M \to M$ este endomorfism nilpotent, atunci $\varphi_a(x) = ax$ și pentru un n, $a^n x = 0$, deci $a \in \underline{a}$; așadar $R(0, M) \subseteq \sqrt{\underline{a}}$ și coincide cu acesta, fiind un ideal prim. Dacă N este un alt submodul noetherian din Q, atunci $N \cap M \neq 0$ și pentru $x \in N \cap M$, $R(0, M) = R(0, N) = R(0, (x)) = \sqrt{\underline{a}}$, cu $A/\underline{a} = (x)$.

Obținem în felul acesta o aplicație f: Sp $\mathcal{C} \to \mathcal{P}$ (A) și teoria de descompunere asociată cu ea este numită teoria Lasker-Nöether, deoarece în cazul de față coincide exact cu teoria clasică a descompunerii și care se enunță astfel:

Fie A un inel noetherian comutativ și $\underline{a}$ un ideal din A; atunci $\underline{a} = \bigcap \underline{q}_i$, cu $\underline{q}_i$ ideale primare și $\sqrt{\underline{q}_i} = p_i$ sînt ideale prime asociate; mai mult, descompunerea este unică relativ la componentele prime.

În cazul de față nu avem decît să considerăm modulul $A/\underline{a}$ care este de lungime finită și refăcînd calculele de mai sus vom ajunge la coincidența celor două teorii.

Dar faptele sînt mai generale și mai profunde; iată cum: fie A un l.c. inel și $\underline{a}$, $\underline{b}$ două ideale stîngi ale sale ireductibile; vom spune că $\underline{a} \sim \underline{b}$ dacă $E(A/a) = E(A/b) = Q$. Fie atunci $X = A/\underline{a} \cap A/\underline{b}$ (privite ca subobiecte în Q). E clară că $X \neq 0$ și pentru $x \in X$, $(x) = A/\{\underline{a} : x\} \simeq \simeq A/\{\underline{b} : x\}$. Notăm cu Ir A mulțimea idealelor sale ireductibile; vom spune că A este un inel de descompunere, dacă în orice clasă de elemente echivalente din Ir A există un element maxim.

E clar că atunci putem construi o teorie de descompunere în mod evident pe Mod A cu valori în $\mathcal{P}$ (A) sau chiar în IrA.

Un element $a \in A$ se zice semianulator al modulului M dacă există un submodul N al lui M astfel că $N = 0$ și $\underline{a}N \neq (0)$; analog vom spune că idealul stîng $\underline{a}$ al lui A este un semianulator al modulului M dacă există un submodul N al lui M astfel că $N \neq 0$ și $\underline{a}$ $N = (0)$. Un modul M se zice coterțiar dacă orice element al lui A, care este un semianulator al lui M, este un semianulator al oricărui submodul netrivial din M; evident, orice modul conex este coterțiar.

Pentru orice modul M notăm cu $R(0, M)$ submulțimea lui A formată din toți semianulatorii lui M; dacă M este un modul coterțiar, $R(0, M)$ este un ideal în A. Dacă M este conex și A este comutativ, fără divizori ai lui zero, atunci $R(0, M)$ este un ideal prim în A; într-adevăr, dacă $xy \in R(0, M)$, atunci există un submodul M' al lui M astfel că $(xy)M' = 0$; dar atunci $x(yM') = 0$, şi yM' este un submodul din M care dacă e nenul, atunci $x \in R(0, M)$ sau e nul, şi atunci $y \in R(0, M)$. Dacă $M' \subset M$, atunci $R(0, M) \equiv R(0, M')$, deoarece dacă $x \in R(0, M)$, atunci $xM_1 = 0$ şi $x(M_1 \cap M') = 0$ deci $x \in R(0, M')$; dacă $y \in R(0, M')$, e clar că $y \in R(0, M)$. Construcţia unei teorii de descompunere este acum evidentă.

Pentru un inel noetherian oarecare, se constată că orice obiect noetherian este de dimensiune finită; aşadar totul se poate dezvolta urmînd lucrarea [6] în care faptele sînt foarte frumos prezentate.

Fie A un inel noetherian, cu element identitate şi Γ : Mod $A \to \mathcal{P}(A)$ o teorie de descompunere; vom spune că Γ este o teorie de descompunere normală dacă ea verifică condiţiile:

i) dacă $\underline{a} \in \Gamma(M)$, atunci a este un ideal semianulator al lui M.

ii) Dacă $\underline{a} \in \Gamma(M)$, atunci Ann $M \subseteq \underline{a}$ (Ann M este anulatorul lui M).

Tot în [6] se găseşte dovedit faptul că o teorie de descompunere normală coincide neapărat cu teoria terţiară.

E clar, în domeniul teoriilor de descompunere sînt încă multe de făcut ; se poate, ca şi pentru l.c. inele, să poată fi introdusă o teorie de descompunere terţiară şi caracterizarea teoriilor de descompunere normale; de asemenea teoriile de descompunere terţiare pot fi proprii unor clase precise de inele şi se poate ca ele să caracterizeze inele noetheriene.

Iată acum cîteva consideraţii generale asupra teoriilor de descompunere pentru toposurile abeliene.

Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian şi M o mulţime nevidă; notăm cu $\Gamma(\mathcal{C}, M)$ sau, dacă nu este pericol de confuzie, $\Gamma(M)$ mulţimea tuturor teoriilor de descompunere definite pe $\mathcal{C}$ cu valori în M (definiţia unei astfel de teorii este exact definiţia 5.89, cu condiţia ca $\mathcal{P}(A)$ este înlocuit cu o mulţime arbitrară ceea ce nu are nici o importanţă din punctul de vedere etic). În cele ce urmează vom demonstra următoarea:

PROPOZIŢIA 5.91. *Asocierea* $M \rightsquigarrow \Gamma(\mathcal{C}, M)$ *este un functor de* la Ens la Ens, *notat* Γ.

Demonstraţie. Fie $f: M \to N$ un morfism din Ens; vom defini o aplicaţie $\Gamma(f) : \Gamma(M) \to \Gamma(N)$ în mod canonic, în felul următor: Fie d un element al lui $\Gamma(M)$; $\Gamma(f)\,(d)$ se defineşte astfel: $[\Gamma(f)\,(d)]\,(X) = f(d(X))$, unde $d(X)$ este submulţimea lui M asociată cu $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ iar $f(d(X))$ este imaginea ei în N prin aplicaţia f. Pentru a justifica că $\Gamma(f)\,(d) = \overline{d}$ este o teorie de descompunere, rămîne să verificăm axiomele.

I. Fie $X = \sup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ o familie crescător filtrată de subobiectele din X; deoarece $d(X) = \bigcup\limits_\alpha d(X_\alpha)$, atunci $f(d(X)) = \bigcup\limits_\alpha f(d(X_\alpha)) = f(\bigcup\limits_\alpha d(X_\alpha))$.

II. Fie şirul exact din $\mathcal{C}$:

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0;$$

atunci

$$d(X') \subseteq d(X) \subseteq d(X') \cup d(X'')$$

şi deci

$$f(d(X')) \subseteq f(d(X)) \subseteq f(d(X')) \cup f(d(X')).$$

III. Evident.

IV. Fie X un obiect de dimensiune finită şi $X_1,\ldots,X_r$ subobiecte ale sale care verifică condiţia IV, din definiţia teoriei de descompunere· E clar că dacă $d(X_i) = m_i$, $i = 1,\ldots,r$, atunci restricţia lui f la submulţimea $m_1,\ldots,m_r$ din M defineşte o partiţie pe ea, să zicem $\{m_1\ldots m_{l_1}\}$; $\{m_{l_1+1}\ldots m_{l_2}\}\ldots\{m_{l_n+1}\ldots m_r\}$. Notăm atunci $X_1' = X_1 \cap \ldots \cap X_{l_1}$; $X_2' = X_{l_1+1} \cap \ldots \cap X_{l_2};\ldots;X_n' = X_{l_{n-1}}^{+1} \cap \ldots \cap X_{l_n}$. E clar că condiţiile a) şi b) se verifică imediat. Pentru a verifica c) considerăm şirul exact canonic construit :

$$0 \to X_1 \cap \ldots \cap X_{l_1} \to X \to \prod_{i=1}^{l_1} X/X_i$$

în care avem :

$$(\Gamma(f)(d))\left(\prod_{i=1}^{l} X/X_i\right) = (\Gamma(f)(d))(X/X_i) = f(d)(X_1) = \ldots = f(d)\,(X_{l_1})$$

şi deci $(\Gamma(f)(d))(\mathrm{Im}\ \varphi) = f(d)\,(X_{l_1})$, deoarece $\varphi \neq 0$, conform proprietăţii II) . Deducerea lui d) este imediată, căci morfismul canonic : $X \to \prod_{j=1}^{n} X/X_j'$ este monomorfism şi deci $(\Gamma(f)(d))(X) \subseteq \{\overline{d}(X_1')\ldots, \overline{d}(X_n')\}$ pe de o parte şi pe altă parte avem, evident, incluziunea contrară -c.c.t.d.

Observăm acum că propoziţia 5.90 afirmă că pentru orice l.c. topos, functorul $\Gamma(\mathscr{C})$. Ens → Ens este reprezentabil şi un reprezentant al său este tocmai Sp $\mathscr{C}$.

§ 23. TEORIA DUALITĂŢII PENTRU CATEGORIILE LOCAL FINITE

Am văzut că pentru studiul l.c. categoriilor cu dimensiunea Krull definită, au mare importanţă l.c. categoriile local finite; e clar că o categorie local finită este o l.n. categorie. Studiul categoriilor local finite : l.f.-toposuri este foarte important şi-l vom expune în cele ce urmează urmînd îndeaproape pe P. Gabriel [1], Cap. IV.

Definiţia 5.92. Fie A un inel cu identitate; vom spune că A este un p.c. inel sau inel pseudocompact (la stînga) dacă A este un inel topologic, separat şi complet (pentru care ansamblul subiacent este în U) şi satisface axioma :

(A.P.C.). *Inelul A posedă o bază de vecinătăţi ale lui zero formată din ideale stîngi $\underline{l}$ de colungime finită* (*adică* long $A/\underline{l} < \infty$).

Asupra noţiunilor care apar în definiţia de mai sus, cititorul se va documenta spre exemplu în *Topologie generale* de N. Bourbaki.

E clar că dacă A este un p.c. inel, atunci, pentru $M \in \mathrm{Ob}\ \mathrm{Mod}\ A$, M dotat cu topologia discretă, X este un modul topologic peste A, dacă şi numai dacă aplicaţia canonică $A \times M \to M$ este continuă, adică anulatorul oricărui element este un ideal stîng deschis din A (deoarece, pentru $x \in A$, aplicaţia $A \times \{x\} \to M$ definită canonic este continuă). Notăm cu dis (A) subcategoria plină a lui Mod A formată din modulele topologice discrete; dis A este o categorie local finită, deoarece are o mulţime de generatori de lungime finită (conform algerii lui A). Obiectele de lungime finită din dis (A) sînt modulele topologice de dimensiune finită (discrete).

Aceste module definesc o categorie abeliană $T(A)$ şi $T(A)$ va determina, conform propoziţiei 5.80, pe dis$A$ pînă la o echivalenţă de categorii. Duala $T(A)^0$ a lui $T(A)$ este tot o categorie finită şi deci, conform tot cu 5.80, va determina un l.f.-topos $\mathcal{D}$. Vom dovedi că categoria duală $\mathcal{D}^\circ$ este echivalentă cu o categorie de A-module.

Fie A un p.c. inel şi M un A-modul topologic. Vom spune că M este un inel pseudocompact, dacă el este topologic, separat, complet şi verifică axioma :

(M.P.C.). *Modulul* M *posedă o bază de vecinătăţi a lui zero formată din submodule* N, *astfel că* M/N *este de lungime finită.*

Notăm cu $PC(A)$ categoria A-modulelor pseudocompact (p.c. module). E clar că $P.C.(A)$ este o categorie aditivă. Vom dovedi că P.C. (A) este o categorie abeliană echivalentă cu $\mathcal{D}^\circ$.

Toate construcţiile se vor sprijini pe următoarele rezultate (Bourbaki, *Topologie* I, Apendice, ed. 3).

LEMA 1. *Fie* B *un inel şi* I *un ansamblu ordonat filtrat la stînga,* (M_i, f_{ji}) *şi* (N_i, g_{ji}) *două sisteme proiective indexate de* I *şi formate din* B-*module stîngi, unitare. Fie* $(h_i)_{i\in I}$ *un morfism de la primul sistem în celălalt astfel că* h_i *este, pentru orice* i, *surjectiv şi de nucleu artenian; atunci* $h = \varprojlim h_i$ *este o aplicaţie surjectivă.*

Demonstraţie. Fie $i \in I$. Pentru orice $j \leqslant i$, notăm k_{ji} ; Ker $h_j \to$ Ker h_i. Evident, există un $i_0 \leqslant i$ cu Im $k_{i_0 i} \subseteq$ Im k_{ji} pentru orice $j < i$. Dar dacă $j < i_0$, atunci din aceea că $k_{ji} = k_{i_0 i} \cdot k_{j i_0}$ se deduce că $k_{j i_0}$ este un epimorfism. Spunem că mulţimea i_0-urilor (pentru orice i) este cofinală ; acest fapt este evident. Mai mult, ea dă un sistem dirijat inferior, subsistem al primului sistem în care aplicaţiile dintre nuclee (k_{ij}) sînt epimorfisme. Putem deci admite de la început că toate k_{ij} sînt epimorfisme.

Fie atunci (n_i) un element din $\varprojlim N_i$. Evident, $n_i = h_i\,(m_i)$. Avem pentru $j > i$: $g_{ij}h_i(m_i) = h_j \circ f_{ij}(m_i)$. Dacă $n_j = h_j(m_j)$, deducem că $h_j(f_{ij}(m_i) - m_j) = 0$. Deci $f_{ij}(m_i) - m_j \in$ Ker h_j şi deci $f_{ij}(m_i) - m_j = k_{ij}(x_i)$. Putem deci înlocui pe m_i cu $m_i - x_i$. Atunci: $f_{ij}(m_i - x_i) = f_{ij}(m_i) - k_{ij}(m_i) = m_j$. Deoarece $j > i$ este arbitrar, rezultă totul.

Iată două afirmaţii, consecinţe imediate ale lemei demonstrate.

LEMA 2. *Fie* M *un* A-*modul pseudocompact* ; $(M_i)_{i\in I}$ *o familie filtrată descrescătoare de submodule închise din* M. *Aplicaţia canonică* $M \to \varprojlim M/M_i$ *este surjectivă şi nucleul său este* $\bigcap\limits_i M_i$.

Demonstraţie. Fie, într-adevăr, (N_j) familia filtrată descrescătoare a submodulelor deschise din M. În diagrama de mai jos, toate săgeţile reprezintă aplicaţii canonic construite :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & \varprojlim_{j} M/N_j \arrow[d, "s"] \\
0 \arrow[r] & \varprojlim_{i,j} [(M_i + N_j)/M_i] \arrow[r] & \varprojlim_{i} M/M_i \arrow[r, "r"] & \varprojlim_{j} M/(M_i + N_j)
\end{tikzcd}$$

M fiind complet, p este un izomorfism, iar după lema 1, s este surjectiv; deci r este surjectiv. Dar, pe altă parte:

$$\varprojlim_{i,j} [((M_i + N_j)/M_i)] = \varprojlim_{i} \varprojlim_{j} [(M_i + N_j)/M_i] = \varprojlim_{i} (M_i/M_i) = 0$$

căci M_i este închis și $M_i = \bigcap_j (M_i + N_j)$. r este deci un izomorfism și q este surjectiv; e clară că Ker $q = \bigcap_i M_i$.

LEMA 3. *Fie M un A-modul pseudocompact, N cu submodul închis din M și $(M_i)_{i \in I}$ o familie filtrată descrescătoare de submodule închise din M. Atunci submodulele $N + \inf_i M_i$ și $\inf_i (N + M_i)$ coincid.*

Demonstrație. Considerăm diagrama comutativă, canonic construită:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varprojlim_i N/(N \cap M_i) \arrow[r] & \varprojlim_i M/M_i \arrow[r] & \varprojlim_i M/(M_i + N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

N fiind închis, este p.c. modul (pentru topologie indusă).

Lema 2 arată că l și j sînt surjecții. Din lema șarpelui se deduce că Ker h este imaginea nucleului lui j.

Dar Ker $h = \inf_i ((M_i + N)/N)$ și Ker $j = \inf_i M_i$, deducem deci că $\inf (M_i + N)/N = (\inf M_i + N)/N$, de unde rezultatul.

Avem acum toate elementele pentru a dovedi următorul rezultat:

PROPOZIȚIA 5.93. *Modulele pseudocompacte peste inelul pseudocompact A, formează o categorie abeliană cu generatori și limite proiective exacte. Duala sa este un l.f.-topos.*

Demonstrație. Iată demonstrația directă a acestei propoziții. Fie $f\colon M \to N$ un morfism de module pseudocompacte; e clar că Ker f este un submodul închis și dotat cu topologia indusă este un p.c. modul. Așadar orice morfism din $P(A)$ are nucleu. Coimaginea lui f în $P(A)$ va fi modulul Coim f dotat cu topologia cît și care este un p.c. modul. Într-adevăr, aplicația canonică $M/\mathrm{Ker}\, f \to \varprojlim M/(\mathrm{Ker}\, f + N_j)$ este un izomorfism cînd N_j parcurge sistemul proiectiv al submodulelor deduse din M (conform lemei 2).

E clar deci că $M/\mathrm{Ker}\, f$ este separat și complet, și mai clar este faptul că satisface axioma M.P.C.

Fie acum N' imaginea „modul" a lui f în N; pentru comoditate vom arăta că $N' = M/\mathrm{Ker}\, f$. Topologia indusă de N pe N' este mai puțin fină ca topologia cît. Fie $(N'_j)_j$ o familie filtrată descrescător către zero de submodule din N' care sînt deschise pentru topologia indusă. Dacă P este un submodul din N' deschis pentru topologia cît, familia $(P + N'_j)$ este filtrată descrescător. Cum N'/P este artinian, această familie are un cel mai mic element. În fine, deoarece $\inf_j (P + N'_j) = P + \inf_j N'_j$, conform lemei 3 se vede că acest cel mai mic element este tocmai P. Așadar $P \supset N'_j$ pentru N'_j suficient de mic și deci topologia indusă coincide cu topologia cît.

În particular, N' este complet pentru topologia indusă de N, deci N' este închis în N. Se deduce că Inf și Coim f sînt izomorfe și Coker $f = N/N'$, dotat cu topologia cît. Așadar $PC(A)$ este o categorie abeliană.

Mai mult, dacă $\{M_i\}_{i\in I}$ este o mulțime de module pseudocompacte, atunci $\prod M_i$ este un modul pseudocompact, ceea ce se verifică ad-hoc. Conform lemelor 2 și 3 se deduce că limitele proiective (care evident există în $P\cdot C(A)$) filtrate inferior sînt exacte.

Pentru a termina demonstrația observăm că dacă $p : M \to KM'$ este un epimorfism din $P\cdot C(A)$ și $M' = \text{Ker } p$, atunci există un submodul deschis B din M', astfel că M'/B este de lungime finită; deoarece M' are topologia indusă, deducem că $B = M \cap M'$, cu N deschis și astfel că M/N are lungime finită și este izomorf cu A^n/P, P fiind un submodul deschis din $A^n = \coprod\limits_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \simeq A$ pentru orice i. Așadar obiectele A^n/P ce sînt de lungime finită dau cogeneratorii lui $PC(A)$.

Fie acum $\mathcal{C}$ un topos abelian ($\mathcal{C}$ poate fi și o categorie abeliană oarecare) și $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ două subcategorii închise din $\mathcal{C}$. Notăm cu $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}$ subcategoria închisă a lui $\mathcal{C}$ formată din obiectele X astfel că $X/X' \in \text{Ob } \mathcal{F}$, unde cu X' am notat cel mai mare subobiect al lui X din $\mathcal{G}$. E clar că „produsul" astfel definit în mulțimea subcategoriilor localizante este asociativ; un element neutru pentru această mulțime este subcategoria nulă. Subcategoria totală joacă rol de elemente „nul" pentru înmulțire. Dacă $\mathcal{F}$ este o subcategorie localizantă, atunci $\mathcal{F}\circ\mathcal{F}=\mathcal{F}$ și invers, elementele indepotente caracterizează subcategoriile localizante; de asemenea produsul a două subcategorii localizante este încă o subcategorie localizantă, dacă produsul lor este comutativ.

În particular, pentru o subcategorie închisă $\mathcal{F}$, notăm cu $\mathcal{F}^n$ puterile ei succesive.

Fie acum $\mathcal{C}$ un l.f. topos și $\mathcal{S}$ subcategoria închisă a sa formată din obiectele semisimple din $\mathcal{C}$. Dacă $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, notăm cu M_n cel mai mare subobiect al lui M din $\mathcal{S}^n$.

Dacă $\mathcal{C}$ este un l.f. topos, atunci $\sup M_n = M$, pentru orice obiect M din $\mathcal{C}$. Într-adevăr, dacă $M' = \sup\limits_{n} M_n$, atunci există un morfism $u : S \to M$, S obiect de lungime finită, astfel că $S' \cap M' \neq S$, unde $S' = u(S)$; dar e clar că pentru orice obiect de lungime finită S, $\sup S_n = S$; iată contradicția.

PROPOZIȚIA 5.94. *Fie Q un obiect injectiv al unui l.f. topos, A inelul* $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, Q)$ *și $\underline{r}$ mulțimea endomorfismelor lui Q, al căror nucleu conține soclul Q_0. Atunci $\underline{r}$ este radicalul Jacobson al lui A; intersecția $\bigcap\limits_{n} \underline{r}^n = 0$ este nulă; inelul cît $A/\underline{r}$ este izomorf cu un produs de inele de endomorfisme al unei familii de spații vectoriale.*

Demonstrație. Fie, într-adevăr, $\underline{r}^{(n)}$ idealul bilateral format din toate endomorfismele lui Q al căror nucleu conține pe Q_{n-1}. Dacă f este un element din $\underline{r}^{(n)}$, e clar că $f(Q_{n+m}) \subseteq Q_m$, deoarece $Q_{m+n}/Q_n \subset S_m$, și deci $Q_{m+n}/\text{Ker } f \subset S_m$ fiind un cît al lui Q_{m+n}/Q_n. Așadar $r^{(m)}\cdot r^{(n)} \subseteq r^{(m+n)}$.

În particular, $.r^{(n)} \subseteq \underline{r}^{(n)}$. Pe altă parte, morfismele canonice de la Q_n la Q și de la Q în Q/Q_n dau naștere șirului exact:

$$0 \to \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q/Q_n, Q) \to \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, Q) \to \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_n, Q) \to 0.$$

Idealul $\underline{r}^{(n+1)}$ este exact imaginea lui i_n. Așadar p definește un izomorfism de la inelul $A/\underline{r}^{(n+1)}$ pe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_n, Q)$. Dar avem :

$$A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,Q) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim Q_n, Q) = \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_n, Q) = \varprojlim A/\underline{r}^{(n+1)}$$

ceea ce arată că A este separat și complet pentru filtrarea definită de ideale $\underline{r}^{(n)}$. Așadar, $\bigcap \underline{r}^{(n)} = 0$ și *a fortiori* $\bigcap \underline{r}^n = 0$.

Fie acum $x \in r$; atunci seria $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ este convergentă în A și suma ei $(1 - x)^{-1}$ există; deci $1 - x$ este inversibil și deci x este un element al radicalului lui Jacobson. În fine remarcăm că pentru orice $f \in A$, $f(Q_0) \subseteq Q_0$ și deci $A/\underline{r} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_0, Q) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_0, Q_0)$; dar Q_0 este un obiect semisimplu și deci $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_0, Q_0)$ este un produs de inele de endomorfisme de spații vectoriale pentru diverse corpuri (corpurile de endomorfisme ale subobiectelor simple distincte din componența lui Q_0) c.c.t.d.

Dacă M parcurge subobiectele de lungime finită din Q, morfismul canonic al lui Q pe Q/M definește o injecție de la $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q/M, Q)$ în A; vom nota cu $l(M)$ imaginea acestei aplicații care este un ideal stîng în A. Dacă M și N sînt două subobiecte de lungime finită, atunci $l(M + N) = l(M) + l(N)$ deoarece functorul $X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Q)$ este exact și contravariant, deci transportă sumele filtrate în produse filtrate. Așadar, conchidem că idealele $l(M)$ cu M subobiect de lungime finită formează o bază de vecinătăți ale lui zero, pentru o topologie care face din A un grup topologic. Vom spune că A dotat cu această topologie, este dotat cu topologia naturală.

PROPOZIȚIA 5.95. a) *Fie $\mathcal{C}$ un l.f. topos, Q un injectiv din $\mathcal{C}$ și A inelul endomorfismelor lui Q. Dotat cu topologia naturală, A este un inel pseudocompact.*

b) *Invers, orice inel pseudocompact A este izomorf cu inelul endomorfismelor unui injectiv dintr-un l.f. topos. În particular, radicalul $\underline{r}$ al lui A este intersecția idealelor stîngi deschise minimale; intersecția $\bigcup \underline{r}^n$ este nulă și A/r este izomorf cu un produs de inele de endomorfisme ale unei familii de spații vectoriale.*

Demonstrație. a) Dovedim mai întîi că A este un inel topologic. Deoarece există o bază de vecinătăți ale lui zero formată din ideale stîngi, este suficient de dovedit faptul următor : pentru orice subobiect de lungime finită M din Q și pentru orice element $a \in A$, există un subobiect de lungime finită N din Q, astfel că $l(N) \cdot a \subseteq (M)$, fapt care ne arată că multiplicarea este continuă. Dar este suficient să luăm $N = a(M)$ și totul este gata.

Avem pe de altă parte egalitățile :

$$A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, Q) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_{M} M, Q) = \varprojlim_{M} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q) = \varprojlim_{M} A/l(M).$$

Această egalitate arată că A este separat și complet în topologia în cauză. Rămîne deci să dovedim că A-modulele $A/l(M)$ sînt de lungime finită ; pentru aceasta, studiem mai înainte A-modulul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, Q)$, unde Q este un obiect simplu din $\mathcal{C}$; notăm cu Q_S componenta izotipică de tip S a lui Q, și prin B inelul endomorfismelor lui Q.

Pentru orice endomorfism f al lui Q, $f(Q_S) \subseteq Q_S$ şi deci obţinem o aplicaţie $p : A \to B$, care este un epimorfism de inele. Dar $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, Q)$ este un A-modul şi fiind egal şi cu B-modulul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, Q)$, se deduce că structura lui de A modul este dată prin p. Dar privit ca B-modul, este un modul semisimplu şi ca A modul va fi un modul simplu (sau nul, dacă $Q_S = 0$). Fie acum M un subobiect de lungime finită din Q şi fie :

$$0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset M$$

un şir Jordan — Hölder al lui M, A-modulul $A/l(M)$ este izomorf cu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q)$ şi modulele $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M/M_i, Q)$ definesc un şir de compoziţie în $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q)$. Cîtul lui $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M/M_i, Q)$ prin $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M/M_{i+1}, Q)$ este izomorf cu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_{i+1}/M_i, Q)$. Se deduce că lungimea lui $A/l(M)$ este inferioară sau egală cu lungimea lui M. Aşadar am dovedit punctul a).

b) Fie $\mathcal{C}$ categoria duală lui $P \cdot C(A)$. Deoarece A ca obiect în $PC(A)$ este proiectiv, în categoria duală el va fi injectiv. Afirmaţia b) rezultă din aceea că A este inelul endomorfismelor acestui obiect injectiv c.c.t.d.

În ipotezele şi cu notaţiile din propoziţia de mai sus, considerăm functorul $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q)$: grupul abelian $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q)$ este dotat cu o structură de modul stîng peste inelul A al endomorfismelor lui Q. Pe altă parte, dacă N parcurge subobiectele de lungime finită ale lui M, epimorfismul canonic $M \to M/N$ defineşte injecţia : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M/N, Q) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q)$. Imaginea acestei injecţii este un submodul pe care îl notăm încă $l(N)$. În mod general, argumentele deja folosite pentru cazul $M = Q$, rămîn valabile aici, şi ele au drept consecinţă următoarele : submodulele $l(N)$, din $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q)$, formează o bază de vecinătăţi ale lui zero, pentru topologia care face din $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q)$ un A-modul pseudocompact. Dotăm pe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q)$ cu această topologie pe care o calificăm drept naturală.

Dacă $f : M \to M'$ este un morfism din $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Q)$ este o aplicaţie continuă de la $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M', Q)$ la $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q)$; deoarece $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Q)$ este o aplicaţie liniară, este suficient să dovedim că pentru orice subobiect de lungime finită N, din M, există un subobiect de lungime finită N' din M', astfel că $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Q)$ aplică $l(N')$ în $l(N)$. Dar este suficient să alegem $N' = f(N)$. Aşadar $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F, Q)$ este un morfism de module pseudocompacte. Am definit deci un functor de la $\mathcal{C}$ la categoria duală a lui $P\, C(A)$.

PROPOZIŢIA 5.96. *Fie Q un injectiv dintr-un l.f. topos, A inelul endomorfismelor lui Q şi F functorul $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q)$. Functorul F defineşte prin trecere la categoria cît o echivalenţă între $\mathcal{C}/\mathrm{Ker}\, F$ şi categoria duală a lui $P.C.(A)$, a modulelor pseudocompacte peste A.*

Demonstraţie. Folosind, prerogativele de mai sus, vom observa că $\mathrm{Ker}\, F$ este formată din toate obiectele M din $\mathcal{C}$, cu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q) = 0$

și e clar că este localizantă. Deoarece orice l.f. topos este un l.n. topos, atunci conform propoziției 5.80, Ker F este determinată de toate obiectele simple M, cu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q) = 0$, și este cea mai mică subcategorie localizantă care conține toate obiectele simple S, cu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, Q) = 0$. Putem spune că Ker F este generată de obiectele simple care nu intervin în descompunerea soclului lui Q în componente izotipice.

Fie T functorul canonic $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathrm{Ker}\, F$; atunci TQ este un obiect injectiv din $A/\mathrm{Ker}\, F$ și soclul lui TQ conține obiecte simple de toate tipurile (în $\mathcal{C}/\mathrm{Ker}\, F$). În plus, cum Q este Ker F-închis, aplicația $T(M, Q)$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathrm{Ker}\, F}(TM, TQ)$ este o bijecție. Așadar, putem admite de la început că Ker $F = 0$, adică Q este un cogenerator din $\mathcal{C}$. Pentru a termina demonstrația, folosim următoarele leme:

LEMA 1. *Pentru orice obiect M din $\mathcal{C}$, aplicația $F(M, Q)$ a lui $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q)$ în $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FQ, FM)$ este bijecție.*

Demonstrație. Fie într-adevăr, f un morfism de la M în Q. Imaginea lui f prin aplicația $F(M, Q)$ nu este alta decît $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Q)$; această aplicație va asocia oricărui element $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, Q)$, elementul $a \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q)$. Dar morfismele lui $A = FQ$ în FM sînt de forma $a \rightsquigarrow a \circ f$, ceea ce termină dovedirea lemei 1.

LEMA 2. *Fie M un obiect din $\mathcal{C}$; $\{Q_j\}_{j \in E}$ o familie de obiecte izomorfe cu Q și $J = \coprod_{j \in E} Q_j$. Aplicația $F(M, J)$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, J)$, $\mathrm{Hom}_{P \cdot C(A)}(F\ J, FM)$ este bijectivă.*

Demonstrație. Considerăm mai înainte cazul obiectelor M de lungime finită. Știm că aplicația canonică $u : \coprod_{j \in E} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q_j) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \coprod_{j \in E} Q_j)$ este o bijecție. (M este un obiect mic). La fel va fi deci și aplicația canonică $v : \coprod \mathrm{Hom}_{P \cdot C(A)}(FQ, FM) \to \mathrm{Hom}_{P \cdot C(A)}(F, (\coprod Q_j), FM)$. În plus, pentru orice $j \in E$, $F(M, Q_j)$ este o bijecție, după lema 1, și deci din egalitatea:

$$v \circ (\coprod F(M, Q_j)) = F(M, Q) \circ u$$

rezultă afirmația.

În cazul general, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, J)$ este o limită proiectivă a grupurilor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, Q)$, cînd M parcurge subobiectele de lungime finită din M. De asemenea, $\mathrm{Hom}_{P.C(A)}(FJ, FM)$ este limita proiectivă a grupurilor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F, FN)$. În plus, avem următoarea diagramă comutativă,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, J) \arrow[r, "F(M, J)"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FJ, FM) \arrow[d, "\wr"] \\
\underset{\longleftarrow}{\lim}\, \mathrm{Hom}_{P.C.(A)}(N, J) \arrow[r, "\underset{\leftarrow}{\lim} F(N, J)"] & \underset{\longleftarrow}{\lim}\, \mathrm{Hom}_{P.C.(A)}(FJ, FN)
\end{tikzcd}$$

Deoarece $F(N, J)$ este un izomorfism pentru orice N, la fel va fi și $F(M, J)$, ceea ce demonstrează lema 2.

Dacă categoria Ker F este nulă, notăm prin $\mathcal{A}$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ ale cărei obiecte sînt izomorfe cu suma directă a unei familii de obiecte egale cu Q. De asemenea, fie $\mathcal{B}$ subcategoria plină din $P \cdot \mathcal{C}(A)$ ale cărei obiecte sînt izomorfe cu produse directe de familii de module pseudocompacte egale cu A. Lema 2 arată că functorul F induce o echivalență între $\mathcal{A}$ și categoria $\mathcal{B}^0$ duala lui $\mathcal{B}$. Un raționament simplu ne va conduce la rezultatul final $\mathcal{C}$ este echivalentă cu $P \cdot C \cdot (A)^0$.

Încheiem capitolul de față cu o scurtă discuție asupra dualității categoriilor abeliene. Pentru înțelegerea discuției, nu este nevoie ca cititorul să cunoască demonstrațiile unor fapte, ci doar faptele ca atare.

Fie Ab categoria grupurilor abeliene; pentru orice cardinal α există un grup abelian de cardinal α; aceasta înseamnă că Ab nu este $\mathcal{U}$-categorie în raport cu nici un univers U; Ab este o categorie abeliană în care Z este un generator proiectiv, noetherian și deci mic. Un cogenerator al lui Ab este grupul R/Z, unde R este grupul aditiv al numerelor reale (izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive, diferite de zero, relativ la înmulțire). Morfismul canonic : $R \to R/Z$ este dat de omomorfismul φ, cu $\varphi(x) = e^{ix}$. E clar că R este un grup divizibil și deci injectiv (în Ab orice grup divizibil este injectiv, și invers) și Z este un inel ereditar (adică un cît de injectiv este încă injectiv), deci R/Z este injectiv. Pentru a justifica că $R/Z = T$ este un cogenerator în Ab, este suficient să dovedim că pentru orice grup abelian G există un omomorfism nenul $f: G \to T$. Într-adevăr, dacă $x \in G$, $x \neq 0$; atunci dacă x este de ordin infinit, aplicația $f: (x) \to T$, cu $f(n) = n\bar{\pi}$, unde $\bar{\pi}$ este clasa lui π, este un omomorfism nenul de grupuri care se prelungește la G, T fiind injectiv. Dacă n este ordinul lui x, atunci definim $f:(x) \to T$ astfel: $f(mx) = m\alpha$, unde α este clasa lui $1/n$ în T.

Admitem că cititorul cunoaște unele proprietăți ale lui Ab și deci ne vom mulțumi doar să menționăm unele rezultate în cele ce urmează. O problemă demnă de studiat pentru Ab este de a descrie toți cogeneratorii săi minimali, în sensul definiției următoare: obiectul G este un cogenerator minimal dacă el este izomorf cu orice obiect cît al său care este încă cogenerator. Remarcăm numai că T nu este un cogenerator minimal în sensul acesta. Mai mult, dacă $Q(\sqrt{2})$ este grupul subiacent al extensiei pătratice asociată cu x^2-2, atunci $Q(\sqrt{2})/Z$ este un cogenerator pentru Ab. E clar că orice subobiect X al lui R, cu X/Z cogenerator, conține cel puțin o irațională sau un număr transcendent.

Știm că T are în mod canonic structură de grup topologic și pentru orice grup abelian G, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(G, T)$ dotat cu topologia compact-deschisă (G discret) este un grup abelian compact. Fie Abc categoria grupurilor abeliene compacte; Pontriaghin a dovedit că Abc este o categorie abeliană și asocierea $G \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(G, T)$ este un functor ce stabilește o antiechivalență între Ab și Abc. Așadar Abc este duala categoriei grupurilor abeliene.

Fie acum A un inel cu element identitate și Mod A categoria modulelor stîngi peste A; Mod A nu este U-categorie în raport cu nici un univers; ca o categorie de functori peste Ab, Mod A va păstra toate proprietățile acesteia. În particular, dacă M este un A modul drept, atunci conform teoremei de prelungire propoziția 2.4, există un functor $M \otimes ?$: Mod $A \to$ Ab care admite un adjunct la stînga, functorul $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M, ?)$. Dacă în particular $M = A_d$, structura lui A de modul drept, atunci, functorul $A_d \otimes ?$ coincide (pînă la un izomorfism) cu functorul subiacență de la Mod A la Ab și deci este exact; conform propoziției 1.32, functorul $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}$ (Ad, ?) va păstra injectivele. Așadar, dacă M este un A-modul stîng, și Q un grup abelian divizibil, astfel că există monomorfismul $i : M \to Q$ (probarea acestui fapt este imediată; vezi spre exemplu [5], pag. 178), atunci, avem șirul exact din Mod A:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\mathrm{Ad}, M) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\mathrm{Ad}, Q),$$

cu ultimul termen injectiv în Mod Ab; dacă

$$\Phi : \mathrm{Id\ Mod}\ A \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\mathrm{Ad},\ ?) \circ \mathrm{Ad} \otimes ?$$

este un morfism de adjuncție, atunci Φ este un monomorfism (căci functorul subiacentă este fidel) și deci $\alpha \circ \Phi_M$ dă o scufundare a lui M într-un injectiv. Așadar, Mod A este o categorie în care orice obiect se poate scufunda într-un injectiv. Mai mult, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\mathrm{Ad}, T)$ este un cogenerator pentru Mod A, ceea ce se deduce foarte simplu din cele de mai sus.

Iată cine este categoria duală a lui Mod A.

Facem mai înainte cîteva considerații de ordin general; fie deci $\mathcal{C}$ o categorie arbitrară și $\mathcal{C}^{\circ}$ duala sa; fie $\mathcal{D}$ categoria functorilor covarianți de la o categorie unică $\mathcal{A}$ la $\mathcal{C}$ și $\mathcal{D}'$ categoria functorilor contravarianți de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{C}^{\circ}$. Categoria $\mathcal{D}'$ este duala lui $\mathcal{D}$. Pentru aceasta, definim functorul $\alpha : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ astfel: pentru orice $F \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$, notăm $\alpha(F)$ functorul $D \circ F$, unde $D : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\circ}$ este functorul dualitate. Definim și un functor $\beta : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ astfel: $\beta(F') = D' \circ F'$, unde $F' \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}'$ și D' este un dual al lui D, adică $D \circ D' = \mathrm{Id}\ \mathcal{D}'$ și $D' \circ D = \mathrm{Id}\ \mathcal{D}^{\circ}$. E clar că α și β avînd doi functori în dualitate.

Pentru a descrie pe (Mod $A)^{\circ}$ nu avem decît să considerăm functorul $D : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Abc}$, de trecere la obiectul dual și să observăm dacă $M \in \mathrm{Ob\ Mod}\ A$, atunci $M : A \to \mathrm{Ab}$ este un functor covariant iar dualul său va fi $D \circ M$, adică grupul compact $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M, T)$ dotat cu structură de A modul în mod canonic: pentru $x \in A$, $f : M \to T$, af este omomorfismul $(af)(x) = {}^{f}(ax)$. Mai mult, dualul lui A este $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(A_s, T)$ și este un obiect injectiv în categoria duală; el este un cogenerator. Așadar, categoria duală a lui Mod A este o categorie de module topologice compacte, drepte peste inelul A. Problema care se pune este următoarea: În ce condiții există o topologie pe A, încît categoria modulelor drepte topologice peste acest inel topologic să fie exact Mod A.

Descrierea categoriei duale a unui topos abelian este acum imediată: fie $\mathcal{C}$ un topos abelian și conform propoziției 5.26, A un inel, încît există șirul exact de categorii abeliene și functori

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathrm{Mod}\ A \xrightarrow{T} \mathcal{C} \to 0.$$

Fie $\mathcal{E}$ duala lui Mod A și $\mathcal{A}^{\circ}$ o subcategorie colocalizantă în $\mathcal{E}$, imaginea lui $\mathcal{A}$ prin functorul dualitate; e clar că categoria cît $\mathcal{E}/\mathcal{A}^{\circ}$ este exact $\mathcal{C}^{\circ}$. $\mathcal{C}^{\circ}$ este deci duala unei categorii cît de module topologice compacte.

Pe această linie se înscrie și rezultatele de mai sus,punînd dualitatea dintre categoriile local finite și categoriile de module pseudocompacte.

Asupra categoriilor abeliene se pot face multe considerații; deocamdată ne mulțumim cu acestea, rămînînd ca într-o eventuală lucrare să reluăm această teorie foarte interesantă în sine și în aplicații.

Primită la redacție la 17 mai 1966

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. Gabriel, Pierre, *Des catégories abéliennes*. Bull. Soc. Math. de France, **90**, *3* (1962).
2. Năstăsescu, Constantin, Popescu Nicolae, *Sur la structure des objets des quelques catégories abéliennes*. C. R. Acad. Sci. Paris, **262**, *25* (1966).
3. Fort, Jaques, *Sommes directes de sous-modules coirréductibles d'un module*. C.R. Acad. Sci. Paris, **262**, *23* (1966).
4. Gabriel, Peter, Oberst Ulrich, *Spectralkategorien und reguläre Ringe im Von-Neumannschen Sinn*. Math. Zeitschrift, **92**, 389—395 (1966).
5. Kuroș, A.G., *Teoria Grupurilor*, Ed. tehnică, 1956.
6. Bucur, Ion, *Sur les fonctions définies sur le spectre d'une catégorie*. Revue Roumaine de Math. pures et appliquées, *6* (1964).
7. Năstăsescu, Constantin, Popescu Nicolae, *La structure des objets d'un topos abélien*.

SIMPLIFICAREA FUNCȚIILOR DE VARIABILE POLIVALENTE

DE

ION MUNTEAN

În cap. 2 și 3 din lucrare se dau două algoritme pentru simplificarea funcțiilor booleene, folosind proprietățile grupale ale numerelor convenționale asociate constituienților unității, din care primul perfecționează metoda lui Quine — Mc Cluskey [1], [2].

În cap. 4 se generalizează aceste algoritme pentru funcțiile de variabile polivalente, extinzînd astfel rezultatele din [1], [2] și [3] pentru astfel de funcții.

1

Problema simplificării funcțiilor booleene prezintă interes pentru sinteza schemelor cu contacte și relee cu număr minim de elemente.

O metodă cunoscută de simplificare pentru funcțiile booleene de variabile bivalente a fost dată de Quine [1] și Mc Cluskey [2]. Această metodă a fost extinsă de Gr. C. Moisil în [3] la funcțiile depinzînd de variabile trivalente.

În capitolul 2 din această lucrare vom face unele completări metodei din [1] și [2], ceea ce reprezintă de fapt un algoritm nou care se poate programa cu mai multă ușurință la mașina de calcul.

Mai departe, în capitolul 3, vom studia proprietățile algebrice ale numerelor convenționale asociate constituienților unității și vom da un alt algoritm pentru simplificarea funcțiilor booleene, bazat pe aceste proprietăți.

În capitolul 4 vom extinde rezultatele din capitolul 3 pentru funcțiile depinzînd de variabile polivalente, generalizînd astfel rezultatele din [1] [2] și [3].

În capitolele 2 și 3 vom folosi funcții cu domeniul într-un produs $L_2 \times L_2 \times \ldots \times L_2$ și cu valori în L_2 pe cînd în capitolul 4 vom folosi funcții cu domeniul într-un produs arbitrar de latici L_k, de forma

$$L_{k_1} \times L_{k_2} \times \ldots \times L_{k_n},$$

unde k_i este, în general, diferit de k_j pentru $i \neq j$, și cu valori în L_2.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 2, P. 241–257, BUCUREȘTI, 1967

2

2.1. Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie booleană de n variabile.

Convenim să asociem variabilei x_i ponderea 2^{n-i} şi produsului

$$x_1^{\alpha_1}\, x_1^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{2.1}$$

să-i asociem numărul

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, 2^{n-i} \tag{2.2}$$

pe care să-l numim numărul convenţional al produsului (2.1).

Numerele ν le putem scrie fie sub forma (2.2), fie sub forma de vectori n-dimensionali.

$$\nu = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \tag{2.3}$$

unde α_k iau valorile 0 sau 1.

După cum s-a arătat în [5], mulţimea vectorilor (2.3) formează spaţiu vectorial B_n peste corpul $z/2$ cu operaţia de grup „$\oplus$" definită astfel:

$$\nu \oplus \nu' = (\alpha_1 \oplus \alpha'_1, \alpha_2 \oplus \alpha'_2, \ldots, \alpha_n \oplus \alpha'_n),$$

unde $\alpha_k \oplus \alpha'_k$ este suma modulo 2 a lui α_k şi α'_k, ν fiind dat de (2.3) iar

$$\nu' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)$$

şi produsul cu scalari definit astfel:

$$\lambda\nu = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n)$$

unde λ ia valorile 0 şi 1.

Observaţie. Se verifică uşor că

$$\nu \oplus \nu' = \nu \cup \nu' - \nu \cap \nu',$$

unde prin $\cap$ am notat produsul logic iar cu $\cup$ suma logică a vectorilor ν şi ν'.

DEFINIŢIA 1. Spunem că două numere convenţionale ν_i, ν_j sînt vecine, relativ la variabila x_s, dacă

$$\nu_i \oplus \nu_j = 2^{n-s}.$$

Dar atunci produsele de forma (2.1) asociate lui ν_i şi ν_j au toate puterile α_k egale în afară de α_s care, pentru ν_i, este, de exemplu, 0 iar pentru ν_j este 1 sau invers.

Prin adunarea celor două produse se poate da în factor partea identică şi pune în evidenţă $x_s^0 + x_s^1 = 1$, astfel încît variabila x_s să nu mai apară în suma respectivă. Această operaţie în algoritmul lui Quine — Mc Cluskey se numeşte contopirea vecinilor şi se notează

$$(\nu_i, \nu_j)\ (2^{n-s}), \tag{2.4}$$

unde ν_i şi ν_j sînt numerele convenţionale asociate, 2^{n-s} ponderea variabilei eliminate, iar expresiile (2.4) sînt produse de $n-1$ variabile.

După cum se ştie, în algoritmul lui Quine — Mc Cluskey în pasul următor se contopesc vecinii de forma (2.4) şi se obţin expresii de forma :

$$(2.5) \qquad (\nu_i,\ \nu_j,\ \nu_p,\ \nu_q)\ (2^{n-s})\ (2^{n-k})$$

care sînt produse de n-2 variabile, 2^{n-s} şi 2^{n-k} indicînd variabilele care lipsesc, iar ν_i, ν_j, ν_p, ν_q implicanţii contopiţi şi aşa mai departe.

Se convine ca produsele (2.4) sau (2.5) să se scrie la fel cu constituienţii unităţii din care provin, cu condiţia ca în locul variabilelor care dispar să se treacă o liniuţă. De exemplu, pentru $n = 4$, produsul $x_1^0 x_3$ se scrie (0-1-).

2.2. Pentru programarea la maşina de calcul a algoritmului lui Quine — Mc Cluskey există în principal două greutăţi :

1) La identificarea poziţiei liniuţei.

2) Numărul de posibilităţi pentru obţinerea implicanţilor în pasul k al procesului de simplificare creşte repede cu numărul pasului respectiv. Se pune deci problema evitării înregistrării multiple a implicanţilor în cursul procesului de simplificare.

În continuare ne propunem să indicăm metode pentru rezolvarea celor două probleme, îmbunătăţind astfel algoritmul lui Quine — Mc Cluskey şi obţinînd de fapt un algoritm nou.

Convenim să notăm implicantul (2.4) astfel :

$$(2.6) \qquad (\nu_i \oplus \nu_j) = (2^{n-s},\ \nu_i),$$

unde ν_i este cel mai mic dintre numerele ν_j şi ν_i. De exemplu (0,1) (1) = (1,0), (2,3) (1) = (1, 2) etc. În perechile $(a,\ b)$ astfel obţinute, primul număr indică variabila eliminată, adică de fapt locul liniuţei, iar al doilea număr indică implicantul obţinut în urma contopirii, în care, în locul liniuţei, apare 0.

2.3. Fie $(a,\ b)$, $(x,\ y)$ două perechi între care să introducem operaţia „$\oplus$" definită astfel :

$$(2.7) \qquad (a,\ b) \oplus (x,\ y) = (a \oplus x,\ b \oplus y).$$

Două perechi $(a,\ b)$, $(x,\ y)$ se numesc vecine dacă $a = x$, $b \oplus y = 2^u$.

Fie $(a,\ b)$ şi $(a,\ c)$ două perechi vecine cu $b < c$ şi $b \oplus c = 2^u$. Convenim să notăm rezultatul contopirii acestor implicanţi astfel :

$$(2.8) \qquad (a,\ b)\ \boxed{+}\ (a,\ c) = [a + (b \oplus c),\ b].$$

LEMA 1. *Dacă* $(a,\ b)$ *şi* $(a,\ c)$ *sînt implicanţi obţinuţi într-un pas oarecare al simplificării şi sînt vecini, şi dacă* $b < c$, *atunci expresia* (2.8) *reprezintă implicantul obţinut prin contopirea lui* $(a,\ b)$ *cu* $(a,\ c)$.

Demonstraţie. $(a,\ b)$ şi $(a,\ c)$ fiind vecine, rezultă că $b \oplus c = 2^u$ şi deoarece a şi b respectiv a şi c nu au puteri ale lui 2 comune, $a + b \oplus \oplus c = a + 2^u$, adică la a se adaugă ponderea variabilei care se elimină, iar b nu conţine pe 2^u deoarece din $b < c$ rezultă că 2^u este cuprins în c, ceea ce demonstrează lema.

Observaţie. Numerele convenţionale ν_i ale constituienţilor unităţii convenim să le notăm $(0,\ \nu_i)$.

2.4. Convenim să scriem implicanţii (a, b) sub formă de constituienţi ai unităţii cu $2n$ variabile, scriind succesiv pe a şi b. De exemplu, pentru $n = 4$, $(5, 2)$ se scrie

$$(\underset{5}{0101}\ \underset{2}{0010}) = x_1^0\ x_3.$$

Acestor constituienţi le putem asocia numere convenţionale de forma $(2, 2)$. Notînd cu $\nu_{(a,\,b)}$ numărul convenţional asociat lui (a, b), se va obţine :

$$\nu_{(a,\,b)} = \sum_{i=}^{2n} \alpha_i\, 2^{2n-i}, \tag{2.9}$$

unde n este numărul de variabile, iar α_i ia valorile 0 sau 1. De exemplu, $\nu_{(5,\,2)}$ este

$$\nu_{(5,2)} = 2 + 2^4 + 2^6 = 82.$$

Evident, $\nu_{(a,\,b)} \neq \nu_{(b,\,a)}$ deoarece $a \neq b$.

DEFINIŢIA 2. Spunem că între doi implicanţi (a, b), (c, d) există o relaţie

$$(a, b) \leqslant (c, d) \tag{2.10}$$

dacă

$$\nu_{(a,\,b)} \leqslant \nu_{(c,\,d)}.$$

2.5. TEOREMA 1. *Dacă implicantul* (a, b) *se obţine în pasul* k *al procesului de simplificare dintr-o mulţime dată de perechi vecine :*

$$\begin{aligned} &(a_1, b) \boxplus (a_1, b_1) = (a, b)\\ &(a_2, b) \boxplus (a_2, b_2) = (a, b)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &(a_r, b) \boxplus (a_r, b_r) = (a, b) \end{aligned} \tag{2.11}$$

astfel încît :

$$b \oplus b_j = 2^{i_j},\ b < b_j, \qquad (\forall)\ j = 1, 2, \dots, r, \tag{2.12}$$

atunci există un indice j_0 *astfel încît*

$$(a_j, b) > (2^{i_j}, 0), \quad j \neq j_0 \tag{2.13}$$

$$(a_{j_0}, b) < (2^{i_{j_0}}, 0), \quad j = j_0. \tag{2.14}$$

Demonstraţie. Din (2.11) şi (2.12) se obţine imediat

$$a = a_j + 2^{i_j}, \qquad (\forall)\ j = 1, 2, \dots, r \tag{2.15}$$

şi de asemenea $i_j \neq i_l$ pentru orice $j \neq l$.

Într-adevăr, dacă $i_j = i_l$ din (2.12) şi (2.15) se obţine că $b_j = b_l$ respectiv $a_j = a_l$ şi deci perechile corespunzătoare n-ar fi distincte.

Atunci există o relaţie de ordine strictă între $2^{i_1}, 2^{i_2}, \dots, 2^{i_r}$; fie aceasta :

$$2^{i_1} < 2^{i_2} < \dots < 2^{i_r}. \tag{2.16}$$

Apoi, deoarece a_j nu conţine pe 2^{i_j} din (2.15), rezultă că a_j va conţine toate puterile 2^{i_s}, $s \neq j$ şi numai pe acestea, iar a va conţine puterile 2^{i_j}, pentru toţi $j = 1, 2, \ldots, r$ şi se poate scrie:

$$a = \sum_{s=1}^{r} 2^{i_s} \tag{2.17}$$

$$a_j = \sum_{s \neq j} 2^{i_s}. \tag{2.18}$$

Mai departe din (2.16) se deduce că

$$\sum_{s=1}^{r-1} 2^{i_s} < 2^{i_r} \tag{2.19}$$

$$\sum_{s \neq j} 2^{i_s} > 2^{i_j}. \tag{2.20}$$

Din (2.20) şi (2.18) se obţine imediat (2.13), şi la fel se obţine (2.14) din (2.19) şi (2.18), ceea ce demonstrează teorema, luînd $j_0 = r$.

2.6. Acum sîntem în măsură să dăm algoritmul anunţat întrucît amîndouă inconvenientele arătate în aliniatul 2.2 au fost înlăturate, primul prin modul de scriere a implicanţilor primi, iar al doilea ca rezultat al teoremei 1, întrucît această teoremă ne indică un criteriu de separare a uneia dintre perechile de implicanţi care realizează pe (a, b) de toate celelalte perechi prin proprietăţile (2.13) şi (2.14).

Descrierea algoritmului. Dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este funcţia dată, se scrie sub forma canonică disjunctivă, şi se asociază fiecărui constituient al unităţii un număr convenţional.

Se scriu perechile $(0, i)$ formate cu ajutorul numerelor convenţionale asociate lui f. Fie M_0 mulţimea perechilor $(0, i)$.

Se construieşte un şir de mulţimi de perechi $(M_0, M_1, M_2, \ldots, \ldots)$ astfel încît trecerea de la mulţimea M_k la M_{k+1} să se facă astfel:

— Se aplică (2.7) perechilor (a, b), (a, c) din M_k în toate modurile posibile.

— Dacă rezultatul lui (2.7) este de forma $(0, 2^u)$ şi dacă $(a, b) < (a, c)$, se verifică inegalitatea

$$(a, b) < (2^u, 0).$$

— Dacă inegalitatea precedentă este indeplinită, se aplică perechilor (a, b) şi (a, c) operaţia (2.8) şi rezultatul se înscrie în M_{k+1}.

— O pereche (a, b) din M_k pentru care nu există nici o altă pereche din M_k astfel încît $(a, b) \oplus (a, c) = (0, 2^u)$, este un implicant prim şi se înscrie într-o tabelă de implicanţi primi.

Procesul încetează cînd M_{k+1} este vid.

3

3.1. Să aprofundăm proprietăţile algebrice ale numerelor convenţionale.

Din (2.2) şi (2.3) rezultă că numerele convenţionale

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, 2^{n-i} \tag{3.1}$$

pot fi puse în corespondență biunivocă cu vectorii n-dimensionali

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \tag{3.2}$$

şi deci mulţimea lor poate fi organizată cu operaţia „$\oplus$” definită în aliniatul 2.1 ca spaţiu vectorial peste corpul $z/2$.

Să notăm cu $G_2^{2^n-1}$ grupul numerelor convenţionale (3.1) cu operaţia „$\oplus$”. Grupul $G_2^{2^n-1}$ este format din mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$.

Evident,

$$G_2^{2^n-1} \subset G_2^{2^m-1} \text{ dacă } n < m \tag{3.3}$$

şi se poate forma un lanţ ascendent de subgrupuri

$$G_2^0 \subset G_2^1 \subset G_2^3 \subset \ldots \subset G_2^{2^n-1} \subset \ldots \tag{3.4}$$

Dacă notăm

$$G_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_2^{2^i-1}, \tag{3.5}$$

elementele lui G_2 vor fi numerele întregi nenegative, semigrupul acestor numere fiind organizat cu operaţia „$\oplus$” ca grup.

Ţinînd seama de (3.5), oricare ar fi două numere convenţionale, putem să le compunem cu operaţia „$\oplus$” considerîndu-le elemente ale lui G_2.

Vom introduce acum o relaţie între numerele convenţionale diferită de cea din capitolul 2.

DEFINIŢIA 3. Numărul convenţional p se spune că este un divizor al lui q şi se scrie:

$$p \subseteq q \tag{3.6}$$

dacă între aceste numere există relaţia:

$$p + (p \oplus q) = q. \tag{3.7}$$

Vom spune de asemenea că q este multiplu al lui p.

Să arătăm că relaţia (3.6) definită cu ajutorul lui (3.7) este o relaţie de ordine parţială:

Într-adevăr:

1) $p + (p \oplus p) = p, p \subseteq p$, deoarece $p \oplus p = 0$.

2) Din $p \subseteq q$ şi $q \subseteq p$ se deduce $p + (p \oplus q) = q$ şi $q + (q \oplus p) = p$ şi deoarece $p \oplus q = q \oplus p$ se obţine $p \oplus q = 0$, adică $p = q$.

3) Din $p \subseteq q$ şi $q \subseteq r$, se obţine $p + (p \oplus q) = q$ şi $q + (q \oplus r) = r$ şi deci $p + (p \oplus q) + (q \oplus r) = r$. Dar $(p \oplus q) + (q \oplus r) = p \oplus r$ deoarece orice putere 2^k cuprinsă în p este cuprinsă în q şi deci în r, adică $p \subseteq r$.

Se poate demonstra

TEOREMA 2. *Grupul G_2 poate fi organizat ca latice cu ajutorul relaţiei „$\subseteq$” definită de* (3.7).

Demonstraţie. După cum s-a arătat, relaţia „$\subseteq$” este o relaţie de ordine parţială. Pentru terminarea demonstraţiei e suficient să definim cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun a două numere p şi q.

Să notăm cu $p \cap q$ numărul care conţine puterile lui 2 cuprinse şi în p şi în q şi cu $p \cup q$ numărul care conţine puterile lui 2 cuprinse fie în p fie în q. Se verifică imediat relaţiile

$$p \cap q \subseteq p \subseteq p \cup q, \quad p \cap q \subseteq q \subseteq p \cup q$$

şi că $p \cap q$ este cel mai mare număr iar $p \cup q$ cel mai mic număr care îndeplinesc aceste relaţii, ceea ce demonstrează teorema.

Observaţie. $p \cap q$ corespunde produsului logic al vectorilor asociaţi lui p şi q, iar $p \cup q$ sumei logice a acestor vectori.

3.2. TEOREMA 3. *Dacă m este un element din G_2, atunci mulţimea divizorilor lui m formează grup, G_2^m, cu operaţia $\oplus$.*

Demonstraţie. $0 \in G_2^m$, 0 fiind divizor al oricărui element din G_2. Apoi odată cu r şi s, este divizor al lui m şi $r \oplus s$, ceea ce se verifică uşor deoarece $r \oplus s$ conţine puteri ale lui 2 incluse fie în r, fie în s, adică în m şi deci $r \oplus s \subseteq m$, ceea ce demonstrează teorema

3.3. Am văzut că G_2 este spaţiu vectorial peste corpul $z/2$.

DEFINIŢIA 4. Numim hiperplan în G_2 orice subgrup G_2^m al lui G_2.

Fie G_2^m şi $G_2^{m'}$ două subgrupuri ale lui G_2 astfel încît $m \leqslant m'$, adică $G_2^m \subset G_2^{m'}$.

DEFINIŢIA 5. Spunem că un subgrup G_2^m al lui $G_2^{m'}$ este maximal în $G_2^{m'}$ dacă

$$G_2^m \subset G_2^{m'}$$

şi dacă nu există un număr p, $m < p < m'$, astfel încît

$$G_2^m \subset G_2^p \subset G_2^{m'}.$$

Observaţie. Subgrupurile maximale ale unui grup G_2^m nu sînt unice. De exemplu subgrupurile maximale ale lui G_2^7 sînt G_2^3, G_2^5 şi G_2^6.

DEFINIŢIA 6. Numim hiperfaţă în G_2 un hiperplan G_2^m al lui G_2 sau mulţimea de elemente din G_2^m rămase după eliminarea din G_2^m a elementelor conţinute într-unul sau mai multe subgrupuri maximale ale lui G_2^m.

Observaţie. Fiecare element m din G_2 este o hiperfaţă deoarece se obţine din G_2^m prin eliminarea din acesta a elementelor cuprinse în toate subgrupurile sale maximale. Spre exemplu, 7 se obţine din G_2^7 prin eliminarea elementelor grupurilor G_2^3, G_2^5, G_2^6.

3.4. Fie

$$\{2^{i_1}, 2^{i_2}, \ldots, 2^{i_r}\} \tag{3.8}$$

un sistem maximal de puteri ale lui 2 care generează grupul G_2^m.

LEMA 2. *Subgrupurile maximale ale lui G_2^m au r-1 generatori şi sînt în număr de r.*

Demonstraţie. Evident, un subgrup al lui G_2^m cu r-1 generatori din sistemul (3.8) este un subgrup maximal. Apoi orice subgrup generat de $l < r$-1 generatori se include cel puţin într-un subgrup cu r-1 generatori, ceea ce demonstrează prima parte a lemei. A doua parte rezultă din faptul că numărul de subgrupuri cu r-1 generatori este egal cu $\binom{r-1}{r} = r$.

3.5. TEOREMA 4. *Fie m' cel mai mic număr și m cel mai mare număr dintr-o hiperfață $\mathcal{H}$ a lui G_2^m. Elementele hiperfeței $\mathcal{H} \subset G_2^m$ sînt multiplii lui m' cuprinși în G_2^m și numai aceștia.*

Demonstrație. Evident, $\mathcal{H}$ conţine toţi multipli lui m', deoarece dacă un astfel de multiplu ar fi fost înlăturat din G_2^m, în acelaşi timp ar fi fost eliminat şi m'.

Apoi dacă $\{2^{i_1}, 2^{i_2}, \ldots, 2^{i_r}\}$ sînt puterile lui 2 cuprinse în m' şi dacă notăm cu $G_2^m(2^i)$ subgrupul maximal al lui G_2^m care nu conţine pe 2^i, atunci m' va fi cuprins în toate subgrupurile maximale ale lui G_2^m în afară de

$$G_2^m(2^{i_1}),\ G_2^m(2^{i_2}),\ \ldots,\ G_2^m(2^{i_r}) \tag{3.9}$$

or nici unul dintre subgrupurile care conţin pe m' nu poate fi eliminat deoarece ar fi eliminat şi m'. Rămîne deci că pot fi eliminate unele dintre subgrupurile din (3.9). Să arătăm că vor fi eliminate toate aceste subgrupuri. Presupunem contrariul. Fie deci $G_2^m(2^{i_k})$ unul dintre subgrupurile (3.9) neeliminate.

Dar atunci

$$m'_k = \sum_{j \neq k} 2^{i_k} \tag{3.10}$$

este un divizor al lui m' şi este cuprins în toate subgrupurile care conţin pe m' şi în $G_2^m(2^{i_k})$ şi nu este cuprins în nici un $G_2^m(2^{i_j})$, $j = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, r$, adică nu este eliminat din G_2^m, ceea ce contrazice ipoteza că m' este cel mai mic număr din $\mathcal{H}$, de unde rezultă că sînt eliminate toate subgrupurile (3.9).

Să presupunem acum că în $\mathcal{H}$ ar exista un număr l mai mare decît m' care nu este un multiplu al lui m'. Din l va lipsi cel puţin un 2^{i_k}, $k = 1, 2, \ldots, r$. Dar atunci l va fi inclus în $G_2^m(2^{i_k})$ şi va fi eliminat, contrar presupunerii, ceea ce demonstrează teorema.

3.6. Din teorema 4 rezultă că o hiperfaţă $\mathcal{H}$ în G_2 este complet determinată de primul element m' și de ultimul element m ale acesteia. De aceea convenim să notăm hiperfeţele lui G_2 sub forma (m', m), știind că odată cu m' în hiperfaţa (m', m) sînt cuprinşi toţi multiplii lui m' care sînt divizori ai lui m.

Observaţie. Rezultatele precedente justifică scrierea implicanţilor funcţiilor booleene sub forma (2.6) folosită în capitolul 2.

Într-adevăr, oricărei hiperfeţe (m', m) îi corespunde implicantul $(m' \oplus m, m')$, unde $m' \oplus m$ indică variabilele care lipsesc, iar m' pe cele care apar în implicantul respectiv.

DEFINIŢIA 7. Spunem că o hiperfaţă (a, b) este inclusă într-o hiperfaţă (c, d) şi scriem :

$$(a, b) \subseteq (c, d), \text{ dacă } a \supseteq c,\ b \subseteq d. \tag{3.11}$$

Dacă $F = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ este o mulţime de elemente din G_2, o hiperfaţă $(c, d) \subset F$ este maximală în F dacă nu se include în nici-o hiperfaţă a lui F.

Consecinţă. Vîrfurile hiperfeţei (a, b) sînt vîrfuri şi în (c, d). Într-adevăr, dacă $x \in (a, b)$, $a \subseteq x$ şi ţinînd seama de (3.11) rezultă $c \subseteq x$ şi $x \subseteq (c, d)$.

Pentru implicanţii $(m' \oplus m, m')$ asociaţi hiperfeţelor (m', m), definiţia 7 capătă următoarea formă :

DEFINIŢIA 8. Spunem că un implicant (a, b) se absoarbe în implicantul (c, d)

$$(a, b) \subseteq (c, d), \text{ dacă } a \subseteq c, b \supseteq d. \tag{3.12}$$

Un implicant (c, d) este implicant prim în F dacă nu se absoarbe în nici un implicant al lui F.

Observaţie. Constituienţii unităţii cuprinşi în F vor fi perechi de forma $(0, x)$, iar implicanţii primi corespund hiperfeţelor maximale.

Rezultatele precedente ne permit să dăm un nou algoritm pentru simplificarea funcţiilor booleene, care se bazează pe căutarea hiperfeţelor maximale incluse în funcţia F dată.

Descrierea algoritmului :

1) Se scrie F prin numerele convenţionale asociate constituienţilor unităţii.

2) Se ia un număr convenţional m, începînd cu cel mai mare, şi se scriu într-o tabelă T_0 divizorii acestuia incluşi în F.

3) Se caută vecinii lui m incluşi în T_0, fie aceştia $m_1, m_2, \ldots, m_k$ şi se înscriu într-o tabelă T_1 hiperfeţele (m_i, m), $i = 1, 2, \ldots, k$.

4) Se află cei mai mari divizori comuni $m_i \cap m_j$ pentru orice $i, j = 1, 2, \ldots, k$ şi se înscriu într-o tabelă T_2 hiperfeţele $(m_i \cap m_j, m)$ pentru orice $m_i \cap m_j$ cuprins în T_0, eliminîndu-se în acelaşi timp hiperfeţele (m_i, m), (m_j, m) din T_1.

Hiperfeţele (m_r, m) care rămîn în T_1 neeliminate sînt maximale şi se înscriu într-o tabelă T de implicanţi primi.

Procesul se continuă construind o tabelă T_{l+1} din T_l la fel cum s-a obţinut T_2 din T_1, pînă se ajunge la o tabelă T_{l+1} care nu conţine nici un element sau conţine un singur element, care este o hiperfaţă maximală şi se înscrie în tabela de implicanţi primi.

5) Se repetă operaţiile de la punctele 2) — 4) pentru toate numerele convenţionale, verificînd la fiecare înscriere a hiperfeţelor în tabela de implicanţi primi, dacă acestea nu se includ în hiperfeţe înscrise anterior.

Exemplul 1 :

$$F = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14\}.$$

$$\begin{aligned} m = 14,\ T_0 &= \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 14\} \\ T_1 &= \{(6, 14), (10, 14)\},\ 6 \cap 10 = 2 \\ T_2 &= \{(2, 14)\} \\ T &= \{(2, 14)\} \end{aligned}$$

$(2, 14)$ e hiperfaţă maximală şi-i corespunde implicantul prim $(12, 2)$.

$$\begin{aligned} m = 11,\ T_0 &= \{0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11\} \\ T_1 &= \{(3, 11), (9, 11), (10, 11)\} \\ T_2 &= \{(1, 11), (2, 11), (8, 11)\} \\ T_3 &= \{(0, 11)\} \\ T &= \{(0, 11)\} \end{aligned}$$

şi se obţine implicantul prim (11, 0)

$$m = 10,\ T_0 = \{0, 2, 8, 10\}$$
$$T_1 = \{(2,10), (8,10)\}$$
$$T_2 = \{(0,10)\},\ (0,10) \subseteq (0,11).$$

De altfel hiperfeţele care corespund oricărui divizor al lui 11 se includ în (0,11), de aceea mai departe nu vom mai repeta procesul pentru aceştia.

$$m = 7,\ T_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$
$$T_1 = \{(3,7), (6,7)\}$$
$$T_2 = \{(2,7)\},\ T = \{(2,7)\}$$

şi se obţine implicantul prim (5, 2).

$$m = 6,\ T_0 = \{0, 2, 4, 6\}$$
$$T_1 = \{(2,6), (4,6)\}$$
$$T_2 = \{(0,6)\},\ T = \{(0,6)\}$$

şi se obţine implicantul prim (6-0).

Implicanţii primi ai funcţiei F sînt (12,2), (11,0), (5,2) şi (6,0). Notînd cele 4 variabile cu x, y, z, u, aceştia se vor scrie :

8	4	2	1
x	y	z	u
—	—	1	0
—	0	—	—
0	—	1	—
0	—	—	0

$$F = \overline{y} + z\overline{u} + \overline{x}z + \overline{x}\overline{u}$$

4

4.1. După cum s-a arătat, în [3] s-a extins algoritmul de simplificare a funcţiilor booleene dat în [1] şi [2] pentru funcţii de variabile trivalente cu valori în L_2.

În general schemele cu contacte şi relee conţin atît elemente cu contacte bipoziţionale, cît şi multipoziţionale, funcţiile de lucru corespunzătoare depinzînd astfel de variabile polivalente.

În [4] s-a dat expresia generală a funcţiilor depinzînd de variabile polivalente sub forma :

$$(4.1)\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

unde $\alpha_i = 0, 1, 2, \ldots, k_i - 1$, $(\forall)\ i = 1, 2, \ldots, n$.

$$x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x_i = \alpha_i \\ 0 \text{ dacă } x_i \neq \alpha_i \end{cases}$$

k_i putînd fi diferit de k_j pentru $i \neq j$.

În acest capitol ne propunem să generalizăm rezultatele din [3] pentru funcţia cu domeniul într-un produs de latici $L_{k_1} \times L_{k_2} \times \ldots \times L_{k_n}$ şi cu valori în L_2.

4.2. Convenim să asociem variabilei x_i, k-valentă, ponderea k^{n-i}, unde n este numărul de variabile k-valente, iar produsului de variabile k-valente

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{4.2}$$

să-i asociem numărul

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k^{n-i} \tag{4.3}$$

DEFINIŢIA 9. Numărul ν dat de relaţia (4.3) îl numim numărul convenţional asociat produsului (4.2).

Numărul convenţional ν poate fi scris şi sub formă de vector n-dimensional

$$\nu = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \tag{4.4}$$

unde α_i, $(\forall)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ ia valorile $0, 1, 2, \ldots, k-1$.

Între două numere convenţionale ν şi ν' vom introduce operaţia „$\oplus$".

$$\nu \oplus \nu' = (\alpha_1 \oplus \alpha'_1, \alpha_2 \oplus \alpha'_2, \ldots, \alpha_n \oplus \alpha'_n)$$

dată de tabelul următor:

(4.5)

$\oplus$	0	1	2	...	k-2,	k-1
0	0	1	2	...	k-2,	k-1
1	1	0	1	...	k-3,	k-2
2	2	1	0	...	k-4,	k-3
.	.	.	.	.	.	.
k-2	k-2	k-3	k-4	...	0	1
k-1	k-1	k-2	k-3	...	1	0

care generalizează operaţia notată cu acelaşi semn definită pentru $k = 2$.

Se poate demonstra cu uşurinţă că mulţimea numerelor convenţionale (4.3) respectiv (4.4) formează grup cu operaţia (4.5) pe care-l notăm $G_k^{k^n-1}$, şi că există lanţul ascendent de subgrupuri:

$$G_k^0 \subset G_k^{k-1} \subset G_k^{k^2-1} \subset \ldots \subset G_k^{k^i-1} \subset \ldots \tag{4.6}$$

a căror reuniune

$$G_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_k^{k^i-1} \tag{4.7}$$

va fi un grup cu operaţia „$\oplus$".

4.3. Din (4.5) rezultă că pentru orice $l \leqslant k$-1, mulţimea numerelor $\{0, 1, 2, \ldots, l\}$ formează grup cu operaţia „$\oplus$". Dar atunci rezultă că şi mulţimea vectorilor (4.4), unde α_1 este spre exemplu k_1-valent, α_2,

k_2-valent etc., în general $k_i \neq k_j$, pentru $i \neq j$, formează grup cu operația „$\oplus$", pe care îl notăm $G_{\{k_1, k_2, \dots, k_n\}}$. Acest grup va avea $k_1, k_2, \dots, k_n$ elemente pe care le putem pune în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor întregi nenegative $\{0, 1, 2, \dots, k_1, k_2 \dots k_n - 1\}$, astfel : Convenim să asociem lui x_1 ponderea 1. Apoi, dacă x_i are ponderea Q_i, lui x_{i+1} i se asociază ponderea $Q_{i+1} = k_i Q_i$, unde k_i este valența variabilei x_i, iar vectorului (4.4) i se asociază numărul convențional :

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q_i \tag{4.8}$$

4.4. La fel ca pentru cazul $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 2$, între două numere convenționale p și q vom introduce o relație de ordine parțială, pe care o notăm

$$p \subseteq q \tag{4.9}$$

dată de condiția :

$$p + (p \oplus q) = q. \tag{4.10}$$

LEMA 3. *Condiția necesară și suficientă pentru ca între numerele convenționale* $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ *și* $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ *să existe relația* (4.9) *este :*

$$p_i \leqslant q_i \qquad (\forall)\, i = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstrație. Din $p_i \leqslant q_i$ rezultă succesiv $p_i \oplus q_i = q_i - p_i$, $p_i + (p_1 \oplus q_i) = q_i$, $(\forall)\, i = 1, 2, \dots, n$ și deci $p + (p \oplus q) = q$.

4.5. Să notăm cu $d_i = \min(p_i, q_i)$ și cu $S_i = \max(p_i, q_i)$, $(\forall)$ $i = 1, 2, \dots, n$.

DEFINIȚIA 9. Numim vectorul $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ cel mai mare divizor comun al vectorilor p și q și-l notăm $p \cap q$, iar vectorul $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ cel mai mic multiplu comun și-l notăm $p \cup q$.

Se poate demonstra o teoremă similară cu teorema 2 pentru grupul $G_{\{k_1, k_2, \dots, k_n\}}$ și deci și pentru subgrupurile lui G_k.

TEOREMA 5. *Grupul* $G_{\{k_1, k_2, \dots, k_n\}}$ *poate fi organizat ca latice cu ajutorul relației* „$\subseteq$" *dată de* (4.9) *și* (4.10).

Demonstrație. Folosind lema 3 se obțin imediat proprietățile de reflexivitate, antisimetrie și tranzitivitate ale relației „ $\subseteq$ ".

Introducînd apoi în $G_{\{k_1, k_2, \dots, k_n\}}$ noțiunile de cel mai mare divizor comun respectiv cel mai mic multiplu comun a două elemente oarecare, conform definiției 9 se termină demonstrația.

De asemenea se poate demonstra o teoremă similară cu teorema 3.

TEOREMA 6. *Dacă* m *este un element oarecare din* $G_{\{k_1, k_2, \dots, k_n\}}$, *atunci mulțimea divizorilor lui* m *formează grup* $G^{m}_{\{k_1, k_2, \dots, k_n\}}$, *cu operația* „$\oplus$".

Demonstrație. Fie $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ și fie $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ doi divizori ai lui m. Atunci $p_i \leqslant m_i$, $q_i \leqslant m_i$, $(\forall)$ $i = 1, 2, \dots, n$ și deoarece $p_i \oplus q_i = \max(p_i, q_i) - \min(p_i, q_i)$, rezultă că $p_i \oplus q_i \leqslant m_i$, de unde $p \oplus q \subseteq m$. Și deoarece $0 \subseteq m$ și $p \oplus p = 0$, teorema este complet demonstrată.

4.6. DEFINIȚIA 10. Spunem că un subgrup $G^{m'}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ al lui $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ este maximal în $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ dacă nu există nici un p astfel încît

$$G^{m'}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}} \subset G^{p}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}} \subset G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}} .$$

DEFINIȚIA 11. Numim hiperplan în $G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ un subgrup $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ al lui $G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ pentru care $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q_i$, unde α_i poate lua valorile 0 și $k_i - 1$, $(\forall)$ $i = 1, 2, \ldots, n$.

DEFINIȚIA 12. Numim hiperfață în $G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ o submulțime H de elemente din $G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$, care se bucură de proprietatea că există un element $a \in H$ și un hiperplan $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}} \subset G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$, astfel încît pentru orice $x \in G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$, $a \oplus x \in H$ și aplicația $x \to a \oplus x$ a lui $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ în H este univocă și nelacunară.

Observație. Un hiperplan $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ este o hiperfață în $G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$.

DEFINIȚIA 13. Două numere convenționale p și q se numesc cvasivecine dacă $p \oplus q = \alpha_i Q_i$, $\alpha_i \leqslant k_i - 1$. Pentru $\alpha_i = 1$ numerele p și q se numesc vecine.

DEFINIȚIA 14. Spunem că un subgrup $G^{m'}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ al lui $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ este cvasimaximal în $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ dacă $m \oplus m' = \alpha_i Q_i$, $\alpha_i = 1, 2, \ldots, k_i - 1$.

DEFINIȚIA 15. Numim cvasifață în $G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ un subgrup $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ al lui $G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ sau mulțimea de elemente rămase din $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ după eliminarea din aceasta a elementelor cuprinse într-unul sau în mai multe subgrupuri cvasimaximale.

Observație. Orice hiperfață este în același timp și o cvasifață. Pentru $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 2$ noțiunile de hiperfață și cvasifață se confundă.

4.7. TEOREMA 7. *Dacă $\mathcal{H}$ este o cvasifață în $G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$, în $\mathcal{H}$ există două vîrfuri p și q, astfel încît pentru orice vîrf $r \in H$, există relațiile $p \subseteq r \subseteq q$ și orice $s \in G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ pentru care $p \subseteq s \subseteq q$ este cuprins în H, adică H este complet determinat de primul său element p și de ultimul element q.*

Demonstrație. Fie $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ subgrupul din care s-a obținut H. Atunci evident $q = m$.

Presupunem acum că din $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ am eliminat subgrupurile cvasimaximale $G^{r_1}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}, G^{r_2}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}, \ldots, G^{r_s}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$, pentru care $r_1 \oplus m = \alpha_{i_1} Q_{i_1}$, $r_2 \oplus m = \alpha_{i_2} Q_{i_2}, \ldots, r_s \oplus m = \alpha_{i_s} Q_{i_s}$. Fie β_{i_k} componenta i_k a lui r_k, $k = 1, 2, \ldots, s$. Numărul convențional care are componentele i_k egale cu $\beta_{i_k} + 1$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, s$, și restul de componente nule, este cuprins în $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ deoarece $1 \leqslant \alpha_{i_k}$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, s$, deci $\beta_{i_k} + 1 \leqslant \beta_{i_k} + \alpha_{i_k}$ iar pe de altă parte $\beta_{i_k} = \alpha_{i_k}$ este componenta i_k a lui m.

Acest număr n-a putut fi eliminat din $G^{m}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ prin eliminarea celor s subgrupuri cvasimaximale ale sale și este cel mai mic care se bucură de această proprietate. Într-adevăr, orice număr mai mic are cel puțin o componentă egală cu β_{i_k} și deci va fi eliminat prin eliminarea elementelor lui $G^{r_k}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$.

Putem lua deci $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ în care $p_{i_k} = \beta_{i_k}$, $k = 1, 2, \ldots, s$, şi restul de componente nule, ceea ce demonstrează teorema.

4.8. Convenim să asociem grupului $G^{Q_n - 1}_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$, $Q_n = k_1, k_2, \ldots, k_n$, produsul :

$$(x_1^0 + x_1^1 + \ldots + x_1^{k_1 - 1})(x_1^0 + x_2^1 + \ldots + x_2^{k_2 - 1}) \ldots (x_n^0 + \\ + x_n^1 + \ldots + x_n^{k_n - 1}). \tag{4.11}$$

Lema 4. *Dacă $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, $p \subseteq q$ atunci cvasifeţei $\mathscr{H} = (p, q)$ îi corespunde produsul :*

$$(x_1^{p_1} + x_1^{p_1 + 1} + \ldots + x_1^{q_1})(x_2^{p_2} + x_2^{p_2 + 1} + \ldots x_2^{q_2}) \ldots (x_n^{p_n} + x_n^{p_{n+1}} + \ldots + x_n^{q_n}). \tag{4.12}$$

Demonstraţie. Din $p \subseteq q$ se obţine $p_i \leqslant q_i$ $(\forall)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ şi ţinînd seama de definiţia lui (p, q), orice număr $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, cu proprietatea $p \leqslant r \leqslant q$ se găseşte printre vîrfurile lui (p, q). Dînd fiecărui r_i toate valorile posibile, se obţin $\prod\limits_{i=1}^{n} (q_i - p_i + 1)$ termeni de forma :

$$x_1^{r_1}, x_2^{r_2}, \ldots, x_n^{r_n}$$

a căror sumă este (4.12), ceea ce demonstrează lema.

Dacă în (4.12) se egalează cu 1 toate sumele pentru care $p_i = 0$, $q_i = k_i - 1$, această expresie capătă forma cea mai simplă.

4.9. Fie acum o funcţie F dată prin numerele convenţionale şi $\mathscr{H} \subset F$. Atunci (4.12) este implicant al lui F. Dacă $\mathscr{H}$ este o hiperfaţă în $G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$, atunci sumele din expresia (4.12) a lui $\mathscr{H}$ conţin fie k_i termeni şi sînt egale cu 1, fie un singur termen. Rezultă deci că hiperfeţelor le corespund produse de variabile

$$x_{i_1}^1 x_{i_2}^2 \ldots x_{i_r}^r. \tag{4.13}$$

Dacă $\mathscr{H}$ e maximal în F, atunci (4.13) este implicant prim. Prin analogie, dacă $\mathscr{H}$ este cvasifaţă maximală în F, expresia (4.12) va fi numită de asemenea implicant prim, fiind forma cea mai simplă de scriere a funcţiei corespunzătoare lui $\mathscr{H}$.

Întrucît $p \subseteq q$, $p_i \oplus q_i = q_i - p_i$, şi deoarece sumele din (4.12) conţin $q_i - p_i + 1$ termeni, rezultă că orice implicant poate fi scris sub forma $(p \oplus q, p)$, unde $p \oplus q$ indică numărul de termeni care apar în sumele din (4.12), iar p primul termen al fiecărei sume.

Definiţia 16. Spunem că o cvasifaţă (a, b) este inclusă în cvasifaţa (c, d) şi scriem :

$$(a, b) \subseteq (c, d), \quad \text{dacă } a \supseteq c,\ b \subseteq d.$$

Observaţie. Definiţia 16 este similară cu definiţia 7 pentru hiperfeţele cazului binar.

Pentru implicanţi vom păstra definiţia 8, privind relaţia de incluziune.

Definiţia 17. Doi implicanţi (a, b) şi (c, d) se numesc vecini dacă

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d) = (0, Q_i), \tag{4.14}$$

adică

$$a = c,\ b \oplus d = Q_i$$

Operația de contopire o vom nota ca și în cazul binar „$\boxplus$” și o vom defini astfel:

$$(a,\ b) \boxplus (a,\ c) = (a + b \oplus c,\ b), \tag{4.15}$$

unde $b < c$.

Vom demonstra o lemă similară cu lema 1 din cazul binar.

LEMA 5. *Dacă (a, b) și (c, d) sînt implicanți obținuți într-un pas oarecare al simplificării și sînt vecini, și dacă $b < c$, atunci expresia* (4.15) *reprezintă implicantul obținut prin contopirea lui (a, b) cu (a, c).*

Demonstrație. Dacă (a, b) și (a, c) sînt vecini, atunci $b \oplus c = Q_i$ și atunci suma $a + (b \oplus c)$ se obține din a prin adăugarea lui 1 la componența i a acestuia și păstrînd restul de componente neschimbate. În expresia (4.12) a lui (a, b) va apare în suma de ordin i un termen în plus, restul de sume rămînînd nemodificate, ceea ce demonstrează lema.

4.10. Sîntem în măsură acum să demonstrăm o teoremă care generalizează teorema 1 și care ne permite să dăm un algoritm care la rîndul lui generalizează algoritmul lui Quine — Mc Cluskey perfecționat dat în capitolul 1 al acestei lucrări.

TEOREMA 8. *Dacă implicantul (a, b) al unei funcții oarecare de variabile polivalente se obține în mai multe feluri:*

$$\begin{aligned} &(a_1,\ b) \boxplus (a_1,\ b_1) = (a,\ b)\\ &(a_2,\ b) \boxplus (a_2,\ b_2) = (a,\ b)\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &(a_r,\ b) \boxplus (a_r,\ b_r) = (a,\ b) \end{aligned} \tag{4.16}$$

și dacă

$$\begin{aligned} &b \oplus b_i = Q_i\\ &b < b_i\\ &a_i = a_i' + \alpha_i Q_i, \end{aligned} \tag{4.17}$$

unde a_i' conține 0 în coloana Q_i, atunci există un indice i_0 și numai unul astfel încît:

$$[(\alpha_{i_0} + 1)\, Q_{i_0},\ 0] > (a_{i_0},\ b). \tag{4.18}$$

Demonstrație. $Q_i \neq Q_j$, $(\forall)\ i, j = 1, 2, \dots, r$.

Într-adevăr, din $Q_i = Q_j$ rezultă $b \oplus b_i = b \oplus b_j$, adică $b_i = b_j$ și ținînd seama de (4.16) se obține succesiv

$$a_i + (b \oplus b_i) = a_j + (b \oplus b_j)$$

$$a_i = a_j$$

și deci (4.16) n-ar fi toate distincte. Există deci o relație de ordine strictă între $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_r$ și fie aceasta:

$$Q_{i_1} < Q_{i_2} < \dots < Q_{i_r}. \tag{4.19}$$

Mai departe, din (4.16) şi (4.17) se deduce

$$a_i + (b \oplus b_i) = a'_i + (\alpha_i + 1)Q_i, \qquad (\forall)\ i=1, 2,\dots, r \tag{4.20}$$

de unde rezultă că

$$a = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1) Q_i \tag{4.21}$$

$$a_j = \sum_{i \neq j} (\alpha_i + 1) Q_i + \alpha_j Q_j. \tag{4.22}$$

Într-adevăr, a_j conţine ca factor pe $(\alpha_i + 1)\ Q_i$ pentru toţi $i \neq j$ şi pe $\alpha_j Q_j$. Dacă ar mai conţine o putere Q diferită de cele incluse în (4.22), atunci se poate scrie:

$$a_j = a''_j + \alpha_j Q_j + Q, \ a = a''_j + (\alpha_j + 1)\, Q_j + Q,$$

şi dacă presupunem $Q \not\subseteq b$

$$[a''_j + (\alpha_j + 1)Q_j, \ b] \boxplus [a''_j + (\alpha_j + 1)Q_j, \ b \oplus Q] = (a, \ b).$$

Dar atunci $a''_j + (\alpha_i + 1)Q_j$ se regăseşte printre $a_1, a_2, \dots, a_r$; fie a_s şi deci

$$b + Q = b + Q_s$$

de unde $Q = Q_s$, contrar presupunerii.

Apoi din (4.19) şi din egalităţile $Q_{i+1} = k_i Q_i$ adevărate pentru orice $i = 1, 2,\dots, n$, se deduce că

$$\sum_{j=1}^{r-1} (\alpha_{i_j} + 1) Q_{i_j} < Q_{i_r} \tag{4.23}$$

$$\sum_{j \neq s} (\alpha_{i_j} + 1)\, Q_{i_j} > Q_{i_s} \tag{4.24}$$

pentru orice $\alpha_{i_j} < k_{i_j} - 1$ şi $s < r$.

Dacă la (4.23) adăugăm $\alpha_{i_r} Q_{i_r}$ în amîndoi membrii, se obţine:

$$a_{i_r} = \sum_{j=1}^{r-1} (\alpha_{i_j} + 1)\, Q_{i_j} + \alpha_{i_r} Q_{i_r} < (\alpha_{i_r} + 1)\, Q_{i_r}$$

de unde, luînd $i_r = i_0$, se obţine imediat (4.18).

De asemenea dacă în (4.24) se adaugă în amîndoi membrii $\alpha_{i_s} Q_{i_s}$, se obţine

$$a_{i_s} = \sum_{j \neq s} (\alpha_{i_j} + 1)\, Q_{i_j} + \alpha_{i_s} Q_{i_s} < (\alpha_{i_s} + 1)\, Q_{i_s}$$

pentru orice $s \neq r$, ceea ce demonstrează teorema.

4.10. Cu aceasta putem trece la descrierea algoritmului care repetă aproape cuvînt cu cuvînt algoritmul similar pentru cazul binar, descris în capitolul 2.

Descrierea algoritmului. Dacă $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este o funcţie de variabile polivalente, se scrie sub formă canonică disjunctivă (4.1) şi se asociază fiecărui constituient al unităţii un număr convenţional (4.8).

Se formează perechile $(0, i)$, din zero şi numerele convenţionale şi se înscriu într-o tabelă M_0.

Se construieşte un şir de mulţimi de perechi $\{M_0, M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots\}$ astfel încît trecerea de la mulţimea M_k la M_{k+1} să se facă astfel :

— Se aplică (4.14) perechilor (a, b), (c, d) din M_k în toate modurile posibile.

— Dacă rezultatul lui (4.14) este de forma $(0, Q_i)$ şi dacă $b < d$, se verifică inegalitatea :

$$(a, b) < [(\alpha_i + 1) Q_i, 0],$$

unde α_i este componenta lui Q_i în a.

— Dacă inegalitatea precedentă este îndeplinită, se aplică perechilor (a, b), (a, d) operaţia (4.15) şi rezultatul se înscrie în M_{k+1}.

— O pereche (a, b) din M_k pentru care nu există nici o altă pereche din M_k astfel încît $(a, b) \oplus (c, d) = (0, Q_i)$, este un implicant prim, de forma (4.12) şi se înscrie într-o tabelă de implicanţi primi.

Procesul încetează cînd M_{k+1} este vid.

Observaţie. Se poate da un algoritm similar cu algoritmul descris în capitolul 3. Întrucît descrierea acestuia diferă neesenţial de descrierea algoritmului pentru cazul binar, nu o vom mai repeta aici.

5

Introducerea grupurilor $G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$, cu operaţia „$\oplus$" definită de tabelul (4.5), s-a dovedit utilă în studiul funcţiilor de variabile polivalente, reducînd problema simplificării funcţiilor de variabile polivalente la căutarea subgrupurilor grupului $G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$, maximale în funcţiile respective.

De asemenea problema simplificării funcţiilor booleene devine un caz particular al problemei simplificării funcţiilor de variabile polivalente, cele două probleme putînd fi tratate cu ajutorul grupului $G_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$ în mod unitar.

Primită la redacţie la 20 iulie 1966.

Comitetul de Stat al Planificării

BIBLIOGRAFIE

1. W.V. QUINE, *The problem of simplifying of truth functions*, Amer. Math. Monthly, **59**, *8*, 521–531 (1952).
2. Mc CLUSKEY, *Minimization of Boolean functions*. Bell System Technical Journal, **35**, *6*, p. 1417–1444 (1956).
3. GR. C. MOISIL, *Sur les aléas de continuité dans les circuits de comutations*. Automatisme, X, *9* (1965).
4. GR. C. MOISIL, *Teoria algebrică a mecanismelor automate*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
5. ION MUNTEAN, *Contribuţii la rezolvarea problemei sintezei schemelor cu contacte şi relee (I)*. St. cerc. mat., **15**, *4* (1964).
6. ION MUNTEAN, *Contribuţii la rezolvarea problemei sintezei schemelor cu contacte şi relee (II)*. St. cerc. mat., **18**, *1* (1966).

TRATAREA ALGEBRICĂ A LIMBAJELOR FORMALIZATE

DE

TEODOR RUS

În lucrare, pornindu-se de la definiţia unui limbaj formalizat ca şi o anumită submulţime a unui semigrup liber, se face o legătură între tratarea obişnuită a acestuia şi tratarea lui ca şi un anumit sistem relaţional. Sistemul respectiv este indus în limbaj de gramatica acestuia. Pornindu-se de la consideraţii din teoria relaţiilor, se ajunge la definirea celor două probleme fundamentale ale unui limbaj, şi anume problema analizei şi problema ambiguităţii, în limbajul sistemelor relaţionale. De asemenea, cu ajutorul acestor noţiuni se construieşte un algoritm de analiză a unui limbaj sub forma unui algoritm normal.

§ 1. NOŢIUNEA DE LIMBAJ FORMALIZAT

Fie V o mulţime finită nevidă de simboluri care admite o descompunere de forma $V = V_N \cup V_T$, unde $V_N \cap V_T = \emptyset$, $\emptyset$ fiind mulţimea vidă. Elementele mulţimii V_N se vor numi în continuare categorii sintactice, iar elementele mulţimii V_T se vor numi litere ale alfabetului limbajului formalizat definit peste mulţimea V.

Notăm cu litere mari latine elementele lui V_N şi cu litere mici latine elementele mulţimii V_T.

Să considerăm semigrupul liber generat de mulţimea V, pe care îl notăm cu $W(V)$. Elementele semigrupului liber se vor numi în continuare cuvinte, şi se vor nota de asemenea cu litere mici latine de la sfîrşitul alfabetului însoţite de indici dacă este nevoie. Notăm cu P o mulţime finită de perechi de forma (A_i, w_i), unde $A_i \in V_N$, $w_i \in W(V)$ pe care le vom numi mulţimea producţiilor. Dacă $(A_i, w_i) \in P$, atunci aceasta se mai poate scrie şi sub forma $A_i \to w_i$, ceea ce înseamnă că avem de-a face cu o regulă de producere. Oricare ar fi regula de producere $(A_i, w_i) \in P$, ea furnizează o aplicaţie definită în semigrupul liber $W(V)$ cu valori în semigrupul liber $W(V)$. Dacă notăm cu f această aplicaţie, atunci $x \in W(V)$ aparţine domeniului de definiţie al lui f dacă x are forma $x = tA_i v$. Valoarea aplicaţiei f asupra lui x se va scrie sub forma xf şi este $tw_i v$.

ST. CERC. MAT., TOM., 19, NR. 2, P.259–272, BUCUREŞTI, 1967

Faptul că $(A_i w_i) \in P$ furnizează aplicaţia f în semigrupul liber, $W(V)$ se scrie sub forma $f_{(A_i, w_i)}$. Domeniul lui f se notează cu $D_{(A_i, w_i)} = \{x \mid x = tA_i v\}$ iar mulţimea valorilor lui $f_{(A_i, w_i)}$ se notează cu

$$\mathcal{V}_{(A_i, w_i)} = \{y \mid y = tw_i v\}.$$

Definiţia 1.1. Numim gramatică un cvadruplu ordonat de forma $(W(V), V_T, P, \{A_1, A_2, \ldots, A_n \mid A_i \in V_N\})$ şi notăm gramaticele cu litera G.

Definiţia 1.2. Dacă $x, y \in W(V)$, vom spune că y este o derivare a lui x cu ajutorul unei gramatici G dacă $x = y$ sau dacă există şirul de cuvinte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ astfel ca să avem :

$$\begin{aligned} & x_0 = x \\ & x_i f_{(A_j, w_j)} = x_{i+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \\ & x_n = y, \end{aligned}$$

unde $f_{(A_j, m_j)}$ este o aplicaţie furnizată de una din perechile $(A_j, w_j) \in P$.

Dacă se foloseşte notaţia $A_i \to w_i$ pentru $(A_i, w_i) \in P$ şi dacă $x_i f_{(A_j, w_j)} = x_{i+1}$ se scrie sub forma $x_i \to x_{i+1}$, atunci noţiunea de mai sus se poate prezenta sub forma

$$\begin{aligned} & x_0 = x \\ & x_i \to x_i + 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \\ & x_n = y \end{aligned}$$

ceea ce coincide cu notaţiile obişnuite [1], [2], [3], [4].

Dacă y este o derivare a lui x, atunci uneori vom nota acest lucru prin $x \Rightarrow y$.

Definiţia 1.3. O submulţime $L \subseteq W(V)$ se numeşte limbaj formalizat generat de gramatica G dacă elementele lui L sînt cuvinte în $W(V_T)$ şi dacă oricare ar fi $x \in L$, există o categorie sintactică $A_i \in V_N$ astfel ca x să fie o derivare a lui A_i cu ajutorul gramaticii G.

Mai scurt, limbajul L_G generat de gramatica G, se poate defini astfel

$$L_G = \{x \mid x \in W(V_T) \,\&\, \exists A_i (A_i \in V_N \,\&\, A_i \Rightarrow x)\}.$$

§.2 RELAŢII BINARE ÎN LIMBAJELE FORMALIZATE

Definiţia 2.1. Fie M o mulţime nevidă de elemente. Considerăm produsul cartezian $M \times M$. O submulţime $\Phi \subseteq M \times M$ se va numi relaţie binară definită pe mulţimea M.

Din teoria relaţiilor [5], [6], [7] este bine cunoscută următoarea teoremă.

Teorema 2.1. *Mulţimea relaţiilor n-are (în particular mulţimea relaţiilor binare) definite peste o mulţime M formează o algebră conţinută în algebra submulţimilor mulţimii M.*

Date fiind relaţiile Φ_1 şi Φ_2 definite pe mulţimea M, avem :

1. $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$ în sensul teoriei mulţimilor.

2. Reuniunea $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi$ se defineşte în felul următor: dacă $(x, y) \in \Phi_1 \cup \Phi_2$, atunci $(x, y) \in \Phi_1$ sau $(x, y) \in \Phi_2$. Deci $(x, y) \in \Phi$. Dacă $(x, y) \in \Phi$, atunci $(x, y) \in \Phi_1$ sau $(x, y) \in \Phi_2$ deci $(x, y) \in \Phi_1 \cup \Phi_2$.

Prin urmare reuniunea a două relaţii Φ_1, Φ_2 se defineşte ca relaţia care conţine atît submulţimea produsului cartezian care defineşte pe Φ_1, cît şi submulţimea produsului cartezian care defineşte pe Φ_2.

3. Intersecţia $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \Phi$ a două relaţii Φ_1 şi Φ_2 se defineşte în mod asemănător ca submulţimea produsului cartezian care conţine elementele comune lui Φ_1 şi Φ_2, adică

$$(x, y) \in \Phi_1 \cap \Phi_2 \text{ implică } (x, y) \in \Phi_1 \,\&\, (x, y) \in \Phi_2 \text{ deci } (x, y) \in \Phi.$$

$$(x, y) \in \Phi \text{ implică } (x, y) \in \Phi_1 \,\&\, (x, y) \in \Phi_2, \text{ deci } (x, y) \in \Phi_1 \cap \Phi_2.$$

4. Relaţia complimentară $\overline{\Phi}$ a unei relaţii Φ se defineşte în felul următor:

$$(x, y) \in \overline{\Phi} \text{ dacă } (x, y) \in M \times M \text{ şi } (x, y) \neg \in \Phi.$$

Date fiind relaţiile Φ_1 şi Φ_2 pe mulţimea M, vom defini produsul relaţiilor Φ_1 şi Φ_2 astfel:

$$\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2 = \{(x, z) \mid (x, y) \in \Phi_1 \,\&\, (y, z) \in \Phi_2\}.$$

Mulţimea relaţiilor astfel definite posedă următoarele proprietăţi:

1. $\Phi_1 \circ (\Phi_2 \circ \Phi_3) = (\Phi_1 \circ \Phi_2) \circ \Phi_3$
2. $(\bigcup_{i \in I} \Phi_i) \circ \Phi = \bigcup_{i \in I} \Phi_i \circ \Phi$
3. $\Phi \circ (\bigcup_{i \in I} \Phi_i) = \bigcup_{i \in I} \Phi \circ \Phi_i$
4. $(\bigcap_{i \in I} \Phi_i) \circ \Phi \subseteq \bigcap_{i \in I} \Phi_i \circ \Phi.$

Din 2 şi 3 de mai sus avem şi proprietatea: dacă $\Phi_1 \subset \Phi_2$, atunci $\Phi \circ \Phi_1 \subseteq \Phi \circ \Phi_2$.

Noţiunea de relaţie inversă a unei relaţii se poate defini astfel: dată fiind relaţia $\Phi = \{(x, y) \mid (x, y) \in M \times M\}$, inversa ei este $\Phi^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \Phi\}$.

Relaţia inversă unei relaţii astfel definită se bucură de următoarele proprietăţi:

1. $(\Phi^{-1})^{-1} = \Phi$,
2. $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$ implică $\Phi_1^{-1} \subseteq \Phi_2^{-1}$
3. $(\bigcup_{i \in I} \Phi_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} \Phi_i^{-1}$
4. $(\bigcap_{i \in I} \Phi_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} \Phi_i^{-1}$
5. $(\Phi_1 \circ \Phi_2)^{-1} = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1^{-1}$

Prin I am notat o mulţime finită de indici.

Revenind acum la noţiunea definită în (1.1) şi anume aceea de gramatică, vom avea următoarea lemă:

LEMA 2.1. *O gramatică G induce în semigrupul liber $W(V)$ care intră în definiţia ei o mulţime finită de relaţii binare.*

Demonstraţia acestei leme este aproape banală. Pentru realizarea ei să considerăm perechea $(A_i, w_i) \in P$, unde P este mulţimea perechilor de producţie care intră în definiţia gramaticii G. Atunci este aproape evident că fiecare asemenea pereche furnizează o relaţie binară definită în semigrupul liber $W(V)$. Să notăm cu Φ_i relaţia furnizată de (A_i, w_i).

Spunem că $(x, y) \in W(V) \times W(V)$ aparţine relaţiei Φ_i dacă aplicaţia $f_{(A_i, w_i)}$ definită de (A_i, w_i) are proprietatea că

$$x f_{(A_i, w_i)} = y$$

sau cu alte cuvinte dacă $x = tA_iv$ şi $y = tw_iv$.

Să notăm cu Φ mulţimea relaţiilor binare furnizate de o gramatică G în semigrupul liber $W(V)$ împreună cu diagonala lui $W(V)$. Atunci dacă Φ_i şi Φ_j sînt elementele mulţimii Φ şi dacă $(x, y) \in W(V) \times W(V)$ şi $(x, y) \in \Phi_i$ & $(x, y) \in \Phi_j$, avem următoarea definiţie:

DEFINIŢIA 2.2. Spunem că Φ_j precede pe Φ_i pentru perechea $(x, y) \in W(V) \times W(V)$, şi notăm cu $\Phi_j < \Phi_i$, dacă au loc proprietăţile:

1. $(x, y) \in \Phi_i$, unde $x = t_1A_iv_1$, $y = t_1w_{ij}v_1$, iar $(A_i, w_i) \in P$ şi furnizează relaţia Φ_i.

2. $(x, y) \in \Phi_j$, unde $x = t_2A_jv_2$, $y = t_2 w_j v_2$, iar $(A_j, w_j) \in P$ şi furnizează relaţia Φ_j.

3. $t_1 = t_1'A_jt_1''$, unde A_i nu posedă intrări în cuvîntul t_1.

DEFINIŢIA 2.3. Spunem că Φ_i precede pe Φ_j pentru perechea $(x, y) \in W(V) \times W(V)$ şi notăm cu $\Phi_i < \Phi_j$, dacă au loc proprietăţile

1. $(x, y) \in \Phi_i$, unde $x = t_1A_iv_1$, $y = t_1 w_i v_1$, iar $(A_i, w_i) \in P$ şi furnizează relaţia Φ_j.

2. $(x, y) \in \Phi_j$, unde $x = t_2A_jv_2$, $y = t_2w_jv_1$, iar $(A_j, w_j) \in P$ şi furnizează relaţia Φ_j.

3. $t_2 = t_2'A_it_2''$, unde A_j nu posedă intrări în cuvîntul t_2.

Fie $(x, y) \in W(V) \times W(V)$ şi $(x, y) \in \Phi_i$. Să considerăm descompunerea cuvîntului x de forma

$$x = t_1A_iv_1t_2A_iv_2 \ldots t_nA_iv_n,$$

unde subcuvintele t_j, v_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, nu conţin intrări ale categoriei sintactice A_i. Atunci faptul că $(x, y) \in \Phi_i$, Φ_i fiind relaţia furnizată de perechea (A_i, w_i), se poate considera în n moduri, adică există n descompuneri ale cuvîntului x de forma

$$x = tA_iv \quad \text{cu} \quad y = tw_iv.$$

Să considerăm prima intrare a categoriei sintatice A_i în cuvîntul x astfel ca să avem $x = t_1A_iv_1$, t_1 neconţinînd intrări ale altor categorii sintactice. Atunci spunem că $(x, y) \in \Phi_i^{(1)}$, $\Phi_i^{(1)}$ fiind relaţia determinată de Φ_i, astfel că dacă $(x, y) \in \Phi_i^{(1)}$, atunci $x = t_1A_iv_1$, $y = t_1w_iv_1$ şi t_1 nu mai conţine intrări ale categoriilor sintactice $A_i \in V_N$. Putem acum defini pe $\Phi_i^{(2)}$ în acelaşi mod în felul următor: dacă $(x, y) \in \Phi_i^{(2)}$, atunci $x = t_1A_iv_1t_2A_iv_2$, astfel ca t_1, v_1, t_2 nu mai conţin intrări ale categoriei sintactice A_i. În mod analog se poate construi $\Phi_i^{(n)}$, unde n este numărul intrărilor categoriei sintactice A_i în cuvîntul x.

Din definiția relațiilor $\Phi_i^{(1)}, \Phi_i^{(2)}, \dots, \Phi_i^{(n)}$, avem următoarea proprietate față de perechea $(x, y) \in \Phi_i$:

$$\Phi_i^{(1)} < \Phi_i^{(2)} < \dots < \Phi_i^{(n)}.$$

Convenim în continuare să considerăm relațiile $\Phi_i^{(1)}, \Phi_i^{(2)}, \dots, \Phi_i^{(n)}$ ca și un sistem de relații furnizat de relația Φ_i, pentru o pereche de elemente $(x, y) \in \Phi_i$, astfel ca $x = t_1 A_i v_1 \dots t_n A_n v_n$.

DEFINIȚIA 2.4. Fie $(x, y) \in W(V) \times W(V)$ și $(x, y) \in \Phi_i$, Φ_i fiind furnizată de $(A_i, w_i) \in P$. Atunci numărul n al relațiilor furnizate de Φ_i peste perechea $(x, y) \in \Phi_i$ se numește gradul lui A_i în x respectiv gradul lui w_i în y și se notează cu

$$\mathrm{grad}_{A_i}\, x = n \qquad \text{și } \mathrm{grad}_{w_i}\, y = n.$$

Are loc următoarea lemă

LEMA 2.2. *Dacă* $(x, y) \in \Phi_i$ *și* $(x, y) \in \Phi_j$, $i \neq j$ și *dacă* x_1 *este un subcuvînt al cuvîntului* x *și avem* $\mathrm{grad}_{A_i} x_1 = 1$ *și* $\mathrm{grad}_{A_j} x_1 = 1$, *atunci are loc una din subordonările* $\Phi_i < \Phi_j$ *sau* $\Phi_j < \Phi_i$.

Pentru demonstrație să considerăm $(x, y) \in \Phi_i$, $(x, y) \in \Phi_j$ și fie $x_1 \sqsubseteq x$, astfel ca să avem $x_1 = t_1 A_i v_1$, $x_1 = t_2 A_j v_2$, t_1 și t_2 ne mai conținînd intrări ale categoriilor sintactice A_i, și respectiv A_j.

Dacă $t_1 = t_1' A_j t_2'$ sau $v_1 = v_1' A_j v_2'$, atunci $\mathrm{grad}_{A_j} x_1 > 1$ contrar ipotezei. La fel dacă $t_2 = t_2' A_i t_2''$ sau $v_2 = v_2' A_i v_2''$, atunci $\mathrm{grad}_{A_i} x_1 > 1$ contrar ipotezei lemei. Prin urmare categoriile sintactice A_i și A_j au numai cîte o intrare în x_1. Să notăm cu $l(x)$ lungimea cuvîntului $x \in W(V)$, sau cu alte cuvinte numărul simbolurilor conținute în cuvîntul x. Atunci, în cazul de mai sus, folosind noțiunea de lungime a unui cuvînt, avem una din următoarele inegalități

$$l(t_1) < l(t_2)$$

$$l(t_2) < l(t_1)$$

$$l(t_1) = l(t_2).$$

Dacă $l(t_1) < l(t_2)$ înseamnă că x_1 admite descompunerea $x_1 = t_1 t_1' A_j v_1$ cu $l(t_1') = l(t_2) - l(t_1)$. Atunci se vede imediat că avem $t_1 t_1' = u_1 A_i u_2$ și conform definiției 2.2 avem $\Phi_i < \Phi_j$. În mod analog se ajunge la concluzia că dacă $l(t_2) < l(t_1)$, atunci $\Phi_j < \Phi_i$.

Dacă $l(t_1) = l(t_2)$, atunci vom avea $x_1 = t_1 A_i v_1$ și $x_1 = t_2 A_j v_2$ și prin urmare $t_1 A_i v_1 = t_2 A_j v_2$. Conform definiției noțiunii de egalitate a două cuvinte, avem $t_1 = t_2$. În acest caz, $A_i = A_j$, ceea ce contrazice ipoteza $i \neq j$. Aceasta demonstrează complet lema 2.2.

DEFINIȚIA 2.5. Dat fiind semigrupul liber $W(V)$ și o gramatică G, vom numi început sintactic al unui cuvînt $x \in W(V)$ relativ la gramatica G, un subcuvînt x_1 al cuvîntului x care se bucură de următoarele proprietăți :

(1) $x = x' x_1 x''$, x' și x'' putînd fi cuvintele vide.

(2) $\exists\ \Phi_i \in \phi$, astfel că Φ_i este furnizată de perechea (A_i, w_i), unde $w_i = x_1$.

(3) $\mathrm{grad}_{A_i}\, x' = 0$ şi $\mathrm{grad}_{w_i}\, x' = 0$ pentru orice pereche $(A_i, w_i) \in P$.

(4) Oricare ar fi o altă descompunere a cuvîntului x care satisface condiţiile 1—3, de forma $x = y'y_1y''$, $y_1 = w_j$ avem $l(x') < l(y')$.

Definiţia 2.6. Dat fiind semigrupul liber $W(V)$ şi o gramatică G, vom numi sfîrşit sintactic al unui cuvînt $x \in W(V)$ relativ la gramatica G, un subcuvînt x_1 al lui x care are următoarele proprietăţi :

(1) $x = x'x_1x''$, x' şi x'' putînd fi cuvintele vide.

(2) $\exists\ \Phi_i (\Phi_i \in \phi)$ astfel că Φ_i este furnizată de perechea (A_i, w_i), unde $w_i = x_1$.

(3) $\mathrm{grad}_{A_i} x'' = 0$ şi $\mathrm{grad}_{w_i} x'' = 0$ pentru orice pereche $(A_i, w_i) \in P$.

(4) Oricare ar fi o altă descompunere a lui x de forma $x = y'y_1y''$ care satisface condiţiile 1—3 cu $y_1 = w_j$, $(A_j w_j) \in P$ avem $l(x'') < l(y_1'')$.

Lema 2.3. *Dacă un cuvînt $x \in W(V)$ admite un început (sfîrşit) sintactic, atunci acesta este unic.*

Pentru demonstraţie fie $x \in W(V)$ pentru care sînt îndeplinite condiţiile definiţiei 2.5, x_1 fiind începutul său sintactic. Să presupunem că x_1 nu este unic şi că mai există încă un început sintactic y_1, al lui x astfel ca să avem $x = y'y_1y''$ şi $x_1 \neq y_1$, fiind îndeplinite condiţiile definiţiei 2.5 şi pentru acesta. Atunci, deoarece $\mathrm{grad}_{A_i}\, x' = 0$, $\mathrm{grad}\ A_i\, y' = 0$ şi $\mathrm{grad}_{w_i} x' = 0$, $\mathrm{grad}_{w_i} y' = 0$, x' şi y' nu admit începuturi sintactice. Deoarece $x_1 \neq y_1$, avem $l(x') \neq l(y')$. Atunci sau $l(x') < l(y')$ şi y_1 nu este început sintactic sau $l(y') < l(x')$ şi x_1 nu este început sintactic. Ambele aceste variante contrazic ipoteza de mai sus. De aici rezultă că $x_1 = y_1$.

Lema 2.4. *Dacă $(x, y) \in W(V) \times W(V)$ şi G este o gramatică $G = (W(V), V_T, P, \{A_1, \ldots, A_n | A_i \in V_N\})$ şi dacă $x \Rightarrow y$, atunci există o mulţime finită de relaţii $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \ldots, \Phi_{i_p}$ din mulţimea ϕ astfel ca $(x, y) \in \Phi_{i_1} \circ \Phi_{i_2} \circ \ldots \circ \Phi_{i_p}$, indicii i_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, nefiind obligatoriu diferiţi între ei.*

Să presupunem că $x \Rightarrow y$ şi $(x, y) \in W(V) \times W(V)$. Atunci, conform definiţiei 1.2, avem $x = y$ sau există şirul de cuvinte $x_0, x_1, \ldots, x_p$, astfel ca

$$x_0 = x$$

$$x_i f_{(A_j, w_j)} = x_{i+1}$$

$$x_p = y$$

pentru anumite aplicaţii $f_{(A_j, w_j)}$ definite de perechile $(A_j, w_j) \in P$. Dacă $x = y$, atunci $(x, x) \in \Phi_\Delta \in \phi$. Dacă $x \neq y$ şi există şirul $x_0, x_1, \ldots, x_p$ astfel ca să fie îndeplinite condiţiile din definiţia 1.2, atunci avem

$$x_0 = t_1 A_{i_1},\ v_1$$

$$x_1 = t_1 w_{i_1},\ v_1$$

şi deci $(x_0, x_1) \in \Phi_{i_1}$, Φ_{i_1} fiind relaţia furnizată de perechea $(A_{i_1}, w_{i_1}) \in P$. În mod analog pentru orice $j = 0, 1, \ldots, p$ avem

$$x_i = t_i A_{i_j} w_i$$

$$x_{i+1} = t_i w_{i_j} w_i$$

şi deci $(x_i, x_{i+1}) \in \Phi_{i_j}$, Φ_{i_j} fiind relaţia furnizată de perechea $(A_{i_j}, w_{i_j}) \in P$. Dar relaţiile $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \ldots, \Phi_{i_p}$ sînt cuprinse toate în mulţimea ϕ. Rezultă imediat că $(x_0, x_2) \in \Phi_{i_2} \circ \Phi_{i_2}$ şi în general $(x_0, x_p) \in \Phi_{i_1} \circ \Phi_{i_2} \circ \ldots \circ \Phi_{i_p}$. Deoarece $x_0 = x$ şi $x_p = y$, avem $(x, y) \in \Phi_{i_1} \circ \Phi_{i_2} \circ \ldots \circ \Phi_{i_p}$.

Teorema 2.1 *Dacă L_G este un limbaj formalizat definit de gramatica $G = (W(V), V_T, P, \{A_1, \ldots, A_n | A_i \in V_N\})$, atunci oricare ar fi cuvîntul $x \in L_G$ şi categoria sintactică $A_i \in V_N$ astfel ca $A_i \Rightarrow x$, există un produs de relaţii* $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \ldots, \Phi_{i_p}$, $\Phi_{i_j} \in \phi$, $j = 1, 2, \ldots, p$ astfel ca să avem $(x, y) \in \Phi_{i_1} \circ \ldots \circ \Phi_{i_p}$

Teorema 2.1 este o consecinţă directă a lemei 2.4 şi a definiţiei de limbaj formalizat.

Lema 2.5. *Dacă $x \in L_G$, L_G fiind un limbaj formalizat generat de o gramatică G, atunci x admite un început sintactic.*

Deoarece $x \in L_G$, există o categorie sintactică $A_i \in V_N$ astfel ca $A_i \Rightarrow x$ sau $(A_i, x) \in \Phi_{i_1} \circ \Phi_{i_2} \circ \ldots \circ \Phi_{i_p}$, unde $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \ldots, \Phi_{i_p}$ este o submulţime a mulţimii ϕ a relaţiilor furnizate de G peste semigrupul liber $W(V)$, $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V_T = \varnothing$. Să presupunem că $p = 1$. Atunci $(A_i, x) \in \Phi_{i_1}$ şi deci $x = t, w_i v_1$, w_i fiind începutul sintactic al lui x. Prin inducţie, dacă presupunem lema adevărată pentru un p oarecare, atunci rezultă uşor că ea este adevărată şi pentru $p + 1$, ceea ce înseamnă că lema este adevărată pentru orice p. Pentru a arăta acest lucru să presupunem că $p > 1$ şi că lema este adevărată pentru orice $q \leqslant p$. Atunci avem

$$(A_i, x) \in \Phi_{i_1} \circ \Phi_{i_2} \circ \ldots \circ \Phi_{i_p}$$

$$(A_i, z_1) \in \Phi_{i_1}$$

$$(z_1, z_2) \in \Phi_{i_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(z_{p-1}, x) \in \Phi_{i_p}$$

Deoarece $(z_{p-1}, x) \in \Phi_{i_p}$ înseamnă că

$$z_{p-1} = tA_j v,$$

$$x = tw_j v.$$

Dacă $t \in L_G$, atunci, deoarece $(A_i, z_{p-1}) \in \Phi_{i_1} \circ \ldots \circ \Phi_{i_{p-1}}$, rezultă că t are un început sintactic. După cum se vede uşor, acesta va fi şi începutul sintactic al lui x. Dacă $t \urcorner \in L_G$ şi nu are început sintactic, atunci $x = tw_i v$ iar t şi w_i îndeplinesc condiţiile definiţiei 2.5, w_i fiind începutul sintactic al lui x.

Definiţia 2.7. Dacă L_G este un limbaj formalizat definit de o gramatică G în semigrupul liber $W(V)$, $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V_T = \varnothing$ şi dacă $x \in L_G$, atunci dacă x admite o descompunere de forma $x = x'x_1x''$ astfel ca să avem $A_k \Rightarrow x_s$, spunem că x_1 aparţine categoriei sintactice A_k şi notăm acest lucru cu $x_1 \in [A_k]$.

Lema 2.6. *Dacă L_G este un limbaj formalizat definit de gramatica G în semigrupul liber $W(V)$, $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V_T = \varnothing$ şi dacă $x \in L_G$ şi conţine un subcuvînt $y \in [A_k]$, atunci cuvîntul x_1 obţinut din x prin înlocuirea lui y cu A_k admite un început sintactic, dacă $x_1 \neq A_i$, $A_i \in V_N$.*

Deoarece $x \in L_G$, există un $A_j \in V_N$ şi relaţiile $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \ldots, \Phi_{i_p}$ în mulţimea ϕ astfel ca să avem $(A_j, x) \in \Phi_{i_1} \circ \Phi_{i_2} \circ \ldots \circ \Phi_{i_p}$. Conform ipotezei lemei avem

$$x = tx'yx''v$$

$$x_1 = tx'A_kx''v.$$

Deoarece $x_1 \neq A_j$ rezultă că $tx' \neq \emptyset$ sau $x''v \neq \emptyset$. Să admitem că $tx' \neq \emptyset$. Atunci, deoarece $(A_j, x) \in \Phi_{i_1} \circ \ldots \circ \Phi_{i_p}$ avem $p > 1$. Dacă $p > 1$, am avea $x = w_j$ şi $x_1 = A_j$ contrar ipotezei $x_1 \neq A_j$. Înseamnă că $x_1 = x_1'y_1x_1''$, $y \in [A_i]$, $A_i \in V_N$. Fie y_1 cea mai de la stînga intrare a cuvîntului y în cuvîntul x_1 cu această proprietate. Atunci $\text{grad}_{A_i} x_1' = 0$ şi $\text{grad}_{w_i} x_1' = 0$. Aceasta înseamnă că y_1 este începutul sintactic al lui x_1, ceea ce demonstrează lema.

LEMA 2.7. *Fie semigrupul liber $W(V)$ definit peste o mulţime finită nevidă $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V_T = \emptyset$. O mulţime finită de relaţii binare $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ definite în $W(V)$ de către o mulţime de perechi de forma (A_i, w_i), $A_i \in V_N$, $w_i \in W(V)$ astfel încît dacă $(x, y) \in W(V) \times W(V)$, $(x, y) \in \Phi_i$ dacă $x = t_1A\,v_1$, $y = t_2w_iv_2$, induce în $W(V)$ o gramatică.*

Demonstraţia lemei 2.7 este aproape banală. Pentru aceasta este suficient să considerăm mulţimea perechilor (A_i, w_i) care definesc o gramatică G, în semigrupul liber $W(V)$, chiar mulţimea perechilor (A_i, w_i) care definesc relaţiile $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$.

Lemele 2.1, 2.4, 2.7 şi teorema 2.1 ne permit acum să formulăm definiţiile noţiunilor de gramatică şi de limbaj formalizat în termenii sistemelor de relaţii.

DEFINIŢIA 2.8. Numim gramatică peste semigrupul liber $W(V)$, $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V_T = \emptyset$, $V \neq \emptyset$, un sistem de relaţii binare Φ_1, $\Phi_2, \ldots, \Phi_n$ definite de condiţiile următoare: dacă $x, y \in W(V)$, atunci $(x, y) \in \Phi_i$ dacă şi numai dacă x_1 admit descompuneri de forma $x = tA_iV$, $y = t\,W_i\,v$, unde $A_i \in V_N$, $w_i \in W(V)$.

Să notăm cu ϕ o astfel de gramatică.

DEFINIŢIA 2.9. Numim limbaj formalizat generat de gramatica ϕ, mulţimea cuvintelor semigrupului liber $W(V_T)$ astfel ca oricare ar fi $x \in L$, există un $A_i \in V_N$ cu proprietatea că

$$(A_i, x) \in \Phi_{i_1} \circ \Phi_{i_2} \circ \ldots \circ \Phi_{i_p}, \quad \Phi_{i_j} \in \phi, \qquad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Prin urmare studiul limbajelor formalizate, în acest fel, revine la studiul sistemelor de relaţii binare definite peste un semigrup liber $W(V)$, unde $V \neq \emptyset$, $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V_T = \emptyset$.

Vom formula acum cele două probleme fundamentale referitoare la limbajele formalizate şi anume problema ambiguităţii unui limbaj şi problema analizei unui limbaj în termenii definiţiilor de mai sus.

DEFINIŢIA 2.10. Un limbaj L_Φ definit peste semigrupul liber $W(V)$, $V \neq \emptyset$, $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V_T = \emptyset$ se va numi neambiguu dacă oricare ar fi $x \in L_\Phi$ şi $A_i \in V_N$ astfel ca $(A_i, x) \in \Phi_{i_1} \circ \Phi_{i_2} \circ \ldots \circ \Phi_{i_p}$ produsul $\Phi_{i_1} \circ \Phi_{i_2} \circ \ldots \circ \Phi_{i_p}$ este unic.

Problema construirii limbajelor formalizate neambigue revine în acest fel la construirea relaţiilor $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ în semigrupul liber $W(V)$, $V \neq \emptyset$, $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V_T = \emptyset$ astfel încît oricare ar fi $A_i \in V_N$

şi $x \in W(V_T)$ dacă există un produs de relaţii dintre relaţiile $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ astfel ca $(A_i, x) \in \Phi_{i_1} \circ \ldots \circ \Phi_{i_p}$, atunci acest produs trebuie să fie unic. Noi nu vom studia în această lucrare astfel de sisteme de relaţii.

Definiţia 2.11. Dacă L_ϕ este un limbaj formalizat definit peste semigrupul liber $W(V)$, $V \neq \varnothing$, $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V_T = \varnothing$ şi dacă $x \in L_\phi$, atunci vom numi analiză a lui x o mulţime de relaţii $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \ldots$ $\ldots, \Phi_{i_p}$, $\Phi_{i_j} \in \phi$, $j = 1, 2, \ldots, p$, astfel ca să avem

$$(A_i\, x) \in \Phi_{i_1} \circ \Phi_{i_2} \circ \ldots \circ \Phi_{i_p}, \; A_i \in V_N.$$

În felul acesta apare clară legătura dintre cele două probleme fundamentale ale unui limbaj formalizat. Se vede acum limpede că dacă un limbaj formalizat este ambiguu, atunci el nu are o analiză unică şi invers, dacă un limbaj formalizat nu are o analiză unică, atunci el este ambiguu.

În cele ce urmează, bazaţi pe noţiunile construite mai sus, vom descrie un algoritm de analiză pentru un limbaj formalizat.

§ 3. ALGORITM DE ANALIZĂ AL LIMBAJELOR FORMALIZATE

După cum se ştie [2], majoritatea algoritmilor de analiză pentru limbajele formalizate s-au născut din necesitatea verificării dacă un anumit cuvînt al unui limbaj formalizat este sau nu corect din punct de vedere sintactic. Acest lucru este foarte important în problema construirii translatoarelor pentru diferite maşini electronice cifrice de calcul.

Pentru construirea algoritmului, în cele ce urmează vom grupa mulţimea relaţiilor $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ care definesc limbajul L_ϕ, astfel ca să fie posibil să construim algoritmul respectiv ca şi un algoritm normal.

Fie $(A_1, w_1), (A_3, w_2), \ldots, (A_n, w_n)$, perechile care furnizează relaţiile $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$.

Definiţia 3.1. Spunem că relaţia $\Phi_i \in \phi$ este o relaţie iniţială dacă perechea (A_i, w_i) care o defineşte are proprietatea că $w_{i_0} \in W(V_T)$.

Să considerăm toate relaţiile iniţiale ale mulţimii ϕ şi să le numerotăm cu indicii $i_0, i_1, \ldots, i_p$, astfel ca

$$\Phi_{i_0} \text{ este furnizată de } (A_{i_0}, w_{i_0})$$

$$\Phi_{i_1} \text{ este furnizată de } (A_{i_0}, w_{i_1})$$

. . . .

$$\Phi_{i_p} \text{ este furnizată de } (A_{i_p}, w_{i_p}).$$

Să notăm acum cu Φ_Δ mulţimea acelor relaţii din ϕ pentru care dacă $\Phi_k \in \Phi_\Delta$, atunci perechea (A_k, w_k) care furnizează relaţia Φ_k are proprietatea că w_k posedă intrări ale categoriei sintactice A_k. Considerăm mulţimea $\phi - \Phi_\Delta$ ale cărei relaţii le plasăm într-o mulţime de grupe de relaţii $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_N$ după următorul algoritm:

(1) În grupa $\mathcal{G}_0$ plasăm toate relaţiile iniţiale $\Phi_{i_0}, \Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_p}$, adică acelea pentru care $w_{i_0}, w_{i_1}, \ldots, x_{i_p} \in W(V_T)$.

(2) Dacă grupa $\mathcal{G}_i$ a fost construită, atunci grupa $\mathcal{G}_{i+1}$ se construieşte din acele relaţii $\Phi_{j_0}, \Phi_{j_1}, \ldots, \Phi_{j_q}$ care au proprietatea că w_{i_0},

$w_{j_1}, \ldots, w_{j_q}$ sînt cuvinte în $W(V)$ care conţin, ca şi intrări ale categoriilor sintactice din V_N, numai pe acelea care au intrat în relaţiile care constituie grupele $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{i-1}$.

(3) Repetăm procesul descris de pasul (2) al algoritmului pînă cînd toate relaţiile mulţimii $\phi - \Phi_\Delta$ sînt plasate într-o grupă.

Să notăm cu N numărul grupelor astfel obţinute. Atunci avem următoarea lemă:

LEMA 3.1. *Dacă* ϕ *este mulţimea relaţiilor binare în semigrupul liber* $W(V)$ *care defineşte gramatica* G, *atunci în urma aplicării algoritmului descris mai sus mulţimii* $\phi - \Phi_\Delta$, *fiecare relaţie este plasată într-o grupă şi numai în una singură.*

Deoarece ϕ este o mulţime finită, $\phi - \Phi_\Delta$ este o mulţime finită şi după un număr finit de aplicări ale pasului (2) al algoritmului descris mai sus, fiecare element al mulţimii $\phi - \Phi_\Delta$ este examinat. Aceasta înseamnă că fiecare dintre aceste elemente este plasat în cel puţin o grupă $\mathcal{G}_i$. Să arătăm că dacă $\Phi_i \in \phi - \Phi_\Delta$, atunci Φ_i nu poate aparţine la două grupe distincte. Să presupunem pentru aceasta că $\Phi_i \in \mathcal{G}_k$ şi $\Phi_i \in \mathcal{G}_l$, $k \neq l$. Atunci avem sau $k < l$ sau $l < k$. Dacă $k < l$, atunci perechea (A_i, w_i) care furnizează Φ_i are proprietatea că w_i conţine numai intrări ale categoriilor sintactice care intră în perechile de definiţie ale relaţiilor din grupele $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{k-1}$. Dacă $\Phi_i \in \mathcal{G}_l$, deoarece $l > k$, w_i conţine intrări ale unor categorii sintactice care intră în definiţia relaţiilor din grupele $\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{k+1}, \ldots, \mathcal{G}_{l-1}$, contrar ipotezei care plasează pe Φ_l în grupa $\mathcal{G}_k$. Deci în cazul $k < l$ şi $\Phi_i \in \mathcal{G}_k$, Φ_i nu poate aparţine grupei $\mathcal{G}_l$.

Să presupunem că $l > k$ şi $\Phi_i \in \mathcal{G}_l$. Atunci w_i conţine intrări ale categoriilor sintactice care intră în definirea relaţiilor plasate în grupele $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{l-1}$, altfel Φ_i nu ar aparţine grupei $\mathcal{G}_l$. Deoarece $l > k$, avem $l > k$ sau $l-1 = k$. În ambele cazuri Φ_i nu poate aparţine grupei $\mathcal{G}_k$, deoarece w_i conţine intrări ale cel puţin uneia din categoriile sintactice care defineşte o relaţie din grupa $\mathcal{G}_{l-1}$.

Pentru a extinde algoritmul de ordonare la mulţimea ϕ în întregime, îl vom completa cu paşii (1′), (2′), (3′) pe care îi descriem mai jos, şi care au menirea de a plasa relaţiile mulţimii Φ_Δ în cel puţin o grupă.

(1′) În grupa $\mathcal{G}_0$ nu intră nici un element al mulţimii Φ_Δ.

(2′) Dacă $\Phi_k \in \Phi_\Delta$ şi dacă, abstracţie făcînd de intrările categoriei sintactice A_k în cuvîntul w_k, relaţia Φ_k se poate plasa în grupa $\mathcal{G}_j$, atunci o plasăm pe aceasta în grupa $\mathcal{G}_j$ ca ultim element al acestei grupe.

(3′) Dacă $\Phi_\Delta = \{\Phi_{k_1} \Phi_{k_2}, \ldots, \Phi_{k_s}\}$, atunci se aplică pasul (2′) fiecăreia din relaţiile Φ_{k_i}, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Notăm cu $\mathfrak{A}_1$ algoritmul descris de paşii (1), (2), (3), (1′), (2′), (3′) care va examina toate relaţiile mulţimii ϕ şi vom avea următoarea teoremă:

TEOREMA 3.1. *Dacă* ϕ *este mulţimea relaţiilor care definesc o gramatică* G *în semigrupul liber* $W(V)$, *atunci* $\mathfrak{A}_1$ *plasează elementele mulţimii* ϕ *în grupele* $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_N$ *astfel încît dacă* $\mathcal{G}_i$ *şi* $\mathcal{G}_j$ *sînt oricare două astfel de grupe cu* $i \neq j$, *atunci*: $\mathcal{G}_i \cap \mathcal{G}_j = \emptyset$, $\emptyset$ *fiind mulţimea vidă.*

Demonstraţia teoremei se face în felul următor: dacă $\Phi_\Delta = \emptyset$, atunci teorema rezultă din lema 3.1. Dacă $\Phi_\Delta \neq \emptyset$, atunci dacă $\Phi_k \in \Phi_\Delta$,

Φ_k nu poate fi plasat în două grupe distincte. Aceasta rezultă din descrierea pasului (2′) al algoritmului $\mathfrak{A}_1$, ceea ce demonstrează teorema.

Să considerăm acum mulţimea $V \neq \varnothing$, $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V_T = \varnothing$ ca şi un alfabet şi să construim un algoritm normal $\mathfrak{A}$ în acest alfabet în felul următor:

(1) Se consideră grupa $\mathcal{G}_0$ a relaţiilor care definesc gramatica unui limbaj formalizat L_G în semigrupul liber $W(V)$ şi se stabileşte următoarea listă de formule de înlocuire:

$$w_{i_0} \rightarrow A_{i_0}$$

$$w_{i_1} \rightarrow A_{i_1}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$w_{i_p} \rightarrow A_{i_p}.$$

În mod analog se procedează pentru grupele $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N$. Considerăm atunci algoritmul normal în alfabetul V cu formulele de înlocuire stabilite mai sus şi să-l notăm cu $\mathfrak{A}$.

Fie relaţiile $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$ furnizate de gramatica G şi ordonate după algoritmul $\mathfrak{A}_1$. Notăm cu $\Phi_{N_1}, \Phi_{N_2}, \dots, \Phi_{N_k}$ toate relaţiile grupei $\mathcal{G}_N$.

DEFINIŢIA 3.2. Limbajul formalizat L_G generat de gramatica G în semigrupul liber $W(V)$ se numeşte CF-limbaj dacă perechile (A_{N_1}, W_{N_1}), $(A_{N_2}, W_{N_2}), \dots, (A_{N_k}, W_{N_k})$ care definesc relaţiile $\Phi_{N_1}, \Phi_{N_2}, \dots, \Phi_{N_k}$ au proprietatea că $A_{N_1}, A_{N_2}, \dots, A_{N_k}$ reprezintă aceeaşi categorie sintactică din V_N. Să notăm cu S categoria sintactică respectivă.

DEFINIŢIA 3.3. Limbajul formalizat L_G generat de gramatica G în semigrupul liber $W(x)$ se numeşte CF-limbaj generalizat dacă perechile (A_{N_1}, W_{N_1}) $(A_{N_2}, W_{N_2}), \dots, (A_{N_k}, W_{N_k})$ care definesc relaţiile Φ_{N_1}, $\Phi_{N_2}, \dots, \Phi_{N_k}$ au proprietatea că $A_{N_1}, A_{N_2}, \dots, A_{N_k}$ nu reprezintă toate aceeaşi categorie sintactică din V_N.

Să considerăm acum un CF-limbaj L_G şi să presupunem că relaţiile furnizate de gramatica G în $W(V)$ au fost ordonate cu ajutorul algoritmului $\mathfrak{A}_1$. Considerăm toate lanţurile de perechi $(A_{N_i}, w_{N_i}), (w_{N_i}, w_{N_{i-1}}), \dots, (w_{N_{i-r_i+1}}, w_{N_{i-r_i}})$ astfel ca

$$w_{N_{i-r_i}} = t_1 w_1 t_2 w_2 \dots t_n w_n t_{n+1}$$

$$w_i \in W(V_N), i = 1, 2, \dots, n$$

$$t_i \in W(V_T), i = 1, 2, \dots, n+1$$

$$\exists_i (w_i \neq \varnothing \;\&\; t_i \neq \varnothing)$$

Dacă notăm cu S categoria sintactică reprezentată de A_{N_i}, $i = 1, 2, .., k$, atunci se vede imediat că relaţiile furnizate de $(A_{N_i}, w_{N_i}), (w_{N_i}, w_{N_{i-1}}), \dots$ $\dots, (w_{N_{i-r_i+1}}, w_{N_{i-r_i}})$ adică $\Phi_{N_i}, \Phi_{N_{i-1}}, \dots, \Phi_{N_{i-r_i}}$ au proprietatea că produsul $\Phi_{N_i} \circ \Phi_{N_{i-1}} \circ \dots \circ \Phi_{N_{i-r_i}}$, $i = 1, 2, \dots, k$ conţine acele elemente $x, y \in W(V)$ care se obţin din derivarea lui S, y avînd forma $t_1 W_1 t_2 W_2 \dots t_n W_n t_{n+1}$. Adăugăm acum (ca şi următoarele formule de înlocuire la algoritmul normal $\mathfrak{A}$) toate formulele de forma

$$t_1 S t_2 S \dots t_n S t_{n+1} \rightarrow S.$$

Să notăm cu $\mathfrak{A}_v$ algoritmul normal astfel obţinut. Atunci are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 3.2. *Dacă L_G este un CF-limbaj şi dacă $x \in L_G$, atunci $\mathfrak{A}_v(x) = S$, $S \in V_N$, S fiind categoria sintactică unică care apare în partea stîngă a perechilor (A_{N_i}, w_{N_i}), care formează grupa $\mathcal{G}_N$.*

Să presupunem că $x \in L_G$. Conform lemei 2.5, rezultă că el admite un început sintactic. Fie acesta t_1. Atunci $x = x' t_1 x''$, $t_1 = w_i$, $w_i \in W(V_T)$. Aceasta înseamnă că există o formulă de înlocuire în schema algoritmului $\mathfrak{A}$ astfel ca această formulă să se aplice cuvîntului x şi să-l transforme în cuvîntul x_1, unde $x_1 = x' A_i x''$.

Conform lemei 2.6, cuvîntul x_1 va admite un început sintactic. Dacă acesta este cuvîntul $t_2 \in W(V_T)$, atunci din construcţia algoritmului $\mathfrak{A}$ urmează că există o formulă cu proprietatea că se aplică cuvîntului x înlocuind cuvîntul t_2 cu categoria sintactică A_k, $t_2 \in [A_k]$. În felul acesta după un număr finit de paşi algoritmul $\mathfrak{A}$ va înlocui toate intrările cuvintelor $x_i \in W(V_T)$ din cuvîntul x cu categoriile sintactice la care aparţin acestea.

Conform lemei 2.5, dacă cuvîntul x_p astfel obţinut este diferit de o categorie sintactică A_j, $A_j \in V_N$, atunci el admite un început sintactic şi prin urmare există o formulă în schema algoritmului $\mathfrak{A}$ care înlocuieşte începutul său sintactic cu categoria sintactică la care aparţine. Se observă că lungimea cuvîntului x fiind finită, după un număr finit de paşi cuvîntul x se transformă fie într-o categorie sintactică $S \in V_N$, şi atunci el este un cuvînt al limbajului L_G, fie într-un cuvînt $x_k, l(x_k) < l(x)$ astfel că x_k nu mai admite început sintactic printre formulele algoritmului $\mathfrak{A}$, dar el admite început sintactic printre formulele algoritmului $\mathfrak{A}_V$ de forma

$$t_1 S t_2 S \ldots t_n S t_{n+1}.$$

În acest caz se aplică cuvîntului x_k formula pentru care s-a pus în evidenţă începutul sintactic al cuvîntului, înlocuindu-se $t_1 S t_2 S \ldots t_n S t_{n+1}$ cu S. Dacă după un număr finit de aplicări a paşilor algoritmului $\mathfrak{A}_V$ se obţine un cuvînt x_p astfel ca el să difere de S şi nici o formulă a algoritmului $\mathfrak{A}_V$ nu se aplică la acesta, atunci $x\urcorner \in L_G$. Dacă x_p este S, atunci $x \in L_G$. Pentru a demonstra aceste două variante este suficient să considerăm în ordine inversă şirul relaţiilor furnizate de perechile care au definit algoritmul normal şi care s-au aplicat la cuvîntul x şi pînă la obţinerea cuvîntului x_k. Fie acestea $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$. Să considerăm apoi în ordine inversă şirul relaţiilor care sînt furnizate de formulele algoritmului care au condus de la x_k la x_p. Fie acestea $\Phi_{r+1}, \Phi_{r+2}, \ldots, \Phi_S$. Atunci este vizibil că

$$(S, x) \in \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \ldots \circ \Phi_S$$

şi deci $x \in L_G$.

Dacă se ajunge la cuvîntul $x_p \neq S$, atunci într-un mod asemănător se arată că nu există o derivare a lui S care să conducă la x şi prin urmare $x\urcorner \in L_G$.

Să observăm acum că dacă algoritmul descris mai sus îl modificăm în aşa fel încît la fiecare pas începutul sintactic (sau sfîrşitul sintactic) al cuvîntului obţinut la etapa precedentă aplicării algoritmului să fie înlocuit cu categoria sintactică la care aparţine acesta, atunci se obţine chiar şirul transformărilor normale [2] al cuvîntului respectiv.

Considerăm acum următorul exemplu: fie $V = \{S, A, B, C, t, *, (,), \lambda\}$, unde $V_N = \{S, A, B, C\}$ şi $V_T = \{+, *, (,), \lambda\}$ şi gramatica furnizată de perechile

$$(S,\ A)$$
$$(A,\ A + B)$$
$$(A,\ B)$$
$$(B,\ B*C)$$
$$(C,\ (A))$$
$$(C,\ \lambda).$$

Algoritmul de ordonare va aranja aceste perechi (sau relaţiile furnizate de ele) sub următoarea formă:

$$\mathcal{G}_0 = \{(C,\ \lambda)\}$$
$$\mathcal{G}_1 = \{(B,\ C),\ (B,\ B * C)\}$$
$$\mathcal{G}_2 = \{(A,\ B),\ (A,\ A + B)\}$$
$$\mathcal{G}_3 = \{(C,\ (A))\}$$
$$\mathcal{G}_4 = \{(S,\ A)\}.$$

Algoritmul normal $\mathfrak{A}$ corespunzător acestei ordonări va fi

$$\lambda \to C$$
$$C \to B$$
$$B * C \to B$$
$$B \to A$$
$$A + B \to A$$
$$(A) \to C$$
$$A \to S.$$

Deoarece pornind de la elementele grupei $\mathcal{G}_4$ putem construi lanţurile de forma

(1) $(S,\ A),\ (A,\ A + B)$

(2) $(S,\ A),\ (A,\ B),\ (B,\ B*C)$

(3) $(S,\ A),\ (A,\ B),\ (B,\ C),\ (C,\ (A))$

algoritmul normal $\mathfrak{A}_v$ va avea schema

$$\lambda \to C$$

$$C \to B$$

$$B * C \to B$$

$$B \to A$$

$$A + B \to A$$

$$(A) \to C$$

$$A \to S$$

$$S + S \to S$$

$$S * S \to S$$

$$(S) \to S$$

Dacă considerăm cuvîntul $(x + \lambda) * \lambda$, atunci aplicînd acestui cuvînt algoritmul $\mathfrak{A}_V$ precizat de formulele de înlocuire de mai sus obţinem:

(1) $(C + C) * C$ în urma aplicării primei formule.

(2) $(B + B) * B$ în urma aplicării celei de-a doua formule.

(3) $(A + A) * B$ în urma aplicării celei de-a patra formule.

(4) $(S + S) * S$ în urma aplicării celei de-a şaptea formule.

(5) $(S) * S$ în urma aplicării celei de-a opta formule.

(6) $S * S$ în urma aplicării celei de-a zecea formule.

(7) S în urma aplicării celei de-a doua formule.

Se vede deci că $(\lambda + \lambda) * \lambda \in L_G$.

Primită la redacţie la 20 mai 1966

Institutul de calcul al Academiei
Republicii Socialiste România
Filiala Cluj.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Chomsky, *On certain formal properties of grammars*. Inf. and control, **2**, *2*, 137—167 (1959).
2. I. Eickel, M. Paul, El. Bauer, K. Samuelson, *A syntax controled generator of formal language procesor*. Comm. A.C.M., **7**, *8*, 451—455 (1963).
3. R.W. Floyd, *Bounded context syntactic analysis*. Comm. A.C.M. **7**, *2*, 62—67 (1964).
4. E. I. Irons, *Structurale connected in the formal languages*. Comm. A.C.M. **7**, *2*, 67—71 (1964).
5. Mc.Kinsey, *Postulates for the calculus of binar relations*. Journal of the Symbolic Logic, **6**, *3*, 85—97 (1941).
6. A. Tarsky, *On the calculus of relations*. Journal of the Symbolic Logic. **6**, *3*, 73—85 (1941).
7. I. Purdea, *Généralisation du produit de deux relations binaires*. Mathematica.

O INTERPRETARE DIFERENȚIAL GEOMETRICĂ A CURBELOR INTEGRALE ALE UNUI SISTEM DE ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL DOI

DE

T. WESZELY și M. SZILÁGYI

În această lucrare se studiază condiția în care curbele integrale ale unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi de forma (1) pot fi considerate ca geodezicele unui spațiu al lui Riemann V_3. Pentru acest lucru coeficienții ecuației diferențiale trebuie să verifice condițiile din teorema 1. Se deduce apoi că spațiul lui Riemann corespunzător este local euclidian. În încheiere se dă o condiție necesară și suficientă despre posibilitatea reducerii ecuației diferențiale de ordinul doi (1) la forma canonică (25).

I

Să considerăm sistemul de ecuații diferențiale de ordinul doi liniare în derivatele de ordinul întîi și de ordinul doi :

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 2A_2(x,y,z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2A_3(x,y,z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + A_1(x,y,z) = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} + 2B_2(x,y,z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2B_3(x,y,z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + B_1(x,y,z) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

unde coeficienții A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 sînt funcții de x, y, z și admit derivate parțiale de ordinul întîi continue.

Vom studia condițiile în care curbele integrale ale acestui sistem pot fi considerate ca geodezicele unui spațiu Riemann V_3.

Problema analoagă cu aceasta pentru o ecuație diferențială de ordinul doi de forma :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p(x,y) + q(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + r(x,y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 0$$

a fost rezolvată de către M. Farkas [1].

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 2. P. 273–280, BUCUREȘTI, 1967

Presupunem $x \neq$ const. şi făcînd $x = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ sistemul (I) este echivalent cu sistemul

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 x^1}{dt^2} = 0 \\
&\frac{d^2 x^2}{dt^2} + 2A_2(x^1, x^2, x^3)\frac{dx^1}{dt}\cdot\frac{dx^2}{dt} + 2A_3(x^1, x^2, x^3)\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^3}{dt} + \\
(2)\qquad &\qquad + A_1(x^1, x^2, x^3)\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 = 0 \\
&\frac{d^2 x^3}{dt^2} + 2B_2(x^1, x^2, x^3)\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} + 2B_3(x^1, x^2, x^3)\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^3}{dt} + \\
&\qquad + B_1(x^1, x^2, x^3)\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Ecuaţiile diferenţiale ale geodezicelor în spaţiul Reimann V_3 sînt:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right| \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0\,; \qquad (i, j, k = 1, 2, 3), \tag{3}$$

unde t este un parametru pe curbă, iar $\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|$ simbolurile lui Christoffel de a doua speţă ale metricii spaţiului. Simbolurile lui Christoffel de a doua speţă după cum se ştie determină complet conexiunea spaţiului, conexiune care îşi poartă numele de conexiunea lui Levy-Civita. Comparînd sistemele (2) şi (3), avem pentru simbolurile lui Christoffel

$$\begin{aligned}
&\left|\begin{matrix} 1 \\ jk \end{matrix}\right| = 0, \quad (j, k = 1, 2, 3)\,; \quad \left|\begin{matrix} i \\ \alpha\beta \end{matrix}\right| = 0 \quad (\alpha, \beta = 2, 3) \\
(4)\qquad &\left|\begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix}\right| = A_1, \quad \left|\begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix}\right| = A_2, \quad \left|\begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix}\right| = A_3\,; \quad \left|\begin{matrix} 3 \\ 11 \end{matrix}\right| = B_1, \quad \left|\begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix}\right| = B_2, \quad \left|\begin{matrix} 3 \\ 13 \end{matrix}\right| = B_3\,;
\end{aligned}$$

Dacă $ds^2 = a_{ij}\,dx^i dx^j$, $(i, j = 1, 2, 3)$, este metrica spaţiului Riemann V_3, atunci în acest spaţiu avem identităţile lui Ricci

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = a_{ir}\left|\begin{matrix} r \\ jk \end{matrix}\right| + a_{rj}\left|\begin{matrix} r \\ ik \end{matrix}\right|. \tag{5}$$

Prin urmare conexiunea dată de (4) poate fi considerată ca simbolurile lui Christoffel de-a doua speţă a spaţiului Riemann cu metrica amintită numai dacă sistemul (5) este complet integrabil cu condiţiile $a_{ij} = a_{ji}$ şi $|a_{ij}| \neq 0$.

Scriind dezvoltat identităţile (5) pentru conexiunea (4), obţinem

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} &= 2(a_{12}A_1 + a_{13}B_1) \\
\frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} &= 2(a_{12}A_2 + a_{13}B_2) \\
\frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} &= 2(a_{12}A_3 + a_{13}B_3)
\end{aligned}
\right.
\tag{6}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} &= a_{12}A_2 + a_{13}B_2 + a_{22}A_1 + a_{23}B_1 \\
\frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} &= a_{22}A_2 + a_{23}B_2 \\
\frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} &= a_{22}A_3 + a_{23}B_3
\end{aligned}
\right.
\tag{7}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} &= a_{12}A_3 + a_{13}B_3 + a_{23}A_1 + a_{33}B_1 \\
\frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} &= a_{23}A_2 + a_{33}B_2 \\
\frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} &= a_{23}A_3 + a_{33}B_3
\end{aligned}
\right.
\tag{8}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} &= 2\,(a_{22}A_2 + a_{23}B_2) \\
\frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} &= \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0
\end{aligned}
\right.
\tag{9}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} &= a_{22}A_3 + a_{23}B_3 + a_{23}A_2 + a_{33}B_2 \\
\frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} &= \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = 0
\end{aligned}
\right.
\tag{10}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} &= 2\,(a_{23}A_3 + a_{33}B_3) \\
\frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} &= \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = 0.
\end{aligned}
\right.
\tag{11}
$$

Din relaţiile (9), (10) şi (11) se observă că a_{22}, a_{23} şi a_{33} sînt funcţii numai de x^1, şi prin urmare mai avem :

$$(12)\qquad \begin{aligned} a_{22}A_2 + a_{23}B_2 &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = \varphi(x^1) \\ a_{23}A_3 + a_{33}B_3 &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = \psi(x^1), \end{aligned}$$

unde $\varphi(x^1)$ şi $\psi(x^1)$ sînt funcţii oarecare de x^1.

Ţinînd cont de a doua ecuaţie din (7) şi de ultima din (8) putem scrie

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = \varphi(x^1) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = \psi(x^1)$$

de unde după integrare obţinem :

$$(13)\qquad \begin{aligned} a_{12} &= x^2\,\varphi(x^1) + f\,(x^1, x^3) \\ a_{13} &= x^3\,\psi(x^1) + g\,(x^1, x^2). \end{aligned}$$

Comparînd prima ecuaţie din (10) cu ultima din (7) şi a doua din (8) avem

$$(14)\qquad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = \omega\,(x^1)$$

deoarece şi a_{23} depinde numai de x^1. Avînd în vedere egalităţile (13) şi (14) obţinem :

$$\frac{\partial f}{\partial x^3} + \frac{\partial g}{\partial x^2} = \omega(x^1),$$

egalitate care are loc numai dacă

$$f(x^1, x^3) = x^3 f^*(x^1) \quad \text{şi} \quad g(x^1, x^2) = x^2 g^*(x^1)$$

şi astfel expresiile lui a_{12} respectiv a_{13} devin

$$(15)\qquad \begin{aligned} a_{12} &= x^2\,\varphi\,(x^1) + x^3 f^*\,(x^1) \\ a_{13} &= x^2\,g^*(x^1) + x^3\,\psi\,(x^1) \end{aligned}$$

de unde mai avem

$$(16)\qquad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = f^*(x^1)\,; \qquad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = g^*(x^1).$$

Pe baza ecuaţiilor din (7), (8), (12) şi relaţiilor (16), putem scrie sistemele

$$(17)\qquad \begin{aligned} a_{22}(x^1)A_2 + a_{23}(x^1)B_2 &= \varphi\,(x^1) \\ a_{23}(x^1)A_2 + a_{33}(x^1)B_2 &= g^*(x^1) \end{aligned}$$

şi

$$(18)\qquad \begin{aligned} a_{22}(x^1)A_3 + a_{23}(x^1)B_3 &= f^*(x^1) \\ a_{23}(x^1)A_3 + a_{33}(x^1)B_3 &= \psi\,(x^1). \end{aligned}$$

Determinantul sistemului $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ este nenul. Într-adevăr, dacă $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$, rezultă că

$$a_{22} = \lambda a_{23} \quad \text{și} \quad a_{23} = \lambda a_{33}, \tag{19}$$

unde λ este un factor de proporționalitate. Ținînd cont de relațiile (19) și expresiile din sistemul (17) și (18), deducem : $\varphi(x^1) = \lambda g^*(x^1)$ respectiv $f^*(x^1) = \lambda\psi(x^1)$, și expresiile (15) ne dau $a_{12} = \lambda a_{13}$ care împreună cu (19) ne arată că $|a_{ij}| = 0$. Însă $|a_{ij}| \neq 0$, pentru că spațiul riemannian V_3 l-am presupus nesingular.

Astfel, sistemele (17) și (18) au soluții bine determinate și prin urmare A_2, B_2, A_3 și B_3 sînt funcții numai de x^1.

După acest rezultat important vom scrie condițiile de integrabilitate ale ecuațiilor (6)—(11). Înainte de toate observăm că condițiile de integrabilitate trebuie studiate numai pentru tensorii metrici a_{11}, a_{12}, a_{13} deoarece ceilalți depind numai de x^1.

De asemenea în cele ce urmează vom ține cont că A_2, B_2, A_3, B_3 sînt funcții numai de x^1.

Însă $\dfrac{\partial^2 a_{12}}{\partial x^2 \partial x^3} = \dfrac{\partial^2 a_{12}}{\partial x^3 \partial x^2} = 0$; $\dfrac{\partial^2 a_{13}}{\partial x^2 \partial x^3} = \dfrac{\partial^2 a_{12}}{\partial x^3 \partial x^2} = 0$ și $\dfrac{\partial^2 a_{11}}{\partial x^2 \partial x^3} = \dfrac{\partial^2 a_{11}}{\partial x^3 \partial x^2}$ este verificat identic.

Punînd celelalte condiții de integrabilitate obținem

$$a_{22}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} + A_2^2 + B_2A_3\right) + a_{23}\left(\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} + A_2B_2 + B_2B_3\right) = 0 \tag{20}$$

$$a_{23}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} + A_2^2 + B_2A_3\right) + a_{33}\left(\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} + A_2B_2 + B_2B_3\right) = 0 \tag{20'}$$

$$a_{12}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} + A_2^2 + B_2A_3\right) + a_{13}\left(\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} + A_2B_2 + B_2B_3\right) = 0 \tag{20''}$$

$$a_{22}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} + A_2A_3 + A_3B_3\right) + a_{23}\left(\frac{\partial B_3}{\partial x^1} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial B_1}{\partial x^3} + B_2A_3 + B_3^2\right) = 0 \tag{21}$$

$$(21') \qquad a_{23}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} + A_2A_3 + A_3B_3\right) + a_{33}\left(\frac{\partial B_3}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^3} + B_2A_3 + B_3^2\right) = 0$$

$$(21'') \qquad a_{12}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} + A_2A_3 + A_3B_3\right) + a_{13}\left(\frac{\partial B_3}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^3} + B_2A_3 + B_3^2\right) = 0.$$

Din egalitățile (20), (20′), (20″) pe de o parte și din (21), (21′), (21″) pe de altă parte, deducem:

$$(22) \qquad \begin{array}{ll} \dfrac{\partial A_2}{\partial x^1} - \dfrac{\partial A_1}{\partial x^2} + A_2^2 + B_2A_3 = 0, & \dfrac{\partial A_3}{\partial x^1} - \dfrac{\partial A_1}{\partial x^3} + A_2A_3 + A_3B_3 = 0, \\ \dfrac{\partial B_2}{\partial x^1} - \dfrac{\partial B_1}{\partial x^2} + A_2B_2 + B_2B_3 = 0, & \dfrac{\partial B_3}{\partial x^1} - \dfrac{\partial B_1}{\partial x^3} + B_2A_3 + B_3^2 = 0, \end{array}$$

deoarece $|a_{ij}| \neq 0$. Avem deci

TEOREMA 1. *Condiția necesară și suficientă ca sistemul de ecuații diferențiale de ordinul doi (1), să admită ca soluție curbele integrale care pot fi considerate ca geodezicele unui spațiu riemannian V_3 este ca coeficienții ecuațiilor să îndeplinească următoarele condiții: A_2, B_2, A_3, B_3 să fie funcții numai de x și să verifice ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale:*

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}x} + A_2^2 + B_2A_3, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}x} + B_2(A_2 + B_3),$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}x} + A_3(A_2 + B_3), \qquad \frac{\partial B_1}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}B_3}{\mathrm{d}x} + B_3^2 + B_2A_3.$$

Din rezultatele enunțate în această teoremă mai rezultă că A_1 și B_1 trebuie să fie funcții liniare în y și z.

II

Vom studia în cele ce urmează proprietățile spațiului riemannian V_3 care admit ca geodezice curbele integrale ale sistemului (1). Pentru aceasta vom calcula componentele tensorului de curbură R^i_{jkl}, care sînt date de formulele

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \left|\begin{smallmatrix} i \\ jl \end{smallmatrix}\right|}{\partial x^k} - \frac{\partial \left|\begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix}\right|}{\partial x^l} + \left|\begin{matrix} i \\ sk \end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix} s \\ jl \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} i \\ sl \end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix} s \\ jk \end{matrix}\right|.$$

După cum se știe, acest tensor este strîmb simetric în indicile k și l.

Se observă, ținînd seama de (4), că pentru componentele tensorului de curbură avem:

$$R^1_{jkl} = 0 \quad (j, k, l = 1, 2, 3); \quad R^i_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (i = 1, 2, 3; \quad \alpha, \beta, \gamma = 2, 3).$$

De asemenea sînt nule toate componentele pentru care doi dintre indicii inferiori sînt mai mari decît 1, deoarece A_2, B_2, A_3, B_3 sînt funcții numai de x^1. Ne rămîn deci numai componentele R^2_{112}, R^2_{113}, R^3_{112} și R^3_{113}, care au expresiile

$$R^2_{112} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} + A_2^2 + B_2 A_3, \qquad R^2_{113} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} + A_2 A_3 + A_3 B_3$$

$$R^3_{112} = \frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} + B_2 A_2 + B_2 B_3, \qquad R^3_{113} = \frac{\partial B_3}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^3} + B_2 A_3 + B_3^2$$

și aceste componente pe baza lui (22) sînt de asemenea nule. Am ajuns astfel la următorul rezultat:

TEOREMA 2. *Spațiul riemannian V_3 care admite ca geodezice curbele integrale ale sistemului de ecuații diferențiale de ordinul doi (1) este un spațiu al lui Riemann local euclidian.*

Soluțiile sistemului (1) pot fi considerate ca geodezicele nu numai a spațiului riemannian cu conexiunea lui Levy-Civita dat de (4), care satisfac condițiile teoremei 1, ci a tuturor spațiilor riemanniene proiectiv echivalente cu acest spațiu.

Într-adevăr, o schimbare a parametrului t într-un nou parametru $\bar{t}$ revine la o transformare proiectivă a conexiunii

$$(23) \qquad \overline{\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|} = \left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right| + \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j$$

care după cum se știe păstrează curbele geodezice ([2], vol. I). Cantitățile φ_k sînt componentele unui vector covariant.

Spațiul riemannian fiind local euclidian, există un sistem de coordonate în care cantitățile $\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|$ sînt toate nule, și (23) în acest caz devine:

$$(24) \qquad \overline{\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j \qquad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Un spațiu al lui Riemann cu conexiunea lui Levy-Civita de forma (24) este un spațiu V_3 proiectiv. După teorema lui Weyl însă un spațiu al lui Riemann proiectiv este un spațiu cu curbură constantă și reciproc. Cu aceasta putem enunța

TEOREMA 3. ***Spațiul riemannian V_3 în care curbele integrale ale sistemului (1) pot fi considerate ca geodezicele acestui spațiu este un spațiu al lui Riemann cu curbură constantă.***

III

Rezultatele precedente ne permit să tragem o concluzie importantă referitor la problema reducerii la forma canonică a sistemului de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi (1). Conform teoremei 2, cu ajutorul unei transformări de coordonate $x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3)$, $(i = 1, 2, 3)$, putem obţine un sistem de coordonate în care toate simbolurile lui Christoffel de-a doua speţă să fie nule. Avem deci

TEOREMA 4. *Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi (1) să-l putem reduce la forma canonică*

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0 \qquad \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = 0 \tag{25}$$

este ca coeficienţii sistemului să verifice condiţiile din teorema 1.

Primită la redacţie la 15 decembrie 1965

Institutul Pedagogic, Tîrgu-Mureş

BIBLIOGRAFIE

1. MIKLÓS FARKAS, *Másodrendü közönséges differenciálegyenletek egy osztályának differenciál geometriai vizsgálata.* Mat. Lapok — 1962, 4 sz. Budapest.

2. GH. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială.* Vol. I şi II, Bucureşti, 1962.

UN EXEMPLU DE CURBĂ CARE UMPLE UN CUB k-DIMENSIONAL

DE

CONSTANTIN NICULESCU

În această Notă ne propunem să demonstrăm următoarea

TEOREMĂ. *Fie* $f(x)$ *o funcție continuă, pară, periodică de perioadă* $\omega = 2b$ $(b \in N)$ *a cărei restricție la intervalul* $[0, b]$ *o definim astfel*:

$$f(x) = \begin{cases} p & \textit{dacă } \dfrac{(b+1)p}{b+2} \leqslant x \leqslant \dfrac{(b+1)(p+1)-1}{b+2} \\ (2+b)x - (p+1)b & \textit{dacă } \dfrac{(b+1)(p+1)-1}{b+2} \leqslant x \leqslant \dfrac{(b+1)(p+1)}{b+2} \end{cases}$$

unde $p = 0, 1, \ldots, b$. *Curba definită pentru* $0 \leqslant t \leqslant b$ *prin*:

$$x_1(t) = \frac{b}{b+1} f(t) + \frac{b}{(b+1)^2} f[(b+2)^k t] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{b}{(b+1)^n} f[(b+2)^{kn-k} t] + \ldots$$

$$x_2(t) = \frac{b}{b+1} f[(b+2)t] + \frac{b}{(b+1)^2} f(b+2)^{k+1} t + \ldots +$$

$$+ \frac{b}{(b+1)^n} f[(b+2)^{kn-k+1} t] + \ldots$$

. . . .

$$x_k(t) = \frac{b}{b+1} f[(b+2)^{k-1} t] + \frac{b}{(b+1)^2} f[(b+2)^{2k-1} t] + \ldots$$

trece prin toate punctele cubului k-dimensional:

$$(K) \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant b \quad , \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant b, \ldots, 0 \leqslant x_k \leqslant b.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 2, P. 281–283, BUCUREȘTI, 1967

Demonstrație. Convergența uniformă a seriilor ce reprezintă pe $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)$ e aproape imediată. O vom demonstra numai pentru seria care are ca sumă pe $x_1(t)$, pentru celelalte raționamentul fiind identic. Să notăm :

$$f_n(t) = \frac{b}{(b+1)^n} f\,[(b+2)^{kn-k}].$$

Conform definiției lui f vom putea scrie :

$$\left| f_n(t) \right| \leqslant \frac{b^2}{(b+1)^n}.$$

Șirul de termen general $a_n = \dfrac{b^2}{(b+1)^n}$ converge către zero și deci, seria

$$x_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

e uniform convergentă. Să observăm că :

$$0 \leqslant x_i(t) \leqslant b$$

pentru $0 \leqslant t \leqslant b$ și $1 \leqslant i \leqslant k$. De asemenea, oricare ar fi $i\ (1 \leqslant i \leqslant k)$, $x_i(t)$ e continuă pentru $t \in [0, b]$, conform considerațiilor anterioare.

Fie $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{k0}) \in K$. Într-o reprezentare $b+1$-adică, x_{10}, $x_{20}, \ldots, x_{k0}$ se scriu :

$$x_{10} = \frac{b}{b+1} a_0 + \frac{b}{(b+1)^2} a_k + \ldots + \frac{b}{(b+1)^n} a_{kn-k} + \ldots$$

$$x_{20} = \frac{b}{b+1} a_1 + \frac{b}{(b+1)^2} a_{k+1} + \ldots + \frac{b}{(b+1)^n} a_{kn-k+1} + \ldots$$

. . . .

$$x_{k0} = \frac{b}{b+1} a_{k-1} + \frac{b}{(b+1)^2} a_{2k-1} + \ldots + \frac{b}{(b+1)^n} a_{kn-1} + \ldots.$$

cu $a_n = 0, 1, \ldots$ sau b. Pentru :

$$t_0 = \frac{b+1}{b+2} a_0 + \frac{b+1}{(b+2)^2} a_1 + \ldots + \frac{b+1}{(b+2)^n} a_{n-1} + \ldots$$

avem

$$x_i(t_0) = x_{i0}$$

oricare ar fi $1 \leqslant i \leqslant k$. Într-adevăr, pentru $n = 0, 1, \ldots$ vom avea :

$$(b+2)^n t_0 = (b+1)\,c + \frac{b+1}{b+2} a_n + \frac{b+1}{(b+2)^2} a_{n+1} + \ldots$$

cu c întreg. Dacă $a_n = i$ $(0 \leqslant i \leqslant b)$, atunci :

$$\frac{b+1}{b+2} \leqslant \frac{(b+1)\,a_n}{b+2} + \frac{(b+1)\,a_{n+1}}{(b+2)^2} + \ldots \leqslant \frac{b+1}{b+2}\,i + \\ + \frac{(b+1)\,b}{b+2}\cdot\frac{b+2}{b+1} = \frac{(b+1)\,(i+1)-1}{b+2}.$$

Conform definiţiei funcţiei $f(x)$, rezultă :

$$f\,[(b+2)^n\,t_0] = i = a_n.$$

Înlocuind pe t_0 în (1), vom obţine

$$x_1(t_0) = \frac{ba_0}{b+1} + \frac{ba_k}{(b+1)^2} + \ldots + \frac{ba_{kn-k}}{(b+1)^n} + \ldots = x_{10}$$

. . . .

Observaţie. a) Funcţia $f(t)$ care intervine în reprezentarea parametrică a curbei e o generalizare a celei folosite de J. Schoenberg pentru a obţine o curbă care trece prin toate punctele unui pătrat (a se vedea, de exemplu, [1]).

b) Pentru $k = 3$ şi $b = 1$, obţinem exemplul dat de Marcel Roşculeţ [2].

Primită la redacţie la 3 septembrie 1966

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Manual de analiză matematică*, vol. II, Ed. didactică şi pedagogică, 1964.
2. Marcel N. Roşculeţ, *Un exemplu de curbă care umple un volum*. St. cerc. mat., **18**, *1*, 3–5 (1966).

CURBE PE VARIETĂȚI V_n^m DINTR-UN SPAȚIU RIEMANN V_n

DE

PETRE STAVRE

Se stabilesc cîteva rezultate relative la curbele de pe varietăți V_n^m din V_n și se definesc curbele (S) de pe V_n^{n-1} din V_n pentru care se dă o teoremă de tip Enneper.

§ 1. Fie (C) o curbă în V_n (riemannian) dată prin

$$x^\lambda = x^\lambda(s) \tag{1.1}$$

regulată de clasă necesară (s = abscisa curbilinie) iar

$$\underset{1}{I}^\lambda = \underset{1}{I}^\lambda(s) \qquad (g_{\lambda\mu}\underset{1}{I}^\lambda \underset{1}{I}^\mu = 1) \tag{1.2}$$

o familie de direcţii orientate, definite pe (C).

Dacă notăm cu δ operatorul de diferenţiere covariantă în V_n din [1], putem asocia familiei (1.2) un sistem complet de invarianţi și n-uplul $(\underset{1}{I}^\lambda \underset{2}{I}^\lambda \ldots \underset{n}{I}^\lambda)$ ortonormat și orientat pozitiv. Adică putem stabili reperul și formulele Frenet ale familiei (1.2),

$$\frac{\delta}{ds}\underset{a}{I}^\lambda = -K_{a-1}\underset{a-1}{I}^\lambda + K_a \underset{a+1}{I}^\lambda; \; a = 1, 2, \ldots, n, \; K_0 = K_n = 0. \tag{1.3}$$

În [2] se dă o teoremă de existenţă și unicitate cînd invarianţii familiei sînt daţi (cît și o interpretare a invarianţilor).

În [3], pentru cazul cînd (1.2) sînt tangenţi curbei (C), s-a introdus un alt sistem de invarianţi, a căror interpretare geometrică este dată în ipoteza că (C) este scufundată într-un E_n (euclidian).

În [5] se extind rezultatele din [3] și pentru familii de direcţie (1.2) dîndu-se interpretarea invarianţilor respectivi ai familiei (1.2) definită pe (C) din V_n, cît și o teoremă de existenţă și unicitate în cazul cînd invarianţii sînt daţi.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 2, P. 285–293, BUCUREȘTI, 1967

Fie dat (1.2) definită în $M \in (C)$ din V_n și n-upul ortonormat asociat $(\underset{1}{I}^\lambda = \underset{1}{\widetilde{I}}^\lambda,\ \underset{2}{I}^\lambda = \underset{2}{\widetilde{I}}^\lambda,\ \underset{3}{\widetilde{I}}^\lambda, \ldots, \underset{a}{\widetilde{I}}^\lambda)$ (orientat pozitiv), (K_1, T_{n-1}), $a = 3, \ldots, n$, invarianții respectivi (curbura și torsiunile) iar

$$(1.4)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \underset{i}{\widetilde{I}}^\lambda \\ \dfrac{\delta}{\mathrm{d}s} \underset{1}{\widetilde{I}}^\lambda = K_1 \underset{2}{\widetilde{I}}^\lambda \\ \dfrac{\delta}{\mathrm{d}s} \underset{2}{\widetilde{I}}^\lambda = - K_1 \widetilde{I}_1^\lambda - T_{\alpha-1} \underset{\alpha}{\widetilde{I}}^\lambda \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\delta}{\mathrm{d}s} \underset{p}{\widetilde{I}}^\lambda = T_{p-1} \underset{2}{\widetilde{I}}^\lambda \end{cases} \qquad \text{(sumare după } \alpha = 3, \ldots, n)$$

formulele Frenet ale familiei (unde K_1, T_{a-1} au interpretarea geometrică amintită în [5]).

Fie acum o varietate V_n^m din V_n cu torsiunea $T_{\lambda\mu}^{\tau}$ și tensor metric $g'_{\lambda\mu}$. Considerînd acum curbe (C) pe V_n^m din V_n, familiei (1.2) i se poate asocia în $M \in (C)$ un sistem de invarianți (prin procedeul [2]), R_a, $R_{a\alpha}$, $\overline{R}_{\alpha\beta}$ $(a = 1, \ldots, n;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, n - m)$ și un reper invariant

$$T(M;\ \underset{1}{i}^\lambda = \underset{1}{I}^\lambda = \underset{1}{\widetilde{I}}^\lambda;\ \underset{2}{i}^\lambda, \underset{3}{i}^\lambda, \underset{3}{i}^\lambda, \ldots, \underset{m}{i}^\lambda;\ \underset{1}{n}^\lambda, \ldots, \underset{n-m}{n}^\lambda)$$

prin

$$(1.5)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta}{\mathrm{d}s} \underset{a}{i}^\lambda = - R_{a-1} \underset{a-1}{i}^\lambda + R_a \underset{a+1}{i}^\lambda + \sum\limits_{\beta=1}^{n-m} R_{a\beta} \underset{\beta}{n}^\lambda & a = 1, 2, \ldots, m \\ \dfrac{\delta}{\mathrm{d}s} \underset{\alpha}{n}^\lambda = - \sum\limits_{b=1}^{m} R_{b\alpha} \underset{b}{i}^\lambda + \sum\limits_{\beta=1}^{n-m} \overline{R}_{\alpha\beta} \underset{\beta}{n}^\lambda & \alpha = 1, 2, \ldots, n - m \\ \dfrac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j \underset{j}{i}^\lambda \ \text{cu} \ \sum\limits_{j=1}^{m} a_j^2 = 1 \end{cases}$$

cu

$$\begin{array}{l} (1.5') \\ \text{pentru} \\ \mu \leqslant m \end{array} \begin{cases} \underset{a}{R} > 0\ (a = 1, 2, \ldots, m - 2),\ \underset{0}{R} = \underset{m}{R} = 0 \\ R_{a\alpha} > 0\ \ (a = 1, \ldots, \mu - 1, \text{ unde } \mu = n - m) \\ R_{a\alpha} = 0\ (a < \alpha)\ \ \overline{R}_{\alpha\beta} + \overline{R}_{\beta\alpha} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1.5'') \\ \text{pentru} \\ \mu > m \end{array} \begin{cases} R_a > 0\ \ (a = 1, 2, \ldots, m - 1),\ R_0 = R_m = 0 \\ R_{\alpha\alpha} > 0\ \ (\alpha = 1, \ldots) \qquad\qquad R_{a\beta} = 0\ \ (a < \beta) \\ \overline{R}_{\alpha\beta} + \overline{R}_{\beta\alpha} = 0,\ \overline{R}_{p,m+p} > 0,\ \overline{R}_{p,m+q} = 0 \\ \qquad p = 1, 2, \ldots, \mu - m - 1,\ q > p \end{cases}$$

unde :

— versorii ($\underset{1}{i} = \underset{1}{\widetilde{I}^\lambda}, \underset{2}{i^\lambda}, \dots, \underset{m}{i^\lambda}$) formează un m-uplu ortonormat în varietatea liniară tangentă varietăţii V_n^m în punctul M (generic) al lui $(C) \in V_n^m$ din $V_n\left(\text{căreia considerăm că-i aparţine şi vectorul tangent } \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}\right)$;

— versorii $(\underset{1}{n^\lambda}\underset{2}{n^\lambda} \dots \underset{\mu}{n^\lambda})$ formează un $(n - m)$-uplu ortonormat în varietatea liniară normală varietăţii V_n^m în punctul N generic al lu $(C) \in V_n^m$ din V_n ;

— n-uplul $(\underset{1}{i^\lambda}\underset{2}{i^\lambda} \dots \underset{m}{i^\lambda} ; \underset{1}{n^\lambda} \dots \underset{n-m}{n^\lambda})$ este ortonormat, orientat pozitiv.

Denumiri :

— R_a, $R_{a\alpha}$, $R_{\alpha\beta}$, vor fi numiţi invarianţii familiei $(\underset{1}{\widetilde{I}^\lambda})$ în lungul lui (C) pe V_n^m (pe cînd K_1, T_{a-1}, $a = 3, \dots, n$, erau invarianţii lui $(\underset{1}{\widetilde{I}^\lambda})$ în lungul lui (C) din V_n).

— R_a se va numi curbură geodezică de rang a pentru familia $\underset{1}{\widetilde{I}^\lambda}$ în V_n^m, iar R_{a1} $(a > 1)$ se va numi torsiune geodezică de rang $(a - 1)$.

— R_{11} se va numi curbura normală a familiei (1.2).

— Vectorul $(\underset{a}{i^\lambda})$ $(a = 1, \dots, m)$ se va numi vector geodezic de rang a al familiei (1.2).

§ 2. *Relaţii între invarianţii familiei.* (Formule de tip Meusnier ş Bonnet). Considerînd curba (C) dată în V_n, avem (1.4) şi o dată dat V_n^m avem (1.5). Putem scrie deci

$$\underset{r}{\widetilde{I}^\lambda} = \sum_{a=1}^{m} \cos \varphi_{ra} \underset{a}{i^\lambda} + \sum_{\alpha=1}^{n-m} \cos \psi_{r\alpha} \underset{\alpha}{n^\lambda}, \qquad r = 1, \dots, n \tag{2.1}$$

Deoarece $\underset{1}{\widetilde{I}^\lambda} = \underset{1}{i^\lambda}$, avem

$$\cos \varphi_{1a} = \delta_a^1, \ \cos \psi_{1\alpha} = 0, \ \cos \varphi_{r1} = \delta_1^r \quad \begin{array}{l} a = 1, \dots, m \\ r = 1, \dots, n \\ \alpha = 1, \dots, n - m \end{array} \tag{2.2}$$

Făcînd $a = 1$ în (1.5) şi ţinînd seama de (1.4) şi (2.1), avem

$$\cos \varphi_{2a} = \frac{R_1}{K_1} \delta_2^a, \ (a = 1, \dots, m), \ \cos \psi_{2\alpha} = \frac{R_{11}}{K_1} \delta_2^{\alpha+1}, \ (\alpha = 1, \dots, \mu) \tag{2.3}$$

$$R_1^2 + R_{11}^2 = K_1^2. \tag{2.4}$$

Derivînd (2.1) avem, ţinînd seama de (1.4) şi (2.3):

$$\begin{array}{rl} (2.5) & \left\{\begin{array}{l} K_1 = \cos\varphi_{22} R_1 + \cos\psi_{21} R_{11} \\ -\sum\limits_{p=3}^{n} T_{p-1}\cos\varphi_{pk} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\varphi_{2k} + \cos\varphi_{2k-1}R_{k-1} - \cos\varphi_{2k+1}R_k - \\ -\cos\psi_{21}R_{k1},\ k=2,\ldots,m,\ R_0 = R_m = 0,\ \beta = 1,\ldots,\mu \\ -\sum\limits_{p=3}^{n} T_{p-1}\cos\psi_{p\beta} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\psi_{2\beta} + \cos\varphi_{22}R_{2\beta} + \cos\psi_{21}\overline{R}_{1\beta} \end{array}\right. \\ \text{Pentru } (2.6) & \\ r=2 & \\ (2.7) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (2.8) & \left\{\begin{array}{l} 0 = \cos\varphi_{r2}R_1 + \sum\limits_{\alpha=1}^{\mu}\cos\psi_{r\alpha}R_{1\alpha} \\ T_{r-1}\cos\varphi_{22} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\varphi_{r2} - \cos\varphi_{r3}R_2 - \sum\limits_{\alpha=1}^{\mu}\cos\psi_{r\alpha}R_{2\alpha} \\ 0 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\varphi_{rp} + \cos\varphi_{r\,p-1}R_{p-1} - \cos\varphi_{r\,p+1}R_p - \sum\limits_{\alpha=1}^{\mu}\cos\psi_{r\alpha}R_{p\alpha} \\ T_{r-1}\cos\psi_{2\beta}\delta_1^{\beta} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\psi_{r\beta} + \sum\limits_{a=1}^{m}\cos\varphi_{ra}R_{a\beta} + \sum\limits_{\alpha=1}^{\mu}\cos\psi_{r\alpha}\overline{R}_{\alpha\beta} \end{array}\right. \\ (2.9) & \\ \text{Pentru } (r=3,\ldots,n & \\ (2.10)\ (p=3,\ldots,m) & \\ (2.11)\ (\beta=1,\ldots,\mu) & \end{array}$$

Se observă că (2.3), (2.4) sînt echivalente cu (2.5). Deci

TEOREMA 2.1. *Cunoscînd invarianţii* R_1 (*curbura geodezică de rang unu*), R_{11} (*curbura normală*) *ai familiei* $\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}$ *definită în lungul lui* (C) *de pe* $V_n^m \subset V_n$, *putem calcula invariantul* K_1 *prin relaţia* (2.4). *Deci* R_1, R_{11}, K_1, *calculate într-un punct dat* $M_0 \in (C)$, *sînt numere pitagorice.*

TEOREMA 2.2. *Pentru o curbă* (C) (*cu* $K_1 \neq 0$), *invarianţii* T_{r-1} ($r = 3, \ldots, n$) *ai familiei* $\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}$ *definită pe* (C) *din* V_n, *sînt bine determinaţi prin* (2.9) (*dacă* $R_1 \neq 0$) *sau de* (2.11) (*dacă* $R_{11} \neq 0$).

Dacă luăm $\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = \dfrac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s}$, atunci (1.4) sînt formulele Frenet ale curbei (C) din V_n, iar (1.5) ale lui $(C) \in V_n^m$ astfel încît ultima relaţie (1.5) se scrie acum $\dfrac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s} = \underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = \underset{1}{i}{}^{\lambda}$. În cele ce urmează vom lucra în această ipoteză. Invarianţii (K_1; T_{r-1}) (R_a, $R_{a\alpha}$, $\overline{R}_{\alpha\beta}$) vor fi numiţi acum invarianţii curbei (C) din V_n respectiv de pe V_n^m din V_n.

În acest caz, formulele (2.4), (2.5), ..., (2.11) vor fi numite formule de tip Meusnier şi Bonnet.

§ 3. *Linii speciale pe* V_n^m *din* V_n. Pentru ca o linie (C) de pe

$$V_n^m \subset V_n \tag{3.1}$$

să fie linie asimptotică de rang $k < m$, este necesar şi suficient să avem:

$$R_{s\alpha} = 0,\ (s = 1, \ldots, k;\ \alpha = 1, \ldots, \mu) \tag{3.2}$$

Dacă (C) este o curbă asimptotică de rang $k=1$ pe V_n^m din V_n $(R_{1\alpha}=0)$, obținem :

— Din (2.3), (2.4)

$$R_1=K_1\,;\ \cos\psi_{2\alpha}=0,\ \cos\varphi_{2a}=\delta_2^a\begin{pmatrix}a=1,\ldots,m\\ \alpha=1,\ldots,\mu\end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

— Din (3.3), (2.6), (2.7)

$$-\sum_{p=3}^{n}T_{p-1}\cos\varphi_{pj}=\delta_3^j R_2, \qquad (j=2,\ldots,m) \tag{3.4}$$

$$-\sum_{p=3}^{n}T_{p-1}\cos\psi_{p\beta}=R_{2\beta}, \qquad (\beta=1,\ldots,\mu). \tag{3.5}$$

— Din (2.8), (2.9) (în ipoteza $R_1\neq 0$)

$$\cos\varphi_{r2}=0\ (\text{și deci }\cos\varphi_{a2}=\delta_2^a,\ a=1,\ldots,m\,;\ \underset{2}{\widetilde{I}^\lambda}=\underset{2}{i^\lambda}) \tag{3.6}$$

$$T_{r-1}=-\cos\varphi_{r3}R_2-\sum_{\alpha=1}^{\mu}\cos\psi_{r\alpha}R_{2\alpha}\ (r=3,\ldots,n). \tag{3.7}$$

Dacă (C) este linie asimptotică de rang $k=2$, din (3.5), (3.7) obținem (cum $R_{s\alpha}=0, s=1, 2$)

$$\sum_{p=3}^{n}T_{p-1}\cos\psi_{p\beta}=0, \tag{3.8}$$

$$T_{r-1}=-R_2\cos\varphi_{r3}, \qquad (r=3,\ldots,n). \tag{3.9}$$

Amplificînd (3.9) cu T_{r-1}, sumînd și ținînd seama de (3.4) găsim :

$$R_2=\sqrt{\sum_{r=1}^{n}T_{r-1}^2}. \tag{3.10}$$

Dacă (C) este linia asimptotică de rang $k=3$ (cum $R_{s\alpha}=0$, $s=1, 2, 3$), obținem din cele de mai sus și din (2.10) pentru $p=3$

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\varphi_{r3}-\cos\varphi_{r4}R_3\,;\ R_3=\sum_{r=3}^{n}\cos\varphi_{r4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\varphi_{r3}$$

(din $\cos\varphi_{14}=0$, $\cos\varphi_{24}=0$ și din condițiile de ortogonalitate). Sau

$$R_3=-\sum_{r=3}^{n}\cos\varphi_{r4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{T_{r-1}}{R_2}\right).$$

Dacă derivăm și ținem seama de (3.4), (3.10) (pentru $j=4$), avem

$$R_3=-\frac{1}{\sqrt{\sum_{p=3}^{n}T_{p-1}^2}}\sum_{r=3}^{n}\cos\varphi_{r4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}T_{r-1}. \tag{3.11}$$

În general, pentru o curbă (C) asimptotică de rang $k < m$ avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \cos \varphi_{rp} + \cos \varphi_{rp-1} R_{p-1} - \cos \varphi_{rp+1} R_p = 0, \; p = 3, \ldots, k < m.$$

Amplificînd cu $\cos \varphi_{rp+1}$ și sumînd avem:

$$R_p = \sum_{p=3}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \cos \varphi_{rp} \cos \varphi_{rp+1} \qquad (p = 3, \ldots, k < m). \tag{3.12}$$

Dacă ţinem seama de

$$\sum_{p=3}^{n} T^2_{p-1} = K_2 ; \; -\frac{1}{K_2} \sum \cos \varphi_{r4} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} (T_{r-1}) = R_3 ; \cdots \tag{3.12'}$$

(Vezi [3], [4]) și de (3.3), (3.10), (3.11), obţinem

$$R_1 = K_1 ; \; R_2 = K_2 ; \; R_3 = K_3 ; \ldots \tag{3.13}$$

Regăsim astfel pe această cale rezultatele din [2].

Așadar avem:

TEOREMA 3.1. *Dacă (C) de pe $V_n^m \subset V_n$ este curbă asimptotică de rang $k < m$, atunci curburile geodezice de rang* 1, 2, ..., k *sînt date de* (3.3), (3.10), (3.11), (3.12).

Fie acum o curbă (C) de pe $V_n^m \subset V_n$ pentru care avem $K_1 \neq 0$. Să presupunem că este o curbă antiparalelă pentru varietatea $V_n^m (R_1 = 0)$. Din (2.3) rezultă

$$\cos \varphi_{22} = 0. \tag{3.14}$$

Dacă punem condiţia ca linia (C) autoparalelă să fie și linie de curbură ($R_{a\alpha} = 0$, $a = 2, \ldots, m - 1$; $\alpha = 1, \ldots, \mu$), obţinem:

$$R_{11} = K_1 \tag{3.15}$$

$$R_a \equiv \sum_{r=3}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \cos \varphi_{ra+1} \qquad (a = 2, \ldots, m - 1) \tag{3.16}$$

TEOREMA 3.2. *Dacă (C) e linie autoparalelă pe $V_n^m \subset V_n$ și în același timp linie de curbură, atunci curbura normală și curburile geodezice R_a sînt date de* (3.15), (3.16).

Pentru o curbă asimptotică de rang $k = 1$, din (3.7) *amplificînd cu T_{r-1} și sumînd obţinem:*

$$\sum_{r=3}^{n} T^2_{r-1} = R_2^2 + \sum_{\alpha=1}^{\mu} R^2_{2\alpha}. \tag{3.7'}$$

TEOREMA 3.3. *Dacă (C) este linie asimptotică pe $V_n^m \subset V_n$ de rang $k = 1$, atunci între torsiunile curbei, curbura geodezică de rang 2 și invarietăţi $R_{2\alpha}$ există relaţia* (3.7′).

Această teoremă, împreună cu relaţia $R_1 = K_1$, formează o generalizare a unei teoreme cunoscute din teoria suprafeţelor.

Dacă curba este asimptotică de rang $k \geqslant 2$, relaţia (3.7′) duce la rezultatul (3.10).

§ 4. *Varietăți* V_n^{n-1} *din* V_n. Dacă facem $m = n - 1$, obținem din (1.5) formulele

$$\frac{\delta}{ds}\underset{a}{i}^{\lambda} = - R_{a-1}\underset{a-1}{i}^{\lambda} + R_a\underset{a+1}{i}^{\lambda} + R_{a1}\underset{1}{n}^{\lambda}\,; \quad \frac{\delta}{ds}\underset{1}{n}^{\lambda} = - \sum_{b=1}^{n-1} R_{b1}\underset{b}{i}^{\lambda}, \tag{4.1}$$

$$(R_0 = R_m = 0).$$

Avem și

$$\cos \varphi_{2a} = \frac{R_1}{K_1}\,\delta_2^a, \; a = 1, \ldots, n-1, \cos \psi_{21} = \frac{R_{11}}{K_1} \tag{4.2}$$

$$R_1^2 + R_{11}^2 = K_1^2. \tag{4.3}$$

(Relația (4.3) este relația ce are loc și în cazul unei curbe (C) de pe o uprafață din E_3).

$$K_1 = \cos \varphi_{22} R_1 + \cos \psi_{21} R_{11} \tag{4.4}$$

$$- \sum_{p=3}^{n} T_{p-1} \cos \varphi_{pk} = \frac{d}{ds} \cos \varphi_{2k} + \cos \varphi_{2k-1} R_{k-1} - \cos \varphi_{2k+1} R_k - \tag{4.5}$$

$$- \cos \psi_{21} R_{k1}, \qquad (k = 2, \ldots, n-1)$$

$$- \sum_{p=3}^{n} T_{p-1} \cos \psi_{p1} = \frac{d}{ds} \cos \psi_{21} + \cos \varphi_{22} R_{21} \tag{4.6}$$

$$0 = \cos \varphi_{r2} R_1 + \cos \psi_{r1} R_{11}, \qquad (r = 3, \ldots, n). \tag{4.7}$$

Din (4.7) obținem:

Curbura geodezică R_1 și curbura normală R_{11} sînt determinate de $\cos \varphi_{r2}$, $\cos \psi_{r1}$, pînă la un factor $C_r\,(r = 3, \ldots, n)$, adică

$$R_1 = C_r \cos \psi_{r1} \tag{4.8}$$

$$R_{11} = - C_r \cos \varphi_{r2}.$$

Din (2.9), (2.10), (2.11) mai obținem relația:

$$T_{r-1} \cos \varphi_{21} = \frac{d}{ds} \cos \varphi_{r2} - \cos \varphi_{r3} R_2 - \cos \psi_{r1} R_{21} \tag{4.9}$$

$$0 = \frac{d}{ds} \cos \varphi_{rp} + \cos \varphi_{rp-1} R_{p-1} - \cos \varphi_{rp+1} R_p - \cos \psi_{r1} R_{p1} \tag{4.10}$$

$$(p = 3, \ldots, n-1)$$

$$T_{r-1} \cos \psi_{21} = \frac{d}{ds} \cos \psi_{r1} + \sum_{a=1}^{n-1} \cos \varphi_{ra} R_{1a}. \tag{4.11}$$

Teoremele 2.1 și 2.2 rămîn adevărate.

În cazul teoremei 3.3 avem:

$$\cos \psi_{r1} = 0 \qquad (r = 3, \ldots, n) \tag{4.12}$$

$$\cos \psi_{21} = 1. \tag{4.13}$$

Din (4.12), (4.13), (2.2) obţinem

$$T_{r-1} = 0, \qquad (r = 3, \ldots, n). \tag{4.14}$$

Avem deci :

Teorema 4.1. *Dacă (C) e linie autoparalelă pe $V_n^m \subset V_n$ şi în acelaşi timp linie de curbură, atunci este o curbă plană (în sensul că torsiunile $T_{r-1} = 0$, $r = 3, \ldots, n$).*

În cazul cînd V_n^m este olonomă, rezultatul de mai sus duce la rezultatul găsit în [4] pe altă cale şi generalizează o bine cunoscută teoremă din teoria suprafeţelor.

Dacă curba (C) este o linie asimptotică de rang $k < n-1$ pe $V_n^{n-1} \subset V_n$, atunci avem :

$$R_{11} = 0 \tag{4.15}$$

$$R_1 = K_1 \tag{4.16}$$

$$-\sum_{p=3}^{n} T_{p-1} \cos \psi_{p1} = R_{21} \tag{4.17}$$

$$T_{r-1} = -\cos \varphi_{r3} R_2 - \cos \psi_{r1} R_{21}, \qquad (r = 3, \ldots, n). \tag{4.18}$$

Din (4.17), (4.18), (3.4) avem

$$\begin{aligned} \sum_{p=3}^{n} T_{p-1}^2 &= -\sum_{p=3}^{n} T_{p-1} \cos \varphi_{p3} R_2 + R_{21}^2 \\ \sum_{p=3}^{n} T_{p-1}^2 &= R_2^2 + R_{21}^2. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Avem deci

Teorema 4.2. *Dacă (C) este linie asimptotică de rang $k = 1$ pe $V_n^{n-1} \subset V_n$, atunci are loc relaţia* (4.19).

Ţinînd seama de (3.12′) şi (4.19) putem scrie

$$K_2^2 = R_2^2 + R_{21}^2. \tag{4.19'}$$

Relaţiile (4.19) (respectiv (4.19′)) şi (3.3) duc în cazul teoriei suprafeţelor din E_3 (cum $2\ R_0 = R_m = 0$, $k = 1 < m$, $n = 3$, $K_2 = T_2 = T =$ = torsiunea curbei din E_3) la rezultatul bine cunoscut :

„Dacă (C) este o linie asimptotică pe o suprafaţă din E_3, atunci curbura geodezică este egală cu curba lui (C), ($R_1 = K_1$) iar torsiunea geodezică este egală cu torsiunea curbei ($T_{21} = T$)”.

Deci teorema (4.2) împreună cu $R_1 = K_1$ respectiv relaţia (4.19′) generalizează teorema cunoscută din teoria suprafeţelor.

Dacă curba (C) este asimptotică de rang $k \geqslant 2$, relaţiile (4.19), (4.19′) duc la rezultatele cunoscute din paragraful precedent.

§ 5. *Curbe (S) pe varietăţi $V_n^{n-1} \subset V_n$.* Avem

Definiţie. Curbele (1) de pe $V_{n-1}^n \subset V_n$ pentru care avem :

$$\underset{1}{\widetilde{I}^\lambda} = \underset{1}{i^\lambda}, \underset{2}{\widetilde{I}^\lambda} = \underset{2}{i^\lambda}, \underset{3}{\widetilde{I}^\lambda} = \underset{3}{i^\lambda}, \ldots, \underset{k}{\widetilde{I}^\lambda} = \underset{k}{i^\lambda} \tag{5.1}$$

le numim curbe (δ) de rang $r = k - 1$ $(k \geqslant 2)$ pe $V_n^{n-1} \subset V_n$.

Din definiție rezultă:

TEOREMA 5.1. *Orice curbă* (S) *de pe* $V_n \subset V_n$ *este o curbă asimptotică pe* $V_n^{n-1} \subset V_n$ *de rang* $r = 1$.

În cazul $n = 3$, curbele (S) de pe $V_3^n \subset V_3$ coincid cu curbele asimptotice de pe $V_3^n \subset V_n$.

În [6] se dă pentru aceste curbe:

TEOREMA 5.2. *Dacă curba* (1) *este o curbă* (S) *pe* $V_n \subset V_n$ *de rang* $r = k - 1$, *atunci avem*

$$\sum_{a=1}^{k} (K_{1a1a} - K'_{1a1a}) = 2T_{21}T + T^2, \tag{5.2}$$

unde am notat

$$T = \sum_{p=k+1}^{n} T_{p-1} \cos \varphi_{1p} \tag{5.3}$$

(K_{1a1a}; K'_{1a1a}, sînt curburile lui V_n, V_n^{n-1} în bidirecțiile $\underset{1}{\widetilde{I^\lambda}}$; $\underset{a}{\widetilde{I^\lambda}}$, $a = 1, \ldots, k$).

Dacă V_n^{n-1} este V^{n-1} fără torsiune ($T_{\lambda\mu}^{\sigma} = 0$), atunci $T_{21} = 0$ și în acest caz pentru $n = 3$, (caz în care conform teoremei 5.1 curbele (S) coincid cu cele asimptotice), formula (5.2) duce la

$$-K^1 = T^2, \tag{5.4}$$

unde $T_2 = T =$ torsiunea curbei. Or, aceasta este chiar formula lui Enneper.

Primită la redacție la 3 iunie 1966

Institutul Pedagogic Craiova

BIBLIOGRAFIE

1. V. HLAVATY, *Les courbes de la variété générale à n dimension*, Mémorial des Sci. Math., **XIII**, *L* (1934).
2. R. MIRON, *Sur la geometrie des courbes des variétés* V^m *imergées dans les espaces de Riemann* V^n. C.R. de l'Acad. Sci., Paris, **254**, *7*, 1189.
3. GH. RIZESCU și N. N. TEODORESCU, *Asupra generalizării formulelor lui Frennet*. St. cerc. mat., **18**, *8* (1965).
4. N. N. TEODORESCU și GH. N. RIZESCU, *Extinderea unei teoreme din teoria suprafețelor*. St. cerc. mat., **18**, *1* (1966).
5. P. STAVRE, *Asupra formulelor Frennet ale unei familii de direcții definite pe o curbă* (*C*) *dintr-un spațiu Riemann* V_n. St. cerc. mat., **18** (1966).
6. P. STAVRE, *Curbe* (S) *pe varietăți* V_n^{n-1} *din spații Riemann* V_n. St. cerc. mat., **18** (1966).
7. GH. VRĂNCEANU, *Lecții de geometrie, diferențială*, vol. I, Ed. Acad. R.P.R., București, 1952.
8. A. SCHAUTEN, *Ricii calculus*, 1958.
9. K. YIANO, ST. PETRESCU, *Sur les espaces metriques non holonomes complementaire*. Disquisitiones Math. et Phys. **1**, *2* (1940).

SPAŢII CU CONVEXITATE (I)

DE

DAN VOICULESCU

În această lucrare se introduc axiomatic într-un spaţiu amorf segmente, semidrepte şi drepte astfel încît în acest spaţiu introducerea mulţimilor convexe apare ca naturală şi într-un cadru foarte general.

1. SEGMENTE, SEMIDREPTE, DREPTE

Considerăm o mulţime E, ale cărei elemente le vom numi puncte. Perechilor de puncte (a, b) din E le asociem submulţimile $E(a, b)$ numite segmente, astfel încît:

A. 1. $E(a, b) = E(b, a)$.

A. 2. $E(a, a) = \{a\}$.

A. 3. $E(a, b) \ni a$.

A. 4. $x \in E(a, b) \Rightarrow E(a, b) = E(a, x) \cup E(x, b)$.

A. 5. $x \in E(a, b) \Rightarrow E(a, x) \cap E(x, b) = \{x\}$.

A. 6. Dacă $E(x_1, x_2) \cap E(x_3, x_4) \supset \{x, y\}$ $(x \neq y)$, *atunci există doi indici* k, l $(k \neq l)$ *astfel încît* $E(x_k, x_l) \supset \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

P. 1. α) *Dacă* $x_1, x_2 \in E(a, b)$, *există o ordine* i_1, i_2 *a indicilor* 1, 2 *astfel încît* $E(a, x_{i_2}) \ni x_{i_1}$ *și* $E(x_{i_1}, b) \ni x_{i_2}$. *Punctele* a, b, x_1 x_2 *fiind date* $(x_1 \neq x_2)$, *ordinea este unică.*

β) *Notînd* $A_1 = E(a, x_{i_1})$, $A_2 = E(x_{i_1}, x_{i_2})$,

$A_3 = E(x_{i_2}, b)$, *avem* : $E(a, b) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $A_1 \cap A_2 = \{x_{i_1}\}$,

$$A_2 \cap A_3 = \{x_{i_2}\},\ A_1 \cap A_3 = \emptyset$$

Demonstraţie. Avem $E(a, b) = E(a, x_2) \cup E(x_2, b)$; ţinînd seama de A. 5 şi de $x_1 \neq x_2$, rezultă că este adevărată una singură din relaţiile: $E(a, x_2) \ni x_1$, $E(x_2, b) \ni x_1$.

ST. CERC. MAT., TOM. 19. NR. 2, P. 295–301, BUCUREŞTI. 1967

Să cercetăm primul caz, al doilea putînd fi rezolvat analog. Avem $E(a, b) = E(a, x_1) \cup E(x_1, b)$ şi din A.5 deducem alternativa $E(a, x_1) \ni x_2$ sau $E(x_1, b) \ni x_2$.

Vom arăta că prima relaţie este imposibilă. Din ipoteza $E(a, x_2) \ni x_1$, rezultă $E(a, x_1) \cap E(x_1, x_2) = \{x_1\}$ deci $E(a, x_1) \not\ni x_2$. Prin urmare $i_1 = 1$, $i_2 = 2$. Din felul în care am raţionat reiese imediat unicitatea ordinei.

Din $E(a, b) = E(a, x_{i_2}) \cup E(x_{i_2}, b) = E(a, x_{i_1}) \cup E(x_{i_1}, x_{i_2}) \cup E(x_{i_2}, b)$ deducem $E(a, b) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Relaţiile $x_{i_1} \in E(a, x_{i_2})$, $x_{i_2} \in E(x_{i_1}, b)$ şi A.5. ne dau relaţiile $A_1 \cap A_2 = \{x_{i_1}\}$ şi $A_2 \cap A_3 = \{x_{i_2}\}$.

Să presupunem că $x \in A_1 \cap A_3$; atunci am avea $x \in A_1 \cap E(x_{i_2}, b) \subset E(a, x_{i_1}) \cap E(x_{i_1}, b) = \{x_{i_1}\}$ şi $x \in E(a, x_{i_1}) \cap A_2 \subset E(\sigma, x_{i_2}) \cap E(x_{i_2}, b) = \{x_{i_2}\}$ deci $x_{i1} = x = x_{i_2}$ ceea ce ar implica $x_{i_1} = x_{i_2}$.

Observaţie. Proprietatea enunţată poate fi generalizată cu ajutorul inducţiei complete. Rezultatul general avînd o demonstraţie destul de lungă şi neintervenind în demonstraţiile celorlalte propoziţii ce urmează, ne vom mulţumi doar să-l enunţăm :

P. 1′. α) *Dacă* $E(x_1, x_n) \supset \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(n \geqslant 3)$, *atunci există o ordine* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *a indicilor* $1, 2, \ldots, n$ *astfel încît* $i_1 = 1$, $i_n = n$ *şi* $E(x_{i_j}, x_{i_{j+2}}) \ni x_{i_{j+1}}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-2)$.

Punctele x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *fiind date, ordinea este unică (presupunem punctele distincte).*

β) *Dacă* $A_k = E(x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, *atunci* $A_k \cap A_{k+1} = \{x_{i_{k+1}}\}$ *şi* $A_p \cap A_q = \varnothing$ *dacă* p, q *nu sînt consecutivi.*

DEFINIŢIA 1. *Se numeşte semidreaptă mulţimea :*

$$R(a, b) = E(a, b) \cup \{x : E(a, x) \ni b\} \quad (a \neq b).$$

Se numeşte dreaptă mulţimea:

$$L(a, b) = R(a, b) \cup R(b, a) \quad (a \neq b).$$

P. 2. *Dacă* $c \in R(a, b) - \{a\}$, *atunci* $R(a, c) = R(a, b)$.

Demonstraţie. Considerăm cazurile

I. $c \in E(a, b)$ şi fie $d \in R(a, b)$.

1) Dacă $d \in E(a, b)$, atunci $d \in R(a, c)$, conform *P*. 1.

2) Dacă $d \in \{x : E(a, x) \ni b\}$, atunci

$$E(a, d) \supset E(a, b) \ni c \text{ deci } d \in R(a, c).$$

II. $c \in \{x : E(a, x) \ni b)$ şi $d \in R(a, b)$.

1) Dacă $E(a, b) \ni d$, atunci

$$E(a, c) \supset E(a, b) \ni d.$$

2) Dacă $d \in \{x : E(a, x) \ni b\}$, atunci

$$E(a, d) \cap E(a, c) \supset \{a, b\}$$

și din A. 6 rezultă trei cazuri posibile :

α) $E(a, d) \ni c$

β) $E(a, c) \ni d$

γ) $E(c, d) \ni a$.

Trebuie arătat că de fapt al treilea caz e imposibil.
Într-adevăr, din γ) ar rezulta

$$E(a, c) \cap E(a, d) = \{a\}, \text{ dar } E(a, c) \cap E(a, d) \ni b.$$

Atunci $R(a, c) \supset R(a, b)$, dar $R(a, c) \ni b$ și cu același argument $R(a, b) \supset R(a, c)$, deci $R(a, b) = R(a, c)$.

P. 3. *Dacă* $A_1 = E(a, b)$, $A_2 = \{x : E(a, x) \ni b\}$, $A_3 = \{x : E(b, x) \ni a\}$, *atunci* $A_1 \cap A_2 = \{b\}$, $A_1 \cap A_3 = \{a\}$, $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ $(a \neq b)$.

Demonstrație. $A_1 \cap A_2 \ni b$. Să presupunem că există $c \in A_1 \cap A_2 - \{b\}$.
Atunci avem $E(a, b) \cap E(b, c) = \{b\}$. Dar atunci $E(a, b) \cap$ $\cap E(b, c) \ni c$ ceea ce e contradictoriu.

Analog dovedim că $A_1 \cap A_3 = \{a\}$.

Fie $c \in A_2 \cap A_3$, atunci $E(a, c) \ni b \Rightarrow E(a, b) \cap E(b, c) = \{b\}$ iar $E(b, c) \ni a$ ne-ar da $\{a, b\} \subset E(a, b) \cap E(b, c)$, ceea ce contrazice A. 5, deci $A_2 \cap A_3 = \emptyset$

P. 4. *Dacă* $c \in L(a, b) - \{a\}$, *atunci* $L(a, c) \supset L(a, b)$.

Demonstrație. Cu notațiile de la P. 3 avem de considerat trei cazuri :

I. $c \in A_1$

1) $x \in A_1$. P. 1 ne dă atunci alternativa :

$$E(a, x) \ni c \text{ sau } E(a, c) \ni x.$$

2) $x \in A_2$, $E(a, x) \ni b \Rightarrow E(a, x) \supset E(a, b) \ni c$.

3) $x \in A_3$, $E(b, x) \supset E(a, b) \supset \{a, c\}$

deci $E(b, x) = E(b, c) \cup E(c, x)$ și cum $E(b, c) \not\ni a$, rezultă $E(c, x) \ni a$.

II. $c \in A_2$.

1. $x \in A_1$ atunci $E(a, c) \supset E(a, b) \ni x$

2. $x \in A_2$, avem $E(a, x) \cap E(a, c) \supset \{a, b\}$ și deci din A. 6 rezultă trei posibilități : α) $E(a, x) \ni c$, β) $E(a, c) \ni x$, γ) $E(c, x) \ni a$.

După cum se vede, aceste trei posibilități (chiar dacă nu se realizează) confirmă ipoteza de demonstrat.

3. $x \in A_3$, avem atunci $E(a, c) \cap E(b, x) \supset \{a, b\}$ de unde, conform A. 6, rezultă şase posibilităţi :

1) $E(a, b) \supset \{c, x\}$

2) $E(a, c) \supset \{b, x\}$

3) $E(a, x) \supset \{b, c\}$

4) $E(b, c) \supset \{a, x\}$

5) $E(b, x) \supset \{a, c\}$

6) $E(c, x) \supset \{a, b\}$.

Trebuie excluse cazurile 1), 4), 5), celelalte confirmînd ipoteza.

1) Din P. 3 rezultă $b = c$, caz banal care nu intră în consideraţie deoarece din $c = b$ avem evident $L(a, b) = L(a, c)$.

4) Din $b \in E(a, c)$ rezultă $E(a, b) \cap E(b, c) = \{b\}$ deci $E(b, c) \not\ni a$.

5) Din $E(a, b) \ni c$ (vezi 4)) şi deoarece ar trebui ca $E(b, x) = E(a, b) \cup E(a, x)$, rezultă $E(a, x) \ni c$ şi atunci :

$$E(a, x) \supset E(a, c) \supset \{a, b\} \text{ deci } E(a, b) \cap E(a, x) \supset \{a, b\}$$

deci o contrazicere a lui A. 5.

III. $c \in A_3$

1. $x \in A_1$

$E(b, c) \ni a \Rightarrow E(b, c) = E(a, b) \cup E(a, c)$ şi deoarece $x \notin E(a, c)$[1] şi $E(b, c) \ni x$ reiese din P. 1 că $E(c, x) \ni a$.

2. $x \in A_2$, avem $E(b, c) \cap E(a, x) \supset \{a, b\}$ şi deci se prezintă şase posibilităţi :

1) $E(a, b) \supset \{c, x\}$

2) $E(a, c) \supset \{b, x\}$

3) $E(a, x) \supset \{b, c\}$

4) $E(b, c) \supset \{a, x\}$

5) $E(b, x) \supset \{a, c\}$

6) $E(c, x) \supset \{a, b\}$.

Trebuie discutate doar cazurile 1), 4), 5), celelalte fiind conforme ipotezei :

1) $E(a, b) \not\ni c$, deci acest caz este imposibil.

4) Am avea $E(b, c) = E(a, b) \cup E(a, c)$ şi atunci ar rezulta că $x \in E(a, c)$ ceea ce ne-ar da $x \in L(a, c)$.

---

[1] $x = a$ e un caz banal pe care nu-l tratăm aici.

5) Am avea $E(a, b) \cap E(a, x) \supset \{a, b\}$, ceea ce e incompatibil cu $E(b, x) \ni a$.

3. $x \in A_3$;

Avem atunci

$E(b, x) \cap E(b, c) \supset \{a, b\}$ şi deci trei posibilităţi:

1) $E(b, x) \ni c$, ceea ce împreună cu $E(b, x) = E(a, b) \cup E(a, x)$ şi $E(a, b) \not\ni c$ ne dă $E(a, x) \ni c$.

2) $E(b, c) \ni x$ care comparată cu $E(b, c) = E(a, b) \cup E(a, c)$ şi $x \notin E(a, b) - \{a\}$ ne dă $x \in E(a, c)$.

3) $E(x, c) \ni b$, atunci am avea $E(b, c) \cap E(b, x) \supset \{a, b\}$, ceea ce e în contradicţie cu

$$E(c, x) \ni b \text{ şi } A.\ 5.$$

P. 5. *$L(a, c) = L(a, b)$ dacă $c \in L(a, b) - \{a\}$.*

Demonstraţie. Aplicăm de două ori P. 4 în raport cu $c \in L(a, b) - \{a\}$ şi $b \in L(a, c) - \{a\}$ şi găsim : $L(a, c) \supset L(a, b)$ şi $L(a, b) \supset L(a, c)$ deci $L(a, b) = L(a, c)$.

P. 6. *Dacă c, $d \in L(a, b)$ şi $c \neq d$, atunci $L(a, b) = L(c, d)$.*

Demonstraţie. Dacă $\{c, d\} \cap \{a, b\} \neq \emptyset$, atunci aplicăm P. 5.

Dacă $\{c, d\} \cap \{a, b\} = \emptyset$, atunci avem conform P. 5 :

$$L(a, b) = L(a, c) = L(c, d).$$

P. 7. *Fiind date punctele diferite $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L(a, b)$, există doi indici i, j astfel încît $E(x_i, x_j) \supset \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.*

Demonstraţie. Cazurile $n = 1$, $n = 2$ sînt banale. În cazul $n = 3$ avem $L(a, b) = L(x_1, x_2)$ şi din definiţia dreptei rezultă că avem una din relaţiile : $x_3 \in E(x_1, x_2)$, $x_2 \in E(x_1, x_3)$, $x_1 \in E(x_2, x_3)$.

Cazul a n puncte se rezolvă luînd primele $n - 1$ puncte şi notînd cu x_i, x_j punctele astfel încît $E(x_i, x_j) \supset \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ reducem totul la cazul celor trei puncte x_i, x_j, x_n.

P. 8. *Fiind date punctele diferite $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R(a, b)$, există doi indici i, j astfel încît $E(x_i, x_j) \supset \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.*

Demonstraţie. Observăm că $R(a, b) \subset L(a, b)$ şi aplicăm P. 7.

Observaţie. Propoziţiile P. 7 şi P. 8 prezintă interes prin faptul că din concluzia lor putem scoate ipoteza pentru aplicarea lui P. 1'.

2. MULŢIMI CONVEXE

DEFINIŢIA 2. *O mulţime M este convexă dacă oricare ar fi x, $y \in M$, avem $E(x, y) \subset M$.*

P. 9. *Dacă C_ι $(\iota \in J)$ sînt mulţimi convexe, atunci şi $\bigcap_{\iota \in J} C_\iota$ este o mulţime convexă.*

Demonstrație. Dacă $x, y \in \bigcap_{\iota \in J} C_\iota$, atunci oricare ar fi $\iota \in J$ avem $x, y \in C_\iota$ și deci tot oricare ar fi $\iota \in J$ avem $E(x, y) \subset C_\iota$ și deci $E(x, y) \subset \bigcap_{\iota \in J} C_\iota$.

P. 10. *$E(a, b)$, $E(a, b) - \{a\}$, $E(a, b) - \{a, b\}$ sînt mulțimi convexe.*

Demonstrație. Dacă $x, y \in E(a, b)$, atunci din *P.* 1 β) rezultă

$$E(x, y) \subset E(a, b).$$

Dacă $x, y \in E(a, b) - \{a\}$, atunci tot conform P. 1 β) avem una din relațiile :

$$x \in E(b, y) \subset E(a, b) - \{a\}$$

sau

$$y \in E(b, x) \subset E(a, b) - \{a\}$$

și în oricare caz avem, după cum se vede ușor,

$$E(x, y) \subset E(a, b) - \{a\}.$$

Mulțimile $E(a, b) - \{a\}$ și $E(a, b) - \{b\}$ sînt deci convexe și aplicînd P. 9 rezultă că $E(a, b) - \{a, b\} = (E(a, b) - \{a\}) \cap (E(a, b) - \{b\})$ este convexă.

P. 11. $L(a, b)$ este o mulțime convexă.

Demonstrație. Conform P. 6, dacă $x \neq y$ și $x, y \in L(a, b)$, avem $L(a, b) = L(x, y)$. Dar din definiție rezultă că $L(x, y) \supset E(x, y)$.

P. 12. *$R(a, b)$ și $R(a, b) - \{a\}$ sînt mulțimi convexe.*

Demonstrație. Fie $x, y \in R(a, b)$. Conform P. 2 avem $R(a, b) = R(a, x)$ și deci alternativa : $E(a, x) \ni y$ sau $E(a, y) \ni x$.

Avem, atunci, fie $R(a, b) = R(a, x) \supset E(a, x) \supset E(x, y)$, fie $R(a, b) = R(a, y) \supset E(a, y) \supset E(x, y)$ și deci în orice caz $R(a, b) \supset E(x, y)$.

Demonstrația pentru $R(a, b) - \{a\}$ este analogă.

Deoarece $R(a, b) - \{a\} \subset R(a, b)$, rezultă, ca și mai înainte, alternativa $E(a, x) \ni y$ sau $E(a, y) \ni x$ care ne dă $R(a, b) - \{a\} = R(a, x) - \{a\} \supset E(a, x) - \{a\} \supset E(x, y)$ sau $R(a, b) - \{a\} = R(a, y) - \{a\} \supset E(a, y) - \{a\} \supset E(x, y)$.

DEFINIȚIA 3. *Se numește acoperire convexă $E(M)$ a unei mulțimi M, intersecția tuturor mulțimilor convexe care conțin pe M.*

P. 13. *$E(M)$ e o mulțime convexă.*

Demonstrație. Prin definiție $E(M)$ este o intersecție de mulțimi convexe și deci conform P. 9 este ea însăși convexă.

P. 14. *Pentru ca M să fie o mulțime convexă, e necesar și suficient ca $E(M) = M$.*

Demonstrație. Dacă $M = E(M)$, atunci M este convexă pentru că $E(M)$ este convexă (P. 13).

Dacă M este convexă, atunci conform definiției $M \supset E(M)$. Pe de altă parte, tot conform definiției, oricare ar fi M, avem $E(M) \supset M$, deci $M = E(M)$.

P. 15. $E(E(M)) = E(M)$.

Demonstrație. $E(M)$ este convexă și aplicăm P. 14.

P. 16. $M_1 \subset M_2 \Rightarrow E(M_1) \subset E(M_2)$.

Demonstrație. Orice mulțime convexă ce conține pe M_2 conține și pe M_1, deci $E(M_2) \supset E(M_1)$.

P. 17. $E(M_1 \cup M_2) \supset E(M_1) \cup E(M_2)$.

Demonstrație. Avem $M_1 \cup M_2 \supset M_1$ și $M_1 \cup M_2 \supset M_2$ de unde, conform propoziției precedente, $E(M_1 \cup M_2) \supset E(M_1)$ și $E(M_1 \cup M_2) \supset$ $\supset E(M_2)$ ceea ce dă $E(M_1 \cup M_2) \supset E(M_1) \cup E(M_2)$

P. 18. $E(M_1 \cap M_2) \subset E(M_1) \cap E(M_2)$.

Demonstrație. Din $M_1 \supset M_1 \cap M_2$, $M_2 \supset M_1 \cap M_2$ rezultă prin aplicarea lui P. 16, că $E(M_1) \supset E(M_1 \cap M_2)$ și $E(M_2) \supset E(M_1 \cap M_2)$ ceea ce dă $E(M_1) \cap E(M_2) \supset E(M_1 \cap M_2)$.

3. TOPOLOGII ALE SPAȚIULUI

Fie $x \in E$ și $R_\iota(a)$ $(\iota \in I)$ semidreptele cu originea în a. Luînd pe fiecare semidreaptă $R_\iota(a)$ cîte un punct a_ι, diferit de a, formăm mulțimea : $V(a) = \bigcup\limits_{\iota \in I} (E(a, a_\iota) - \{a_\iota\})$. Numim mulțimile de acest fel vecinătăți liniare ale punctului a. Notînd cu $\mathcal{V}(a)$ familia vecinătăților liniare ale lui a, observăm că $V_i \in \mathcal{V}(a)$ $(i = 1, 2) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a)$.

$\mathfrak{P}(B)$ fiind familia părților unei mulțimi B, considerăm :

$$\mathfrak{B} = \{B : B = \{p : \mathfrak{P}(B) \cap \mathcal{V}(p) \neq \emptyset\},\ B \in \mathfrak{P}(E)\}.$$

Notăm cu $\mathcal{C}$ familia mulțimilor convexe din E. Putem construi acum două topologii în E, avînd ca bază pe $\mathfrak{B}$ și respectiv pe $\mathfrak{B} \cap \mathcal{C}$. Pentru a arăta că $\mathfrak{B}$ ¹) și $\mathfrak{B} \cap \mathcal{C}$ pot fi bazele unor topologii în E, ajunge să observăm că :

1. $\mathfrak{B} \ni E$
2. $\mathcal{C} \ni E$
3. $B_i \in \mathfrak{B}$ $(i = 1, 2) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$
4. $C_i \in \mathcal{C}$ $(i = 1, 2) \Rightarrow C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$.

Notăm aceste două topologii cu $\mathcal{T}$ și $\mathcal{T}'$. În spațiile euclidiene topologia $\mathcal{T}'$ coincide cu cea obișnuită. Topologiile $\mathcal{T}$ și $\mathcal{T}'$ diferă în general, după cum se poate vedea dintr-un exemplu datorat lui Tudor Zamfirescu : în planul euclidian considerăm circumferința Γ a unui cerc și punctul $\gamma \in \Gamma$; mulțimea $\{\gamma\} \cup \complement\Gamma$ este deschisă în topologia $\mathcal{T}$, dar nu e deschisă în topologia obișnuită $\mathcal{T}'$ a planului.

Primită la redacție la 22 ianuarie 1966

---

¹) Topologia cu baza $\mathfrak{B}$ e chiar $\mathfrak{B}$.

SPAŢII CU CONVEXITATE (II)

DE

DAN VOICULESCU

În lucrarea de faţă se continuă cele expuse în [1], adăugîndu-se încă două axiome ; se studiază triunghiul ca spaţiu cu convexitate şi se obţin analoage ale teoremelor lui Helly şi Caratheodory din plan.

În cele ce urmează vom considera acele mulţimi E care pe lîngă condiţiile A.1—A.6 din lucrarea [1] satisfac şi următoarele :

A.7. $E(a, b) - \{a, b\} \neq \emptyset \quad (a \neq b)$

A.8. *Dacă* $y \in E(M) - E(M - \{x\})$ $(x \in M)$, *atunci există* $z \in E(M - \{x\})$ *astfel încît* $E(x, z) \ni y$.

Compatibilitatea sistemului de condiţii A.1—A.8 rezultă imediat din faptul că ele sînt satisfăcute în planul euclidian. Vom numi de acum înainte acele mulţimi E, care satisfac condiţiile A.1—A.8, *mulţimi cu convexitate*.

Condiţia A.7 exclude cazul banal al segmentelor $E(a, b) = \{a, b\}$. Rezultă că orice segment conţine o infinitate de puncte.

Condiţia A.8 introduce o legătură mai strînsă între punctele unei mulţimi convexe. Ea joacă un rol esenţial în studiul ,,triunghiului'', studiu pe care-l vom întreprinde mai departe, în special în ceea ce priveşte asemănările dintre ,,triunghi'' şi planul euclidian. Vom arăta că ,,triunghiul'' se bucură de o serie de proprietăţi ,,bidimensionale'', cum ar fi, de exemplu : împărţirea planului în două regiuni printr-o dreaptă şi teoremele lui Helly şi Caratheodory pentru spaţiile euclidiene bidimensionale.

TRIUNGHIUL

DEFINIŢIE. O mulţime M dintr-o mulţime cu convexitate este un triunghi, dacă există trei puncte a, b, c, astfel încît $M = E(a, b, c)$ şi $a \notin L(b, c)$.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 2, P. 303–311, BUCUREŞTI, 1967

Vom începe studiul triunghiului cu cîteva proprietăţi generale, care mai departe ne vor servi la cercetarea lui ca mulţime cu convexitate.

P. 1. *Fie triunghiul* $E(a, b, c)$ *şi* $p \in E(b, c)$; *avem* :

$$E(a, b, c) = E(a, b, p) \cup E(a, c, p),$$

$$E(a, p) = E(a, b, p) \cap E(a, c, p).$$

Demonstraţie. Deoarece $E(M_1) \cup E(M_2) \subset E(M_1 \cup M_2)$, rezultă $E(a, b, p) \cup E(a, p, c) \subset E(a, b, c)$ fiindcă $p \in E(b, c)$. Fie $x \in E(a, b, c) - \{a\}$; din A.8 deducem că există un punct $y \in E(b, c)$ determinat în mod unic astfel încît $x \in E(a, y)$. Cum însă $E(b, c) = E(b, p) \cup E(p, c)$, rezultă că $x \in E(a, b, p) \cup E(a, p, c)$ şi deoarece $a \in E(a, b, p)$, avem : $E(a, b, p) \cup E(a, c, p) \supset E(a, b, c)$.

Dacă x, definit ca mai sus, mai satisface şi condiţia $x \in E(a, b, p) \cap E(a, c, p)$, atunci avem $y \in E(b, p) \cap E(p, c) = \{p\}$, deci $x \in E(a, p)$. Deoarece şi $a \in E(a, p)$, rezultă că $E(a, b, p) \cap E(a, c, p) \subset E(a, p)$. Mai rămîne de arătat că $E(a, b, p) \cap E(a, c, p) \supset E(a, p)$, ceea ce este o consecinţă a relaţiei $E(M_1 \cap M_2) \subset E(M_1) \cap E(M_2)$.

P. 2. *Dacă* $p \in E(a, b, c)$ $(a \notin L(b, c))$, *atunci* :

$$E(a, b, c) = E(a, b, p) \cup E(a, c, p) \cup E(b, c, p)$$

şi

$$E(a, b, p) \cap E(a, c, p) = E(a, p).$$

Demonstraţie. Din A.8 găsim că există $q \in E(b, c)$ astfel încît $E(a, q) \ni p$. Din P. 1 deducem atunci : $E(a, b, c) = E(a, q, b) \cup E(a, q, c) = E(a, p, b) \cup E(b, q, p) \cup E(a, p, c) \cup E(q, p, c)$, însă tot P.1 ne dă $E(p, b, c) = E(b, q, p) \cup E(q, p, c)$, deci $E(a, b, c) = E(a, p, b) \cup E(b, p, c) \cup E(c, p, a)$.

Din a doua relaţie de la P.1 obţinem :

$$E(a, b, p) \cap E(a, c, p) \subset E(a, b, q) \cap E(a, c, q) = E(a, q).$$

Ne-a rămas să arătăm că $E(a, b, p) \cap E(a, q) = E(a, p)$, ceea ce se poate obţine simplu, folosind faptul că două drepte distincte au maximum un punct comun.

P.3. *Fie* $E(a, b, c)$ *un triunghi, atunci* $M = (E(a, b, c) - E(b, c)) \cup \{b\}$ *este convexă.*

Demonstraţie. Fie $x, y \in M$; există atunci $p, q \in E(a, c) - \{c\}$ astfel încît $E(b, p) \ni x$, $E(b, q) \ni y$. În virtutea propoziţiei despre ordinea punctelor pe segment, avem cel puţin una din relaţiile : $E(a, p) \ni q$, $E(a, q) \ni p$. Admiţînd, de exemplu, că are loc cea dintîi relaţie, avem $E(x, y) \subset E(a, p, b)$. Notînd $N = E(b, c)$ vom arăta că $E(a, b, p) \cap N = \{b\}$. Într-adevăr, $E(a, b, p) \cap N = E(a, b, p) \cap E(b, c, p) \cap N = E(b, p) \cap N \ni b$ şi $E(b, p) \cap N$ conţine maximum un punct deoarece, altfel, $L(b, c) \ni p$, ceea ce ar implica $L(a, c) \cap L(b, c) \supset \{c, p\}$ deci $a \in L(b, c)$.

Dacă $E(a, b, c)$ este un triunghi, vom nota $F = E(a, b) \cup E(b, c) \cup E(c, a)$ şi $E'(a, b, c) = E(a, b, c) - F$. $E'(a, b, c)$ este convexă deoarece poate fi reprezentată ca o intersecţie de trei mulţimi de tipul lui M. Analog se poate arăta că şi $E(a, b, c) - E(b, c)$, $E'(a, b, c) \cup E(b, c)$ etc. sînt mulţimi convexe.

P. 4. *Fie* $p, r \in E'(a, b, c)$ $(p \neq r)$; *există atunci* $x \in F$ *astfel încît:* $R(p, r) \cap E(a, b, c) = E(p, x)$ şi $R(p, r) \cap F = \{x\}$.

Demonstraţie. În cele ce urmează vom considera numai punctele lui $E(a, b, c)$ deci $R(p, r)$ va reprezenta $R(p, r) \cap E(a, b, c)$.

Avem: $E(a, b, c) = E(a, b, p) \cup E(b, c, p) \cup E(c, a, p)$, deci r aparţine unuia din triunghiurile din membrul doi al relaţiei precedente, fie $r \in E(b, c, p)$. Notînd $A = E(p, a, c) - E(p, c)$, $B = E(p, b, a) - E(p, b)$, P.2 ne dă $E(p, r) \cap (A \cup B) = \varnothing$. Pe de altă parte, $R(p, r) = E(p, r) \cup \{y : E(p, y) \ni r\}$, deci pentru a arăta că $R(p, r) \cap (A \cup B) = \varnothing$, mai trebuie să arătăm că $E(p, y) \ni r \Rightarrow y \notin A \cup B$. Pentru aceasta ajunge să observăm că $A \cup \{p\}$ şi $B \cup \{p\}$ fiind amîndouă convexe, $y \in A \cup B \Rightarrow E(p, r) - \{p\} \subset A \cup B$, ceea ce este imposibil. Din A. 8 rezultă că există un punct unic $x \in E(b, c)$ astfel încît $E(p, x) \ni r$. Avem atunci $E(p, r) \subset E(p, x)$. Analog şi pentru y există un punct unic $z \in E(b, c)$ astfel încît $E(p, z) \ni y$ şi deoarece $E(p, z) \ni r$, rezultă $x = z$, deci $E(p, x) \supset R(p, r)$. Relaţia inversă $E(p, x) \subset R(p, r)$ se demonstrează uşor, la fel $R(p, r) \cap F = \{x\}$.

Ca o consecinţă a lui P.4 rezultă că dacă $p, r \in E'(a, b, c)$ $(p \neq r)$, atunci există $x, y \in F$ astfel încît $L(p, r) \cap E(a, b, c) = E(x, y)$ şi $L(p, r) \cap F = \{x, y\}$.

P. 5. *Fie triunghiul* $E(a, b, c)$, $m \in E(b, c) - \{b, c\}$, $n \in E(a, c) - \{a, c\}$; *există atunci* $p \in E(a, b, c)$ *astfel încît* $E(a, m) \cap E(b, n) = \{p\}$.

Demonstraţie. Vom arăta mai întîi că $E(a, m) \cap E(m, n, c) = \{m\}$. Avem $E(a, m) \cap E(m, n, c) \ni m$. Dacă ar exista $m' \in E(a, m) \cap E(m, n, c)$ $(m \neq m')$, atunci există şi $m'' \in E(n, c)$ astfel încît $E(m, m'') \ni m'$. Dar atunci $L(a, m) = L(m, m') = L(m, m'') = L(a, m'') = L(a, c)$, deci $m = c$, ceea ce este absurd. Atunci însă $E(a, b, c) = E(a, b, n) \cup E(b, m, n) \cup E(m, n, c)$ şi cum $E(b, m, n) \ni m$, rezultă $E(a, m) \subset E(b, m, n) \cup E(a, b, n)$. Avem deci cel puţin una din relaţiile:

$$E(a, m) \cap E(a, b, n) - \{a\} \neq \varnothing$$

$$E(a, m) \cap E(b, m, n) - \{m\} \neq \varnothing$$

de unde, prin aplicarea lui **A**.8, rezultă imediat existenţa lui p.

P.6. *Fie* $E(a, b, c)$, m, n *definiţi ca în enunţul lui* P.5, $p \in E(a, b) - \{a, b\}$; *există atunci* r *astfel încît* $\{r\} = E(p, c) \cap E(m, n)$.

Demonstraţie. Din P.5 rezultă că există r' astfel încît $\{r'\} = E(p, c) \cap E(a, m)$. Aplicînd încă o dată P.5 găsim că $E(p, c) \cap E(m, n) = E(c, r') \cap E(m, n) = \{r\}$.

P.7. *Fie în triunghiul* $E(a, b, c)$, $d \in E(b, c) - \{b, c\}$, $m \in E(a, b, d) - E(a, d)$, $n \in E(a, d, c) - E(a, d)$; *există* p *astfel încît* $E(m, n) \cap E(a, d) = \{p\}$.

Demonstraţie. Fie $x \in E(b, d) - \{d\}$ şi $y \in E(c, d) - \{d\}$ astfel încît $E(a, x) \ni m$, $E(a, y) \ni n$. Aplicînd în triunghiul $E(a, x, y)$ P. 6, rezultă existenţa lui p.

P.8. *Dacă* $E(a, b) - \{a, b\} \ni m$, $E(a, c) - \{a, c\} \ni n$, $E(a, n) - \{n\} \ni p$, $E(b, c) \ni q$, *atunci există* r *astfel încît* $E(m, n) \cap E(p, q) = \{r\}$.

Demonstrație. Fie r' astfel încît să avem $\{r'\} = E(a, q) \cap E(m, n)$. Atunci în triunghiul $E(a, q, c)$ (dacă $q \neq c$, altfel avem $r = n$) avem: $E(r', n) \cap E(p, q) = \{r\}$. Rezultă că $E(m, n) \cap E(q, p) = \{r\}$, relația inversă rezultă din faptul că două drepte distincte au maximum un punct comun.

P.9. *Dacă* $m \in E(a, b) - \{a, b\}$, $n \in E(a, c) - \{a, c\}$, $E(a, m, n) - E(m, n) \ni p$, $E(a, b, c) - E(a, m, n) \ni q$, *atunci există un punct* r *astfel încît să avem* $E(p, q) \cap E(m, n) = \{r\}$.

Demonstrație. Fie $\{x\} = R(m, p) \cap E(a, n)$, $\{y\} = R(m, q) \cap F$ (pentru a nu complica demonstrația cu analiza cazurilor particulare, vom lăsa deoparte cazul $q \in E(m, b)$). Deoarece $E(a, b, c) - E(a, m, n) = (E(m, n, c) - E(m, n)) \cup (E(m, b, c) - E(m, c))$, rezultă că $y \in A \cup B$, unde am notat $A = E(b, c) - \{b\}$, $B = E(n, c) - \{n\}$. Dacă $y \in A$, atunci din P. 8 rezultă că există z astfel încît $\{z\} = E(x, y) \cap E(m, n)$, din P. 6 deducem existența lui $\{r\} = E(m, z) \cap E(p, q)$ de unde obținem ușor $\{r\} = E(p, q) \cap E(m, n)$. Dacă $y \in B$, existența lui r este o consecință a aplicării lui P. 6 în triunghiul $E(m, x, y)$.

TRIUNGHIUL CA MULȚIME CU CONVEXITATE

Fie M o submulțime convexă a unei mulțimi cu convexitate E. M poate fi considerat ca o mulțime cu convexitate în care segmentele au aceeași definiție ca în E. Cu alte cuvinte, dacă $f: E \times E \to \mathfrak{P}(E)$ ($\mathfrak{P}(E)$ este mulțimea părților lui E) este funcția prin care perechii de puncte (a, b) îi corespunde $E(a, b)$ și $f': M \times M \to \mathfrak{P}(M)$ este funcția cu același rol în M, atunci f' este tocmai restricția lui f la $M \times M$. Faptul că M devine astfel o mulțime cu convexitate, adică faptul că sînt satisfăcute condițiile A.1—A.8, se verifică cu ușurință.

În cele ce urmează vom considera ca mulțime cu convexitate un triunghi $E(A, B, C)$. Vom nota $F = E(A, B) \cup E(A, C) \cup E(B, C)$.

Dacă $L(a, b)$ este o dreaptă, atunci, după cîte am văzut, există două puncte $x, y \in F$, astfel încît $L(a, b) = E(x, y)$. Propozițiile P.5—9 luate împreună ne arată că oricare ar fi $L(a, b) \not\subset F$, există două mulțimi R și R' astfel încît: a) $R \cup R' = E(A, B, C) - L(a, b)$; b) $R \cap R' = \emptyset$; c) $r \in R$ și $r' \in R' \Rightarrow E(r, r') \cap L(a, b) \neq \emptyset$.

Vom arăta că R și R' sînt convexe. Fie $p, q \in R$ și să presupunem că de exemplu $A \in R'$ și că există $r \in E(p, q) \cap (R' \cup L(a, b))$; atunci există în mod sigur $s \in E(p, q) \cap L(a, b)$. Dacă $A \in L(p, q)$, atunci $p \neq s \neq q \Rightarrow \{p, q\} \cap R' \neq \emptyset$ ceea ce este absurd. Dacă $A \notin L(p, q)$, atunci există m, n astfel încît $L(a, b) \cap E(A, p, q) = E(m, n)$ și deoarece $\{m, n\} = (E(A, p) \cup E(A, q)) \cap L(a, b)$, ar rezulta că $E(m, n) \cap (E(A, p) \cup E(p, q) \cup E(q, A)) \ni m, n, s$, unde m, n, s, sînt puncte distincte, am ajuns astfel la o contradicție cu faptul că o dreaptă intersectează „F" al unui triunghi în maximum 2 puncte. Concluzia este că R este convexă. La fel se poate proceda și pentru R'. Din proprietățile a), b), c) ale lui R și R' și din faptul că sînt amîndouă convexe, rezultă cu uşurinţă că oricare ar fi $p \in R$, avem $R = \{q : E(p, q) \cap L(a, b) = \emptyset, q \in E(A, B, C)\}$. Analog se poate arăta că, pornind de la orice punct al lui R', se poate obţine R' în întregime. Rezultă de aici că $L(a, b)$ determină o împărţire unică a lui $E(A, B, C) - L(a, b)$ în două mulţimi care să satisfacă condiţiile a), b), c). În mod asemănător se poate arăta că $R \cup L(a, b)$ şi R' satisfac condiţiile b), c), (sînt convexe dar reuniunea lor este întreg triunghiul $E(A, B, C)$).

În cele ce urmează vom avea nevoie de o anumită relaţie de ordine în F. Pentru aceasta facem mai întîi cîteva convenţii. Fie M o mulţime în care există o relaţie de ordine „$<$”, care satisface următoarele două cerinţe :

1) dacă $x, y \in M$, atunci are loc exact una din relaţiile $x < y$, $x = y$, $x > y$;

2) $x < y$ şi $y < z \Rightarrow x < z$.

Pornind de la relaţia „$<$” se mai pot defini şi alte relaţii de ordine în mulţimea M care satisfac de asemenea condiţiile 1), 2).

Prin definiţie $x \underset{a}{<} y$ dacă şi numai dacă este realizată una din relaţiile :

$$\text{(i) } a \leqslant x < y, \quad \text{(ii) } y < a \leqslant x, \quad \text{(iii) } x < y < a;$$

unde prin $b \leqslant c$ înţelegem $b < c$ sau $b = c$. Se verifică destul de uşor că relaţia de ordine „$\underset{a}{<}$” verifică într-adevăr condiţiile 1), 2). A doua relaţie de ordine derivată din „$<$” este „$\urcorner <$”, definită prin: $x \urcorner < y \Leftrightarrow x > y$. Dacă în M am fixat o anumită relaţie de ordine „$<$” care satisface condiţiile 1) şi 2), atunci definim în M mulţimile $e(x, y)$ prin :

$$e(x, y) = \begin{cases} \{z : x < z < y\} \text{ dacă } x < y \\ \{z : x < z\} \cup \{z : z < y\} \text{ dacă } x > y. \end{cases}$$

O relaţie evidentă între $e(x, y)$ şi $e(y, x)$ este $e(x, y) \cup e(y, x) = M - \{x, y\}$.

Pentru relaţiile de ordine în F vom lua ca punct de plecare o relaţie „$<$” definită astfel: $x < y$ dacă şi numai dacă $x \neq y$ şi dacă are loc una din relaţiile :

(1) $x, y \in E(B, C)$ şi $x \in E(B, y)$;

(2) $x, y \in E(C, A)$ şi $x \in E(C, y)$;

(3) $x, y \in E(A, B)$ şi $x \in E(A, y)$;

(4) x şi y nu se află pe aceeaşi latură a lui $E(A, B, C)$ şi $x \in E(B, C)$;

(5) x şi y nu se află pe aceeaşi latură a lui $E(A, B, C)$ şi $y \in E(A, B)$.

Verificarea faptului că relaţia de ordine „$<$” satisface condiţiile 1) şi 2) se face folosind P.1 şi P.1′ din lucrarea [1].

Fie acum $a, b \in E'(A, B, C)$ şi $\{a'\} = F \cap R(b, a)$ şi $\{b'\} = F \cap R(a, b)$; avem $E(a', b') \supset E(a, b)$. Fie R şi R' cele două mulţimi pe care le determină $L(a, b) = E(a', b')$ în $E(A, B, C) - L(a, b)$. Deoarece R

este convexă, se poate demonstra ușor că $R \cap F$ este egal fie cu $e(a', b')$ fie cu $e(b', a')$. Analog pentru $R' \cap F$. Fie acum $c \in R$; se arată ușor că $F \cap R(a, c) \subset R \cap F$.

Cu aceste pregătiri ne putem îndrepta spre demonstrarea propoziției P.10 care constituie punctul de plecare pentru demonstrația unei serii de proprietăți „bidimensionale” ale triunghiului ca mulțime cu convexitate.

P. 10. *Fie* $E(a, b, c)$ *un triunghi conținut în* $E'(A, B, C)$, $D_3 = L(a, b)$, $D_1 = L(b, c)$, $D_2 = L(c, a)$, iar $R_1, R_1', R_2, R_2', R_3, R_3'$ *regiunile determinate de* D_1, D_2, D_3 *în* $E(A, B, C)$ *astfel încît* $R_1' \ni a$, $R_2' \ni b$, $R_3' \ni c$. *Dacă* $R_i' \cup D_i = R_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$, *atunci are loc relația* $\bigcap_{i=1}^{3} R_i^* = E(a, b, c)$.

Demonstrație. Avem $E(a, b, c) \subset R_1^*$, deoarece R_1^* este convexă și conține $\{a, b, c\}$. Analog pentru R_2^* și R_3^*, deci $E(a, b, c) \subset \bigcap_{i=1}^{3} R_i^*$.

Vom arăta că $F \cap \left(\bigcap_{i=1}^{3} R_i^*\right) = \varnothing$. Fie $R(c, b) \cap F = \{\alpha_1\}$, $R(b, c) \cap F = \{\alpha_2\}$, $R(b, a) \cap F = \{\beta_1\}$, $R(a, b) \cap F = \{\beta_2\}$, $R(a, c) \cap F = \{\gamma_1\}$, $R(c, a) \cap F = \{\gamma_2\}$. Pe segmentele $E(\alpha_1, \alpha_2)$, $E(\beta_1, \beta_2)$, $E(\gamma_1, \gamma_2)$ avem ordini de puncte α_1, b, c, α_2; β_1, c, a, β_2; γ_1, a, b, γ_2.

Luînd drept relație de ordine „$<$” pe F, una din relațiile de ordine „$\underset{\alpha_1}{<}$” sau „$\neg \underset{\alpha_1}{<}$” astfel încît : $e(\alpha_2, \alpha_1) = R_1' \cap F$, avem :

$$\beta_2 \in e(\alpha_1, \alpha_2),\ \beta_1 \in e(\alpha_2, \alpha_1),\ \gamma_1 \in e(\alpha_1, \alpha_2),\ \gamma_2 \in e(\alpha_2, \alpha_1).$$

Din $R_3' \cap F \ni \alpha_2$ și $e(\beta_2, \beta_1) \ni \alpha_2$ rezultă $R_3' \cap F = e(\beta_2, \beta_1)$. De aici urmează că $e(\gamma_2, \gamma_1) = R_2' \cap F$. În concluzie avem relația :

$$\alpha_1 < \beta_2 < \gamma_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \gamma_2.$$

Deducem din aceasta că : $F \cap R_1^* \cap R_2^* \cap R_3^* = [(F \cap R_1') \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}] \cap [(F \cap R_2') \cup \{\beta_1, \beta_2\}] \cap [(F \cap R_3') \cup \{\gamma_1, \gamma_2\}] = [e(\alpha_2, \alpha_2) \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}] \cap [e(\beta_2, \beta_1) \cup \{\beta_1, \beta_2\}] \cap [e(\gamma_2, \gamma_1) \cup \{\gamma_1, \gamma_2\}] = [e(\alpha_2, \beta_1) \cup \{\alpha_2, \beta_1\}] \cap [e(\gamma_2, \gamma_1) \cup \{\gamma_1, \gamma_2\}] = \varnothing$.

Dacă un punct $x \in R_1^* \cap R_2^* \cap R_3^*$[1]), atunci, deoarece $R(a, x) \subset R_2^*$ și $R(a, x) \subset R_3^*$, există și $\{y\} = R(a, x) \cap F \subset R_2^* \cap R_3^* \cap F$. Deoarece $R_2^* \cap R_3^* \cap F = R_2^* \cap R_3^* \cap F \cap (R_1^* \cup R_1) = (R_1^* \cap R_2^* \cap R_3^* \cap F) \cup (R_1 \cap R_2^* \cap R_3^* \cap F) = R_1 \cap R_2^* \cap R_3^* \cap F$ rezultă $y \in R_1$, deci există $\{z\} = E(a, y) \cap L(b, c)$ și cum $E(a, y) \subset R_2^* \cap R_3^*$, avem $z \in E(b, c)$. Deducem $x \in E(a, y) \cap R_1^* = E(a, z) \subset E(a, b, c)$, deci $E(a, b, c) \supset R_1^* \cap R_2^* \cap R_3^*$. Conchidem că $E(a, b, c) = R_1^* \cap R_2^* \cap R_3^*$.

Observație. Condiția $E(a, b, c) \subset E'(A, B, C)$ din enunțul lui P.10 nu este esențială. Admițînd și cazul cînd una din regiunile pe care le determină o dreaptă este vidă, propoziția P.10 este adevărată pentru orice triunghi din mulțimea cu convexitate $E(A, B, C)$.

P.11. *Fie* D_1, D_2, D_3 *trei drepte diferite care nu au toate trei un punct comun, dar care se taie luate cîte două. Dacă* $R_1, R_1', R_2, R_2', R_3, R_3'$

---

[1]) Dacă $x = a$ demonstrația ce urmează nu mai e necesară, deoarece in mod evident $a \in E(a, b, c)$.

sînt cele şase regiuni determinate de ele, atunci una din intersecţiile de trei regiuni din care fiecare regiune este determinată de o altă dreaptă este vidă.

Demonstraţie. În plan proprietatea enunţată ar fi astfel: laturile unui triunghi prelungite împart planul în şapte regiuni. Va trebui să arătăm că una din intersecţiile: $R_1 \cap R_2 \cap R_3$, $R_1' \cap R_2 \cap R_3$, $R_1 \cap R_2' \cap R_3$, $R_1 \cap R_2 \cap R_3'$, $R_1 \cap R_2' \cap R_3'$, $R_1' \cap R_2 \cap R_3'$, $R_1' \cap R_2' \cap R_3$, $R_1' \cap R_2' \cap R_3'$ este vidă. Dacă nici una din acestea nu ar fi vidă, putem lua x_i ($i = 1, 2, \ldots, 8$) cîte un punct din fiecare şi avem:

$$E(x_1, x_2) \cap D_1 \ni y_1 \in R_2 \cap R_3$$

$$E(x_3, x_7) \cap D_1 \ni y_2 \in R_2' \cap R_3$$

$$E(x_4, x_6) \cap D_1 \ni y_3 \in R_2 \cap R_3'$$

$$E(x_5, x_8) \cap D_1 \ni y_4 \in R_2' \cap R_3'.$$

Atunci însă avem $D_1 \supset E(y_1, y_2) \cap D_2 = \{z_1\} \subset R_3$ şi $D_1 \supset E(y_3, y_4) \cap D_2 = \{z_2\} \subset R_3'$. Deoarece $D_1 \cap D_2 \supset \{z_1, z_2\}$ şi $R_3' \cap R_3 = \emptyset$, ar trebui ca $D_1 = D_2$, ceea ce este absurd.

P. 12. *Fie triunghiul* $E(a, b, c)$, $p \in E(a, b, c)$ *şi* $q \notin E(a, b, c)$; *atunci* $E(p, q) \cap (E(a, b) \cup E(b, c) \cup E(c, a)) \neq \emptyset$.

Demonstraţie. Vom nota $f = E(a, b) \cup E(b, c) \cup E(c, a)$. Folosind rezultatul din P.10, rezultă că $E(p, q) \cap (L(a, b) \cup L(b, c) \cup L(c, a)) \neq \emptyset$. Să luăm de exemplu $E(p, q) \cap L(a, b) \ni r$. Dacă $r \in E(a, b)$, demonstraţia e încheiată.

Dacă $r \notin E(a, b)$, atunci avem una din relaţiile $b \in E(a, r)$ sau $a \in E(b, r)$. Aceste două cazuri fiind asemănătoare, nu vom trata decît pe primul. Avem $E(c, a, r) \supset \{p, q\}$ şi cum $p \in E(a, b, c)$ iar $q \in E(c, b, r)$, din P.7 rezultă că $E(p, q) \cap E(b, c) \neq \emptyset$.

$E'(A, B, C)$ SPAŢIU TOPOLOGIC

Topologia din $E'(A, B, C)$ pe care o vom studia este topologia $\mathcal{T}'$ de mulţime cu convexitate. Din definiţia lui $\mathcal{T}'$ rezultă că orice vecinătate a unui punct p conţine o mulţime convexă deschisă M care conţine pe p. Există deci $a, b, c \in E'(A, B, C) - \{p\}$ astfel încît $a \in E(p, A)$, $b \in E(p, B)$ $c \in E(p, C)$ şi $M \ni a, b, c, p$. Atunci însă $M \supset E(a, b, c)$. După cum se poate vedea uşor, $p \in E'(a, b, c)$. $E'(a, b, c)$ este însă o mulţime deschisă, deci mulţimile $E'(a, b, c)$ $(a \notin L(b, c))$ formează un sistem de vecinătăţi pentru topologia $\mathcal{T}'$.

Fie acum două puncte diferite p şi q. Să presupunem că $A \notin L(p, q)$. Luînd un punct $r \in E(p, q) - \{p, q\}$, să notăm $\{m\} = R(A, r) \cap E(B, C)$. Mulţimile $E'(A, B, m)$ şi $E'(A, C, m)$ sînt două vecinătăţi disjuncte ale punctelor p şi q. Dacă $A \in L(p, q)$, atunci putem lua în loc de A punctul B. Am demonstrat deci că $E'(A, B, C)$ are proprietatea Hausdorff.

PATRUPUNCTUL ŞI TEOREMELE LUI CARATHEODORY ŞI HELLY

Ca mulţime cu convexitate în care vom lucra, alegem $E'(A, B, C)$. Fie a, b, c, d patru puncte astfel încît să nu avem nici o grupă de trei puncte coliniare. Fie D_1, D_2, D_3 dreptele $L(a, b)$, $L(b, c)$, $L(c, a)$ şi R_i, R'_i, R^*_i $(i = 1, 2, 3)$ la fel ca la P.10. Cele şapte regiuni pe care le determină D_1, D_2, D_3 sînt: $R'_1 \cap R'_2 \cap R'_3$, $R_1 \cap R'_2 \cap R'_3$, $R'_1 \cap R_2 \cap R'_3$, $R'_1 \cap R'_2 \cap R_3$, $R'_1 \cap R_2 \cap R_3$, $R_1 \cap R'_2 \cap R_3$, $R_1 \cap R_2 \cap R'_3$. Vom nota aceste mulţimi în ordinea de mai sus cu A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, 7)$. Avem $d \in \bigcup\limits_{i=1}^{7} A_i$. Vom studia acum $E(a, b, c, d)$ pentru a vedea în ce cazuri este triunghi şi în ce cazuri nu. Studiind problema după regiuni, se prezintă 3 cazuri.

1) $\mathrm{d} \in A_1$, $E(a, b, c, d) = E(a, b, c)$ adică $E(a, b, c, d)$ e triunghi.

2) $d \in A_2$, $E(a, b, c, d) = E(a, b, c) \cup E(b, c, d)$. Într-adevăr, fie $y \in E(a, b, c, d) - E(a, b, c)$ şi $x \in E(a, b, c)$ astfel încît (vezi A.8) să avem $E(d, x) \ni y$; atunci analizînd cu atenţie demonstraţia lui P.12 pentru cazul în care $E(d, x) \subset R^*_2 \cap R^*_3$, vom obţine $E(d, x) \cap E(b, c) \neq \emptyset$, deci $y \in E(b, c, d)$. Incluziunea $E(a, b, c, d) \subset E(a, b, c) \cup E(b, c, d)$ împreună cu incluziunea inversă care e evidentă ne dau $E(a, b, c, d) = E(a, b, c) \cup E(b, c, d)$.

Analog se tratează şi cazurile $d \in A_3$ şi $d \in A_4$.

3) Dacă $d \in A_5$, atunci $E(d, c) \cap L(a, b) = E(d, c) \cap L(a, b) \cap (R_3 \cup \{c\}) = E(d, c) \cap (L(a, b) - R(a, b)) \neq \emptyset$, de unde rezultă $E(a, b, c, d) = E(b, c, d)$.

Analog se tratează cazurile $d \in A_6$ şi $d \in A_7$.

Din cele de mai sus rezultă că $E(a, b, c, d)$ este diferit de unul din triunghiurile $E(a, b, c)$, $E(b, c, d)$, $E(c, d, a)$, $E(d, a, b)$ numai dacă $d \in \bigcup\limits_{i=2}^{4} A_i$.

P.13. (Teorema lui Helly). *Fie* C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $n > 3$ *mulţimi convexe astfel încît oricare ar fi* $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *să avem* $C_i \cap C_j \cap C_k \neq \emptyset$; *atunci* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$.

Demonstraţie. Vom considera mai întîi cazul $n = 4$. Fie $a \in C_1 \cap C_2 \cap C_3$, $C_2 \cap C_3 \cap C_4 \ni b$, $c \in C_3 \cap C_4 \cap C_1$, $d \in C_4 \cap C_1 \cap C_2$. Dacă trei din aceste puncte sînt coliniare, atunci $E(a, b, c, d)$ este fie un triunghi, fie un segment. Dacă $E(a, b, c, d)$ este un segment, de exemplu $E(a, b,)$, atunci c este un punct care aparţine celor patru mulţimi convexe C_i. Dacă $E(a, b, c, d)$ este un triunghi, de exemplu $E(a, b, c)$, atunci d este un punct comun celor patru corpuri convexe. Analog se tratează şi celelalte cazuri (1) şi 3)) în care $E(a, b, c, d)$ este un triunghi. Rămîne de cercetat doar cazul 2). Fie pentru aceasta $d \in A_2$. Avem $E(a, b, c, d) = E(a, b, c) \cup E(b, c, d)$ şi $E(b, c) \cap E(a, d) = \{e\}$. Deoarece $C_1 \supset E(a, c, d)$, $C_2 \supset E(a, b, d)$, $C_3 \supset E(a, b, c)$, $C_4 \supset E(b, c, d)$ şi atunci $C_1 \cap C_2 \supset E(a, d)$ şi $C_3 \cap C_4 \supset E(b, c)$ rezultă:

$$C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \supset E(a, d) \cap E(b, c) = \{e\} \neq \emptyset.$$

Pentru a demonstra teorema și pentru celelalte valori ale lui n vom folosi inducția completă. Să presupunem teorema adevărată pentru $n - 1$. Avem atunci

$$C = \bigcap_{i=1}^{n-3} C_i \neq \emptyset$$

și:

$$C \cap C_{n-2} \cap C_{n-1} \neq \emptyset$$

$$C \cap C_{n-1} \cap C_n \neq \emptyset$$

$$C \cap C_{n-2} \cap C_n \neq \emptyset$$

$$C_{n-2} \cap C_{n-1} \cap C_n \neq \emptyset$$

de unde

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i = C \cap C_{n-2} \cap C_{n-1} \cap C_n \neq \emptyset.$$

P. 14. (Teorema lui Caratheodory). *Fie* $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Dacă* $x \in E(M)$, *atunci există* a_i, a_j, a_k *astfel încît* $E(a_i, a_j, a_k) \ni x$.

Demonstrație. În cazul $n = 4$ avem două posibilități:

1) $E(a_1, a_2, a_3, a_4)$ este triunghi sau segment și teorema e evidentă.

2) Dacă $E(a_1, a_2, a_3, a_4)$ nu e triunghi sau segment, atunci din cele demonstrate anterior avem de-a face cu o reuniune de două triunghiuri și teorema este și în acest caz evidentă.

Mai departe procedăm prin inducție. Presupunem teorema adevărată pentru $n - 1$. Dacă $x \in E(M - \{a_n\})$, atunci aplicăm teorema pentru $n - 1$. Dacă $x \in E(M) - E(M - \{a_n\})$, atunci există $y \in E(M - \{a_n\})$ astfel încît $E(a_n, y) \ni x$. Aplicînd teorema pentru $n - 1$, găsim că există a_i, a_j, $a_k \in M - \{a_n\}$ astfel încît $y \in E(a_i, a_j, a_k)$. Deducem că $x \in E(a_i, a_j, a_k, a_n)$, deci am ajuns iar la cazul $n = 4$.

Primită la redacție la 4 ianuarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. D. Voiculescu, *Spații cu convexitate* (I). Acest volum p. 295.

Novîe knighi za rubejom, 7, 17—19 (1966)

VRĂNCEANU G., *Leçons de géométrie différentielle*, vol. III, 1964, 482 p.

Lecțiile de geometrie diferențială, în trei volume, ale cunoscutului geometru român G. Vrănceanu constituie o vastă monografie privind metodele moderne ale geometriei diferențiale multidimensionale. Primul volum a apărut în 1947, al doilea în 1951, al treilea în 1960 și pînă în prezent aceste cărți au apărut în mai multe ediții. În prezent monografia lui G. Vrănceanu ocupă un loc important în literatura geometrică mondială, distingîndu-se printr-un conținut bogat și o prezentare originală. Este una dinntre cărțile cele mai complete în ce privește aplicațiile geometrice ale teoriei grupurilor Lie. Cartea recenzată reprezintă a doua ediție, îmbunătățită și completată, a volumului III, tradusă în limba franceză.

Să expunem pe scurt conținutul capitolelor :

1. Proprietăți globale ale grupurilor Lie ;
2. Conexiuni asociate grupurilor fundamentale ;
3. Spații omogene cu conexiune afină ;
4. Spații riemanniene omogene ;
5. Numere Betti. Tensori strîmb simetrici ;
6. Grupurile de olonomie ale spațiilor cu conexiune.

Cap. I conține bazele teoriei grupurilor Lie. Se expun proprietățile grupurilor Lie semisimple și simple și sînt date noțiunile fundamentale legate de reprezentările liniare ale grupurilor Lie.

În cap. II se consideră proprietățile spațiilor cu conexiune afină, proiectivă, conformă și simplectică și corespondențele între perechi de astfel de spații. Este interesantă una din metodele de cercetare, legate de introducerea algebrei liniare asociate și a cărei structură este determinată de valorile coeficienților de conexiune în originea coordonatelor.

În cap. III și IV este acordat un mare spațiu studiului proprietăților spațiilor care admit grupuri destul de mari de mișcări, se face clasificarea completă a spațiilor cu conexiune afină bi- și tri-dimensionale și a spațiilor riemanniene (cu metrică definită pozitiv) cu patru dimensiuni.

Cap. V și VI conțin un studiu global al spațiilor riemanniene și cu conexiune afină. Aici se introduc noțiunile topologice fundamentale (numere Betti, acoperirea universală, grupul fundamental și altele), care sînt legate de metodele geometriei diferențiale, fundamentale pentru studiul spațiilor tensorilor strîmb simetrici și grupurilor de olonomie. În legătură cu acestea sînt date și unele rezultate și teoreme concrete. Ca exemplu menționăm clasificarea spațiilor cu conexiune afină avînd grupul de olonomie cu 1 sau 2 parametri și teorema lui Pontriaghin privind construcția unui sistem complet de tensori strîmb simetrici invarianți pe varietățile lui Grassmann.

Observaţiile generale făcute în recenziile primelor două volume sînt aplicabile şi volumului III. Să adăugăm numai că ultimul volum are un caracter mai puţin didactic şi mai mult special, în el se reflectă în mare măsură preocupările ştiinţifice ale autorului, care conduce o mare şcoală matematică în România. Multe pagini ale textului expun sub o formă generală rezultatele cercetărilor în special ale acestei şcoli. De aici rezultă că volumul recenzat trebuie să fie recomandat specialiştilor ce lucrează în domeniul geometriei diferenţiale moderne şi doresc să cunoască acele direcţii ale şcolii româneşti condusă de G. Vrănceanu, care studiază probleme ce stau la intersecţia geometriei diferenţiale şi a teoriei grupurilor Lie.

Dr. în şt. fiz-mat. G. I. Krucikovici

(*Traducerea lui C. Teleman*)

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor din text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzuanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa Comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1883

1967 MAR 17

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie. Categorii. Suprafeţe riemanniene, 1966, 394, 21,50 lei.**

ROMULUS CRIŞTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

SILVIU GUIAŞU şi RADU THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 352 p., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu** 1963, 123 p., 4,25 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. II, 1966, 669 p., 38 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 2, P. 163—314, BUCUREŞTI, 1967

I. P. „Informaţia" – c. 4113

43831

Lei 12.—

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

3

TOMUL 19

1967

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

OS MŰSZAKI KÖNYVTÁR
ENTÁCIÓS KÖ
383

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
Acad. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

F 762

TOM. 19, Nr. 3
1967

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

MARCEL N. ROȘCULEȚ, Curbe care umplu un compact din R^n . . 317

R. THEODORESCU și I. VĂDUVA, Un model demografic-matematic privind dinamica specialiștilor 329

MARIUS I. STOKA, Asupra subgrupurilor grupului transformărilor ortogonale din spațiul E_3 339

LIVIU TODOR, Matricea ortogonală cea mai apropiată de o matrice reală dată B 363

LIVIU TODOR, Asupra metodei lui Gauss de rezolvare a sistemelor liniare de mari dimensiuni și asupra inversării matricilor mari 371

ILEANA TOMA, Extensiuni ale polinoamelor areolare 387

NICOLAE RADU, Asupra unor categorii de module 393

MARIANA CRAIU, Proprietăți ale seriei Fourier asociată unei funcții neintegrabile de singularități date 403

E. MUNTEANU, Analiza logică a algoritmilor (II). 415

VASILE I. ISTRĂȚESCU, Operatori hyponormali (I) 423

VASILE I. ISTRĂȚESCU, Operatori hyponormali (II) 439

IOANA CIORĂNESCU, Familii compozabile de operatori 449

I. VĂDUVA, Asupra estimației densității de repartiție a unui proces staționar în sens larg 455

C.I. ISPAS, Identitățile lui Bianchi și Veblen pentru tensorul simetric de curbură a unui spațiu cu conexiune afină. Echivalența lor 461

PETRE STAVRE, Asupra formulelor Frenet ale unei familii de direcții $\underset{1}{\xi}^{\lambda}$ definită pe o curbă (C) dintr-un spațiu Riemann V_n 469

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 315–476, BUCUREȘTI, 1967

CURBE CARE UMPLU UN COMPACT DIN R^n

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ

Se construieşte un exemplu de curbă Γ care umple un compact din R^n. În continuare se construieşte o clasă de curbe (Γ) care au această proprietate. Se stabilesc proprietăţi ale funcţiilor care realizează reprezentarea parametrică a curbelor Γ. Se demonstrează că aceste funcţii nu sînt derivabile în nici un punct al intervalului de definiţie. Se arată că verifică anumite ecuaţii funcţionale.

În această lucrare ne propunem să construim curbe care umplu un compact din R^n. De asemenea stabilim proprietăţi ale funcţiilor continue care realizează reprezentarea parametrică a curbelor considerate.

1. TEOREMA 1.1. *Fie $f(x)$ o funcţie continuă, periodică, de perioadă 2, definită pe intervalul* $[-1, +1]$ *astfel*

$$f(x) = \begin{cases} +1, & -1 \leqslant x \leqslant -\frac{2}{3} \\ -3x-1, & -\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{3} \\ 0, & -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ 3x-1, & \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} \\ +1, & \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{1}$$

Curba $\Gamma \subset R^n$ definită pentru $0 \leqslant t \leqslant 1$ de

$$x_k(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} f(3^{mn+k}t), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 317–328, BUCUREŞTI, 1967

trece prin toate punctele compactului $K \subset R^n$,

$$(\mathrm{K}) : 0 \leqslant x_k \leqslant 1, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Demonstrație. Convergența uniformă a seriilor care reprezintă pe $x_k(t)$ este evidentă deoarece $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$, $t \in R$, prin urmare $x_k(t)$ sînt funcții continue pe intervalul $[0, +1]$. Avem și

$$0 \leqslant x_k(t) \leqslant 1, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

pentru orice $t \in [0, 1]$.

Fie $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ un punct oarecare al compactului K; într-o reprezentare în baza 2 numerele ξ_k se scriu

$$\xi_0 = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2^2} a_n + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}} a_{mn} + \ldots$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2^2} a_{n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}} a_{mn+1} + \ldots$$

. . . .

$$\xi_{n-1} = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{2^2} a_{2n-1} + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}} a_{mn+n-1} + \ldots$$

cu $a_k = 0$ sau $a_k = 1$. Să arătăm că pentru

$$t_0 = \frac{2}{3} a_0 + \frac{2}{3^2} a_1 + \ldots + \frac{2}{3^{m+1}} a_m + \ldots$$

avem

$$x_k(t_0) = \xi_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

În adevăr, cu $p = 0, 1, \ldots$

$$3^p t_0 = 2r + \frac{2}{3} a_p + \frac{2}{3^2} a_{p+1} + \ldots$$

unde $r \geqslant 0$ și întreg; dacă $a_p = 0$, atunci

$$0 \leqslant \frac{2}{3} a_p + \frac{2}{3^2} a_{p+1} + \ldots \leqslant \frac{2}{3^2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = \frac{1}{3}$$

deci

$$f(3^p t_0) = 0 .$$

Dacă $a_p = 1$

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{2}{3} a_p + \frac{2}{3^2} a_{p+1} + \ldots \leqslant \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = 1$$

deci

$$f(3^p t_0) = 1 .$$

Dacă $a_p = 1$

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{2}{3} a_p + \frac{2}{3^2} a_{p+1} + \ldots \leqslant \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = 1$$

deci

$$f(3^p t_0) = 1$$

prin urmare în toate cazurile

$$f(3^p t_0) = a_p . \tag{3}$$

Dacă înlocuim pe t_0 în (2) și ținem seama de (3), obținem

$$x_k(t_0) = \frac{1}{2} a_k + \frac{1}{2^2} a_{n+k} + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}} a_{mn+k} + \ldots$$

deci

$$x_k(t_0) = \xi_k, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Teorema este demonstrată. Pentru $n = 2$, curba Γ umple un pătrat [1] iar pentru $n = 3$ umple un cub [2].

TEOREMA 1.2. *Fie $f(x)$ o funcție continuă, periodică, de perioadă 2, definită pe intervalul $[-1, +1]$ astfel*

$$f(x) = \begin{cases} +1 & , \ -1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{a-1}{a} \\ \varphi_1(x) & , \ -\dfrac{a-1}{2} \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{a} \\ 0 & , \ -\dfrac{1}{a} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{a} \\ \varphi_2(x) & , \ \dfrac{1}{a} \leqslant x \leqslant \dfrac{a-1}{a} \\ +1 & , \ \dfrac{a-1}{a} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{4}$$

unde $a \geqslant 3$ este un număr natural impar, iar φ_1, φ_2 sînt două funcții continue definite pe $\left[-\frac{a-1}{a},\ -\frac{1}{a}\right]$, $\left[\frac{1}{a},\ \frac{a-1}{a}\right]$ respectiv și care îndeplinesc următoarele condiții

$$0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant 1, \qquad x \in \left[-\frac{a-1}{a},\ -\frac{1}{a}\right]$$

$$0 \leqslant \varphi_2(x) \leqslant 1, \qquad x \in \left[\frac{1}{a},\ \frac{a-1}{a}\right],$$

$$\varphi_1\left(-\frac{a-1}{a}\right) = \varphi_2\left(\frac{a-1}{a}\right) = 1$$

$$\varphi_1\left(-\frac{1}{a}\right) = \varphi_2\left(\frac{1}{a}\right) = 0.$$

Curba $\Gamma \subset R^n$ *definită pentru* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *de*

$$x_k(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} f(a^{mn+k}\, t), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{5}$$

trece prin toate punctele compactului $K \subset R^n$:

$$(\mathrm{K}): \qquad 0 \leqslant x_k \leqslant 1 \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Demonstraţie. Seriile care reprezintă pe $x_k(t)$ sînt uniform convergente deoarece $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$, $t \in R$, prin urmare $x_k(t)$ sînt continue pentru $t \in [0, 1]$. Avem neegalităţile

$$0 \leqslant x_k(t) \leqslant 1, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

pentru $t \in [0, 1]$. Fie $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ un punct oarecare al cubului K; într-o reprezentare în baza 2 numerele ξ_k se scriu

$$\xi_k = \frac{1}{2} b_k + \frac{1}{2^2} b_{n+k} + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}} b_{mn+k} + \ldots, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

unde b_p nu poate să ia decît valorile 0 sau 1. Să arătăm că pentru

$$t_0 = \frac{a-1}{a} b_0 + \frac{a-1}{a^2} b_1 + \ldots + \frac{a-1}{a^{m+1}} b_m + \ldots$$

avem

$$x_k(t_0) = \xi_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Să observăm mai întîi că $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$; în adevăr, pentru toţi $b_m = 0$, $t_0 = 0$ iar pentru toţi $b_m = 1$, $t_0 = \dfrac{a-1}{a} \cdot \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}} = 1.$

Pentru $p = 0, 1, \ldots,$ putem scrie

$$a^p t_0 = (a-1)r + \frac{a-1}{a} b_p + \frac{a-1}{a^2} b_{p+1} + \ldots$$

unde $r \geqslant 0$ şi întreg; deoarece $a > 0$ este impar, numărul $(a-1)r$ este $\geqslant 0$ şi par. Dacă $b_p = 0$, atunci

$$0 \leqslant \frac{a-1}{a} b_p + \frac{a-1}{a^2} b_{p+1} + \ldots \leqslant \frac{a-1}{a^2}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots\right) = \frac{1}{a}$$

deci

$$f(a^p t_0) = 0.$$

Dacă $b_p = 1$,

$$\frac{a-1}{a} \leqslant \frac{a-1}{a} b_p + \frac{a-1}{a^2} b_{p+1} + \ldots \leqslant \frac{a-1}{a}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots\right) = 1$$

deci

$$f(a^p t_0) = 1$$

prin urmare în ambele cazuri avem

$$f(a^p t_0) = b_p. \tag{6}$$

Dacă înlocuim pe t_0 în (5) şi ţinem seamă de (6), obţinem imediat

$$x_k(t_0) = \frac{1}{2} b_k + \frac{1}{2^2} b_{n+k} + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}} b_{mn+k} + \ldots$$

deci

$$x_k(t_0) = \xi_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Teorema este demonstrată. Pentru $\varphi_1(x) \equiv -3x-1$, $\varphi_2(x) \equiv 3x-1$ şi $a=3$ obţinem teorema 1.1.

2. Vom stabili acum cîteva proprietăţi ale funcţiilor $x_k(t)$ care intervin în cele două teoreme de mai sus.

Teorema 2.1. *Fie $x_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, funcţiile continue definite pe $[0, 1]$ de*

$$x_k(t) = \frac{1}{2} f(3^k t) + \frac{1}{2^2} f(3^{n+k} t) + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}} f(3^{mn+k} t) + \ldots$$

unde $f(t)$ este dată de (1), teorema 1.1. Pe mulţimea rară $\mathfrak{R} \subset [0, 1]$ avînd punctele

$$t = \frac{2}{3} a_0 + \frac{2}{3^2} a_1 + \ldots + \frac{2}{3^{m+1}} a_m + \ldots$$

unde $a_k = 0$ sau $a_k = 1$, funcţiile $x_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, au proprietăţile

$$\text{a)} \quad \sup \left| \frac{x_k(t_p) - x_k(t'_p)}{t_p - t'_p} \right| = \infty$$

$$\text{b)} \quad \inf \left| \frac{x_k(t_p) - x_k(t'_p)}{t_p - t'_p} \right| = 0, \qquad t_p,\ t'_p \in \mathfrak{R}.$$

Demonstraţie. Să luăm

$$t_p = \frac{2}{3} a_0 + \frac{2}{3^2} a_1 + \ldots + \frac{2}{3^{pn+k+1}} a_{np+k}$$

$$t'_p = t_p + \frac{2}{3^{pn+s+1}}, \qquad s \neq k,\ 1 \leqslant s \leqslant n-1;$$

avem, conform lui (3),

$$f(3^{mn+k} t_p) = \begin{cases} a_{mn+k}, & \text{dacă } p = m \\ 0, & \text{dacă } p < m \end{cases}$$

$$f(3^{mn+k} t'_p) = \begin{cases} a_{mn+k}, & \text{dacă } p = m \\ 0, & \text{dacă } p < m \end{cases}$$

deci

$$x_k(t_p) - x_k(t'_p) = 0, \qquad p = 0, 1, \ldots$$

şi punctul b) din teoremă este demonstrat. Dacă luăm

$$t_p = \frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{3^2}a_1 + \dots + \frac{2}{3^{pn+k+1}}a_{np+k}$$

$$t'_p = t_p + \frac{2}{3^{pn+n+k+1}},$$

atunci conform lui (3) avem

$$\mathrm{f}(3^{mn+k}t_p) = \begin{cases} a_{mn+k}, & \text{dacă } p = m \\ 0\ , & \text{dacă } p < m \end{cases}$$

$$f(3^{mn+k}t'_p) = \begin{cases} a_{mn+k}, & \text{dacă } p = m \\ 1\ , & \text{dacă } p = m-1 \\ 0\ , & \text{dacă } p < m-1 \end{cases}$$

deci

$$\frac{x_k(t_p) - x_k(t'_p)}{t_p - t'_p} = \frac{1}{2^{p+2}} \cdot \frac{3^{pn+n+k+1}}{2} = \frac{3^{k+1}}{4}\left(\frac{3^n}{2}\right)^{p+1}$$

şi

$$\sup\left|\frac{x_k(t_p) - x_k(t'_p)}{t_p - t'_p}\right| = +\infty,$$

astfel şi punctul a) al teoremei este demonstrat.

În cazul cînd $f(x)$ este dat de (4), avem :

Teorema 2.2. *Fie* $x_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, *funcţiile continue definite pe* $[0, 1]$ *de*

$$x_k(t) = \frac{1}{2}f(a^k t) + \frac{1}{2^2}f(a^{n+k}t) + \dots + \frac{1}{2^{m+1}}f(a^{mn+k}t) + \dots$$

unde $f(t)$ *este dată de* (4).

Pe mulţimea $\tau \subset [0, 1]$ *avînd punctele*

$$t = \frac{a-1}{a}b_0 + \frac{a-1}{a^2}b_1 + \dots + \frac{a-1}{a^{m+1}}b_m + \dots$$

unde $b_k = 0$ *sau* $b_k = 1$, *funcţiile* $x_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, *au proprietăţile :*

$$\text{a)} \quad \sup\left|\frac{x_k(t_p) - x_k(t'_p)}{t_p - t'_p}\right| = +\infty$$

$$\text{b)} \quad \inf\left|\frac{x_k(t_p) - x(t'_p)}{t_p - t'_p}\right| = 0, \qquad t_p,\ t'_p \in \tau.$$

Se demonstrează în mod asemănător

Teorema 2.3. *Funcţiile continue* $x_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, *definite pe* $[0, 1]$ *de*

$$x_k(t) = \frac{1}{2}f(3^k t) + \frac{1}{2^2}f(3^{n+k}t) + \dots + \frac{1}{2^{m+1}}f(3^{mn+k}t) + \dots$$

unde $f(t)$ *este dată de* (1), *nu sînt derivabile în nici un punct al intervalului* [0, 1].

Demonstrație. Din teorema 2.1 rezultă că în punctele $t \in [0, 1]$,

$$t = \frac{1}{3} a_0 + \frac{1}{3^2} a_1 + \ldots + \frac{1}{3^{m+1}} a_m + \ldots$$

unde $a_m = 0$ sau $a_m = 2$, funcțiile $x_k(t)$ nu sînt derivabile.

Rămîne să mai considerăm cazul cînd cel puțin unul din numerele a_m ce intervin în reprezentarea triadică a lui t este 1.

Fie

$$t_m = \frac{1}{3} a_0 + \frac{1}{3^2} a_1 + \ldots + \frac{1}{3^{m+1}} a_m, \quad t'_m = t_m + \frac{2}{3^{m+n+1}}$$

și să luăm întregul m astfel încît să existe cel puțin un număr $p \leqslant m$ pentru care $a_p = 1$. Fie așadar numerele întregi și pozitive $p_1, p_2, \ldots, p_s$ astfel încît

$$a_{p_i} = 1, \quad p_i \leqslant m, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Avem

$$3^r t_m = q + \frac{1}{3} a_r + \frac{1}{3^2} a_{r+1} + \ldots + \frac{1}{3^{m-r+1}} a_m$$

$$3^r t'_m = q + \frac{1}{3} a_r + \frac{1}{3^2} a_{r+1} + \ldots + \frac{1}{3^{m-r+1}} a_m + \frac{2}{3^{m-r+n+1}} \tag{7}$$

$$t'_m - t_m = \frac{2}{3^{m+n+1}}$$

α) Pentru $a_r = 0$ sau $a_r = 2$, $r \leqslant m$, obținem

$$f(3^r t'_m) - f(3^r t_m) = 0. \tag{8}$$

În adevăr, dacă $a_r = 2$ și $r \leqslant m$, atunci

$$\frac{2}{3} \leqslant 3^r t_m - q < 1\,; \quad \frac{2}{3} \leqslant 3^r t'_m - q < 1\,;$$

dacă $a_r = 0$ și $r \leqslant m$, atunci

$$0 \leqslant 3^r t_m - q < \frac{1}{3}; \quad 0 \leqslant 3^r t'_m - q < \frac{1}{3};$$

deci (8) este adevărat pentru orice q par sau impar.

β) Dacă $m+1 \leqslant r < m+n$, pentru orice $a_0, a_1, \ldots, a_m$, avem

$$f(3^r t'_m) - f(3^r t_m) = 0. \tag{8'}$$

În adevăr, pentru $m + 1 \leqslant r < m + n$

$$3^r t_m = q, \; q < 3^r t'_m = q + \frac{2}{3^{m-r+n+1}} < q + \frac{1}{3}$$

deci pentru q par sau impar (8′) este adevărat.

γ) Dacă $r = m+n$, pentru orice $a_0, a_1, \dots, a_m$, avem

$$f(3^r t'_m) - f(3^r t_m) = (-1)^q \tag{8''}$$

deoarece

$$3^r t_m = q, \quad 3^r t'_m = q + \frac{2}{3}.$$

δ) Dacă $r \geqslant m + n + 1$, pentru orice $a_0, a_1, \dots, a_m$, avem

$$f(3^r t'_m) - f(3^r t_m) = 0$$

deoarece

$$3^r t_m = q, \; 3^r t'_m = q + 2 \,.\, 3^{r-m-n-1}.$$

Rămîne să mai cercetăm cazul cînd $a_r = 1$, $r \leqslant m$.

ε) Dacă $a_r = 1$, $r \leqslant m$, atunci

$$|f(3^r t'_m) - f(3^r t_m)| = \frac{4}{3^{m+n-r+1}}. \tag{9}$$

În adevăr, plecînd de la (1) obținem

$$\frac{1}{3} \leqslant 3^r t_m - q < \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{3} \leqslant 3^r t'_m - q < \frac{2}{3}$$

deci

$$\frac{f(3^r t'_m) - f(3^r t_m)}{3^r(t'_m - t_m)} = (-1)^q \cdot 2$$

de unde rezultă imediat relația (9).

Fie t un punct oarecare al intervalului $[0, 1]$

$$t = \frac{1}{3} a_0 + \frac{1}{3^2} a_1 + \dots + \frac{1}{3^{m+1}} a_m + \dots \tag{10}$$

cu $a_h = 0$, $a_h = 1$ sau $a_h = 2$, $h = 0, 1, \dots$ Deoarece numerele a_h nu sînt toate 0 sau 2, fie m un număr natural astfel încît $a_{p_1} = 1$, $a_{p_2} = 1, \dots, a_{p_s} = 1$, $p_k \leqslant m$, $s \geqslant 1$. Să luăm $m = nq$ și să notăm

$$x_k(t) = S_m(t) + R_m(t)$$

cu

$$S_m(t) = \sum_{p=0}^{q+1} \frac{1}{2^{p+1}} f(3^{pn+k}\, t)$$

$$R_m(t) = \sum_{p=q+2}^{\infty} \frac{1}{2^{p+1}} f(3^{pn+k}\, t)$$

deci

$$x_k(t'_m) - x_k(t_m) = S_m(t'_m) - S_m(t_m)$$

deoarece

$$R_m(t'_m) = R_m(t_m) = 0.$$

Însă

$$S_m(t'_m) - S_m(t_m) = \pm\left[\sum_{i=1}^{s}(-1)^i\frac{1}{2^{p_i+1}}\cdot\frac{4}{3^{m+n-p_i+1}} + \frac{(-1)^{s+1}}{2^{m+n+1}}\right]$$

deci

$$\frac{x_k(t'_m) - x_k(t_m)}{t'_m - t_m} = \frac{S_m(t'_m) - S_m(t_m)}{t'_m - t_m} =$$

(11)

$$= \pm\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{s}(-1)^i 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{p_i} + (-1)^{s+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{m+n+1}\right].$$

Avem două cazuri de considerat:

a) Dacă şirul

(12) $$a_{p_1},\ a_{p_2},\ \ldots,\ a_{p_k},\ \ldots$$

cu $a_{p_k} = 1$ are un număr finit de termeni, atunci în (11), pentru m suficient de mare, avem

$$\left|\frac{x_k(t'_m) - x_k(t_m)}{t'_m - t_m}\right| \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m+n+1}$$

şi

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{x_k(t'_m) - x_k(t_m)}{t'_m - t_m}\right| = +\infty.$$

b) Dacă şirul (12) are o infinitate de termeni, atunci seria alternată în care se transformă (11) cînd $m \to \infty$ este divergentă.

Teorema este demonstrată.

Să notăm

$$f_k(t) = f(3^k t), \qquad t \in [0,\ 1],$$

unde f este funcţia definită în teorema 1.1. Punctele în care $f_k(t)$ nu este derivabilă, formează o mulţime finită $\mathfrak{M}_k$, cu punctele $\xi_k \in \mathfrak{M}_k$ date de

(13) $$\xi_k = \frac{p}{3^{k+1}},\quad p = 1,2,\ldots,\ 3^{k+1}-1,\ p \neq \text{mult } 3.$$

Avem

TEOREMA 2.4. *Fie* $(f_k(t))$ *şirul de funcţii definite de relaţia*

$$f_k(t) = f(3^k t), \qquad k = 0,1,2,\ldots,$$

unde $f(t)$ *este definit în teorema 1.1 şi* $\mathfrak{M}_k$ *mulţimea punctelor în care funcţia* $f_k(t)$ *nu este derivabilă. Avem*

a) $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_j = \emptyset, \qquad i \neq j = 0,1,2,\ldots$

b) *mulţimea* $\mathfrak{M}$ *dată de reuniunea*

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{0}^{\infty}\mathfrak{M}_k$$

este densă pe intervalul $(0,\ 1)$.

Demonstrație. Punctul *a*) rezultă din distribuția punctelor $\xi_k \in \mathfrak{M}_k$ dată de (13). Pentru punctul *b*) se observă că dacă ξ_k', ξ_k'' sînt două puncte consecutive ale mulțimii $\mathfrak{M}_k$, avem

$$\xi_k'' - \xi_k' = \frac{2}{3^{k+1}} \quad \text{sau} \quad \xi_k'' - \xi_k' = \frac{1}{3^{k+1}}$$

iar pentru reuniunea

$$M_k = \bigcup_0^k \mathfrak{M}_k$$

dacă η_k', η_k'' sînt două puncte consecutive și η_k', $\eta_k'' \in M_k$, atunci

$$\eta_k'' - \eta_k' = \frac{1}{3^{k+1}}\cdot$$

Din demonstrația punctului *b*) rezultă și
TEOREMA 2.5. *Mulțimile*

$$\mathfrak{N}_i = \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathfrak{M}_{pn+i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

sînt dense pe intervalul (0,1).

Teoremele 2.3, 2.4 și 2.5 sînt valabile și pentru funcțiile corespunzătoare conținute în enunțul teoremei 1.2.

TEOREMA 2.6. *Funcția* $x_k(t)$ *ce intervine în teorema* 1.2 *verifică următoarea ecuație funcțională*

$$x_k(t) - 2x_k(a^{-n}t) = f(a^{k-n}t)$$

echivalentă cu

$$x_k(a^{n-k}t) - 2x_k(a^{-k}t) = f(t).$$

Pentru $a = 3$ *și* f *dată în teorema* 1.1, *obținem relațiile funcționale verificate de funcțiile* $x_k(t)$ *ce intervin în teorema* 1.1.

TEOREMA 2.7. *a*) *Dacă* $x_k(t)$ *sînt funcțiile definite în teorema* 1.1, *avem*

$$\int_0^1 x_k(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot$$

b) *Dacă* $x_k(t)$ *sînt funcțiile definite în teorema* 1.2,

$$\frac{1}{a} < \int_0^1 x_k(t)\mathrm{d}t < \frac{a-1}{a}\cdot$$

Demonstrație. a) Avem

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 f(3^k t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3^k}\int_0^{3^k} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2};$$

seria lui $x_k(t)$ fiind uniform convergentă pe $[0, 1]$, obținem

$$\int_0^1 x_k(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2}$$

b) Se observă că

$$0 < \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{a-1}{a}} \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t < \frac{a-2}{a},\ 0 < \int_{-\frac{a-1}{a}}^{-\frac{1}{a}} \varphi_1(t)\mathrm{d}t < \frac{a-2}{a}$$

deci

$$\frac{1}{a} < \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t < \frac{a-1}{a}$$

de unde rezultă imediat și b).

TEOREMA 2.8. a) *În orice interval* $\left(\frac{2}{3^{m+1}}, \frac{1}{3^m}\right)$, $m = 0,1, \ldots,$ *avem*

$$x_k(t) \geqslant \frac{1}{2^{E\left(\frac{m}{n}\right)+1}},$$

unde $x_k(t)$ *sînt funcțiile definite în teorema* 1.1, *iar* $E\left(\frac{m}{n}\right)$ *este partea întreagă a numărului* $\frac{m}{n}\cdot$

b) *În orice interval* $\left(\frac{a-1}{a^{m+1}}, \frac{1}{a^m}\right)$, $m = 0, 1, \ldots,$ *avem*

$$x_k(t) \geqslant \frac{1}{2^{E\left(\frac{m}{n}\right)+1}}$$

unde $x_k(t)$ *sînt funcțiile definite în teorema* 1.2.

Demonstrație. a) Un punct $t_0 \in \left(\frac{2}{3^{m+1}}, \frac{1}{3^m}\right)$ se scrie în baza 3

$$t_0 = \frac{2}{3^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+2}}a_1 + \frac{1}{3^{m+3}}a_2 + \ldots$$

cu $a_k = 0$, $a_k = 1$ sau $a_k = 2$. Avem

α) $3^r t_0 \leqslant \frac{1}{3}$, dacă $r \leqslant m - 1$ deci $f(3^r t_0) = 0$

β) $1 > 3^r t_0 \geqslant \frac{2}{3}$, dacă $r = m$ deci $f(3^r t_0) = 1$

dacă punem $m = pn+k$, atunci coeficientul lui $f(3^m t)$ în $x_k(t)$ este $\frac{1}{2^{p+1}}$, deci

$$x_k(t) \geqslant \frac{1}{2^{p+1}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Punctul b) al teoremei se demonstrează la fel.

Primită la redacţie la 7 decembrie 1964

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România, str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. I.J. Schoenberg, *On the Peano curbe of Lebesque*. Bull. Amer. Math. Soc., **44** (1938).
2. Marcel N. Roşculeţ, *Un exemplu de curbă care umple un volum*. St. cerc. mat., **17** (1965).

UN MODEL DEMOGRAFIC-MATEMATIC PRIVIND DINAMICA SPECIALIȘTILOR 1)

DE

R. THEODORESCU și I. VĂDUVA

Modelul determinat considerat în cele ce urmează are ca scop să descrie pe un teritoriu dat, dinamica specialiștilor într-un anumit domeniu de activitate din cadrul unui sisitem social-economic și demografic determinat, în ipoteza că influența migrației este neglijabilă 2). În prima parte a lucrării se dă descrierea modelului. Partea a doua a lucrării conține rezolvarea sistemului de ecuații cu diferențe care caracterizează modelul. În ultima parte a lucrării sînt examinate unele aspecte statistice privind estimarea parametrilor care intervin în model, precum și unele aspecte ale problemei predicției.

1. FORMA MODELULUI

Mai întîi vom face unele precizări legate de variabilele modelului, făcînd ipoteze asupra lor.

Variabila independentă a modelului este timpul, despre care presupunem că ia valori discrete. Condiția că timpul este discret, se impune prin aceea că evoluția numărului de specialiști este observată la anumite intervale de timp (semestre, ani, decenii etc). Prin urmare, modelul pe care îl considerăm este un model dinamic discret, iar originea timpului va fi un moment oarecare, precizat.

În model vor fi considerate o serie de variabile fundamentale care apar ca funcții de timp. Acestea sînt :

$P(t)$ populația totală a teritoriului considerat la momentul t.

$A(t)$ numărul de indivizi la momentul t, din cadrul populației, care posedă un minim de cunoștințe în specialitatea considerată. Acești indivizi vor fi numiți ,,absolvenți". Ei pot fi, de exemplu, absolvenții unei școli speciale sau alte persoane care pînă la momentul t au dobîndit un anumit minim de cunoștințe în specialitatea considerată.

---

1) Comunicare prezentată la Primul Simpozion Internațional de Demografie, Leipzig, 20—24 septembrie 1966.

2) Un model analog privind tuberculoza este dat în [3] ; vezi și [2].

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 329–337, BUCUREȘTI, 1967

$S(t)$ numărul de specialişti la momentul t, din cadrul populaţiei. Faptul că un individ este specialist sau nu, este o chestiune a cercetătorului demograf care studiază problema specialităţii respective. De exemplu, doctorii în specialitate, inventatorii sau inovatorii, sau persoanele care posedă diplome de calificare, pot fi consideraţi specialişti.

$N(t)$ numărul de indivizi la momentul t, din cadrul populaţiei, care nu au nici un fel de cunoştinţe în specialitatea considerată. Ei vor fi numiţi "nespecialişti".

În afară de variabilele fundamentale, mai intervin în model şi alte variabile. Aceste variabile vor fi numite *de trecere* şi ele caracterizează variaţia în unitatea de timp a variabilelor fundamentale. Variabilele de trecere sînt :

$a(t, t+1)$ numărul noilor absolvenţi din cadrul populaţiei, apăruţi în intervalul de timp $(t, t+1)$.

$s(t, t+1)$ numărul noilor specialişti din cadrul populaţiei, apăruţi în intervalul de timp $(t, t+1)$.

$D(t, t+1)$ numărul de decedaţi din cadrul populaţiei în intervalul de timp $(t, t+1)$.

$E(t, t+1)$ numărul de absolvenţi sau specialişti din cadrul populaţiei, care renunţă la specialitate în intervalul de timp $(t, t+1)$. Prin indivizi care renunţă la specialitate vom înţelege şi acei indivizi care au fost pensionaţi, accidentaţi etc. Aceşti indivizi vor fi numiţi şi ,,ieşiţi".

$DA(t, t+1)$ numărul de decedaţi din cadrul absolvenţilor în intervalul $(t, t+1)$.

$DS(t, t+1)$ numărul de decedaţi din cadrul specialiştilor în intervalul $(t, t+1)$.

$DN(t, t+1)$ numărul de decedaţi din cadrul nespecialiştilor în intervalul $(t, t+1)$.

$EA(t, t+1)$ numărul de ieşiţi din cadrul absolvenţilor în intervalul $(t, t+1)$.

$ES(t, t+1)$ numărul de ieşiţi din cadrul specialiştilor în intervalul $(t, t+1)$.

$i(t, t+1)$ numărul de noi născuţi în intervalul $(t, t+1)$.

Să facem următoarele ipoteze :

I. Absolvenţii provin numai din cadrul nespecialiştilor.

II. Specialiştii provin numai din cadrul absolvenţilor.

III. Noii născuţi sînt nespecialişti.

IV. Ieşiţii devin întotdeauna nespecialişti.

Referitor la ieşiţii din cadrul sistemului absolvenţi-specialişti, ipoteza IV ar putea fi discutabilă. Totuşi în condiţiile unei economii planificate şi a existenţei în stat a unor norme juridice corespunzătoare, această ipoteză este admisibilă.

Pe baza definiţiilor variabilelor fundamentale şi de trecere precum şi pe baza ipotezelor făcute, rezultă că au loc următoarele relaţii fundamentale :

$$P(t+1) = P(t) + i(t, t+1) - D(t, t+1) \tag{1}$$

$$A(t+1) = A(t) + a(t, t+1) - DA(t, t+1) - EA(t, t+1) - s(t, t+1), \tag{2}$$

$$S(t+1) = S(t) + s(t, t+1) - DS(t, t+1) - ES(t, t+1), \tag{3}$$

$$N(t+1) = N(t) + i(t, t+1) + E(t, t+1) - DN(t, t+1) - a(t, t+1), \tag{4}$$

cît și relațiile de conservare

$$P(t) = A(t) + S(t) + N(t), \tag{5}$$

$$D(t,\ t+1) = DA(t,\ t+1) + DS(t,\ t+1) + DN(t,\ t+1), \tag{6}$$

$$E(t, t + 1) = EA\,(t, t + 1) + ES\,(t, t + 1). \tag{7}$$

Aceste relații sînt scrise în ipoteza absenței influenței migrației. Relațiile (1)—(4) dau legătura dintre valorile variabilelor fundamentale la momentul $t+1$ și valorile lor la momentul t, ținîndu-se seamă de efectul variabilelor de trecere de care în fapt depind. Se observă că relațiile (1)—(4) reprezintă un sistem de patru ecuații cu diferențe finite, care, abstracție făcînd de variabilele de trecere, conțin ca funcții necunoscute cele patru variabile fundamentale.

Pentru a rezolva acest sistem, este necesar să se găsească numai trei dintre funcțiile necunoscute, deoarece relația de conservare (5) referitoare la sistemul demografic considerat permite determinarea celei de-a patra. Relațiile (6) și (7) sînt relații complementare de conservare de care trebuie să se țină seama la rezolvarea sistemului de ecuații cu diferențe.

În afară de relațiile (1)—(7), vom observa că variabilele auxiliare se pot exprima ca funcții de variabilele fundamentale. Dependența dintre variabilele de trecere și cele fundamentale, dedusă ca urmare a definiției lor, precum și a ipotezelor făcute, este dată de următoarele relații :

$$a(t,\ t+1) = f_1(N(t)), \tag{8}$$

$$s(t,\ t+1) = f_2(A(t)), \tag{9}$$

$$DA(t,\ t+1) = f_3(A(t)), \tag{10}$$

$$DS(t,\ t+1) = f_4(S(t)), \tag{11}$$

$$DN(t,\ t+1) = f_5(N(t)), \tag{12}$$

$$EA(t,\ t+1) = f_6(A(t)), \tag{13}$$

$$ES(t,\ t+1) = f_7(S(t)), \tag{14}$$

$$i(t,\ t+1) = f_8(P(t)). \tag{15}$$

Dacă în relațiile (1)—(4) ținem seamă de relațiile (8)—(15), observăm cu ușurință că obținem un sistem de ecuații cu diferențe finite care conține cele patru variabile fundamentale ca funcții necunoscute.

Să examinăm acum relația (9). Această relație derivă din ipoteza II și se poate exprima astfel : numărul noilor specialiști care apar în intervalul de timp $(t,\ t+1)$ depinde de numărul de absolvenți care au existat la momentul t (începutul intervalului). Însă acest lucru ar presupune că numai existența absolvenților implică apariția specialiștilor. Or, acest lucru nu pare să fie întru totul exact, deoarece noul specialist apare și se dezvoltă numai dacă este îndrumat în activitatea sa de către un alt specialist. De asemenea, noul specialist apare și condiţionat de nivelul bazei materiale pe care o folosește în activitatea sa. Acest lucru este cuprins implicit și în ipoteza II, deoarece estimînd dependenţa care leagă noii specialiști de absolvenţi trebuie să ţinem seamă de particularităţile teritoriului examinat.

Din cele de mai sus rezultă că este plauzibil să se considere în locul ipotezei II ipoteza :

II′. Noii specialiști apar și se dezvoltă numai în prezenţa altor specialiști.

În favoarea ipotezei II′ vine și argumentul că formarea noilor specialiști este un proces continuu ; niciodată în epoca în care trăim nu va apare un specialist fără să aibă precursori. De asemenea, această ipoteză consemnează tacit faptul că formarea noului specialist are loc într-un cadru specific de activitate umană.

Iată deci că în modelul considerat putem accepta în locul ipotezei II, ipoteza II′ sau o ipoteză mai largă care să le conţină pe ambele. Dacă se acceptă ipoteza II′, atunci rezultă că relaţia (9) trebuie înlocuită cu

$$s(t,\ t+1) = f_2(S(t)). \tag{9′}$$

În locul ipotezelor II sau II′ acceptăm ipoteza complexă :

II″. Noii specialiști apar și se dezvoltă din rîndul absolvenţilor, numai în prezenţa altor specialiști.

Atunci relaţiile (9) sau (9′) se înlocuiesc cu relaţia

$$s(t,\ t+1) = f_2(A(t),\ S(t)). \tag{9″}$$

Evident, această ipoteză conţine drept cazuri particulare ipotezele II și II′. Desigur, în aplicaţiile practice concrete putem accepta și ipotezele mai simple II sau II′ în funcţie evident de verificarea concordanţei modelului teoretic cu datele experimentale.

Referitor la forma modelului să mai observăm că în unele cazuri, cînd formarea de cadre calificate se realizează planificat, funcţia $A(t)$ poate fi presupusă cunoscută. Din această cauză sistemul de ecuaţii cu diferenţe finite (1)—(4) se reduce la trei ecuaţii cu trei funcţii necunoscute, ceea ce contribuie desigur la ușurarea rezolvării acestui sistem.

În sfîrșit, amintim încă faptul că modelul considerat se poate extinde fără dificultăţi principiale la cazul cînd împărţim specialiștii în clase după vîrstă.

2. REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUAŢII CU DIFERENŢE FINITE CARE CARACTERIZEAZĂ MODELUL

În general, procedăm astfel : pe baza observării fenomenului dinamicii specialiștilor, pe mai mulţi ani, estimăm funcţiile f_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$, introducem expresiile lor analitice în relaţiile (1)—(4) și apoi rezolvăm sistemul de ecuaţii cu diferenţe finite obţinut. Acest lucru însă ar fi prea complicat, fără să facem încă de la început ipoteze suplimentare simplificatoare asupra funcţiilor f_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$. De aceea vom presupune că funcţiile f_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$, sînt toate liniare.

În cele ce urmează vom lucra în ipotezele I, II'', III, IV. Atunci relațiile (8), (9''), (10)—(15) devin respectiv:

$$(8^*)\qquad a(t,\ t+1) = k_1N(t) + h_1(t),$$

$$(9^*)\qquad s(t,\ t+1) = k_2'A(t) + k_2''S(t) + h_2(t),$$

$$(10^*)\qquad DA(t,\ t+1) = k_3A(t) + h_3(t),$$

$$(11^*)\qquad DS(t,\ t+1) = k_4S(t) + h_4(t),$$

$$(12^*)\qquad DN(t,\ t+1) = k_5N(t) + h_5(t),$$

$$(13^*)\qquad EA(t,\ t+1) = k_6A(t) + h_6(t),$$

$$14^*)\qquad ES(t,\ t+1) = k_7S(t) + h_7(t),$$

$$(15^*)\qquad i(t,\ t+1) = k_8P(t) + h_8(t),$$

unde constantele k și funcțiile de timp $h(t)$ sînt cunoscute. Evident, ipotezele II și II' se obțin respectiv din (9*) pentru $k_2'' = 0$ și $k_2' = 0$.

Înlocuind relațiile (8*)—(15*) în sistemul (1)—(4) și ținînd seamă de (6) și (7), obținem

$$(1^*)\qquad P(t+1) = P(t)\,[1+k_8] - k_3A(t) - k_4S(t) - k_5N(t) - h_3(t) -$$
$$- h_4(t) - h_5(t) + h_8(t),$$

$$(2^*)\qquad A(t+1) = (1-k_2'-k_3-k_6)\,A(t) - k_2''S(t) + k_1N(t) + h_1(t) -$$
$$- h_2(t) - h_3(t) - h_6(t),$$

$$(3^*)\qquad S(t+1) = (1-k_2''-k_4-k_7)\,S(t) + k_4'A(t) + h_2(t) - h_4(t) - h_7(t),$$

$$(4^*)\qquad N(t+1) = (1-k_1-k_5+k_8)\,N(t) + (k_6+k_8)A(t) + (k_7+k_8)S(t) -$$
$$- h_1(t) - h_5(t) + h_6(t) + h_7(t) + h_8(t).$$

Introducînd notațiile

$$u_1 = 1-k_2' - k_3 - k_6, \qquad u_2 = -k_2'', \qquad u_3 = k_1,$$

$$h_1'(t) = h_1(t) - h_2(t) - h_3(t) - h_6(t),$$

$$v_1 = 1-k_2''-k_4-k_7, \quad v_2 = k_2',$$

$$h_2'(t) = h_2(t) - h_4(t) - h_7(t),$$

$$w_1 = 1-k_1-k_5+k_8, \qquad w_2 = k_6+k_8, \qquad w_3 = k_7+k_8$$

$$h_3'(t) = -h_1(t) - h_5(t) + h_6(t) + h_7(t) + h_8(t),$$

relațiile (2*)—(4*) devin:

$$(2^{**})\qquad A(t+1) = u_1A(t) + u_2S(t) + u_3N(t) + h_1'(t),$$

$$(3^{**})\qquad S(t+1) = v_1S(t) + v_2A(t) + h_2'(t)$$

$$(4^{**})\qquad N(t+1) = w_1N(t) + w_2A(t) + w_3S(t) + h_3'(t).$$

Efectuînd calculele obţinem următoarele ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi neomogene cu diferenţe finite de ordinul trei pentru variabilele fundamentale

$$a_0A(t+3) + a_1A(t+2) + a_2A(t+1) + a_3A(t) = H_1(t), \tag{16}$$

$$b_0S(t+3) + b_1S(t+2) + b_2S(t+1) + b_3S(t) = H_2(t), \tag{17}$$

$$c_0N(t+3) + c_1N(t+2) + c_2N(t+1) + c_3N(t) = H_3(t), \tag{18}$$

unde am pus

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -u_1-v_1-w_1, \\ a_2 = u_1v_1 + u_1w_1 + v_1w_1-u_2v_2-u_3w_2, \\ a_3 = u_3v_1w_2 + u_2v_1v_2 + u_2v_2w_1 - u_1v_1w_1 - u_3v_2w_3 - u_2v_1v_2, \\ H_1(t) = h_1'(t+2) - (v_1+w_1)h_1'(t+1) + v_1w_1h_1'(t) + u_2h_2'(t+1) + \\ \qquad + (u_3w_3-u_2w_1)h_2'(t) + u_3h_3'(t+1) - u_2v_1h_3'(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 = 1, \\ b_1 = -u_1-v_1-w_1, \\ b_2 = u_1v_1 + u_1w_1 + v_1w_1 - u_2v_2 - u_3w_2, \\ b_3 = u_2v_2w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_1w_1 - u_3v_2w_3, \\ H_2(t) = v_2h_1'(t+1) - v_2w_1h_1'(t) + h_2'(t+2) - (u_1+w_1)h_2'(t+1) + \\ \qquad + (u_1w_1-u_3w_2)h_2'(t) + u_3v_2h_3'(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 = u_2w_2^2 + v_1w_2w_3 - u_1w_1w_3 - v_2w_3^2, \\ c_1 = -u_2w_1w_2^2 - v_1w_1w_2w_3 - u_1u_2w_2^2 - u_2v_2w_2w_3 - u_2v_1w_2^2 - \\ \qquad -v_1^2w_2w_3 - u_1w_1w_2w_3 - v_2w_1w_3^2 - u_1^2w_2w_3 - u_1v_2w_2w_3 - \\ \qquad -u_3v_2w_2^2 - v_1v_2w_2w_3 - u_1w_1w_3^2 . \\ c_2 = u_1u_2w_1w_2^2 + u_1v_2w_1w_2w_3 + u_2v_1w_1w_2^2 + v_1^2w_1w_2w_3 + u_1u_2v_1w_2^2 + \\ \quad + u_1v_1^2w_2w_3 + u_1u_2v_2w_2w_3 + u_2v_2^2w_3^2 - u_2u_3w_2^2 - u_3v_1w_2^2w_3 - \\ \quad - u_1u_3w_2^2w_3 - u_3v_2w_2w_3^2 - u_1^2w_1w_2w_3 - u_1v_2w_1w_3^2 - u_3v_2w_1w_2w_3 - \\ \quad - v_1v_2w_1w_3^2 - u_1^2v_1w_2w_3 - u_1v_1v_2w_3 - u_2u_3v_2w_2^2 - u_3v_1v_2w_2w_3, \\ c_3 = u_2u_3v_1w_2^3 + u_3v_1^2w_2^2w_3 + 3u_1^2u_3w_2^3w_3 + u_3v_2^2w_3^3 + u_3^2v_2w_2^2w_3 - \\ \quad - u_1u_3v_1w_2^2w_3 - u_1u_2v_1w_1w_2^2 - u_1v_1^2w_1w_2w_3 - u_1u_2v_2w_1w_2w_3 - \\ \quad - u_2v_2^2w_1w_3^2 + u_1^2v_1w_1w_2w_3 + u_1v_1v_2w_1w_3^2 + u_2u_3v_2w_1w_2^2 + \\ \quad + u_3v_1v_2w_1w_2w_3 . \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
H_3(t) = &- (u_1^2w_2^2w_3 - u_1v_1w_2^2w_3 + 2u_1v_2w_2w_3^2 + v_2^2w_3^2 + u_2v_1w_3^3 + \\
&+ u_1v_1w_2w_3^2 + u_3v_2w_2^2w_3 + v_1^2w_2^2w_3)\, h_1'(t) - (u_1v_1w_2w_3^2 + \\
&+ 2u_2v_2w_2w_3^2 - u_2^2w_2^3 - 2v_1v_2w_3^2 - u_1u_2w_2^2w_3 - u_1v_2w_3^2 + \\
&+ u_3v_2w_2w_3^2)\, h_2'(t) - (u_1u_2w_2^2 + u_2v_2w_2w_3 + u_2v_1w_2^2 + \\
&+ u_1^2w_2w_3 + u_1v_2w_3^2 + u_3v_2w_2w_3 + v_1v_2w_3^2)\, h_3'(t+1) - \\
&- (u_2w_3^2 + v_1w_2^2w_3 - u_1w_2^2w_3 - v_2w_2w_3^2)\, h_1'(t+1) - (u_2w_2^2w_3^2 - \\
&- u_1w_2w_3^2 - v_2w_3^3)\, h_2'(t+1) - (u_2w_2^2 + v_1w_2w_3 - u_1w_2w_3 - \\
&- v_2w_3^2)\, h_3'(t+2)\,.
\end{aligned}
$$

Evident, folosind ipotezele II sau II′ respectiv în locul ipotezei II″, ecuațiile (16)—(18) se simplifică, ușurînd prin aceasta calculul coeficienților care intervin.

Rezolvarea ecuațiilor (16)—(18) se face conform metodelor obișnuite (vezi, de exemplu, [1]). Pornind mai întîi de la ecuațiile omogene corespunzătoare, observăm că fiecare dintre ele poate avea o soluție generală $X(t)$ de forma:

1° $$X(t) = C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t + C_3\lambda_3^t$$

dacă ecuația caracteristică corespunzătoare are trei rădăcini reale distincte λ_1, λ_2, λ_3:

2° $$X(t) = C_1\lambda_1^t + C_2\rho^t\cos\omega t + C_3\rho^t\sin\omega t$$

dacă ecuația caracteristică corespunzătoare are o rădăcină reală λ_1 și două rădăcini complex conjugate, caracterizate de ρ și ω:

3° $$X(t) = C_1\lambda_1^t + (C_2 + C_3t)\lambda_2^t$$

dacă ecuația caracteristică corespunzătoare are o rădăcină reală simplă λ_1 și o rădăcină reală dublă λ_2;

4° $$X(t) = (C_1 + C_2t + C_3t^2)\lambda^t$$

dacă ecuația caracteristică corespunzătoare are o rădăcină reală triplă λ.

Mai departe, pentru a determina constantele C_1, C_2 și C_3 trebuie să ne dăm condiții inițiale de forma

$$X(t_0) = \gamma_1, \quad X(t_0+1) = \gamma_2, \quad X(t_0+2) = \gamma_3,$$

unde t_0 este un moment de timp fixat.

În sfîrșit, trecînd la ecuațiile neomogene corespunzătoare trebuie să aflăm mai întîi o soluție particulară $X_0(t)$, soluția generală fiind suma dintre $X_0(t)$ și soluția generală a ecuației omogene.

Amintim că dacă în formulele (8*)—(15*) presupunem $h_i(t) \equiv 0$, $1 \leqslant i \leqslant 8$, atunci ecuațiile (16)—(18) devin omogene și deci rezolvarea lor se simplifică.

Un caz interesant este şi acela cînd $h_i(t) = h_i = \text{const.}$, $1 \leqslant i \leqslant 8$, ecuaţiile (16)—(18) fiind neomogene cu membrul doi constant.

În unele cazuri practice funcţia $A(t)$ poate fi presupusă cunoscută (de regulă o exponenţială) şi atunci sistemul de ecuaţii (1)—(4) conţine numai două funcţii necunoscute şi anume $S(t)$ şi $A(t)$, iar rezolvarea lor se reduce la rezolvarea a două ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi neomogene cu diferenţe finite de ordinul doi.

3. ESTIMAREA PARAMETRILOR MODELULUI

După cum am văzut, relaţiile (8*)—(15*) pun în evidenţă un număr de 9 constante şi 8 funcţii presupuse cunoscute. Se pune deci problema estimării acestor constante în funcţie de datele demografice de care dispunem.

Pentru simplificarea expunerii, fie

$$Y(t) = kX(t) + h(t)$$

una oarecare dintre relaţiile (8*), (10*)—(15*). Presupunem că la momentele de timp $t_1, \ldots, t_n$, $(t_{i+1} = t_i + 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1)$, sînt date valorile $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ şi respectiv $Y(t_1), \ldots, Y(t_n)$. Aplicînd metoda celor mai mici pătrate, rezultă că o estimaţie pentru k este dată de expresia

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} [Y(t_i) - h(t_i)]X(t_i)}{\sum_{i=1}^{n} X^2(ti)}.$$

În mod analog, în cazul relaţiei (9*), constantele k_1' şi k_2'' se obţin din rezolvarea următorului sistem de ecuaţii

$$k_2' \sum_{i=1}^{n} A^2(t_i) + k_2'' \sum_{i=1}^{n} A(t_i)\, S(t_i) = \sum_{i=1}^{n} A(t_i)\, [s(t_i, t_i+1) - h_2(t_i)],$$

$$k_2' \sum_{i=1}^{n} A(t_i)\, S(t_i) + k_2'' \sum_{i=1}^{n} S^2(t_i) = \sum_{i=1}^{n} S(t_i)\, [s(t_i, t_i+1) - h_2(t_i)].$$

Să observăm acum că de fapt variabilele fundamentale şi variabilele de trecere sînt mărimi aleatoare; în consecinţă, estimînd constantele k ca mai sus, soluţiile date de ecuaţiile (16)—(18) nu reprezintă altceva decît valorile medii ale acestor mărimi aleatoare. Dacă presupunem în plus că dispersiile acestor mărimi sînt constante, atunci putem rezolva pentru ele problema predicţiei, obţinînd

$$X(t_0 + \tau) = \overline{X}(t_0 + \tau) \pm 3\hat{s}, \tag{19}$$

unde $X(t_0)$ este variabila fundamentală presupusă proces aleator, $\overline{X}(t)$ valoarea sa medie obţinută ca soluţie a sistemului de ecuaţii cu diferenţe finite considerat, iar $\hat{s}$ o estimaţie a abaterii medii pătratice a procesului aleator $X(t)$. În ipoteza că $X(t)$ este un proces aleator normal cu dispersie constantă, atunci (19) devine

$$X(t_0 + \tau) = \overline{X}(t_0 + \tau) \pm 1{,}96\, \hat{s}.$$

În sfîrşit, amintim că dacă mărimile h sînt constante necunoscute, atunci consideraţiile statistice referitoare la rezolvarea modelului sînt analoge cu cele de mai sus.

Primită la redacţie la 5 august 1966

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti 9

BIBLIOGRAFIE

1. А. О. ГЕЛЬФОНД, *Исчисление конечных разностей*. Москва, 1959.
2. I. VĂDUVA, *On a mathematical model concerning the endemy of tuberkulosis*. Berlin, 1966, (sub tipar).
3. H. WAALER, A. OJERSER, S. ANDERSEN, *The use of mathematical models in the study of the epidemiology of tuberkulosis*. Amer. J. of Public Health, **52**, 1002 (1962).

ASUPRA SUBGRUPURILOR GRUPULUI TRANSFORMĂRILOR ORTOGONALE DIN SPAŢIUL E_3

DE

MARIUS I. STOKA

În această lucrare se determină formele canonice la care pot fi reduse subgrupurile cu unu, doi, trei, patru şi cinci parametri ale grupului G_6 de transformări ortogonale din spaţiul E_3.

Grupul G_6 al transformărilor ortogonale din spaţiul euclidian E_3 de coordonate x^1, x^2, x^3 are transformările infinitezimale

$$X_i f = \partial_i f, \quad (i = 1, 2, 3), \quad X_{hk} f = x^h \partial_k f - x^k \partial_h f, \quad (h \neq k = 1, 2, 3), \tag{1}$$

unde $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, şi structura (notăm $X_{12} = X_4$, $X_{23} = X_5$, $X_{31} = X_6$)

$$\begin{gathered} (X_i X_j) = 0, \quad (X_4 X_5) = -X_6, \quad (X_5 X_6) = -X_4, \quad (X_6 X_4) = -X_5, \\ (X_1 X_4) = -(X_3 X_5) = X_2, \quad (X_2 X_4) = -(X_3 X_6) = -X_1, \\ (X_1 X_6) = -(X_2 X_5) = -X_3, \quad (X_1 X_5) = (X_2 X_6) = (X_3 X_4) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

În cele ce urmează vom determina formele canonice la care pot fi reduse subgrupurile acestui grup. Aceste rezultate nu sînt necesare la anumite probleme de geometrie integrală în spaţiul euclidian E_3.

I

Fie $Yf = a_i X_i f$, $(i = 1, \ldots, 6)$, operatorul unui subgrup cu un parametru al grupului G_6.

Dacă $a_1 = \ldots = a_5 = 0$, rezultă $a_6 \neq 0$ şi printr-o schimbare de parametri putem presupune $a_6 = 1$ şi deci $Y = X_6$. Prin schimbarea de variabile

$$\bar{x}^1 = x^3, \; \bar{x}^2 = x^1, \quad \bar{x}^3 = x^2,$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 339–362, BUCUREŞTI, 1967

obţinem grupul

$$G_1^1 \equiv [X_4]\,.$$

Dacă $a_1 = \ldots = a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$, putem presupune $a_5 = 1$ şi deci $Y = X_5 + \alpha X_6$. Prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = \alpha x^1 - x^2 + \sqrt{1+\alpha^2}\,x^3, \\ \overline{x}^2 = \alpha x^1 - x^2 - \sqrt{1+\alpha^2}\,x^3, \\ \overline{x}^3 = x^1 + \alpha x^2, \end{cases}$$

obţinem $Y = \overline{X}_4$, deci grupul G_1^1.

Dacă $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$, luăm $a_4 = 1$, de unde

$$Y = X_4 + \alpha X_5 + \beta X_6\,.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = (\beta^2 + 1)\,x^1 - \alpha\beta x^2 - \alpha x^3, \\ \overline{x}^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}\,(x^2 - \beta x^3), \\ \overline{x}^3 = \alpha x^1 + \beta x^2 + x^3, \end{cases}$$

obţinem $Y = \overline{X}_4$, adică grupul G_1^1.

Dacă $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, luînd $a_3 = 1$, avem

$$Y = X_3 + \alpha X_4 + \beta X_5 + \gamma X_6\,.$$

În cazul în care $\alpha = \beta = \gamma = 0$ avem $Y = X_3$ şi prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^3, \quad \overline{x}^2 = -x^2, \quad \overline{x}^3 = x^1,$$

obţinem grupul

$$G_1^2 = [X_1]\,.$$

În cazul în care $\alpha = 0$, $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = \gamma x^1 - \beta x^2 + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}\,x^3 - 1, \\ \overline{x}^2 = \gamma x^1 - \beta x^2 - \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}\,x^3 - 1, \\ \overline{x}^3 = \beta x^1 + \gamma x^2, \end{cases}$$

găsim

$$Y = \overline{X}_4$$

adică grupul G_1^1.

Dacă $\alpha \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = \alpha x^1 - \beta x^3 - \dfrac{\alpha\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ \overline{x}^2 = -\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}\,[\beta\gamma x^1 - (\alpha^2 + \beta^2)\,x^2 + \alpha\gamma x^3 - \beta], \\ \overline{x}^3 = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}{\sigma}\,(\beta x^1 + \gamma x^2 + \alpha x^3), \end{cases}$$

obținem

$$Y = \overline{X}_3 + \overline{X}_4$$

deci avem grupul

$$G_1^3 \equiv [X_3 + X_4].$$

Dacă $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, putem lua $a_2 = 1$ și deci

$$Y = X_2 + \alpha X_3 + \beta X_4 + \gamma X_5 + \delta X_6.$$

În cazul în care $\beta = \gamma = \delta = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^2, \quad \overline{x}^2 = -\alpha x^2 + x^3, \quad \overline{x}^3 = x^1,$$

găsim grupul G_1^2.

Dacă $\beta = \delta = 0$, $\gamma \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = \gamma x^2 - 1, \quad \overline{x}^2 = \gamma x^3 + \alpha, \quad \overline{x}^3 = x^1,$$

obținem grupul G_1^1.

Dacă $\beta = 0$, $\delta \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}\, x^3, \quad \overline{x}^2 = \delta x^1 - \gamma x^2, \quad \overline{x}^3 = \frac{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}{\delta}(\gamma x^1 + \delta x^2),$$

găsim grupul G_1^3.

Dacă $\beta \neq 0$, $\delta = -\alpha\beta$, prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = \sqrt{\alpha^2\beta^2 + \beta^2 + \gamma^2}\,(\beta x^1 - \gamma x^3 + 1), \\ \overline{x}^2 = -\alpha\beta\gamma x^1 + (\beta^2 + \gamma^2)\, x^2 + \alpha\beta^2 x^3 - \alpha\gamma, \\ \overline{x}^3 = \gamma x^1 - \alpha\beta x^2 + \beta x^3, \end{cases}$$

obținem grupul G_1^1.

În cazul în care $\beta \neq 0$, $\alpha\beta + \delta \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}\left(\beta x^1 - \gamma x^3 + \dfrac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta\delta}{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}\right), \\ \overline{x}^2 = -\gamma\delta x^1 + (\beta^2 + \gamma^2)\, x^2 - \beta\delta x^3 + \alpha\gamma, \\ \overline{x}^3 = \dfrac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}}{\alpha\beta + \delta}\,(\beta x^1 + \gamma x^2 + \delta x^3), \end{cases}$$

găsim grupul G_1^3.

În sfîrșit, dacă $a_1 \neq 0$, prin schimbări de variabile obținem grupurile G_1^1, G_1^2, G_1^3.

Avem deci:

TEOREMA 1. *Subgrupurile cu un parametru ale grupului $G_6(1)$ pot fi reduse la formele canonice*

$$G_1^1 \equiv [\boldsymbol{X}_4], \quad G_1^2 \equiv [\boldsymbol{X}_1], \quad G_1^3 \equiv [\boldsymbol{X}_3 + \boldsymbol{X}_4].$$

II

Fie $Y_1f = \alpha_i X_i f$, $Y_2 f = \beta_i X_i f$, $(i = 1, \ldots, 6)$, operatorii unui subgrup cu doi parametri al grupului $G_6(1)$. Se ştie că un grup cu doi parametri poate avea una din structurile [1]

$$1^\circ\ (Y_1 Y_2) = Y_1, \qquad 2^\circ\ (Y_1 Y_2) = 0.$$

În cazul 1°, ţinînd seama de expresia operatorilor Y_1 şi Y_2 şi de ecuaţiile (2), obţinem sistemul

$$(3)\qquad \begin{cases} -\alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 + \alpha_3\beta_6 - \alpha_6\beta_3 = \alpha_1, \\ \alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3 = \alpha_2, \\ -\alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1 - \alpha_5\beta_2 + \alpha_5\beta_2 = \alpha_3, \end{cases}$$
$$\begin{cases} -\alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5 = \alpha_4, \\ \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 = \alpha_5, \\ -\alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4 = \alpha_6. \end{cases}$$

Ultimele trei ecuaţii (3) formează un sistem liniar şi omogen cu necunoscutele α_4, α_5, α_6 care au numai soluţia banală pentru că $1 + \beta_4^2 + \beta_5^2 + \beta_6^2 \neq 0$, adică

$$\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0.$$

Cu aceste valori, primele trei ecuaţii (3) ne dau

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

ceea ce este imposibil.

Deci, grupul $G_6(1)$ nu are nici un subgrup cu doi parametri neabelian.

În cazul 2° obţinem sistemul

$$(4)\qquad \begin{cases} -\alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 + \alpha_3\beta_6 - \alpha_6\beta_3 = 0, \\ \alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3 = 0, \\ -\alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1 - \alpha_5\beta_2 + \alpha_2\beta_5 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} -\alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5 = 0, \\ \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 = 0, \\ -\alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4 = 0. \end{cases}$$

Dacă $\alpha_1 = \ldots = \alpha_5 = 0$, rezultă $\alpha_6 \neq 0$ şi putem lua $\alpha_6 = 1$. Din sistem rezultă $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$, deci $Y_1 = X_6$, $Y_2 = \beta_2 X_2 + \beta_6 X_6$. De aici deducem $\beta_2 \neq 0$ şi printr-o schimbare de parametri putem presupune $\beta_6 = 0$, $\beta_2 = 1$, deci avem subgrupul

$$G_2 \equiv [X_2, X_6],$$

care printr-o schimbare de variabile devine

$$G_2^1 \equiv [X_3, X_4].$$

Dacă $\alpha_1 = \ldots = \alpha_4 = 0$, $\alpha_5 \neq 0$, putem lua $\alpha_5 = 1$ şi printr-o schimbare de parametri obţinem $\beta_5 = 0$. Cu aceste valori sistemul (4) ne dă $\beta_3 = \beta_4 = \beta_6 = 0$, $\beta_2 = \beta_1\alpha_6$, deci cei doi operatori ai grupului sînt

$$Y_1 = X_5 + \alpha_6 X_6, \quad Y_2 = X_1 + \alpha_6 X_2.$$

În cazul în care $\alpha_6 = 0$, printr-o schimbare de variabile obţinem subgrupul G^1_2. În cazul în care $\alpha_6 \neq 0$, obţinem acelaşi subgrup prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^1 + \alpha_6 x^2, \quad \overline{x}^2 = -\alpha_6 x^1 + x^2, \quad \overline{x}^3 = -\sqrt{1 + \alpha_6^2}\, x^3.$$

Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 \neq 0$, printr-o schimbare de parametri obţinem $\alpha_4 = 1$, $\beta_4 = 0$. Sistemul (4) ne dă $\beta_5 = \beta_6 = 0$, $\beta_1 = \alpha_5\beta_3$, $\beta_2 = \alpha_6\beta_3$. De aici deducem că $\beta_3 \neq 0$ şi deci cei doi operatori ai grupului sînt

$$Y_1 = X_4 + \alpha_5 X_5 + \alpha_6 X_6, \quad Y_2 = \alpha_5 X_1 + \alpha_6 X_2 + X_3.$$

În cazul $\alpha_5\alpha_6 = 0$, obţinem, ca în cazul precedent, grupul G^1_2. Dacă $\alpha_5\alpha_6 \neq 0$, obţinem acelaşi grup prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = \sqrt{\alpha_5^2 + \alpha_6^2 + 1}\,(-\alpha_5 x^1 + x^2), \\ \overline{x}^2 = -\alpha_6 x^1 - \alpha_5\alpha_6 x^2 + (\alpha_5^2 + 1)x^3, \\ \overline{x}^3 = x^1 + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3. \end{cases}$$

Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$, putem lua $\alpha_3 = 1$, $\beta_3 = 0$ şi sistemul (4) ne dă

$$\begin{aligned} &\beta_5 = -\alpha_4\beta_1, \quad \beta_6 = -\alpha_4\beta_2, \quad \alpha_6\beta_1 - \alpha_5\beta_2 = 0, \\ &\alpha_4^2\beta_2 + \alpha_6\beta_4 = 0, \quad \alpha_4^2\beta_1 + \alpha_5\beta_4 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

În cazul în care $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$, deducem $\beta_5 = \beta_6 = 0$ şi operatorii grupului sînt

$$Y_1 = X_3, \quad Y_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_4 X_4.$$

Dacă $\beta_2 = \beta_4 = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^1, \quad \overline{x}^2 = x^3, \quad \overline{x}^3 = \overline{x}^2;$$

obţinem grupul

$$G^2_2 \equiv [X_1, X_2].$$

Dacă $\beta_4 = 0$, $\beta_2 \neq 0$, putem lua $\beta_2 = 1$ şi grupul se reduce la G^2_2 prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^3, \quad \overline{x}^2 = x^2, \quad \overline{x}^3 = x^1,$$

dacă $\beta_1 = 0$ şi prin schimbarea

$$\overline{x}^1 = x^1, \quad \overline{x}^2 = x^1 - \beta_1 x^3, \quad \overline{x}^3 = x^2$$

dacă $\beta_1 \neq 0$.

Dacă $\beta_4 \neq 0$ luăm $\beta_4 = 1$ şi grupul se reduce la G^1_2 prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^1 + \beta_2, \quad \overline{x}^2 = x^2 - \beta_1, \quad \overline{x}^3 = x^3.$$

În cazul în care $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$, $\alpha_6 \neq 0$, din (5) deducem $\beta_1 = \beta_4 = \beta_5 = 0$, $\beta_6 = \alpha_6\beta_3$. Cei doi operatori ai grupului sînt

$$Y_1 = X_3 + \alpha_6 X_6, \quad Y_2 = \beta_2 X_2 + \beta_3(X_3 + \alpha_6 X_6),$$

de unde rezultă că $\beta_2 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri găsim

$$Y_1 = X_3 + \alpha_6 X_6, \quad Y_2 = X_2$$

şi prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = \alpha_6 x^1 - 1, \quad \overline{x}^2 = \alpha_6 x^3, \quad \overline{x}^3 = x^2$$

obţinem grupul G_2^1.

În cazul în care $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 \neq 0$, din (5) rezultă

$$\beta_4 = 0, \ \beta_2 = \frac{\alpha_6\beta_1}{\alpha_5}, \quad \beta_5 = \alpha_5\beta_3,$$

şi deci cei doi operatori se scriu

$$Y_1 = X_3 + \alpha_5 X_5 + \alpha_6 X_6, \quad Y_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_5}(\alpha_5 X_1 + \alpha_6 X_2) + \beta_3(X_3 + \alpha_5 X_5 + \alpha_6 X_6).$$

De aici rezultă $\beta_1 \neq 0$ şi printr-o schimbare de parametri obţinem

$$Y_1 = X_3 + \alpha_5 X_5 + \alpha_6 X_6, \quad Y_2 = \alpha_5 X_1 + \alpha_6 X_2.$$

Dacă $\alpha_6 = 0$, grupul se reduce, ca în cazul precedent, la G_2^1.
Dacă $\alpha_6 \neq 0$, obţinem acelaşi grup prin schimbarea de variabile

$$\begin{aligned}
\overline{x}^1 &= \alpha_5 x^1 + \alpha_6 x^2,\\
\overline{x}^2 &= -\alpha_6 x^1 + \alpha_5 x^2 - \sqrt{\alpha_5^2 + \alpha_6^2}\, x^3 + 1,\\
\overline{x}^3 &= -\alpha_6 x^1 + \alpha_5 x^2 + \sqrt{\alpha_5^2 + \alpha_6^2}\, x^3 + 1.
\end{aligned}$$

În cazul în care $\alpha_4 \neq 0$, din (5) deducem

$$\beta_1 = \frac{\alpha_5(\alpha_4\beta_3 - \beta_4)}{\alpha_4^2}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_6(\alpha_4\beta_3 - \beta_4)}{\alpha_4^2}, \quad \beta_5 = \frac{\alpha_5\beta_4}{\alpha_4}, \quad \beta_6 = \frac{\alpha_6\beta_4}{\alpha_4}.$$

Printr-o schimbare de parametri, cei doi operatori ai grupului sînt

$$Y_1 = X_3 + \alpha_4 X_4 + \alpha_5 X_5 + \alpha_6 X_6, \quad Y_2 = \alpha_5 X_1 + \alpha_6 X_2 + \alpha_4 X_3.$$

Dacă $\alpha_5\alpha_6 = 0$, grupul se reduce, ca în cazul precedent, la G_2^1.
Dacă $\alpha_5\alpha_6 \neq 0$, obţinem acelaşi grup prin schimbarea de variabile

$$\left\{\begin{aligned}
\overline{x}^1 &= \frac{\alpha_4 x^1 + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3}{\alpha_4},\\
\overline{x}^2 &= \frac{\sqrt{\alpha_4^2 + \alpha_5^2 + \alpha_6^2}}{\alpha_4^2}(\alpha_6 x^1 - \alpha_5 x^2) - \frac{\alpha_5^2 + \alpha_6^2}{\alpha_4^2\sqrt{\alpha_4^2 + \alpha_5^2 + \alpha_6^2}},\\
\overline{x}^3 &= \frac{\alpha_5 x^1 + \alpha_6 x^2}{\alpha_4} - \frac{\alpha_5^2 + \alpha_6^2}{\alpha_4^2}\, x^3.
\end{aligned}\right.$$

În cazul în care $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, putem presupune că $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$.

Dacă $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$, din (4) rezultă $\beta_5 = 0$, $\beta_4 = \alpha_3\beta_6$ și grupul se reduce la G_2^1 sau G_2^2 după cum $\beta_6 \neq 0$ sau $\beta_6 = 0$.

Dacă $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$, $\alpha_6 \neq 0$, din (4) deducem $\beta_1 = \beta_4 = \beta_5 = 0$, $\beta_3 = \frac{\alpha_3\beta_6}{\alpha_6}$ și cei doi operatori sînt

$$Y_1 = X_2 + \alpha_3X_3 + \alpha_6X_6, \qquad Y_2 = \frac{\beta_6}{\alpha_6}(\alpha_3X_3 + \alpha_6X_6).$$

De aici rezultă că $\beta_6 \neq 0$ și grupul se reduce la G_2^1.

Dacă $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 \neq 0$, din (4) deducem

$$\beta_4 = 0, \quad \beta_3 = -\frac{\alpha_3\alpha_6\beta_1}{\alpha_5}, \quad \beta_5 = -\alpha_6\beta_1, \quad \beta_6 = -\frac{\alpha_6^2\beta_1}{\alpha_5},$$

de unde rezultă $\beta_1 \neq 0$ și, printr-o schimbare de parametri, putem presupune că cei doi operatori ai grupului sînt

$$Y_1 = X_2 + \alpha_3X_3 + \alpha_5X_5 + \alpha_6X_6, \qquad Y_2 = \alpha_5X_1 + \alpha_6X_2$$

și grupul se reduce la G_2^1.

Dacă $\alpha_4 \neq 0$, din (4) deducem

$$\beta_1 = \frac{\alpha_5(\alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4)}{\alpha_4^2}, \quad \beta_5 = \frac{\alpha_5\beta_4}{\alpha_4}, \quad \beta_6 = \frac{\alpha_6\beta_4}{\alpha_4}, \quad \beta_4(\alpha_3\alpha_6 - \alpha_4) = \alpha_4\alpha_6\beta_3.$$

Dacă $\alpha_4 = \alpha_3\alpha_6$, de aici rezultă $\beta_3 = 0$ și grupul se reduce la G_2^1.

Dacă $\alpha_4 \neq \alpha_3\alpha_6$, cei doi operatori ai grupului sînt

$$Y_1 = X_2 + \alpha_3X_3 + \alpha_4X_4 + \alpha_5X_5 + \alpha_6X_6, \qquad Y_2 = -\alpha_5X_1 + \\ + (\alpha_3\alpha_6 - \alpha_4)X_3 + \alpha_4\alpha_6X_4 + \alpha_5\alpha_6X_5 + \alpha_6^2X_6$$

și grupul se reduce la G_2^1.

În cazul în care $\alpha_1 \neq 0$, putem lua $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$.

Dacă $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$, din (4) rezultă $\beta_4 = \alpha_3\beta_5$, $\beta_6 = \alpha_2\beta_5$ și grupul se reduce la G_2^1 sau G_2^2 după cum $\beta_5 \neq 0$ sau $\beta_5 = 0$.

Dacă $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$, $\alpha_6 \neq 0$, din (4) deducem $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$ și grupul se reduce la G_2^1.

Dacă $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 \neq 0$, din (4) rezultă

$$\beta_4 = 0, \quad \beta_2 = \frac{(\alpha_2\alpha_5 - \alpha_6)\beta_5}{\alpha_5^2}, \quad \beta_3 = \frac{\alpha_3\beta_5}{\alpha_5}, \quad \beta_6 = \frac{\alpha_6\beta_5}{\alpha_5}$$

și grupul se reduce la G_2^1.

În sfîrșit, dacă $\alpha_4 \neq 0$, din (4) deducem

$$\beta_4(\alpha_3\alpha_5 - \alpha_4) = \alpha_4\alpha_5\beta_3.$$

Dacă $\alpha_4 = \alpha_3\alpha_5$, rezultă $\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_5 \neq 0$, $\beta_3 = 0$ și sistemul (4) ne dă

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3\alpha_6}{\alpha_4^2}\beta_4, \quad \beta_5 = \frac{\alpha_5\beta_4}{\alpha_4}, \quad \beta_6 = \frac{\alpha_6\beta_4}{\alpha_4},$$

de unde rezultă $\beta_4 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri cei doi operatori ai grupului se scriu

$$Y_1 = X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_3\alpha_5 X_4 + \alpha_5 X_5 + \alpha_6 X_6,$$
$$Y_2 = \alpha_5 X_1 + \alpha_6 X_2 + X_3$$

și grupul se reduce la G_2^1.

Dacă $\alpha_4 \neq \alpha_3\alpha_5$, din (4) deducem

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2\alpha_5 - \alpha_6}{\alpha_3\alpha_5 - \alpha_4}\beta_3, \quad \beta_4 = \frac{\alpha_4\alpha_5}{\alpha_3\alpha_5 - \alpha_4}\beta_3,$$
$$\beta_5 = \frac{\alpha_5^2}{\alpha_3\alpha_5 - \alpha_4}\beta_3, \quad \beta_6 = \frac{\alpha_5\alpha_6}{\alpha_3\alpha_5 - \alpha_4}\beta_3,$$

de unde rezultă $\beta_3 \neq 0$ și printr-o schimbare de parametri, operatorii grupului se scriu

$$Y_1 = X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 + \alpha_5 X_5 + \alpha_6 X_6,$$
$$Y_2 = \alpha_5 X_1 + \alpha_6 X_2 + \alpha_4 X_3$$

și grupul se reduce la G_2^1.

Avem deci

TEOREMA 2. *Subgrupurile cu doi parametri ale grupului* $G_6(1)$ *pot fi reduse la formele canonice*

$$G_2^1 \equiv [X_3, X_4], \quad G_2^2 \equiv [X_1, X_2].$$

III

Fie $Y_h f = a_h^i X_i f$, $(h = 1, 2, 3\,;\ i = 1, \ldots, 6)$, operatorii unui subgrup cu trei parametri al grupului $G_6(1)$.

Dacă $a_1^1 = \ldots = a_1^5 = 0$, rezultă $a_1^6 \neq 0$ și putem presupune $a_1^6 = 1$, $a_2^6 = a_3^6 = 0$.

În cazul în care $a_2^1 = \ldots = a_2^4 = 0$, $a_2^5 \neq 0$, putem lua $a_2^5 = 1$, $a_3^5 = 0$ și punînd condiția ca operatorii Y_1, Y_2, Y_3 să formeze grup, obținem

$$a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = 0, \ a_3^4 = 1$$

și deci avem subgrupul

$$G_3^1 \equiv [X_4, X_5, X_6].$$

Dacă $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$, putem lua $a_2^4 = 1$, $a_3^4 = 0$. Punînd condiția ca operatorii Y_1, Y_2, Y_3 să formeze grup, obținem $a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = 0$, $a_3^5 = 1$ și printr-o schimbare de parametri găsim grupul G_3^1.

Dacă $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$, putem presupune că $a_2^3 = 1$, $a_3^3 = 0$. Punînd condiția ca cei trei operatori să formeze grup, obținem

$$a_2^4 = a_2^5 = a_3^2 = a_3^4 = a_3^5 = 0$$

și deci avem subgrupul

$$G_3^2 \equiv [X_1, X_3, X_6].$$

Dacă $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$, putem lua $a_2^2 = 1$, $a_3^2 = 0$ și punînd condiția ca operatorii Y_1, Y_2, Y_3 să formeze grup, obținem

$$a_3^1 = a_3^3 = a_3^4 = a_3^5 = 0,$$

adică $Y_3 f = 0$, ceea ce este imposibil.

Dacă $a_2^1 \neq 0$, putem presupune că $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = 0$ și deci cei trei operatori sînt

$$Y_1 = X_6,\ Y_2 = X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3 + \gamma X_4 + \delta X_5,$$
$$Y_3 = \alpha_1 X_2 + \beta_1 X_3 + \gamma_1 X_4 + \delta_1 X_5.$$

Scriind că paranteza $(Y_1 Y_2)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_1, Y_2, Y_3, obținem

$$\alpha_1 = \alpha\beta, \quad \beta_1 = \beta^2 + 1, \quad \gamma_1 = \beta\gamma + \delta, \quad \delta_1 = \beta\delta - \gamma.$$

Punînd condiția ca parantezele $(Y_1 Y_3)$ și $(Y_2 Y_3)$ să se exprime cu ajutorul celor trei operatori Y_h, obținem $\alpha = 0$, $\delta = -\beta\gamma$, deci, printr-o schimbare de parametri, cei trei operatori ai grupului se scriu

$$Y_1 = X_6, \quad Y_2 = X_1 + \gamma X_4, \quad Y_3 = X_3 - \gamma X_5.$$

Dacă $\gamma = 0$, avem grupul G_3^2, iar dacă $\gamma \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = \gamma x^1, \quad \overline{x}^2 = \gamma x^2 - 1, \quad \overline{x}^3 = \gamma x^3,$$

obținem grupul G_3^1.

În cazul în care $a_1^1 = \ldots = a_1^4 = 0$, $a_1^5 \neq 0$, putem presupune că $a_1^5 = 1$ $a_2^5 = a_3^5 = 0$.

Dacă $a_2^1 = \ldots = a_2^4 = 0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ și deci $a_2^6 = 1$, $a_1^6 = a_3^6 = 0$. Punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem $a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = 0$ și găsim grupul G_3^1.

Dacă $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$, luăm $a_2^4 = 1$, $a_3^4 = 0$ și scriind că operatorii Y_h formează grup, obținem $a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = 0$. Făcînd acum o schimbare de parametri regăsim grupul G_3^1.

Dacă $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$, luăm $a_2^3 = 1$, $a_3^3 = 0$ și cei trei operatori se scriu

$$Y_1 = X_5 + a_1^6 X_6, \quad Y_2 = X_3 + a_2^4 X_4 + a_2^6 X_6,$$
$$Y_3 = a_3^1 X_1 + a_3^2 X_2 + a_3^4 X_4 + a_3^6 X_6.$$

Scriind că paranteza $(Y_1 Y_2)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h, obținem

$$a_3^1 = -a_1^6,\ a_3^2 = 1,\ a_3^4 = -a_2^6,\ a_3^6 = a_2^4[1 + (a_1^6)^2].$$

Scriind acum că paranteza $(Y_1 Y_3)$ se exprimă cu operatorii Y_h, deducem

$$a_1^6 a_2^4 = 0, \quad a_1^6 a_2^6 = 0. \tag{6}$$

Dacă $a_1^6 = 0$, punînd condiția că paranteza $(Y_2 Y_3)$ să se exprime cu ajutorul operatorilor Y_h, găsim $a_2^4 = 0$ și deci operatorii sînt

$$Y_1 = X_5, \quad Y_2 = X_3 + a_2^6 X_6, \quad Y_3 = X_2 - a_2^6 X_4.$$

Grupul se reduce la G_3^2 dacă $a_2^6 = 0$ și la G_3^1 dacă $a_2^6 \neq 0$.

Dacă $a_1^6 \neq 0$, din (6) rezultă $a_2^4 = a_2^6 = 0$ și făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = \frac{a_1^6 x^1 - x^2}{1 + (a_1^6)^2}, \quad \overline{x}^2 = \frac{x^1 + a_1^6 x^2}{1 + (a_1^6)^2}, \quad \overline{x}^3 = \frac{x^3}{1 + (a_1^6)^2}$$

obținem grupul G_3^2.

În cazul $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$, putem lua $a_2^2 = 1$, $a_2^3 = 0$. Pentru ca paranteza $(Y_1 Y_2)$ să se exprime cu ajutorul operatorilor Y_h trebuie ca

$$a_3^1 = \frac{a_1^6 a_2^3}{1 + (a_2^3)^2}, \quad a_3^3 = 1, \quad a_3^4 = \frac{a_2^3 a_2^4 + a_2^6}{1 + (a_2^3)^2}, \quad a_3^6 = \frac{a_2^3 a_2^6 - a_2^4}{1 + (a_2^3)^2}.$$

Cu aceste valori, condiția ca paranteza $(Y_1 Y_3)$ să se exprime cu ajutorul operatorilor Y_h se scrie

$$a_1^6 = 0$$

și, printr-o schimbare de parametri, cei trei operatori se scriu

$$Y_1 = X_5, \quad Y_2 = X_2 + \alpha X_4 + \beta X_6, \quad Y_3 = X_3 + \beta X_4 - \alpha X_6.$$

Punînd condiția ca acești operatori să formeze grup, obținem $\beta = 0$ și grupul se reduce la G_3^1 sau G_3^2 după cum $\alpha \neq 0$ sau $\alpha = 0$.

În cazul în care $a_2^1 \neq 0$, putem presupune că $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = 0$ și cei trei operatori ai grupului se scriu

$$Y_1 = X_5 + \alpha X_6, \quad Y_2 = X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + \delta X_4 + \varepsilon X_5,$$
$$Y_3 = \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \varepsilon_1 X_5.$$

Dacă $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, condiția ca cei trei operatori să formeze grup ne conduce la o relație imposibilă.

Dacă $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 \neq 0$, putem lua $\gamma_1 = 1$, $\gamma = 0$. Scriind că parantezele $(Y_1 Y_2)$, $(Y_1 Y_3)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h, obținem

$$\alpha \neq 0, \quad \beta = -\frac{1}{\alpha}, \quad \delta = \frac{\varepsilon_1}{\alpha}, \quad \varepsilon = -\frac{\delta_1 (1 + \alpha^2)}{\alpha}.$$

Punînd acum condiția ca paranteza $(Y_2 Y_3)$ să se exprime cu ajutorul lui Y_h, găsim $\delta_1 = 0$ și deci operatorii grupului sînt

$$Y_1 = X_5 + \alpha X_6, \quad Y_2 = \alpha X_1 - X_2 + \varepsilon_1 X_1, \quad Y_3 = X_3 + \varepsilon_1 X_6.$$

Dacă $\varepsilon_1 = 0$ sîntem într-un caz studiat mai sus, iar dacă $\varepsilon_1 \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = \varepsilon_1 x - 1, \quad \overline{x}^2 = \varepsilon_1 x^2 - \alpha, \quad \overline{x}^3 = \varepsilon_1 x^3,$$

obținem grupul G_3^1.

Dacă $\beta_1 \neq 0$, punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem o relație imposibilă.

Vom considera acum cazul în care $a_1^1 = a_1^2 = a_1^3 = 0$, $a_1^4 \neq 0$. Putem lua $a_1^4 = 1$, $a_2^4 = a_3^4 = 0$.

Dacă $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = a_2^5 = 0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ și putem presupune că $a_1^6 = a_3^6 = 0$. Scriind că operatorii Y_h formează grup, obținem

$$a_1^5 = a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = 0, \quad a_3^5 = 1$$

și grupul se reduce la G_3^1.

Dacă $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^5 \neq 0$, putem lua $a_2^5 = 1$, $a_1^5 = a_3^5 = 0$ și punînd condiția ca paranteza $(Y_1 Y_2)$ să se exprime cu ajutorul operatorilor Y_h găsim

$$a_1^6 = a_2^6 = a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = 0, \quad a_3^6 = 1$$

și grupul se reduce la G_3^1.

Dacă $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$, luăm $a_2^3 = 1$, $a_3^3 = 0$ și scriind că paranteza $(Y_1 Y_2)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h, obținem

$$a_3^1 = -a_1^6, \; a_3^2 = a_1^5, \; a_3^5 = a_2^6\,[(a_1^5)^2 + 1] - a_1^5 a_1^6 a_2^5,$$
$$a_3^6 = a_1^5 a_1^6 a_2^6 - a_2^5\,[(a_1^6)^2 + 1].$$

Punînd acum condiția ca paranteza $(Y_1 Y_3)$ să se exprime cu operatorii Y_h, găsim $Y_3 = 0$, ceea ce este imposibil.

Dacă $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$, putem presupune că $a_2^2 = 1$, $a_3^2 = 0$ și scriind că paranteza $(Y_1 Y_2)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h obținem

$$a_3^1 = 1 - a_1^6 a_2^3, \; a_3^3 = -a_1^5\,[(a_2^3)^2 + 1], \; a_3^5 = a_2^6\,[(a_1^5) + 1] - a_1^5 a_2^5 (a_1^6 + a_2^3),$$
$$a_3^6 = a_1^5 a_2^6 (a_1^6 - a_2^3) - a_2^5\,[(a_1^6)^2 + 1].$$

Punînd acum condiția ca paranteza $(Y_1 Y_3)$ să se exprime cu Y_h, găsim

$$a_1^6 a_2^3 - 1 \neq 0, \quad a_1^6 (a_1 + a_2^3) = 0, \tag{7}$$

Dacă $a_1^6 = 0$, din ecuația $(Y_2 Y_3) = c^h Y_h$, deducem

$$a_2^3 = a_2^6 = 0$$

și grupul este

$$G_3' \equiv [X_1 - \alpha X_3 - \beta X_6, \; X_2 + \beta X_5, \; X_4 + \alpha X_5].$$

Dacă $a_1^6 \neq 0$, din (7) rezultă $a_2^3 = -a_1^6$ și scriind că paranteza $(Y_2 Y_3)$ se exprimă cu operatorii Y_h, obținem grupurile

$$G_3'' \equiv [X_1 - \alpha X_6, \; X_2 - \beta X_3 + \alpha X_5, \; X_4 + \beta X_6],$$
$$G_3''' \equiv [X_1 - \alpha X_3 - \gamma X_6, \; X_2 - \beta X_3 + \gamma X_5, \; X_4 + \alpha X_5 + \beta X_6].$$

Se vede ușor că grupurile G_3' și G_3'' sînt cuprinse în G_3''', care se reduce, prin schimbări de variabile și parametri, la grupul G_3^1 dacă $\gamma \neq 0$ și la grupul G_3^2 dacă $\gamma = 0$.

Dacă $a_2^1 \neq 0$ putem lua $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = 0$.

Dacă $a_3^2 = 0$ punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup obținem o relație imposibilă.

Dacă $a_3^2 \neq 0$, putem presupune că $a_3^2 = 1$, $a_2^2 = 0$ și scriind că parantezele $(Y_1 Y_2)$ și $(Y_1 Y_3)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h obținem

$$a_2^3 = -a_1^5,\ a_3^3 = -a_1^6,\ a_3^5 = -a_2^6 + \frac{2a_1^5 a_1^6 a_2^5}{1 + (a_1^5)^2}, \quad a_3^6 = \frac{1 + (a_1^6)^2}{1 + (a_1^5)^2} a_2^5.$$

Punînd acum condiția ca paranteza $(Y_2 Y_3)$ să se exprime cu Y_h, găsim

$$a_2^5 = 0.$$

Grupul se reduce în acest caz la G_3^1 sau la G_3^2 după cum $a_2^6 \neq 0$ sau $a_2^6 = 0$.

În cazul în care $a_1^1 = a_1^2 = 0$, $a_1^3 \neq 0$, putem presupune că $a_1^3 = 1$, $a_2^3 = a_3^3 = 0$.

Dacă $a_2^1 = a_2^2 = a_2^4 = a_2^5 = 0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ și putem lua $a_2^6 = 1$, $a_1^6 = a_3^6 = 0$.

Punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem

$$a_1^4 = a_3^2 = a_3^5 = 0, \quad a_3^1 = 1, \quad a_2^4 = -a_1^5$$

și grupul se reduce la G_3^1.

Dacă $a_2^1 = a_2^2 = a_2^4 = 0$, $a_2^5 \neq 0$, luăm $a_2^5 = 1$, $a_1^5 = a_3^5 = 0$ și scriind că operatorii Y_h formează grup, găsim grupul

$$G_3 \equiv [\beta X_1 - X_2 + \alpha X_4,\ X_3 + \alpha X_6,\ X_5 + \beta X_6],$$

care se reduce la G_3^2 dacă $\alpha = 0$ și la G_3^1 dacă $\alpha \neq 0$.

Dacă $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^4 \neq 0$, putem lua $a_2^4 = 1$, $a_1^4 = a_3^4 = 0$. Punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem o relație imposibilă.

Dacă $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$ putem presupune că $a_2^2 = 1$, $a_3^2 = 0$.

În cazul în care $a_3^1 = a_3^4 = a_3^5 = 0$, rezultă $a_3^6 \neq 0$ și paranteza $(Y_1 Y_3)$ nu se exprimă cu operatorii Y_h.

Dacă $a_3^1 = a_3^4 = 0$, $a_3^5 \neq 0$, luăm $a_3^5 = 1$, $a_1^5 = a_2^5 = 0$ și scriind că operatorii Y_h formează grup, obținem grupul

$$G_3 \equiv [X_2 - \alpha X_4,\ X_3 + \alpha X_6,\ X_5],$$

care se reduce la G_3^1 sau la G_3^2 după cum $\alpha \neq 0$ sau $\alpha = 0$.

Dacă $a_3^1 = 0$, $a_3^4 \neq 0$, condiția ca operatorii Y_h să formeze grup ne conduce la o relație imposibilă.

Dacă $a_3^1 \neq 0$, putem lua $a_3^1 = 1$. Notînd

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^4 & a_1^5 & a_1^6 \\ a_2^4 & a_2^5 & a_2^6 \\ a_3^4 & a_3^5 & a_3^6 \end{vmatrix}.$$

grupul se reduce la G_3^2 dacă $\Delta \neq 0$ și la

$$G_3^3 \equiv [X_1,\ X_2,\ X_3]$$

dacă $\Delta = 0$.

Dacă $a_2^1 \neq 0$, luăm $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = 0$.

În cazul în care $a_3^2 = a_3^4 = a_3^5 = 0$, rezultă $a_3^6 \neq 0$ și putem presupune că $a_3^6 = 1$, $a_1^6 = a_2^6 = 0$. Scriind că operatorii Y_h formează grup, obținem

$$Y_1 = X_3 + \alpha X_5, \quad Y_2 = X_1 - \alpha X_4, \quad Y_3 = X_6$$

și grupul se reduce la G_3^1 sau la G_3^2 după cum $\alpha \neq 0$ sau $\alpha = 0$.

Dacă $a_3^2 = a_3^4 = 0$, $a_3^5 \neq 0$, luăm $a_3^5 = 1$, $a_1^5 = a_2^5 = 0$ și punînd condiția ca parantezele $(Y_h Y_k)$ să se exprime cu ajutorul operatorilor Y_h obținem

$$Y_1 = X_3 + \alpha X_6, \quad Y_2 = \beta X_1 - X_2 + \alpha X_4, \quad Y_3 = X_5 + \gamma X_6$$

și grupul se reduce la G_3^1 sau G_3^2 după cum $\alpha \neq 0$ sau $\alpha = 0$.

Dacă $a_3^2 = 0$, $a_3^4 \neq 0$, putem lua $a_3^4 = 1$, $a_1^4 = a_2^4 = 0$ și scriind că parantezele $(Y_h Y_k)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h obținem o relație imposibilă.

Dacă $a_3^2 \neq 0$, grupul se reduce, ca într-un caz studiat mai sus, la grupurile G_3^2 sau G_3^3.

În cazul $a_1^1 = 0$, $a_1^2 \neq 0$, putem presupune că $a_1^2 = 1$, $a_2^2 = a_3^2 = 0$.

Dacă $a_2^1 = a_2^3 = a_2^4 = a_2^5 = 0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ și punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem o relație imposibilă.

Dacă $a_2^1 = a_2^3 = a_2^4 = 0$, $a_2^5 \neq 0$, luăm $a_2^5 = 1$, $a_1^5 = a_3^5 = 0$. Ecuația $(Y_1 Y_2) = c^h Y_h$ ne dă

$$a_3^1 = a_1^3 a_2^6, \quad a_3^3 = (a_1^3)^2 + 1, \quad a_3^4 = a_1^3 a_1^4 + a_1^6, \quad a_3^6 = a_1^3 a_1^6 - a_1^4 [(a_1^6)^2 + 1].$$

Scriind acum că parantezele $(Y_1 Y_3)$ și $(Y_2 Y_3)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h, deducem

$$a_2^6 = 0, \qquad a_1^6 = - a_1^3 a_1^4$$

și grupul se reduce la G_3^1 sau la G_3^2 după cum $a_1^4 \neq 0$ sau $a_1^4 = 0$.

Dacă $a_2^1 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$, putem lua $a_2^4 = 1$, $a_1^4 = a_3^4 = 0$.

În cazul în care $a_3^1 = 0$, punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup obținem o relație imposibilă.

Dacă $a_3^1 \neq 0$, putem presupune că $a_3^1 = 1$ și operatorii grupului se scriu

$$Y_1 = X_2 + \alpha_1 X_3 + \alpha_2 X_5 + \alpha_3 X_6, \quad Y_2 = X_4 + \beta_1 X_5 + \beta_2 X_6,$$
$$Y_3 = X_1 + \gamma_1 X_3 + \gamma_2 X_5 + \gamma_3 X_6.$$

Punînd condiția că acești operatori să formeze grup, deducem

$$\alpha_3 = \gamma_2 = 0, \quad \beta_2 = - \alpha_1, \quad \gamma_3 = - \alpha_2, \quad \gamma_1 = -\beta_1$$

și grupul se reduce la G_3^1 sau G_3^2 ca într-un caz studiat mai sus.

Dacă $a_2^1 = 0$, $a_2^3 \neq 0$, luăm $a_2^3 = 1$, $a_1^3 = a_3^3 = 0$.

În cazul $a_3^1 = a_3^4 = a_3^5 = 0$, condiția ca parantezele $(Y_1 Y_3)$ și $(Y_2 Y_3)$ să se exprime cu ajutorul operatorilor Y_h ne conduce la o relație imposibilă.

Dacă $a_3^1 = a_3^4 = 0$, $a_3^5 \neq 0$, putem lua $a_3^5 = 1$, $a_1^5 = a_2^5 = 0$ și scriind că operatorii Y_h formează grup, obținem grupul

$$G_3 \equiv [X_2 + \alpha X_4, \ X - \alpha X_6, \ X_5]$$

care se reduce la G_3^1 sau la G_3^2 după cum $\alpha \neq 0$ sau $\alpha = 0$.

Dacă $a_3^1 = 0$, $a_3^4 \neq 0$, ecuația $(Y_1 Y_3) = c^h Y_h$ ne conduce la o relație imposibilă.

Dacă $a_3^1 \neq 0$, grupul se reduce, ca într-un caz studiat mai sus, la unul din grupurile G_3^1 sau G_3^3.

Dacă $a_2^1 \neq 0$, putem lua $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = 0$.

În cazul în care $a_3^3 = a_3^4 = 0$, punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem o relație imposibilă.

Dacă $a_3^3 = 0$, $a_3^4 \neq 0$, putem presupune că $a_3^4 = 1$, $a_1^4 = a_2^4 = 0$ și din condițiile ca operatorii Y_h să formeze grup, deducem

$$a_1^6 = a_2^5 = 0, \quad a_1^3 = -a_3^6, \quad a_1^5 = -a_2^6, \quad a_2^3 = -a_3^5$$

și grupul se reduce la G_3^1 sau la G_3^2 ca într-un caz studiat mai sus.

Dacă $a_3^3 \neq 0$, grupul se reduce la unul din grupurile G_3^1 sau G_3^3.

În cazul în care $a_1^1 \neq 0$, putem presupune că $a_1^1 = 1$, $a_2^1 = a_3^1 = 0$.

Dacă $a_2^2 = a_2^3 = a_2^4 = a_2^5 = 0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ și putem lua $a_2^6 = 1$ $a_1^6 = a_3^6 = 0$. Din ecuația $(Y_1 Y_2) = c^h Y_h$, deducem

$$a_3^2 = a_1^2 a_1^3, \; a_3^3 = (a_1^3)^2 + 1, \; a_3^4 = a_1^3 a_1^4 + a_1^5, \; a_3^5 = a_1^3 a_1^5 - a_1^4.$$

Cu aceste valori, ecuația $(Y_2 Y_3) = c^h Y_h$ ne dă

$$a_1^2 = a_1^4 = a_1^5 = 0$$

și avem deci grupul

$$G_3 \equiv [X_1 + \alpha X_3, \; X_3, \; X_6]$$

care se reduce la G_3^2.

Dacă $a_2^2 = a_2^3 = a_2^4 = 0$, $a_2^5 \neq 0$, putem lua $a_2^5 = 1$, $a_1^5 = a_3^5 = 0$ și ecuația $(Y_1 Y_2) = c^h Y_h$ ne dă

$$a_3^2 = -\, a_1^3 (a_1^2 a_2^6 + 1), \; a_3^3 = a_1^2 - a_2^6 [(a_1^3)^2 + 1]$$

$$a_3^4 = a_1^6 - a_1^3 a_1^4 a_2^6, \; a_3^6 = -\, a_1^4 [(a_2^6)^2 + 1] - a_1^3 a_1^6 a_2^6.$$

Cu aceste valori din ecuația $(Y_2 Y_3) = c^h Y_h$ deducem

$$a_1^2 a_2^6 = -\, 1,$$

iar din $(Y_1 Y_3) = c^h Y_h$

$$a_1^2 a_1^6 + a_1^3 a_1^4 = 0.$$

Printr-o schimbare de parametri grupul se reduce la G_3^1 sau la G_3^2.

În cazul în care $a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$, putem presupune că $a_2^4 = 1$, $a_1^4 = a_3^4 = 0$.

Dacă $a_3^2 = 0$, punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem o relație imposibilă.

Dacă $a_3^2 \neq 0$, putem lua $a_3^2 = 1$, $a_1^2 = 0$ și din condițiile ca parantezele $(Y_h Y_k)$ să se exprime cu ajutorul operatorilor Y_l deducem

$$a_1^5 = a_3^6 = 0, \quad a_2^5 = -\, a_1^3, \quad a_2^6 = -\, a_3^3, \quad a_3^5 = -\, a_1^6$$

și grupul se reduce la G_3^1 sau la G_3^2.

În cazul în care $a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$, putem lua $a_2^3 = 1$, $a_1^3 = a_3^3 = 0$.

Dacă $a_3^2 = a_3^4 = a_3^5 = 0$, $a_3^6 \neq 0$, luăm $a_3^6 = 1$, $a_1^6 = a_2^6 = 0$ și condițiile ca operatorii Y_h să formeze grup ne conduc la grupul

$$G_3 \equiv [X_1 + \alpha X_4,\ X_3 - \alpha X_5,\ X_6]$$

care se reduce la G_3^1 sau G_3^2 după cum $\alpha \neq 0$ sau $\alpha = 0$.

Dacă $a_3^2 = a_3^4 = 0$, $a_3^5 \neq 0$, putem presupune că $a_3^5 = 1$, $a_1^5 = a_2^5 = 0$ și scriind că parantezele $(Y_h Y_k)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_l obținem grupul

$$G_3 \equiv [X_1 + \alpha X_2 + \beta X_4,\quad \alpha X_3 - \beta X_5,\quad \alpha X_5 - X_6]$$

care se reduce la G_3^1 sau G_3^2 ca într-unul din cazurile studiate mai sus.

Dacă $a_3^2 = 0$, $a_3^4 \neq 0$, condiția ca operatorii Y_h să formeze grup ne conduce la o relație imposibilă.

Dacă $a_3^2 \neq 0$, grupul se reduce la G_3^1 sau la G_3^3.

În cazul în care $a_2^2 \neq 0$, putem presupune că $a_2^2 = 1$, $a_1^2 = a_3^2 = 0$.

Dacă $a_3^3 = a_3^4 = 0$, punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem o relație imposibilă.

Dacă $a_3^3 = 0$, $a_3^4 \neq 0$, luăm $a_3^4 = 1$, $a_1^4 = a_2^4 = 0$ și scriind că parantezele $(Y_h Y_k)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_l, obținem grupul

$$G_3 \equiv [X_1 + \alpha X_3 + \beta X_6,\quad X_2 + \gamma X_3 - \beta X_5,\quad X_4 - \alpha X_5 - \gamma X_6]$$

care se reduce la unul din grupurile G_3^1 sau G_3^2.

În sfîrșit, dacă $a_3^3 \neq 0$, obținem grupul G_3^1 sau G_3^3.

Rezultă

TEOREMA 3. *Subgrupurile cu trei parametri ale grupului* $G_6(1)$ *pot fi reduse la formele canonice*

$$G_3^1 \equiv [X_4,\ X_5,\ X_6],\quad G_3^2 \equiv [X_1,\ X_3,\ X_6],\quad G_3^3 \equiv [X_1,\ X_2,\ X_3].$$

IV

Fie $Y_h f = a_h^i X_i f$ $(h = 1, \ldots, 4;\ i = 1, \ldots, 6)$ cei patru operatori ai unui subgrup cu patru parametri ai grupului $G_6(1)$.

Vom face diverse presupuneri asupra constantelor a_h^i.

1. $a_1^1 = \cdots = a_1^5 = 0$. De aici rezultă $a_1^6 \neq 0$ și putem presupune că $a_1^6 = 1$, $a_2^6 = a_3^6 = a_4^6 = 0$.

1.1. $a_2^1 = \ldots = a_2^4 = 0$. De aici deducem $a_2^5 \neq 0$ și putem lua $a_2^5 = 1$, $a_3^5 = a_4^5 = 0$.

Operatorii grupului sînt deci

$$Y_1 = X_6,\ Y_2 = X_5,\ Y_\alpha = a_\alpha^1 X_j \qquad (\alpha = 3, 4;\ j = 1, 2, 3, 4).$$

Scriind că paranteza $(Y_1 Y_2)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h și făcînd o schimbare de parametri obținem

$$Y_3 = X_4.$$

Din condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, găsim că

$$Y_4 = 0$$

ceea ce este imposibil.

1.2. $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_2^4 = 1$, $a_3^4 = a_4^4 = 0$, și operatorii grupului se scriu

$$Y_1 = X_6,\ Y_2 = X_4 + a_2^5 X_5,\ Y_\alpha = a_\alpha^1 X_1 + a_\alpha^2 X_2 + a_\alpha^3 X_3 + a_\alpha^5 X_5, \qquad (\alpha = 3, 4).$$

Punînd condiția ca paranteza (Y_1Y_2) să se exprime cu ajutorul operatorilor Y_h și făcînd o schimbare de parametri obținem

$$Y_3 = X_5$$

și, ca și în cazul precedent, din condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, rezultă o relație imposibilă.

1.3. $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. Putem lua $a_2^3 = 1$, $a_3^3 = a_4^3 = 0$. Punînd condiția ca paranteza (Y_1Y_2) să se exprime cu ajutorul operatorilor Y_h, obținem

$$-X_1 - a_2^4X_5 + a_2^5X_4 = \lambda(a_3^1X_1 + a_3^2X_2 + a_3^4X_4 + a_3^5X_5) + \\ + \mu(a_4^1X_1 + a_4^2X_2 + a_4^4X_4 + a_4^5X_5)$$

e unde

$$\lambda a_3^1 + \mu a_4^1 = -1, \quad \lambda a_3^2 + \mu a_4^2 = 0, \quad \lambda a_3^4 + \mu a_4^4 = a_2^5, \quad \lambda a_3^5 + \mu a_4^5 = -a_2^4.$$

Din prima ecuație rezultă că nu putem avea în același timp $\lambda = \mu = 0$ și deci putem presupune $\lambda \neq 0$. De aici rezultă

$$Y_3 = -\frac{\mu}{\lambda} Y_4 - \frac{1}{\lambda}(X_1 - a_2^5X_4 + a_2^4X_5)$$

și printr-o schimbare de parametri avem

$$Y_3 = X_1 - a_2^5X_4 + a_2^4X_5.$$

Din ecuația $(Y_2Y_3) = c^hY_h$ rezultă

$$a_4^4 = -a_4^1a_2^5, \quad a_4^5 = a_4^1a_2^4$$

și făcînd o schimbare de parametri obținem

$$Y_4 = X_2.$$

Punînd acum condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, rezultă

$$a_2^4 = a_2^5 = 0$$

și deci

$$Y_1 = X_6, \quad Y_2 = X_3, \quad Y_3 = X_1, \quad Y_4 = X_2.$$

Prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^1, \quad \overline{x}^2 = x^3, \quad \overline{x}^3 = x^2,$$

obținem grupul

$$G_4 \equiv [X_1, X_2, X_3, X_4].$$

1.4. $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$. Putem lua $a_2^2 = 1$, $a_3^2 = a_4^2 = 0$ și punînd condiția ca paranteza (Y_1Y_2) să se exprime cu ajutorul operatorilor Y_h, obținem

$$-a_2^3X_1 - a_2^4X_5 + a_2^5X_4 = \lambda(a_3^1X_1 + a_3^3X_3 + a_3^4X_4 + a_3^5X_5) + \\ + \mu(a_4^1X_1 + a_4^3X_3 + a_4^4X_4 + a_4^5X_5)$$

de unde

$$\lambda a_3^1 + \mu a_4^1 = -a_2^3, \quad \lambda a_3^3 + \mu a_4^3 = 0, \quad \lambda a_3^4 + \mu a_4^4 = a_2^5, \quad \lambda a_3^5 + \mu a_4^5 = -a_2^4. \tag{8}$$

Dacă $\lambda = \mu = 0$, rezultă $a_2^3 = a_2^4 = a_2^5 = 0$ și punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem grupul G_4.

Dacă $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, putem presupune că $\lambda \neq 0$ și din (8) deducem

$$Y_3 = -\frac{\mu}{\lambda} Y_4 - \frac{1}{\lambda}(a_2^3 X_1 - a_2^5 X_4 + a_2^4 X_5).$$

Printr-o schimbare de parametri rezultă

$$Y_3 = a_2^3 X_1 - a_2^5 X_4 + a_2^4 X_5$$

și punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem o relație imposibilă.

1.5. $a_2^1 \neq 0$. În acest caz putem presupune $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = a_4^1 = 0$.

Dacă $a_4^2 = a_4^3 = a_4^4 = 0$, rezultă $a_4^5 \neq 0$ și putem lua $a_4^5 = 1$, $a_2^5 = a_3^5 = 0$. Scriind că operatorii Y_h formează grup, obținem o relație imposibilă.

Dacă $a_4^2 = a_4^3 = 0$, $a_4^4 \neq 0$, putem presupune că $a_4^4 = 1$, $a_2^4 = a_3^4 = 0$ și punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, găsim o relație imposibilă.

Dacă $a_4^2 = 0$, $a_4^3 \neq 0$, luăm $a_4^3 = 1$, $a_2^3 = a_3^3 = 0$ și scriind că parantezele $(Y_h Y_k)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y, obținem grupul G_4. Același rezultat obținem și dacă $a_4^2 \neq 0$.

2. $a_1^1 = \cdots = a_1^4 = 0$, $a_1^5 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_1^5 = 1$, $a_2^5 = a_3^5 = a_4^5 = 0$.

2.1. $a_2^1 = \cdots = a_2^4 = 0$. De aici rezultă $a_2^6 \neq 0$ și putem lua $a_2^6 = 1$, $a_1^6 = a_3^6 = a_4^6 = 0$, regăsind astfel cazul 1.1

2.2. $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. Putem presupune că $a_2^4 = 1$, $a_3^4 = a_4^4 = 0$ și scriind că paranteza $(Y_1 Y_2)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h, obținem

$$X_6 - a_2^6 X_4 - a_1^6 Y_5 = -a_1^6 Y_1 - a_2^6 Y_2 + \lambda Y_3 + \mu Y_4,$$

adică

$$\lambda a_3^1 + \mu a_4^1 = 0,\ \lambda a_3^2 + \mu a_4^2 = 0,\ \lambda a_3^3 + \mu a_4^3 = 0,$$

$$\lambda a_3^6 + \mu a_4^6 = 1 + (a_1^6)^2 + (a_2^6)^2.$$

De aici rezultă că $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ și putem presupune că $\lambda \neq 0$, deci

$$Y_3 = -\frac{\mu}{\lambda} Y_4 + \frac{1 + (a_1^6)^2 + (a_2^6)^2}{\lambda} X_6$$

și printr-o schimbare de parametri deducem

$$Y_3 = X_6,$$

și punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem $Y_4 = 0$, ceea ce este imposibil.

2.3. $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^3 = 1$, $a_3^3 = a_4^3 = 0$ și scriind că parantezele $(Y_h Y_k)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_l, obținem grupul G_4.

2.4. $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$. Putem presupune că $a_2^2 = 1$, $a_3^2 = a_4^2 = 0$, și punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem grupul G_4.

2.5. $a_2^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = a_4^1 = 0$.

Dacă $a_4^2 = a_4^3 = a_4^4 = 0$, rezultă $a_4^6 \neq 0$ şi putem presupune $a_4^6 = 1$, $a_1^6 = a_2^6 = a_3^6 = 0$. Scriind că operatorii Y_h formează grup, obţinem o relaţie imposibilă. Acelaşi rezultat se obţine dacă $a_4^2 = a_4^3 = 0$, $a_4^4 \neq 0$.

Dacă $a_4^2 = 0$, $a_4^3 \neq 0$ sau dacă $a_4^2 \neq 0$, obţinem grupul G_4.

3. $a_1^1 = a_1^2 = a_1^3 = 0$, $a_1^4 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_1^4 = 1$, $a_2^4 = a_3^4 = a_4^4 = 0$.

3.1. $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = a_2^5 = 0$. De aici rezultă că $a_2^6 \neq 0$ şi putem lua $a_2^6 = 1$, $a_1^6 = a_3^6 = a_4^6 = 0$. Scriind că paranteza (Y_1Y_2) se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h, obţinem

$$X_5 - a_1^5X_4 = -a_1^5Y_1 + \lambda Y_3 + \mu Y_4$$

adică

$$\lambda a_3^1 + \mu a_4^1 = 0,\quad \lambda a_3^2 + \mu a_4^2 = 0,\quad \lambda a_3^3 + \mu a_4^3 = 0,\quad \lambda a_3^5 + \mu a_4^5 = 1 + (a_1^5)^2.$$

De aici deducem $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ şi putem presupune $\lambda \neq 0$ şi deci

$$Y_3 = -\frac{\mu}{\lambda}Y_4 + \frac{1 + (a_1^5)^2}{\lambda}X_5.$$

Printr-o schimbare de parametri obţinem $Y_3 = X_5$ şi punînd condiţia ca operatorii Y_h să formeze grup, rezultă o relaţie imposibilă;

3.2. $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^5 \neq 0$. Putem lua $a_2^5 = 1$, $a_1^5 = a_3^5 = a_4^5 = 0$ şi punînd condiţia ca operatorii Y_h să formeze grup, obţinem o relaţie imposibilă.

3.3. $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_2^3 = 1$, $a_3^3 = a_4^3 = 0$.

Dacă $a_4^1 = a_4^2 = a_4^5 = 0$, rezultă $a_4^6 \neq 0$ şi scriind că operatorii Y_h formează grup, obţinem o relaţie imposibilă.

Dacă $a_4^1 = a_4^2 = 0$, $a_4^5 \neq 0$, obţinem acelaşi rezultat.

Dacă $a_4^1 = 0$, $a_4^2 \neq 0$, sau dacă $a_4^1 \neq 0$, găsim grupul G_4.

3.4. $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$. Putem lua $a_2^2 = 1$, $a_3^2 = a_4^2 = 0$.

Dacă $a_4^1 = a_4^3 = a_4^5 = 0$, deducem $a_4^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.2.

Dacă $a_4^1 = a_4^3 = 0$, $a_4^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.2.

Dacă $a_4^1 = 0$, $a_4^3 \neq 0$, sau dacă $a_4^1 \neq 0$, obţinem grupul G_4.

3.5. $a_2^1 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = a_4^1 = 0$.

Dacă $a_4^2 = a_4^3 = a_4^5 = 0$, regăsim cazul 1.2, iar dacă $a_4^2 = a_4^3 = 0$, $a_4^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.2.

Dacă $a_4^2 = 0$, $a_4^3 \neq 0$ sau dacă $a_4^2 \neq 0$, deducem grupul G_4.

4. $a_1^1 = a_1^2 = 0$, $a_1^3 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_1^3 = 1$, $a_2^3 = a_3^3 = a_4^3 = 0$.

4.1. $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = a_2^4 = 0$. De aici rezultă că $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.3.

4.2. $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.

4.3. $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3.

4.4. $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^2 = 1$, $a_3^2 = a_4^2 = 0$.

Dacă $a_4^1 = a_4^4 = a_4^5 = 0$, rezultă $a_4^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.3.

Dacă $a_4^1 = a_4^4 = 0$, $a_4^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.3.

Dacă $a_4^1 = 0$, $a_4^4 \neq 0$, regăsim cazul 3.3.

Dacă $a_4^1 \neq 0$, putem presupune că $a_4^1 = 1$, $a_3^1 = 0$ şi punînd condiţia că operatorii Y_h să formeze grup, deducem grupul G_4.

4.5. $a_2^1 \neq 0$. Putem presupune $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = a_4^1 = 0$.
Dacă $a_4^2 = a_4^4 = a_4^5 = 0$, rezultă $a_4^6 \neq 0$ şi sîntem în cazul 1.3.
Dacă $a_4^2 = a_4^4 = 0$, $a_4^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.3.
Dacă $a_4^2 = 0$, $a_4^4 \neq 0$, sîntem în cazul 3.3.
Dacă $a_4^2 \neq 0$, putem lua $a_4^2 = 1$, $a_3^2 = 0$ şi scriind că operatorii Y_h formează grup, obţinem grupul G_4.

5. $a_1^1 = 0, a_1^2 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_1^2 = 1, a_2^2 = a_3^2 = a_4^2 = 0$.

5.1. $a_2^1 = a_2^3 = a_2^4 = a_2^5 = 0$. De aici deducem că $a_2^6 \neq 0$ şi sîntem în cazul 1.4.
5.2. $a_2^1 = a_2^3 = a_2^4 = 0$, $a_2^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.4.
5.3. $a_2^1 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.4.
5.4. $a_2^1 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. Sîntem în cazul 4.4.
5.5. $a_2^1 \neq 0$. Putem presupune că $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = a_4^1 = 0$.
Dacă $a_4^3 = a_4^4 = a_4^5$, rezultă $a_4^6 \neq 0$, şi sîntem în cazul 1.4.
Dacă $a_4^3 = a_4^4 = 0$, $a_4^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.4.
Dacă $a_4^3 = 0$, $a_4^4 \neq 0$, regăsim cazul 3.4.
Dacă $a_4^3 \neq 0$, sîntem în cazul 4.4.
6. $a_1^1 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_1^1 = 1, a_2^1 = a_3^1 = a_4^1 = 0$.
6.1. $a_2^2 = a_2^3 = a_2^4 = a_2^5 = 0$. Deducem $a_2^6 \neq 0$ şi sîntem în cazul 1.5.
6.2. $a_2^2 = a_2^3 = a_2^4 = 0$, $a_2^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.5.
6.3. $a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.5.
6.4. $a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. Sîntem în cazul 4.5.
6.5. $a_2^2 \neq 0$. Regăsim cazul 5.5.
Avem deci

TEOREMA 4. *Subgrupurile cu patru parametri ale grupului $G_6(1)$ pot fi reduse la forma canonică*

$$G_4 \equiv [X_1, X_2, X_3, X_4].$$

V

Fie $Y_h f = a_h^i X_i f$, $(h = 1,\dots,5;\ i = 1,\dots,6)$, operatorii unui subgrup cu cinci parametri al grupului $G_6(1)$.

Ca şi în secţiunile precedente, vom face diverse presupuneri asupra constantelor a_h^i.

1. $a_1^1 = \dots = a_1^5 = 0$. De aici rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi putem lua $a_1^6 = 1$, $a_2^6 = a_3^6 = a_4^6 = a_5^6 = 0$.

1.1. $a_2^1 = \dots = a_2^4 = 0$. Deducem că $a_2^5 \neq 0$ şi deci putem presupune $a_2^5 = 1$, $a_3^5 = a_4^5 = a_5^5 = 0$. Scriind că paranteza $(Y_1 Y_2)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h, rezultă

$$X_4 = \lambda Y_1 + \mu Y_2 + \nu Y_3$$

adică

$$\lambda a_3^1 + \mu a_4^1 + \nu a_5^1 = 0, \quad \lambda a_3^2 + \mu a_4^2 + \nu a_5^2 = 0, \quad \lambda a_3^3 + \mu a_4^3 + \nu a_5^3 = 0$$
$$\lambda a_3^4 + \mu a_4^4 + \nu a_5^4 = 1.$$

De aici rezultă că $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$ și putem presupune $\lambda \neq 0$ și deci găsim

$$Y_3 = -\frac{\mu}{\lambda} Y_4 - \frac{\nu}{\lambda} Y_5 + \frac{1}{\lambda} X_4 .$$

Printr-o schimbare de parametri deducem

$$Y_3 = X_4 .$$

Deci operatorii Y_h sînt

$$Y_1 = X_6, \quad Y_2 = X_5, \quad Y_3 = X_4, \quad Y_\alpha = a^1_\alpha X_1 + a^2_\alpha X_2 + a^3_\alpha X_3, \qquad (\alpha = 1,2).$$

Punînd condiția ca acești operatori să formeze grup, obținem $Y_4 = 0$, ceea ce este imposibil.

1.2. $a^1_2 = a^2_2 = a^3_2 = 0$, $a^4_2 \neq 0$. În acest caz putem lua $a^4_2 = 1$, $a^4_3 = a^4_4 = a^4_5 = 0$. Scriind că paranteza $(Y_1 Y_2)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h deducem

$$-X_5 + a^5_2 X_4 = a^5_2 Y_2 + \lambda Y_3 + \mu Y_4 + \nu Y_5$$

adică

$$\lambda a^1_3 + \mu a^1_4 + \nu a^1_5 = 0, \quad \lambda a^2_3 + \mu a^2_4 + \nu a^2_5 = 0,$$
$$\lambda a^3_3 + \mu a^3_4 + \nu a^3_5 = 0, \quad \lambda a^5_3 + \mu a^5_4 + \nu a^5_5 = -1 - (a^5_2)^2 .$$

De aici rezultă $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$ și putem presupune că $\lambda \neq 0$ și deci

$$Y_3 = -\frac{\mu}{\lambda} Y_4 - \frac{\nu}{\lambda} Y_5 = \frac{1 + (a^5_2)^2}{\lambda} X_5 .$$

Printr-o schimbare de parametri deducem $Y_3 = X_5$, $Y_2 = X_4$ și deci regăsim cazul precedent.

1.3. $a^1_2 = a^2_2 = 0$, $a^3_2 \neq 0$. Putem presupune că $a^3_2 = 1$, $a^3_3 = a^3_4 = a^3_5 = 0$. Scriind că paranteza $(Y_1 Y_2)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h, obținem

$$-X_1 - a^4_2 X_5 + a^5_2 X_4 = \lambda Y_3 + \mu Y_4 + \nu Y_5 ,$$

sau

$$\lambda a^1_3 + \mu a^1_4 + \nu a^1_5 = -1, \quad \lambda a^2_3 + \mu a^2_4 + \nu a^2_5 = 0, \quad \lambda a^4_3 + \mu a^4_4 + \nu a^4_4 = a^5_2 ,$$
$$\lambda a^5_3 + \mu a^5_4 + \nu a^5_5 = -a^4_2 .$$

De aici rezultă că nu putem avea $\lambda = \mu = \nu = 0$ și deci putem presupune $\lambda \neq 0$, de unde

$$Y_3 = -\frac{\mu}{\lambda} Y_4 - \frac{\nu}{\lambda} Y_5 - \frac{1}{\lambda} X_1 + \frac{a^5_2}{\lambda} X_4 - \frac{a^4_2}{\lambda} X_5$$

și printr-o schimbare de parametri deducem

$$Y_3 = X_1 - a^5_2 X_4 + a^4_2 X_5 .$$

Punînd acum condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem o relație imposibilă.

1.4. $a^1_2 = 0$, $a^2_2 \neq 0$. În acest caz putem lua $a^2_2 = 1$, $a^2_3 = a^2_4 = a^2_5 = 0$.

1.4.1. $a^1_3 = a^3_3 = a^4_3 = 0$. De aici rezultă $a^5_3 = 1$, $a^5_2 = a^5_4 = a^5_5 = 0$ și regăsim cazul 1.1.

1.4.2. $a_3^1 = a_3^3 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. Putem presupune că $a_3^4 = 1$, $a_2^4 = a_4^4 = a_5^4 = 0$. Scriind că paranteza $(Y_1 Y_3)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h, găsim

$$- X_5 + a_3^5 X_4 = a_3^5 Y_3 + \lambda Y_4 + \lambda X_5,$$

adică

$$\lambda a_4^1 + \mu a_5^1 = 0, \quad \lambda a_4^3 + \mu a_5^3 = 0, \quad \lambda a_4^5 + \mu a_5^5 = - 1 - (a_3^5)^2.$$

De aici rezultă că $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ şi deci putem presupune că $\lambda \neq 0$, de unde

$$Y_4 = - \frac{\mu}{\lambda} Y_5 - \frac{1 + (a_3^5)^2}{\lambda} X_5$$

şi, printr-o schimbare de parametri, deducem

$$Y_4 = X_5.$$

Acest caz se reduce deci la cazul 1.1.

1.4.3. $a_3^1 = 0$, $a_3^3 \neq 0$. Putem lua $a_3^3 = 1$, $a_4^3 = a_5^3 = 0$ şi scriind că paranteza $(Y_1 Y_3)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h, obţinem

$$- X_1 - a_3^4 X_5 + a_3^5 X_4 = \lambda Y_4 + \mu Y_5,$$

adică

$$\lambda a_4^1 + \mu a_5^1 = - 1, \quad \lambda a_4^4 + \mu a_5^4 = a_3^5, \quad \lambda a_4^5 + \mu a_5^5 = - a_3^4.$$

De aici rezultă că $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ şi deci putem presupune că $\lambda \neq 0$ de unde

$$Y_4 = - \frac{\mu}{\lambda} Y_5 - \frac{1}{\lambda} X_1 + \frac{a_3^5}{\lambda} X_4 - \frac{a_3^4}{\lambda} X_5$$

şi printr-o schimbare de parametri obţinem

$$Y_4 = X_1 - a_3^5 X_4 + a_3^4 X_5, \quad Y_5 = a_5^4 X_4 + a_5^5 X_5,$$

regăsind cazul 1.1 sau 1.2.

1.4.4. $a_3^1 \neq 0$. Regăsim cazul 1.3.

1.5. $a_2^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = a_4^1 = a_5^1 = 0$.

1.5.1. $a_3^2 = a_3^3 = a_3^4 = 0$. De aici rezultă $a_3^5 = 0$ şi sîntem în cazul 1.1.

1.5.2. $a_3^2 = a_3^3 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2.

1.5.3. $a_3^2 = 0$, $a_3^3 \neq 0$. Regăsim cazul 1.3.

1.5.4. $a_3^2 \neq 0$. Sîntem în cazul 1.4.

2. $a_1^1 = \cdots = a_1^4 = 0$, $a_1^5 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_1^5 = 1$, $a_2^5 = \cdots = a_5^5 = 0$.

2.1. $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = a_2^4 = 0$. De aici rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi sîntem în cazul 1.2.

2.2. $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. Putem presupune că $a_2^4 = 1$, $a_3^4 = a_4^4 = a_5^4 = 0$. Scriind că paranteza $(Y_1 Y_2)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h, obţinem

$$X_6 - a_2^6 X_4 - a_1^6 X_5 = - a_1^6 Y_1 - a_2^6 Y_2 + \lambda Y_3 + \mu Y_4 + \nu Y_5$$

adică

$$\lambda a_3^1 + \mu a_4^1 + \nu a_5^1 = 0, \quad \lambda a_3^2 + \mu a_4^2 + \nu a_5^2 = 0,$$
$$\lambda a_3^3 + \mu a_4^3 + \nu a_5^3 = 0, \quad \lambda a_3^6 + \mu a_4^6 + \nu a_5^6 = 1 + (a_1^6)^2 + (a_2^6)^2.$$

De aici rezultă că $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$ şi putem presupune că $\lambda \neq 0$, de unde deducem

$$Y_3 = -\frac{\mu}{\lambda} Y_4 - \frac{\nu}{\lambda} Y_5 + \frac{1 + (a_1^6)^2 + (a_2^6)^2}{\lambda} X_6$$

şi printr-o schimbare de parametri avem $Y_3 = X_6$, regăsind cazul 1.1.

2.3. $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. Putem lua $a_2^3 = 1$, $a_3^3 = a_4^3 = a_5^3 = 0$.

2.3.1. $a_3^1 = a_3^2 = a_3^4 = 0$. De aici rezultă $a_3^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.

2.3.2. $a_3^1 = a_3^2 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. În acest caz putem presupune $a_3^4 = 1$, $a_2^4 = a_4^4 = a_5^4 = 0$ şi scriind că paranteza $(Y_1 Y_3)$ se exprimă cu ajutorul operatorilor Y_h, obținem

$$X_6 - a_3^6 X_4 - a_1^6 X_5 = -a_1^6 X_1 - a_3^6 Y_3 + \lambda Y_4 + \mu Y_5$$

sau

$$\lambda a_4^1 + \mu a_5^1 = 0, \ \lambda a_4^2 + \mu a_5^2 = 0, \ \lambda a_4^6 + \mu a_5^6 = 1 + (a_1^6)^2 + (a_3^6)^2$$

De aici rezultă că $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ şi putem presupune că $\lambda \neq 0$.

Deci

$$Y_4 = -\frac{\mu}{\lambda} Y_5 + \frac{1 + (a_1^6)^2 + (a_3^6)^2}{\lambda} X_6.$$

Printr-o schimbare de parametri deducem

$$Y_4 = X_6$$

şi regăsim cazul 1.1.

2.3.3. $a_3^1 = 0$, $a_3^2 \neq 0$. Putem lua $a_3^2 = 1$, $a_4' = a_5' = 0$ şi scriind că operatorii Y_h formează grup, obținem o relație imposibilă.

2.3.4. $a_3^1 \neq 0$. Luăm $a_3^1 = 1$, $a_4^1 = a_5^1 = 0$ şi punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, găsim o relație imposibilă.

2.4. $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_2^2 = 1$, $a_3^2 = a_4^2 = a_5^2 = 0$.

2.4.1. $a_3^1 = a_3^3 = a_3^4 = 0$. Rezultă că $a_3^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.

2.4.2. $a_3^1 = a_3^3 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.

2.4.3. $a_3^1 = 0$, $a_3^3 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.

2.4.4. $a_3^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_3^1 = 1$, $a_4^1 = a_5^1 = 0$ şi scriind că operatorii Y_h formează grup, obținem o relație imposibilă.

2.5. $a_2^1 \neq 0$. Putem presupune că $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = a_4^1 = a_5^1 = 0$.

2.5.1. $a_3^2 = a_3^3 = a_3^4 = 0$. Rezultă că $a_3^6 \neq 0$ şi sîntem în cazul 1.1.

2.5.2. $a_3^2 = a_3^3 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.

2.5.3. $a_3^2 = 0$, $a_3^3 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.

2.5.4. $a_3^2 \neq 0$. Sîntem în cazul 2.4.

3. $a_1^1 = a_1^2 = a_1^3 = 0$, $a_1^4 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_1^4 = 1$, $a_2^4 = a_3^4 = a_4^4 = a_5^4 = 0$.

3.1. $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = a_2^4 = 0$. Rezultă că $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.2.

3.2. $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^5 \neq 0$. Sîntem în cazul 2.2.

3.3. $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^3 = 1$, $a_3^3 = a_4^3 = a_5^3 = 0$.

3.3.1. $a_3^1 = a_3^2 = a_3^5 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.3.

3.3.2. $a_3^1 = a_3^2 = 0$, $a_3^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.

3.3.3. $a_3^1 = 0$, $a_3^2 \neq 0$. Putem presupune că $a_3^2 = 1$, $a_4^2 = a_5^2 = 0$ și scriind că operatorii Y_h formează grup, obținem o relație imposibilă.

3.3.4. $a_3^1 \neq 0$. Luăm $a_3^1 = 1$, $a_4^1 = a_5^1 = 0$ și punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem o relație imposibilă.

3.4. $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^2 = 1$, $a_3^2 = a_4^2 = a_5^2 = 0$.

3.4.1. $a_3^1 = a_3^3 = a_3^5 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.2.

3.4.2. $a_3^1 = a_3^3 = 0$, $a_3^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.

3.4.3. $a_3^1 = 0$, $a_3^3 \neq 0$. Putem lua $a_3^3 = 1$, $a_4^3 = a_5^3 = 0$ și scriind că operatorii Y_h formează grup, obținem o relație imposibilă.

3.4.4. $a_3^1 \neq 0$. Putem presupune că $a_3^1 = 1$, $a_4^1 = a_5^1 = 0$ și punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, găsim o relație imposibilă.

3.5. $a_2^1 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = a_4^1 = a_5^1 = 0$.

3.5.1. $a_3^2 = a_3^3 = a_3^5 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.2.

3.5.2. $a_3^2 = a_3^3 = 0$, $a_3^5 \neq 0$. Sînten în cazul 2.2.

3.5.3. $a_3^2 = 0$, $a_3^3 \neq 0$. Putem lua $a_3^3 = 1$, $a_2^3 = a_4^3 = a_5^3 = 0$ și scriind că operatorii Y_h formează grup, găsim o relație imposibilă.

3.5.4. $a_3^2 \neq 0$. Putem presupune că $a_3^2 = 1$, $a_2^2 = a_4^2 = a_5^2 = 0$ și punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem o relație imposibilă.

4. $a_1^1 = a_1^2 = 0$, $a_1^3 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_1^3 = 1$, $a_2^3 = a_3^3 = a_4^3 = a_5^3 = 0$.

4.1. $a_2^1 = a_2^2 = a_2^4 = a_2^5 = 0$. Rezultă $a_2^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.3.

4.2. $a_2^1 = a_2^2 = a_2^4 = 0$, $a_2^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.

4.3. $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3.

4.4. $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^2 = 1$, $a_3^2 = a_4^2 = a_5^2 = 0$.

4.4.1. $a_3^1 = a_3^4 = a_3^5 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq$ și regăsim cazul 1.3.

4.4.2. $a_3^1 = a_3^4 = 0$, $a_3^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.

4.4.3. $a_3^1 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3.

4.4.4. $a_3^1 \neq 0$. Putem presupune că $a_3^1 = 1$, $a_4^1 = a_5^1 = 0$ și punînd condiția ca operatorii Y_h să formeze grup, obținem o relație imposibilă.

4.5. $a_2^1 \neq 0$. Putem lua $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = a_4^1 = a_5^1 = 0$.

4.5.1. $a_3^2 = a_3^4 = a_3^5 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.3.

4.5.2. $a_3^2 = a_3^4 = 0$, $a_3^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.

4.5.3. $a_3^2 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. Sîntem în cazul 3.3.

4.5.4. $a_3^2 \neq 0$. Putem lua $a_3^2 = 1$, $a_2^2 = a_4^2 = a_5^2 = 0$ și scriind că operatorii Y_h formează grup, găsim o relație imposibilă.

5. $a_1^1 = 0$, $a_1^2 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_1^2 = 1$, $a_2^2 = a_3^2 = a_4^2 = a_5^2 = 0$.

5.1. $a_2^1 = a_2^3 = a_2^4 = a_2^5 = 0$. Rezultă $a_2^6 \neq 0$ și regăsin cazul 1.4.

5.2. $a_2^1 = a_2^3 = a_2^4 = 0$, $a_2^5 \neq 0$. Sîntem în cazul 2.4.

5.3. $a_2^1 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. Sîntem în cazul 3.4.

5.4. $a_2^1 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. Regăsim cazul 4.4.

5.5. $a_2^1 \neq 0$. Putem presupune $a_2^1 = 1$, $a_3^1 = a_4^1 = a_5^1 = 0$.

5.5.1. $a_3^3 = a_3^4 = a_3^5 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.4.

5.5.2. $a_3^3 = a_3^4 = 0$, $a_3^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.4.

5.5.3. $a_3^3 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. Sîntem în cazul 3.4.

5.5.4. $a_3^3 \neq 0$. Sîntem în cazul 4.4

6. $a_1^1 \neq 0$. Putem presupune în acest caz că $a_1^1 = 1$, $a_2^1 = a_3^1 = a_4^1 = = a_5^1 = 0$.

6.1. $a_2^2 = a_2^3 = a_2^4 = a_2^5 = 0$. În acest caz rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.5.

6.2. $a_2^2 = a_2^3 = a_2^4 = 0$, $a_2^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.5.

6.3. $a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. Sîntem în cazul 3.5.

6.4. $a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. Regăsim cazul 4.5.

6.5. $a_2^2 \neq 0$. Sîntem în cazul 5.5.

Cu aceasta rezultă

TEOREMA 5. *Grupul transformărilor ortogonale din spaţiul E_3 nu are nici un subgrup cu cinci parametri.*

Primită la redacţie la 4 iulie 1966

Centrul de statistică matematică al Academiei Republicii Socialiste România str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei grupii continui finiti di transformazioni*, N. Zanichelli, Bologna, 1928.

MATRICEA ORTOGONALĂ CEA MAI APROPIATĂ DE O MATRICE REALĂ DATĂ B

DE

LIVIU TODOR

Fie B o matrice reală pătratică dată. Se caută matricea Q ortogonală cea mai apropiată de matricea B în sensul metricii euclidiene (2). Această matrice se determină în mod unic prin formula (32). În această formulă prin matricea $(BB')^{1/2}$ se înțelege acea matrice simetrică, ce este redusă la forma diagonală prin aceeași transformare ortogonală ca și BB'; și are ca valori proprii $+\sqrt{\lambda_i}$, unde λ_i sînt valorile proprii ale matricei BB'. Această matrice am numit-o „rădăcina aritmetică" a matricei BB'. În § 4 se indică procedeul aproximativ prin care se poate calcula matricea Q.

Fie $B = (b_{ij})$ o matrice pătratică, reală, dată, despre care vom presupune că nu este prea îndepărtată de o matrice ortogonală, ceea ce revine la a spune că matricea BB' (B' fiind matricea transpusă lui B) nu este prea îndepărtată de matricea unitate E.

Metrica întrebuințată va fi cea dată de norma sferică, sau euclidiană. Rezolvarea acestei probleme poate fi de folos pentru soluționarea cu foarte mare exactitate a problemei valorilor și vectorilor proprii, pentru o matrice pătratică reală și simetrică, prin metodele lui Jacobi sau Givens. Rezultatele se pot extinde pentru matrici complexe, în care caz se caută matricea unitară cea mai apropiată la o matrice dată, rezultat care poate fi util la rezolvarea problemei valorilor și vectorilor proprii pentru o matrice autoadjunctă (hermitică).

1. Fie $Q = (q_{ij})$ matricea ortogonală căutată. Condiția de ortogonalitate se scrie :

$$QQ' = E, \tag{1}$$

unde E este matricea unitate. Distanța dintre B și Q va fi :

$$\rho(B, Q) = \| B - Q \| = \sqrt{\mathrm{sp}\,(B - Q)(B - Q)'}, \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 363–370, BUCUREȘTI, 1967

unde prin $\mathrm{sp}(A)$ am notat urma matricei A. Ținînd seama că : $\mathrm{sp}(QB') = \mathrm{sp}\,(BQ')$ și notînd cu $\varphi(Q)$ expresia :

$$\text{(3)}\qquad \varphi(Q) = \rho^2(B,\, Q) = \| B - Q \|^2 = \| B \|^2 + n - 2\mathrm{sp}\,(QB') =$$
$$= \| B \|^2 + n - 2 \sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij} q_{ij},$$

problema se reduce la studiul extremelor funcției $\varphi(Q)$ cu condiția matricială (1). Aceasta din urmă se reduce la condițiile scalare :

$$\text{(4)}\qquad \sum_{k=1}^{n} q_{ik} q_{jk} = \delta_{ij}, \qquad\qquad i \geqslant j$$

dintre care au fost excluse acele condiții ce rezultă din (4) și din simetria oricărei matrici de forma AA'. Întrebuințînd multiplicatorii lui Lagrange λ_{ij}, $i \geqslant j$, ajungem la problema de extremum fără legături pentru funcția :

$$\text{(5)}\qquad \psi(q_{st}) = \| B \|^2 + n - 2 \sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij} q_{ij} - \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i \geqslant j}}^{n} \lambda_{ij} \sum_{k=1}^{n} (q_{ik} q_{jk} - \delta_{ij}).$$

Condițiile de extremum vor fi :

$$\text{(6)}\qquad \frac{\partial \psi}{\partial q_{st}} = -\, 2b_{st} - \sum_{j=1}^{s} \lambda_{sj} q_{jt} - \sum_{i=s}^{n} \lambda_{is} q_{it} = 0.$$

Înmulțind aceste relații cu $-\, q_{rt}$ și sumînd după t, obținem :

$$2 \sum_{t=1}^{n} b_{st} q_{rt} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_{sj} \sum_{t=1}^{n} q_{jt} q_{rt} + \sum_{i=s}^{n} \lambda_{is} \sum_{t=1}^{n} q_{it} q_{rt} = 0$$

apoi ținînd seama de (4) și de consecințele sale :

$$\text{(7)}\qquad 2 \sum_{t=1}^{n} b_{st} q_{rt} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_{sj}\, \delta_{jr} + \sum_{i=s}^{n} \lambda_{is}\, \delta_{ir} = 0.$$

Pentru $r > s$, (7) ne va da :

$$\text{(8)}\qquad 2 \sum_{t=1}^{n} b_{st} q_{rt} + \lambda_{rs} = 0, \qquad\qquad r > s$$

Pentru $r \leqslant s$:

$$\text{(9)}\qquad 2 \sum_{t=1}^{n} b_{st} q_{rt} + \lambda_{sr} = 0, \qquad\qquad r < s$$

și pentru $r = s$:

$$\text{(10)}\qquad 2 \sum_{t=1}^{n} b_{st} q_{st} + 2\lambda_{ss} = 0,$$

Schimbînd pe r cu s în (9), se poate elimina λ_{rs} între (8) și (9) și se obține :

$$\text{(11)}\qquad \sum_{t=1}^{n} b_{st} q_{rt} = \sum_{t=1}^{n} b_{rt} q_{st},$$

în care restricția $s < r$ nu mai are sens. Relațiile (11) se transcriu matricial sub forma :

$$BQ' = QB'. \tag{12}$$

Este de observat că o dată ce Q satisface la (1) și la (12), relațiile (8) și (10) determină multiplicatorii λ_{ij} și apoi ecuațiile de extremum (6) sînt îndeplinite. Deci matricea Q căutată va trebui să fie o soluție a ecuațiilor (1) și (12).

2. *Determinarea lui Q.* Ecuația (12) se rezolvă destul de simplu. Înmulțind (12) la dreapta cu Q, respectiv la stînga cu Q', obținem :

$$B = QB'Q, \tag{13}$$

$$B' = Q'BQ'. \tag{14}$$

Înmulțind apoi (13) la dreapta cu B', rezultă :

$$BB' = QB'QB' = (QB')^2. \tag{15}$$

Înmulțind aceeași relație la stînga cu B', obținem :

$$B'B = B'QB'Q = (B'Q)^2. \tag{16}$$

Pe o cale analoagă obținem din (14) :

$$BB' = BQ'BQ' = (BQ')^2. \tag{17}$$

$$B'B = Q'BQ'B = (Q'B)^2. \tag{18}$$

3. *Rezolvarea ecuațiilor matriciale* (13) ... (16). Ecuațiile (13) ... (16) au forma :

$$X^Q = C, \tag{19}$$

unde C este o matrice simetrică și pozitivă. Dacă B însăși se presupune nu prea îndepărtată de o matrice ortogonală, atunci ea nu este singulară și BB' ca și $B'B$ este pozitiv definită.

Putem deci presupune că C este pozitiv definită. Fie S matricea ortogonală care reduce matricea C la forma sa diagonală $D(C)$:

$$C = SD(C)S' \tag{20}$$

din care rezultă

$$D(C) = S'CS. \tag{21}$$

Este de notat că S este unic determinat dacă se prescrie, de la început, o anumită ordine în elementele de pe diagonala lui $D(C)$; de exemplu dacă se impune condiția :

$$d_{11} > d_{22} > d_{33} > \dots > d_{nn},$$

în ipoteza că valorile proprii ale lui C sînt toate distincte.

În ipoteza că valorile proprii ale lui C pot să fie și multiple, condiția precedentă poate fi schimbată prin :

$$d_{11} \geqslant d_{22} \geqslant \dots \geqslant d_{nn}$$

şi atunci S nu mai este unic ; de exemplu dacă $d_{11} = d_{22}$, celelalte valori proprii fiind distincte, atunci S este determinat, abstracţie făcînd de o transformare ortogonală oarecare, ce afectează numai liniile şi coloanele 1 şi 2. Notînd cu S_1 o transformare unitară oarecare ce reduce pe C la forma diagonală cu păstrarea ordonării indicată şi cu T_{12} cea mai generală transformare ortogonală care are forma :

$$T_{12} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \ldots 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix},$$

atunci cea mai generală transformare ortogonală ce reduce pe C la forma diagonală cu respectarea ordinei, are forma :

$$S = S_1 T_{12}. \qquad (22)$$

Rezultatul se poate generaliza, cu uşurinţă, pentru cazul mai multor valori proprii multiple de orice ordin.

Să notăm prin S_1 o transformare ortogonală ce reduce matricea C la forma diagonală $D(C)$, cu păstrarea ordinei elementelor de pe diagonală. Atunci :

$$D(C) = S_1' C S_1 \qquad (21')$$

şi

$$C = S_1 D(C) S_1' \qquad (20')$$

şi fie T cea mai generală transformare ortogonală care invariază pe $D(C)$:

$$D(C) = T D(C) T'. \qquad (23)$$

Atunci cea mai generală transformare ortogonală ce reduce pe C la forma diagonală cu păstrarea ordinei elementelor de pe diagonală va fi :

$$S = S_1 T \qquad (22')$$

iar relaţiile dintre C şi $D(C)$ vor fi din nou (20) şi (21).

În cazul particular cînd valorile proprii ale lui C sînt distincte, atunci matricea S este unică; ar T nu poate fi decît matricea unitate.

Matricea X care este şi ea simetrică, este redusă de transformarea S_1 la o matrice $D_1(X)$:

$$D_1(X) = S_1' X S_1. \qquad (24)$$

Matricea $D_1(X)$ satisface la ecuaţia :

$$D_1(X) \cdot D_1(X) = S_1' X S_1 S_1' X S_1 = S_1' X^2 S_1 = S_1' C S_1 = D(C). \qquad (25)$$

Un calcul arată că matricea $D_1(X)$ ce satisface la (25) are o descompunere diagonală celulară ; fiecare celulă corespunzînd cîte unei valori proprii distincte a lui C. Dar $D_1(X)$ este o matrice simetrică, deoarece transformările ortogonale păstrează simetria matricilor : iar matricea C este simetrică, precum arată relaţia (12). Prin urmare există o matrice T care o reduce la forma canonică diagonală. Matricea T este de un astfel de tip încît lasă invariantă matricea C. Atunci matricea S_1T reduce deodată matricile X şi C la forma lor diagonală. Atunci, notînd cu :

$$D(X) = T'D_1(X)T, \tag{26}$$

$D(X)$ este redusă la forma diagonală şi satisface la ecuaţia :

$$D(X) \cdot D(X) = D(C). \tag{25'}$$

Deocamdată nu atacăm problema unicităţii lui T. Notînd cu $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, valorile proprii ale matricei BB', ordonate descrescător, din (25′) rezultă că valorile proprii ale lui X şi deci elementele de pe diagonala lui $D(X)$ vor fi :

$$\mu_i = \alpha_i \sqrt{\lambda_1}, \quad \alpha_i = \pm 1. \tag{27}$$

Vom conveni ca în cazul unei rădăcini multiple λ_1 de exemplu semnele α_i, să fie ordonate întîi cele cu plus apoi cele cu minus. De exemplu dacă λ_1 este rădăcină triplă şi două dintre semnele α_i sînt pozitive şi una negativă, şi celelalte valori proprii sînt distincte, atunci :

$$\mu_1 = \mu_2 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \mu_3 = -\sqrt{\lambda_1}, \quad \mu_i = \alpha_i \sqrt{\lambda_i}, \quad \alpha_i = \pm 1, i = 4,5, \dots, n.$$

În asemenea condiţii se vede că matricea $D(X)$, ca şi $D(C)$, sînt invariante de transformări de forma T_{12}. Aceasta lămureşte problema unicităţii lui T.

Din cele precedente reiese următoarea formă pentru X :

$$X = S_1\, TD(X)\, T'S_1'. \tag{28}$$

Din această formă reiese că X este unic chiar dacă T nu este unic. Acum putem determina şi valorile extreme ale lui $\varphi(Q)$ după (3) :

$$\begin{aligned} \operatorname{extr} \varphi(Q) &= \operatorname{extr} \rho^2(B,C) = \|B\|^2 + n - 2\operatorname{sp}(QB') = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + n - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\sqrt{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i\sqrt{\lambda_i} - 1)^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Dar pe noi ne interesează minimul lui $\varphi(Q)$. Atunci va trebui să luăm

$$\alpha_i = +1, \qquad i=1,2, \dots ,n \tag{30}$$

Expresia (29) va fi atunci :

$$\min \varphi(Q) = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} - 1)^2. \tag{31}$$

Acum se poate scrie şi expresia lui Q ce realizează minimul :

$$Q = (BB')^{1/2}(B')^{-1} = (B')^{-1}(B'B)^{1/2}, \tag{32}$$

unde prin $(BB')^{1/2}$ respectiv $(B'B)^{1/2}$ înţelegem ”rădăcina aritmetică” a matricei BB' respectiv $B'B$; adică matricile:

$$(33)\qquad (BB')^{1/2} = S\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} S'$$

$$(34)\qquad (B'B)^{1/2} = P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P'$$

unde S respectiv P sînt matricile ortogonale ce reduc matricile simetrice şi pozitiv definite BB' respectiv $B'B$ la forma diagonală. Din studiul făcut mai sus rezultă că aceste matrici sînt unice, deşi matriciile S şi P pot să nu fie unic determinate.

4. *Exemple. Cazul unei matrici B simetrice nesingulare.* În acest caz $BB' = B^2$, şi valorile proprii ale lui B sînt reale. Aceeaşi matrice ortogonală S reduce matricea B şi $BB' = B^2$ la forma canonică. Notînd cu μ_i valorile proprii ale lui B, vom avea:

$$B = S\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix} S'$$

Matricea BB' se calculează şi ea uşor şi este:

$$BB' = S\begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n^2 \end{pmatrix} S'$$

ca şi $(BB')^{1/2}$:

$$(BB')^{1/2} = S\begin{pmatrix} |\mu_1| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\mu_2| & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & |\mu_n| \end{pmatrix} S'.$$

Aşa că matricea Q cea mai apropiată va fi în acest caz:

$$Q = S\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} S',$$

unde

$$\alpha_i = \operatorname{sign} \mu_i .$$

În particular dacă matricea B este simetrică și pozitiv definită, atunci matricea Q cea mai apropiată de ea este matricea unitate E.

5. *Calculul aproximativ al matricei Q.* În ipoteza ce ne interesează, BB' este o matrice apropiată de matricea unitate, iar B este apropiată de o matrice ortogonală. Pentru calcularea rădăcinii aritmetice a matricei BB' se poate, în ipotezele noastre, utiliza dezvoltarea în serie după puterile lui $E-BB'$, care este o matrice apropiată de matricea nulă:

$$(35)\qquad (BB')^{1/2} = E - (E - BB')^{1/2} = E - \frac{1}{2}(E - BB') - \\ - \frac{1}{8}(E - BB')^2 + \ldots$$

Seria de matrici converge dacă valorile proprii ale matricei $E-BB'$ sînt subunitare în modul; acest lucru se întîmplă în cazul nostru. Pentru calcularea lui $(B')^{-1}$ putem folosi algoritmul de aproximații succesive bine cunoscut:

$$X^{(k+1)} = (2E - X^{(k)}A)X^{(k)}$$

care determină inversa matricei A ca limita matricilor $X^{(k)}$ plecînd de la o matrice $X^{(0)}$ ce nu este prea depărtată de matricea A^{-1}; aceasta în sensul că o normă oarecare a matricei $R_0 = E - X^{(0)} A$ să fie subunitară. În cazul nostru matricea B' joacă rolul lui A și cum B și B' sînt prin ipoteză puțin depărtate de o matrice ortogonală, se poate lua $X^{(0)} = B$. Aceasta ne conduce la procesul de aproximații succesive:

$$(36)\qquad X^{(1)} = (2E - BB')B = (E + R)B,$$

unde am notat:

$$(37)\qquad R = E - BB'.$$

Apoi obținem succesiv

$$X^{(2)} = (2\varepsilon - X^{(1)} B') X^{(1)} = (2E - (E + R)\, BB')\,(E + R)\, B =$$

$$(38)\qquad = (E + R^2)\,(E + R)\, B$$

. . . .

$$(39)\qquad X^{(k+1)} = (E + R^{2k})(E + R^{2^{k-1}})\cdots(E + R^2)(E + R)B.$$

Convergența procesului de aproximații succesive (36), (38), (39) este pătratică, adică:

$$(40)\qquad E - X^{(k)} B' = (E - X^{(k-1)}\, B')^2 = \cdots = (E - X^{(0)} B')^{2k} = R^{2k}$$

și deci foarte rapidă în ipotezele noastre.

6. *Folosirea rezultatelor pentru determinarea cu mare precizie a valorilor și vectorilor proprii la o matrice pătratică, reală și simetrică A prin metoda Jacobi.* Metoda Jacobi reconstituie matricea ortogonală T ce reduce matricea simetrică la forma diagonală, ca limita matricilor ortogonale $T^{(k)}$:

$$(41)\qquad T^{(k)} = T_k T_{k-1} \cdots T_1 T_0,$$

unde fiecare din matricile T_j sînt matrici ortogonale mai simplu de calculat; anume rotaţii în numai două coordonate. Matricile T_j se aleg aşa ca matricile

$$A_{j+1} = T_j A_j T_j', \qquad A_0 = A \tag{42}$$

să fie mai aproape de forma diagonală, decît matricile A_j; în sensul că suma pătratelor elementelor nesituate pe diagonală să fie mai mic pentru A_{j+1} decît pentru A_j. În practică procesul se opreşte atunci cînd elementele nesituate pe diagonală ale lui A_k sînt neglijabile. Din cauza erorilor de rotunjire, inevitabile în timpul înmulţirilor dintre matrici, precum şi din cauză că fiecare dintre matricile T_j nu sînt decît aproximativ ortogonale, nici matricea $T^{(k)}$ nu va fi ortogonală. Eroarea ei va consta din erorile matricilor T_j cumulate, şi din erorile de rotunjire cumulate. În mod similar matricea A_k nu va fi asemenea cu matricea A printr-o transformare ortogonală, şi cu atît mai puţin prin transformarea $T^{(k)}$. Pentru înlăturarea acestui inconvenient propunem următorul procedeu. După ce s-a obţinut matricea $T^{(k)}$, se calculează cu ajutorul metodei aproximative descrise la §4 matricea ortogonală Q cea mai apropiată de ea. Apoi se calculează matricea QAQ' şi în caz că această matrice nu este suficient de apropiată de o matrice diagonală, se continuă procesul Jacobi — luînd ca matrice T_0 matricea Q şi ca matrice A_1 matricea QAQ'.

Primită la redacţie la 9 iulie 1966

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti,
str. Academiei nr. 14

ASUPRA METODEI LUI GAUSS DE REZOLVARE A SISTEMELOR LINIARE DE MARI DIMENSIUNI ŞI ASUPRA INVERSĂRII MATRICILOR MARI

DE

LIVIU TODOR

Lucrarea pune în evidenţă două tipuri de transformări elementare folosite în eliminarea gaussiană, care sînt denumite operaţii de tip „0" şi de tip „1". Se creează un simbolism care permite descrierea diverselor strategii întrebuinţate în diverse variante ale metodei lui Gauss, sub forma unei „diagrame". Această diagramă este de fapt o matrice (matricile date de (13), (16), (17), (19), (20)). Dintre diversele diagrame, cele date de (19) şi (20) reprezintă variante noi care prezintă particularităţi, ce permit o mai bună întrebuinţare a maşinilor de calcul electronice. Astfel, fără a mări numărul de înmulţiri şi împărţiri, necesare rezolvării sistemelor, varianta (20) permite rezolvarea rapidă a unor sisteme de două ori mai mari decît sistemele actual rezolvabile (de fapt de $\sqrt{2}$ ori mai mari decît cea mai economică metodă cunoscută în literatură). În acelaşi timp, aceleaşi variante permit inversarea pe loc a matricilor, creînd posibilitatea inversării unor matrici de două ori mai mari ca cele rezolvabile în prezent. În ultima parte a lucrării sînt descrise mai în amănunt felul cum trebuie folosite celulele memoriei interioare şi exterioare pentru ca economia de celule să fie efectivă, şi se arată că variantele respective se pot aplica şi în cazul alegerii nesecvenţiale a pivoţilor.

1. Fie sistemul liniar

$$Ax = b, \tag{1}$$

unde $A = (a_{ij})$ este o matrice pătratică $n \times n$ nesingulară, x este vectorul coloană al necunoscutelor, iar b este vectorul coloană al termenilor liberi. Pe lîngă matricea A a sistemului se introduce aşa-zisa matrice extinsă $\widetilde{A}$ a sistemului care are n linii şi $n+1$ coloane. Această matrice are elementele definite de :

$$\widetilde{a}_{ij} = a_{ij}\ ;\quad i = 1,\ldots, n\,;\ j = 1,\ldots,n \tag{2}$$

$$\widetilde{a}_{in+1} = b_i\,;\quad i = 1,\ldots, n. \tag{3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 371–385, BUCUREŞTI, 1967

Deci matricea $\widetilde{A}$ se obţine din A adăugîndu-i o coloană, formată din vectorul coloană b. În cazul a mai multor sisteme cu aceeaşi matrice A, dar cu termenul liber $b^{(1)}, \cdots, b^{(s)}$, se defineşte o singură matrice extinsă $\widetilde{A}$ pentru toate sistemele. În acest caz matricea A are n linii şi $n+s$ coloane; aceasta se obţine din matricea A, adăugînd s coloane care sînt tocmai vectorii coloană $b^{(1)}, \cdots, b^{(s)}$. Astfel, pentru inversarea matricilor, matricea $\widetilde{A}$ are n linii şi $2n$ coloane, deci este formată prin alăturarea a două matrici pătratice: matricea A şi matricea unitate E.

Metoda lui Gauss constă în trecerea treptată de la sistemul (1) la un altul echivalent. Noul sistem va trebui însă să fie mai simplu de rezolvat. În practică noul sistem va trebui să aibă matricea triunghiulară, sau reductibilă la una triunghiulară prin permutări de linii sau coloane sau o matrice diagonală, sau reductibilă la o matrice diagonală prin permutări de linii sau coloane. În primul caz avem de-a face cu metoda lui Gauss propriu-zisă, şi după transformarea sistemului, la un sistem cu matricea triunghiulară, sau reductibilă la o matrice triunghiulară, nu s-a terminat decît prima „fază" a rezolvării, urmînd ca după aceea să se treacă la rezolvarea sistemului triunghiular, ceea ce reprezintă a doua „fază" a procesului Gaussian. În cel de-al doilea caz, după terminarea transformării sistemului într-altul echivalent cu cel iniţial, dar cu matricea echivalentă cu una diagonală, rezolvarea sistemului este practic încheiată; aşa că „faza" inversă nu mai există. Acest de-al doilea mod de a proceda se numeşte uneori metoda lui Jordan.

În cele ce urmează nu vom face distincţie între cele două posibilităţi, căci această distincţie va reieşi dintr-un anume simbolism care va schematiza oricare anume dintre posibilităţile existente; simbolismul respectiv purtînd indicaţii şi asupra căreia dintre cele două „posibilităţi" aparţine varianta „strategică" concretă. Bineînţeles în cazul metodei lui Gauss propriu-zisă simbolismul respectiv va fi adecvat numai pentru prima „fază", adică pentru ceea ce se numeşte uneori faza directă.

2. *Descrierea „fazei" directe.* Precum am remarcat, trecerea de la sistemul iniţial (1) la cel final cu matricea mai simplă se face treptat, adică întîi se trece de la sistemul $S_0 \equiv S$, care este tocmai sistemul (1), la un sistem echivalent cu el S_1, de la acesta la S_2, şi aşa mai departe, pînă cînd se ajunge la sistemul final S_p, care este cel cu matricea mai simplă. La această transformare treptată de la sistemul S_0 la S_p, corespunde o transformare treptată a matricilor extinse respective, pe care le notăm prin $\widetilde{A}^0 \equiv \widetilde{A}, \widetilde{A}^1, \cdots, \widetilde{A}^p$. Ideea care stă la baza metodei lui Gauss precizează tocmai felul cum se face trecerea de la o matrice extinsă $\widetilde{A}^k$, la matricea extinsă $\widetilde{A}^{k+1}$, ceea ce corespunde, bineînţeles, la trecerea de la sistemul S_k, la sistemul S_{k+1}. Această idee constă în eliminarea treptată a necunoscutelor. Acest lucru se poate realiza în două moduri: fie folosind numai operaţiile de înmulţire şi scădere — aceasta corespunzînd la ceea ce se numeşte îndeobşte în literatură „varianta înmulţirii şi scăderii", sau uneori „metoda eliminării propriu-zisă"; fie folosind şi împărţirea, în care caz se ajunge la aşa-numita „variantă a împărţirii unice", numită uneori „metoda substituţiei". În cele ce urmează ne vom ocupa numai de „varianta împărţirii unice".

În cazul ,,variantei împărţirii unice'' se pun în evidenţă două tipuri de operaţii elementare (nu este vorba despre operaţii aritmetice elementare) care realizează trecerea de la matricea $\widetilde{A}^k$ la $\widetilde{A}^{k+1}$. Cele două tipuri de operaţii elementare le vom nota simbolic prin ,,1'' şi ,,0''. Fiecare operaţie va mai fi caracterizată printr-un ,,rang'', care este k (reprezintă numărul de ordine al operaţiei, în ordonare cronologică) şi de două ,,coordonate'' i_k, j_k, care sînt numere întregi pozitive mai mici ca n. Vom vedea în cele ce urmează că nu pot exista două operaţii cu aceleaşi coordonate i_k, j_k. Aceasta permite să se pună în evidenţă o matrice pătratică cu n linii şi n coloane pe care s-o notăm cu 0 şi care s-o numim matrice diagramă. Matricea 0 avînd acelaşi număr de linii şi de coloane ca şi matricea A, se poate suprapune spaţial peste aceasta din urmă. Elementele matricei 0 o să fie numere scrise în baza 10 (sau în altă bază) cu parte înainte de virgulă şi după virgulă. Partea dinainte de virgulă este 0 sau 1. Această parte va arăta tipul de operaţie ,,0'' respectiv ,,1''. Partea de după virgulă considerată ca număr întreg va fi tocmai ,,rangul'' k al operaţiei. În sfîrşit, cele două coordonate i_k, j_k ale operaţiei, sînt tocmai linia şi coloana pe care se găseşte elementul. Astfel $0_{23} = 1{,}5$ arată că operaţia a 5-a în ordine cronologică este de tipul ,,1'' şi are ,,coordonatele $i_5 = 2$, $j_5 = 3$; iar $0_{47} = 0{,}11$, ne spune că operaţia a 11-a este de tip ,,0'', şi coordonatele ei sînt $i_{11} = 4$, $j_{11} = 7$.

Acum vom descrie cele două tipuri de operaţii, vom pune în evidenţă unele reguli, şi apoi vom vedea ce foloase se pot trage din ,,schematizarea'' introdusă.

Operaţia de tip ,,1'', cu ordinul k, şi coordonatele i_k, j_k transformă matricea extinsă $\widetilde{A}^k$ în $\widetilde{A}^{k+1}$. Elementele matricei $\widetilde{A}^{k+1}$ sînt date de:

$$(4)\qquad \tilde{a}^{k+1}_{ij} = \tilde{a}^{k}_{ij},\ i,\ j = 1, \cdots, n\,; j = 1, \cdots, n+1\,;\quad i \neq i_k$$

$$(5)\qquad \tilde{a}^{k+1}_{i_k j} = \frac{\tilde{a}^{k}_{i_k j}}{\tilde{a}^{k}_{i_k j_k}},\ j = 1, \cdots,\ n+1\quad ;\ j \neq j_k$$

$$(6)\qquad \tilde{a}^{k+1}_{i_k j_k} = 1.$$

Deci operaţia noastră este echivalentă cu păstrarea ecuaţiilor sistemului S_k, afară de ecuaţia i_k, aceasta fiind înlocuită de ecuaţia obţinută prin împărţirea ei prin $\tilde{a}^{k}_{i_k j_k}$. Bineînţeles pentru ca această operaţie să se poată efectua este necesar ca:

$$(7)\qquad \tilde{a}^{k}_{i_k j_k} \neq 0.$$

În literatură $\tilde{a}^{k}_{i_k j_k}$ se numeşte uneori ,,pivot''.

Operaţia de tip ,,0'', ordinul k, şi de coordonate i_k, j_k transformă şi ea matricea $\widetilde{A}^k$ în $\widetilde{A}^{k+1}$, păstrîndu-i toate liniile afară de linia i_k; deci după formula (4). Linia i_k este înlocuită prin alta în care:

$$(8)\qquad \tilde{a}^{k+1}_{i_k j_k} = 0$$

$$(9)\qquad \tilde{a}^{k+1}_{i_k j} = \tilde{a}^{k}_{i_k j} - \tilde{a}^{k}_{i_{k'} j}\ \tilde{a}^{k}_{i_k j_k},\ j = 1, \cdots,\ n+1\,;\ j \neq j_k,$$

unde i_k este prima coordonată a operaţiei de tip ,,1'', care are cea de-a doua coordonată j_k, egală cu cea de-a doua coordonată a operaţiei de tip ,,0'':

$$(10)\qquad j_{k'} = j_k$$

3. **Reguli.** Regula 1. *Toți pivoții trebuie să fie diferiți de zero.*

Regula 2. *Pe fiecare linie și pe fiecare coloană a matricei A există un pivot și numai unul.* Această regulă se traduce într-o regulă pentru matricea diagramă 0.

Regula 2'. *În matricea 0 pe fiecare linie și pe fiecare coloană există un element și numai unul care are partea de dinainte de virgulă egală cu 1.*

Regula 3. *Operația 0, k, de coordonate i_k, j_k, nu se poate executa decît dacă pe coloana j_k există o operație 1, k' cu*

$$k' < k. \tag{11}$$

Regula 4. *Dacă regula* (3) *este respectată, operația 0, k se efectuează cu linia $i_{k'}$, pe care este situată operația 1, k' pentru care* :

$$j_{k'} = j_k. \tag{12}$$

Aceste reguli, obligatorii, le completăm cu una de natură convențională :

Regula 5. *Pot exista coordonate i, j cărora să nu le corespundă nici un tip de transformări* (*de ex. în variantele clasice Gauss*). *Elementele corespunzătoare din matricea 0 vor fi notate prin* $\varnothing$.

O dată acestea stabilite, se creează o corespondență biunivocă între diversele „strategii" de aplicare a metodei lui Gauss și matricile 0. În cele ce urmează ne vom ocupa de astfel de strategii, și pentru aceasta va fi suficient să ne ocupăm de matricea diagramă 0.

4. „*Strategii*" *prestabilite.* Printre strategiile posibile există unele în care operațiile împreună cu ordinul lor sînt stabilite de la început. Acest tip de strategii este mai pretențios în sensul că pentru satisfacerea regulii 1, este necesar şi suficient ca anumiţi minori (n la număr) ai determinantului sistemului să fie diferiţi de zero. La strategiile de alt tip acest lucru se poate evita — condiţia respectivă înlocuindu-se cu alta mai uşoară ca numai însăşi determinantul sistemului să fie diferite de zero.

Diagrama **0** pentru „prima" fază a metodei Gauss propriu-zisă în varianta strategică a alegerii secvenţiale a pivoţilor este următoarea :

$$0 = \begin{pmatrix} 1,1 & \varnothing & \cdots & \varnothing & \varnothing \\ 0,2 & 1,\ n+1 & \cdots & \varnothing & \varnothing \\ 0,3 & 0,\ n+2 & \cdots & \varnothing & \varnothing \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0,n & 0,2\,n-1 & \cdots & 0,\ \dfrac{n(n-1)}{2} & 1,\ \dfrac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Numărul total de înmulţiri şi împărţiri pentru această fază (adunările şi scăderile se efectuează uşor şi de aceea nu le mai socotim ; de altfel ele se „asortează" cu numărul total de înmulţiri şi împărţiri, în sensul că numărul adunărilor şi scăderilor creşte cu numărul de înmulţiri şi împărţiri, fiind de acelaşi ordin de mărime), este cunoscut :

$$N = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{14}$$

În cazul acestei variante strategice, este nevoie şi de faza inversă, care revine la rezolvarea unui sistem cu matricea triunghiulară, care are pe diagonală 1. Pentru rezolvarea unui astfel de sistem mai sînt necesare încă $\frac{n(n-1)}{2}$ înmulţiri. Deci în total pentru această variantă sînt necesare :

$$N_1 = \frac{n(n^2+3n-1)}{3}. \tag{15}$$

Această valoare rămîne valabilă pentru *toate variantele Gauss propriu-zise, cu împărţire unică.*

Fără a intra în amănunte dăm şi matricea diagramă pentru varianta Gauss propriu-zisă, în varianta secvenţială inversă :

$$0 = \begin{pmatrix} 1, \frac{n(n+1)}{2} & 0, \frac{n(n-1)}{2} & \cdots & 0, 2n-1 & 0, n \\ \emptyset & 1, \frac{n(n-3)}{2} & \cdots & 0, 2n-2 & 0, n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & 1, 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Varianta secvenţială, schematizată de (16), este de multe ori preferată de către programatori, căci după rezolvarea sistemului triunghiular, la care conduce această variantă, necunoscutele se obţin în ordinea lor normală de numerotare : întîi x_1, apoi $x_2, \ldots$ şi la sfîrşit x_n ; în timp ce varianta secvenţială directă, simbolizată de (13), conduce la ordine inversă de obţinere a necunoscutelor.

5. *Diagrama variantei Jordan.* Diagrama variantei Jordan are următoarea formă :

$$0 = \begin{pmatrix} 1, 1 & 0, \frac{n(n+3)}{2} & 0, \frac{n(n+5)}{2} & \cdots & 0, n^2-2n+2 & 0, n^2-n+1 \\ 0, 2 & 1, n+1 & 0, \frac{n(n+7)}{2} & \cdots & 0, n^2-2n+3 & 0, n^2-n+2 \\ 0, 3 & 0, n+2 & 1, 2n & \cdots & 0, n^2-2n+4 & 0, n^2-n+3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, n-1 & 0, 2(n-2) & 0, 3n-4 & \cdots & 0, \frac{n(n-3)}{2} & 0, n^2 \\ 0, n & 0, 2n-1 & 0, 3n-3 & \cdots & 0, \frac{n(n-1)}{2} & 1, \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Numărul total de înmulţiri şi împărţiri este pentru această variantă :

$$N = \frac{n^2(n+1)}{2} \tag{18}$$

după care, matricea sistemului final este matricea unitate şi deci soluţia sistemului iniţial este vectorul liber final, sau coloana $n+1$ din matricea $\widetilde{A}^{n^2}$.

6. *O variantă nouă.* Fie diagrama :

$$0=\begin{pmatrix} 1,1 & 0,4 & 0,9 & \dots & 0,n^2 \\ 0,2 & 1,3 & 0,8 & \dots & 0,n^2-1 \\ 0,5 & 0,6 & 1,7 & \dots & 0,n^2-2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0,n^2-2n+2 & & & \dots & 1,n^2-n+1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

şi de asemenea să considerăm şi următoarea diagramă puţin diferită de (19) :

$$0=\begin{pmatrix} 1,1 & 0,4 & 0,8 & \dots & 0,\ n^2-n+2 \\ 0,2 & 1,3 & 0,9 & \dots & 0,\ n^2-n+3 \\ 0,5 & 0,6 & 1,7 & \dots & 0,\ n^2-n+4 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0,\ n^2-2n+2 & & & \dots & 1,\ n^2-n+1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Cele două variante corespunzătoare conduc la o matrice transformată $\widetilde{A}^{n^2}$, în care ultima coloană reprezintă tocmai soluţia sistemului iniţial, iar matricea formată din primele n coloane ale lui $\widetilde{A}^{n}$ este matricea unitate E. La prima vedere s-ar părea că nu există o deosebire esenţială între variantele (19), (20) şi varianta Jordan (17). În ambele cazuri numărul total de operaţii elementare de tip „0" sau „1" este de n^2. Totuşi variantele (19), (20) prezintă unele particularităţi din care se pot trage anumite profituri în ceea ce priveşte programarea rezolvării sistemelor de mari dimensiuni, şi în ceea ce priveşte programarea inversării matricilor mari. De altfel numărul efectiv de înmulţiri şi împărţiri este mult mai mic pentru variantele (19), (20) ; fiind egal cu numărul respectiv din cazul variantei clasice a lui Gauss. Înainte de a enumera particularităţile amintite, să întroducem noţiunea de „ciclu" de operaţii. În cazul variantelor (19), (20), „ciclul" 1 va fi compus din operaţia 1,1 ; ciclul doi din operaţiile 0,2 ; 1,3 ; 0,4 ; ciclul 3 din operaţiile 0,5 ; 0,6 ; 1,7 ; 0,8 ; 0,9 etc.

Iată particularităţile amintite :

1°. Pentru efectuarea ciclului 1 nu este nevoie ca în memoria interioară (la maşinile de tip CIFA în memorie), să fie toate ecuaţiile (liniile matricei $\widetilde{A}^1$) introduse, ci numai prima ecuaţie (prima linie din $\widetilde{A}^1$). Tot aşa pentru efectuarea ciclului 1 şi 2 nu este nevoie decît de primele două ecuaţii (primele două rînduri din matricea $\widetilde{A}^1$ şi $\widetilde{A}^2$). În general, pentru efectuarea primelor k cicluri nu este nevoie decît de primele k ecuaţii, adică primele k linii ale matricei $\widetilde{A}$.

2°. După efectuarea primelor k cicluri, matricea transformată $\widetilde{A}^{k^2}$ are, în colţul de sus din stînga, matricea pătratică $k\times k$ care este chiar matricea unitate. Această matrice nu mai trebuie reţinută în memoria maşinii, căci poate fi subînţeleasă.

Din aceste două proprietăţi rezultă că ecuaţiile sistemului (adică liniile matricei $\widetilde{A}^1$) se pot ţine în memoria lentă, sau pe bandă perforată, introducîndu-le treptat în memoria internă pe măsura necesităţilor. Mai precis, la început se introduce prima linie din $\widetilde{A}^1$, se efectuează ciclul 1, se şterge din memorie numărul 1 ce apare pe locul lui a_{11}, se introduce a doua ecuaţie, se efectuează ciclul doi, se şterge din memorie numărul 1 de pe locul lui a_{22}, şi 0 de pe locurile lui a_{12} şi a_{21}, se introduce linia a 3-a etc. Memoria internă nu este deci nici pe departe aşa de ocupată ca în cazul variantei clasice a lui Gauss, sau a lui Jordan. La sfîrşitul ciclului k, numărul celulelor ocupate din memoria internă (afară de program) este de $nk-k^2+k$. În acest moment se introduce linia $k+1$. După introducerea ei, numărul de celule ocupate este de $nk-k^2+k+n+1 = S_k$. Numărul S_k creşte de la 0 la un maxim, ajungînd apoi la o valoare finală de n. Maximumul lui S_k are loc pentru $k = p$, dacă $n = 2p-1$ şi este :

$$S = p(p+2), \quad n = 2p-1 \tag{21}$$

şi de :

$$S = p^2 + 3p + 1, \quad n = 2p \tag{22}$$

În acelaşi timp, în cazul variantelor clasice ale lui Gauss şi Jordan numărul total de celule ale memoriei interioare, ocupate cu datele problemei, este maxim la început, apoi descreşte treptat. Acest maxim este :

$$S' = n(n+1) = \begin{cases} p(4p-2)\,; & n = 2p-1 \\ p(4p+2)\,; & N = 2p. \end{cases} \tag{23}$$

Rezultă de aici posibilitatea de a mări numărul de ecuaţii ale sistemelor liniare rezolvabile cu o maşină de calculat cu memorie internă de capacitate dată. Folosind diagramele (19), (20), s-ar putea rezolva sisteme cu un număr dublu de ecuaţii faţă de numărul corespunzător în cazul folosirii schemei clasice a lui Gauss. Astfel, dacă în prezent cu maşina CIFA 3 se pot rezolva sisteme de maximum 16 – 17 ecuaţii, după noua diagramă se putea rezolva sisteme de 32 – 34 ecuaţii. Acest număr va trebui eventual micşorat pînă la circa 30, datorită unor complicaţii de programare. Vom discuta, ulterior, asupra modului în care economia de celule de memorie interioară întrevăzută poate fi efectiv realizată printr-o programare judicioasă.

3°. O a treia particularitate a variantelor (19), (20) constă în faptul că nu toate operaţiile aritmetice descrise de (5) şi (9) trebuie efectuate, deoarece rezultatul unora dintre ele este dinainte cunoscut. Aceasta permite reducerea numărului total de înmulţiri şi împărţiri necesar pentru rezolvarea sistemului. Se găseşte printr-o numărătoare uşor de făcut (după discuţia ce va urma) că acest număr total este de :

$$N'' = \frac{n(n^2+3n-1)}{3} \tag{24}$$

adică acelaşi număr ca şi pentru variantele clasice ale lui Gauss (vezi (15)).

Să luăm prima operaţie ce se execută, care este 1,1 după (19) sau (20). După cum arată (5):

$$(5') \qquad \tilde{a}^{2}_{1j} = \frac{\tilde{a}^{1}_{1j}}{\tilde{a}^{1}_{11}}, \qquad j = 2,3,\ldots, n+1.$$

Cazul $j = 1$ a fost exclus, deoarece rezultatul $\tilde{a}^{2}_{11} = 1$ este dinainte cunoscut. Să trecem la operaţia 0,2. Ea se va executa după formula (9):

$$(9') \qquad \tilde{a}^{3}_{2j} = \tilde{a}^{2}_{2j} - \tilde{a}^{2}_{1j}\,\tilde{a}^{2}_{21}, \qquad j = 2,2,\ldots, n+1,$$

unde din nou s-a exclus cazul $j = 1$, căci rezultatul era dinainte cunoscut: $\tilde{a}^{3}_{21} = 0$. Urmează operaţia 1,3 din nou după formula (5):

$$(5''') \qquad \tilde{a}^{4}_{2j} = \frac{\tilde{a}^{3}_{2j}}{\tilde{a}^{3}_{22}}, \qquad j = 3,\ldots, n+1,$$

în care s-a exclus $j=1$ şi $j = 2$, unde rezultatele erau dinainte cunoscute: $\tilde{a}^{4}_{21} = 0$; $\tilde{a}^{4}_{22} = 1$. Operaţia 0,4 se efectuează din nou după (9):

$$(9'') \qquad \tilde{a}^{5}_{1j} = \tilde{a}^{4}_{1j} - \tilde{a}^{4}_{2j}\,\tilde{a}^{4}_{12}, \qquad j = 3,\ldots, n+1$$

căci rezultatele pentru $j = 1,2$ sînt cunoscute si anume: $\tilde{a}^{5}_{11} = 1$; $\tilde{a}^{5}_{12} = 0$. Să luăm cazul general, adică vom presupune efectuat ciclul k. Atunci urmează să se efectueze operaţia 0, k^2+1, apoi 0, k^2+2; ... ; 0, k^2+k. Aceste operaţii se vor efectua după (9):

$$(9''') \quad \tilde{a}^{s}_{k+1,j} = \tilde{a}^{s-1}_{k+1,j} - \tilde{a}^{s-1}_{s-k^2,j}\,\tilde{a}^{s-1}_{k+1,s-k^2},\ s=k^2+1,\ldots,k^2+k;\ j=k+1,\ldots,n+1.$$

Ca şi în cazurile de mai sus, cazurile $j=1,\ldots, k$ au fost excluse, căci rezultatul este dinainte cunoscut: $\tilde{a}^{s+1}_{k+1,j} = 0$. Acum urmează operaţia 1, $k^2 + k + 1$ care se efectuează din nou după (5):

$$(5''') \qquad \tilde{a}^{k^2+k+2}_{k+1,j} = \frac{\tilde{a}^{k^2+k+1}_{k+1,j}}{\tilde{a}^{k^2+k+1}_{k+1,k+1}}, \qquad j = k+2,\ldots, n+1$$

din nou rezultatele pentru $j = 1, 2, \ldots, k+1$ sînt cunoscute şi de acea nu se face calculul efectiv: $\tilde{a}^{k^2+k+2}_{k+1,j} = 0$, $j = 1, \ldots, k$, şi $\tilde{a}^{k^2+k+2}_{k+1,k+1} = 1$. Acum urmează k operaţii de tip „0" şi anume $0, k^2+k+1+p$, unde $p = 1,2,\ldots,k$. Aceste operaţii se vor efectua după formule de tip (9):

$$(9^{\mathrm{IV}}) \quad \tilde{a}^{s}_{p,j} = \tilde{a}^{s-1}_{p,j} - \tilde{a}^{s-1}_{k+1,j}\,\tilde{a}^{s-1}_{p,k+1};\ s=k^2+k+3+p\ j=k+2, k+3,\ldots,n+1$$

iar $p = 1, 2, \ldots, k$ pentru diagrama (20), şi $p = k, k-1, \ldots, 1$ pentru diagrama de tip (19). Indicele j s-a luat din nou aşa ca rezultatele dinainte cunoscute să nu se mai recalculeze. Pe baza lui (5'''), (9''') şi (9^{IV}) este uşor de a calcula numărul total de înmulţiri şi împărţiri necesare efectuării unui ciclu. Apoi prin sumare se deduce numărul total de astfel de operaţii elementare care este cel dat de (24).

7. *Dispoziţia celulelor şi a datelor.* Observăm că diagrama (20) este mai comodă pentru rezolvarea sistemelor, şi în consecinţă în cele ce urmează vom considera diagrama (20). În schimb diagrama (19) prezintă

o simetrie mai accentuată (din punct de vedere geometric operațiile se efectuează în „spirală”), și ea este foarte potrivită pentru inversarea matricelor, problemă ce o vom trata mai departe.

Pentru a valorifica economia întrevăzută, ca număr de celule ocupate în memoria rapidă a calculatoarelor electronice, trebuie precizată nu numai ordinea executării diverselor operații, care se deduce din diagramă și din formulele $(5''')$, $(9''')$ și (9^{IV}), ci și o strictă folosire a celulelor memoriei interioare, și o anumită ordine de înregistrare a datelor în memoria lentă, sau, în lipsa acesteia, pe banda perforată de introducere a datelor. La început în memoria interioară nu se introduc decît instrucțiunile programului, și anume la adresele cele mai mari, pentru a lăsa adresele de la început (1, 2, ...) libere pentru elementele matricilor transformate $\widetilde{A}^s$. Elementele matricei $\widetilde{A}^1=\widetilde{A}$ sînt înregistrate în memoria externă (sau pe bandă perforată) în ordinea următoare:
$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n+1}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n+1}, a_{21}, a_{33}, \ldots, a_{3n+1}, a_{31}, a_{32}, a_{44}, \ldots$
$\ldots, a_{n-1, n-2}, a_{nn}, a_{nn+1}, a_{n1}, \ldots, a_{nn-1}$. Aceste date vor fi introduse în tranșe de cîte $n+1$ în ordinea indicată. Introducerea fiecărei tranșe se va face la începutul fiecărui ciclu.

La începutul primei tranșe se introduc primele $n+1$ elemente $a_{11}, \ldots$ $\ldots, a_{1n+1}$, care deci ocupă celulele cu adresele $1, \ldots, n+1$. Acum începe prima operație 1,1 cu care se și epuizează primul ciclu. Se calculează $a_{12}^2, \ldots, a_{1n+1}^2$ după $(5')$ și se introduc în ordinea obținerii lor, dar nu pe fostul lor loc, ci la adresele $1,\ldots,n$. Acum se introduc următoarele $n+1$ elemente din memoria externă în cea internă la adresele $n+1,\ldots, 2n+1$. Se observă că elementele ce apar la același j în $(9')$ sînt la distanța de n adrese, în timp ce elementul cu care se înmulțesc primele n dintre elementele a_{1j}^2 pentru a se scădea din a_{2j}^2 are adresa $2n+1$. Această adresă devine liberă după efectuarea lui 0,2. După efectuarea lui 0,2, elementele a_{2j}^3 se introduc în locul elementelor a_{2j}^2. Se efectuează 1,3, rezultatele se pun la adrese neschimbate. Se efectuează 0,4 și rezultatele se înscriu cu cîte o unitate la stînga, adică a_{13}^5 la adresa 1; a_{14}^5 la adresa 2;...; a_{1n+1}^5 la adresa $n-1$. Apoi elementele $a_{23}^5, \ldots, a_{2n+1}^5$, care coincid cu mărimile corespunzătoare cu indicele superior 4, se citesc și se mută cu două căsuțe la stînga, adică la adresele $n, \ldots, 2n-2$. Acum se termină ciclul al doilea, la sfîrșitul căruia sînt ocupate celulele $1, \ldots, 2n-2$. În general după efectuarea ciclului k sînt ocupate celulele $1, \ldots, k(n-k)$; cîte $n-k$ celule pentru o linie. Se introduce apoi ecuația $k+1$, adică încă $n+1$ numere. Începe acum ciclul $k+1$, cu operații de tip $(9''')$. Rezultatele se înscriu în locul fostelor elemente. Treptat, cu fiecare din operațiile de tip „0” situate pe linia $k+1$, devine neinteresant cîte unul din numerele de la adresele $(k+1)(n-k)+$ $+1, \ldots, k(n-k)+n+1$. La sfîrșitul operațiilor de tip „0” din ciclul $k+1$, și care sînt situate pe linia $k+1$, sînt ocupate adresele $1, \ldots, (k+1)(n-k)$. Acum se efectuează operația 1, k^2+k+1, ce afectează numai elementele $a_{k+1, k+2}, \ldots, a_{k+1, n+1}$. Acestea, după ce se reobțin, se introduc la adresele lor anterioare. Se fac apoi operațiile de tip „0” de pe coloana $k+1$. Prima din ele este 0, k^2+k+2 care nu afectează decît elementele $a_{1, k+2}, \ldots, a_{1, n+1}$. După recalcularea lor, ele se reintroduc în memorie la o adresă cu un indice mai mic cu 1 decît fosta lor adresă. După recalcularea elementelor $a_{2, k+2}, \ldots, a_{2, n+1}$ (operația 0, k^2+k+3), elementele respective se reintroduc la o adresă cu 2 mai mică decît adresa lor precedentă. Se procedează apoi la fel cu toate operațiile ,,0" din ciclul k, decalajul la reintroducere crescînd cu cîte o unitate, la fiecare nouă operație "0". După terminarea operațiilor de tip ,,0" din ciclul $k+1$, se trece la reînscrierea elementelor $a_{k+1,\,k+2}, \ldots, a_{k+1,\,n+1}$ cu un decalaj cu două unități mai mare decît cel folosit la reînscrierea elementelor obținute la ultima operație de tip ,,0". Cu aceasta se încheie ciclul $k+1$, și se trece la ciclul $k+2$. Observăm că la încheierea acestui ciclu, numărul de celule ocupate din memoria interioară este de $(k+1)(n-k)$.

La sfîrșitul tuturor ciclurilor, soluția sistemului se va găsi la adresele $1, 2, \ldots, n$ și anume în ordinea lor normală.

8. *Inversarea matricilor*. Inversarea matricilor se poate face pe baza așa-numitei eliminări extinse. În acest caz matricea $\widetilde{A}^1 = \widetilde{A} = (A, E)$, adică este o matrice cu n linii și $2n$ coloane. Se pot întrebuința orice variante, or, varianta clasică Gauss, or, varianta clasică Jordan, or, una din variantele (19) sau (20). Deosebit de interesantă este varianta dată de diagrama (19), care permite inversarea matricilor așa-zicînd pe loc, adică folosind pentru aceasta numai n^2 celule ale memoriei. Dacă mașina este cu virgulă fixă, sînt necesare totuși $n(n+1)$ celule, pentru ca rezultatele intermediare și finale să fie subunitare. Ultimele n celule se folosesc pentru a păstra ordinul de mărime al coloanelor, pentru rezultate intermediare și pentru matricea inversă.

Să vedem cum arată $\widetilde{A}^s$ pentru diverși s. După primul ciclu această matrice are următoarea formă:

$$(26)\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^2 & a_{13}^2 \ldots a_{1n}^2 & a_{1n+1}^2 & 0 \ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} & 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} & 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Aici nu au mai fost notate cu indici superiori elementele care nu s-au schimbat ca valoare. Este de observat că locul lui a_{11} nu este ocupat decît de numărul 1; or) faptul că în acest loc este numărul 1, nu aduce o informație nouă. Acest fapt se poate subînțelege. De asemenea se poate subînțelege că pe linia 1 elementele sînt nule începînd cu a_{1n+2}^2; și că elementele a_{jn+1} sînt nule începînd cu $j = 2$; și, în sfîrșit, că matricea pătratică de $k-1$ linii și coloane din colțul din dreapta jos, al matricei $\widetilde{A}^2$ este matricea unitate. Ca urmare se poate scrie elementul a_{1n+1}^2 în locul lui a_{11}. Vom pune deci:

$$(27)\qquad B^1 = A$$

și:

$$(28)\quad B^2 = \begin{pmatrix} a_{1,\,n+1}^2 & a_{1,2}^2 \ldots a_{1,n}^2 \\ a_{2,1} & a_{2,\,2} \ldots a_{2,\,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,\,1} & a_{n,\,2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,\,1}^2 & b_{1,\,2}^2 & \ldots & b_{1,\,n}^2 \\ b_{2,\,1}^2 & b_{2,2}^1 & \ldots & b_{2,\,n}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n.\,1} & b_{n,\,2} & \ldots & b_{n.n} \end{pmatrix}.$$

Să vedem care este situația după executarea celui de-al doilea ciclu. Acum vom avea :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a^5_{1,3} & \dots & a^5_{1,n} & a^5_{1,n+1} & a^5_{1,n+2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a^5_{2,3} & \dots & a^5_{2,n} & a^5_{2,n+1} & a^5_{2,n+2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{A}^5,$$

unde din nou nu am pus indice superior la elementele care au rămas neschimbate. Din nou se vede că porțiunile din matricea $\widetilde{A}^5$ care nu aduc informații sînt complementare, în sensul că în matricea formată din primele n coloane, partea care nu aduce informații este matricea din stînga sus, de două linii și două coloane. Aceasta este tocmai matricea unitate. În schimb în matricea formată din ultimele n coloane din $\widetilde{A}^5$, partea care aduce informații interesante este tot în stînga sus ; și este o matrice de două linii și de două coloane. Deci și aici se pot suprapune cele două matrici de cîte n linii și coloane, obținîndu-se o singură matrice cu n linii și cu n coloane. Vom pune :

$$B^5 = \begin{pmatrix} a^5_{1,n+1} & a^5_{1,n+2} & a^5_{1,3} & a^5_{1,4} & \dots & a^5_{1,n} \\ a^5_{2,n+1} & a^5_{2,n+2} & a^5_{2,3} & a^5_{2,4} & \dots & a^5_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \dots & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Este ușor de văzut că în cazul diagramei (19), această situație este generală la orice ciclu, și chiar la orice operație. Deci procesul de transformări îl vom concepe ca proces de transformări al matricilor B^s. Formulele de transformare ale elementelor vor fi analoage cu cele date de formulele (5) și (9), cu unele mici schimbări. Astfel operația 1,1 se va executa după formulele

$$b^2_{1,j} = b^1_{1,j}/b^1_{1,1}, \qquad j = 2, \dots, n \tag{29}$$

$$b^2_{1,1} = 1/b^1_{1,1}. \tag{30}$$

Rezultatele se introduc în celule corespunzătoare indicilor de jos. Operația 0,2 se face după :

$$b^3_{2,1} = - b^2_{2,1}\ b^2_{1,1} \tag{31}$$

$$b^3_{2,j} = b^2_{2,j} - b^2_{1,j} b^2_{2,1}, \qquad j = 2, \dots, n \tag{32}$$

Din nou rezultatele se introduc pe măsura obținerii lor în celule corespunzătoare indicilor de jos. Operația 1,3 se va executa după :

$$b^4_{2,j} = b^3_{2,j}/b^3_{2,2} \qquad j=1, \dots, n ;\ j \neq 2 \tag{33}$$

$$b^4_{2,2} = 1/b^3_{2,2}. \tag{34}$$

Din nou rezultatele se introduc în celule corespunzătoare indicilor de jos. Apoi 0,4 se execută după:

$$(35) \qquad b^5_{1,j} = b^4_{1,j} - b^4_{2,j} b_{1,2}, \qquad j = 1, \ldots, n;\ j \neq 2$$

$$(36) \qquad b^5_{1,2} = - b^4_{2,2}\ b^4_{1,2},$$

iar rezultatele se introduc din nou în celule corespunzătoare indicilor de jos. După ciclul doi lucrurile se complică și vor fi nevoie de celule auxiliare (pe lîngă cele n^2 celule necesare matricei și cele n necesare normării coloanelor matricei inverse) în număr de $n-1$. Să presupunem efectuate primele k cicluri. Înainte de a începe ciclul $k+1$, trebuie eliberate celulele corespunzătoare elementelor $b^{k^2}_{k+1,1}, \ldots, b^{k^2}_{k+1,k}$, care vor fi ocupate de la prima din operațiile ciclului $k+1$ de elemente ale matricei care va deveni matricea inversă. Pentru aceasta elementele $b^{k^2}_{k+1,1}, \ldots, b^{k^2}_{k+1,k}$ trebuie citite și introduse în celule auxiliare. Ele vor fi folosite cîte unul pentru fiecare din operațiile: 0, k^2+1;..., 0, k^2+k. Este de notat că aceste mărimi nu se transformă, deci ele se citesc ulterior din celulele auxiliare pe măsura necesității. Apoi celulele auxiliare devin libere pînă la ciclul următor. Operațiile 0, p cu $p=k^2+1, \ldots, k^2+k$ se execută după formule de tip (31) respectiv (32). Pentru a obține formule unitare, în celulele în care au fost elementele $b^{k^2}_{k+1,1}$, $b^{k^2}_{k+1,2}, \ldots, b^{k^2}_{k+1,k}$, se introduce peste tot numărul 0. Aceste elemente (nule) le vom nota tot cu $b^{k^2}_{k+1,1}, \ldots, b^{k^2}_{k+1,k}$, în timp ce elementele introduse în primele k dintre cele $n-1$ celule auxiliare le vom nota cu $c^{k^2}_1$, $c^{k^2}_2, \ldots, c^{k^2}_k$. Acum operațiile 0, p, cu $p = k^2 + 1, \ldots, k^2+k$, se vor efectua după formula unică:

$$(37) \qquad b^{p+1}_{k+1,j} = b^p_{k+1,j} - c^{k^2}_s b^p_{s,j}, \qquad \begin{array}{l} p=k^2, \ldots, k^2+k-1 \\ p-s = k^2+1 \\ j = 1, \ldots n \end{array}$$

Rezultatele se introduc pe măsura obținerii lor în celule corespunzătoare indicilor de jos ai mărimilor calculate. Urmează operația $1, k^2+k+1$, ce se execută după:

$$(38) \qquad b^{k^2+k+2}_{k+1,j} = b^{k^2+k+1}_{k+1,j} / b^{k^2+k+1}_{k+1,k+1}, \qquad j = 1, \ldots, n;\ j \neq k+1$$

$$(39) \qquad b^{k^2+k+2}_{k+1,k+1} = 1 / b^{k^2+k+1}_{k+1,k+1}$$

și mărimile obținute se introduc la celule corespunzătoare indicilor de jos, ale mărimilor calculate. Operațiile 0, p cu $p = k^2 + k + 2, \ldots, (k+1)^2$ se efectuează după:

$$(40) \qquad b^{p+1}_{s,j} = b^p_{s,j} - b^p_{k+1,j}\, b^p_{s,k+1} \qquad \begin{array}{r} j = 1, \ldots, n \\ p + s = (k+1)^2 + 1,\ s = k,\ k = 1, \ldots, 1 \end{array}$$

Cu aceasta se termină ciclul $k+1$.

Cu aceeași ocazie verificăm numărul total de înmulțiri și de împărțiri care va fi n^3, dintre care n^2 împărțiri.

În practică la o mașină cu virgulă fixă vor mai trebui folosite celulele de normare, și împreună cu aceasta numărul de operații se va mări.

Cu aceasta am terminat descrierea diagramelor cu strategie prestabilită. Remarcăm că partea slabă a strategiilor prestabilite este faptul că pentru efectuarea lor este necesar şi suficient ca toţi minorii principali ai matricei iniţiale A să fie diferiţi de zero (este vorba de cazul diagramelor (13), (16), (17), (19) şi (20). În realitate s-ar putea concepe şi alte strategii prestabilite la care condiţiile de aplicabilitate ar fi ca anume minori în număr de n să fie diferiţi de zero. Asemenea diagrame ar fi însă mai dificil de programat).

9. *Strategii cu diagrama neprestabilită.* Pentru micşorarea erorilor de rotunjire se întrebuinţează trei strategii în varianta clasică a lui Gauss : alegînd ca pivot la fiecare pas cel mai mare element în modul al matricei $\widetilde{A}^p$, alegînd liniile secvenţial iar ca pivot cel mai mare element în modul de pe linia ce vine la rînd, sau alegînd coloanele secvenţial iar ca pivot cel mai mare element în modul de pe coloana ce vine la rînd. În orice caz se respectă regulile 1...5. Sînt posibile diagrame cu triunghiulaţie şi cu diagonalizare, analoage lui (13) ... (20). Ultimele două nu se pot totuşi efectua decît alegînd maximumul pe linii. În acelaşi timp programarea devine mai dificilă, mai ales dacă se caută să se folosească economia de celule. În ceea ce priveşte inversarea matricilor, sînt posibile variantele (19), (20) şi orice tip de alegere a pivoţilor ; bineînţeles cu complicaţiile de rigoare ale programului.

10. *Rezolvarea sistemelor mari, cu alegerea maximală a pivoţilor pe linie, şi cu diagonalizare.* De data aceasta liniile matricei $\widetilde{A}^1$ se introduc în memoria lentă sau pe bandă la rînd, iar elementele fiecărei linii tot la rînd. Pe lîngă celulele din memoria interioară ocupate cu date intermediare ale problemei (ca la varianta cu diagrama (20)), mai sînt necesare încă n celule în care se introduc numere întregi $s_1, \ldots, s_n$; $1 \leqslant s_i \leqslant n$; $s_j \neq s_i$ pentru $j \neq i$, numere ce reprezintă locul de pe fiecare linie ocupat de pivot. În acelaşi timp ele reprezintă şi ordinea de ieşire a necunoscutelor la sfîrşitul calculului.

La începutul ciclului 1 se introduce prima linie a matricei $\widetilde{A}^1 = \widetilde{A}$ din memoria lentă (sau de pe bandă) la adresele $2, \ldots, n+2$. Apoi se alege elementul cu modulul maxim între numerele cu adresele $2, \ldots, n+2$. Fie acesta a_{1,s_1}. Numărul s_1 (număr întreg) se reţine în prima dintre cele n celule auxiliare. Apoi numărul a_{1,s_1}, se introduce la adresa 1, elementele $a_{1,i}$ cu $j < s_1$ se lasă la adresele lor, iar cele cu $j > s_1$ se mută la celule cu o adresă mai mică cu o unitate decît înainte. Acum situaţia este aceeaşi ca în cazul diagramei (20) după introducerea primei linii din $\widetilde{A}^1$, şi înainte de efectuarea primului ciclu. Se efectuează primul ciclu ca în acel caz, inclusiv operaţia de mutare a elementelor cu o celulă la stînga. Acum se introduce cel de-al doilea grup de date, adică linia a doua a matricei $\widetilde{A}^1$, la adresele $n+1, \ldots, 2n+1$ în ordinea lor dar sărindu-se elementul a_{2,s_1} care este introdus la adresa $2n+1$. Apoi se execută operaţia 0,2 din ciclul al doilea. Dintre elementele de la adresele $n+1, \ldots, 2n-1$ se alege cel mai mare în modul, fie a^3_{2,s_2} acesta. Numărul s_2 se reţine în cea de-a doua dintre celulele speciale ; iar a^3_{2,s_2} este mutat la adresa $n+1$, celelalte mărimi $a^3_{2,j}$, $j = 2, \ldots, n+1$; $j = s_1, s_2$ sînt trecute în ordinea lor la adresele $n+2, \ldots, 2n$. Acum urmează operaţiile 1,3 ; 0,4 care se execută exact ca şi la diagrama (20). Cu aceasta se termină ciclul al doilea. Urmează ciclul 3, înainte de care se introduce linia 3 din $\widetilde{A}^1$, la adresele $2n-1, \dots, 3n-1$, şi anume în ordinea lor normală, dar sărind peste a_{3,s_1}, a_{3,s_2}, care se introduc la adresele $3n-2$, $3n-1$. Urmează operaţiile 0,5 ; 0,6 care se efectuează exact ca la diagrama (20). Apoi se face alegerea celui mai mare dintre elementele $a^7_{3,j}$, cu $j \neq s_1, s_2, n+1$, fie a^7_{3,s_3}. Acesta se aduce în locul lui $a^7_{3,3}$ — celelalte elemente $a^7_{3,j}$ fiind înşirate în ordinea lor normală după a^7_{3,s_3} (bineînţeles $j = s_1, s_2, s_3$). Apoi se efectuează operaţiile 1,7 ; 0,8 ; 0,9 exact ca la diagrama (20). Se înţelege acum şi restul procesului şi deci se poate observa că programul nu este mult mai complicat decît în cazul alegerii secvenţiale a pivoţilor.

11. *Inversarea matricilor mari cu alegerea nesecvenţială a pivoţilor* (*diagrama* (19) *sau* (20) *modificată*). Se va pleca tot de la matricea $\widetilde{A}^1 = \widetilde{A}$, dar, situîndu-ne în cazul alegerii secvenţiale a liniilor, pivotul fiind luat cel mai mare element în modul de pe linia respectivă, vom începe prin alegerea maximumului modulelor elementelor de pe prima linie. Fie acesta a_{1,s_1}. Se va reţine s_1 într-o celulă auxiliară şi se vor schimba elementele coloanei s_1 cu elementele coloanei 1. Această operaţie este echivalentă cu înmulţirea matricei A la dreapta cu matricea de transpoziţie T_{1,s_1} :

$$(41)\qquad T_{ij}=\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \multicolumn{8}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\ \multicolumn{8}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \multicolumn{8}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{linia } i\\ \\ \text{linia } j\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{cccccccc} & & & i & & j & & \end{array} & \end{array}$$

Deci după această operaţie în locul matricei $A^1 = A$ se va găsi matricea

$$(42)\qquad B^1 = A\,T_{1,s_1} = B.$$

Avem evident :

$$(43)\qquad B^{-1} = T^{-1}_{1,s_1} A^{-1}$$

$$(44)\qquad T^2_{ij} = E$$

$$(45)\qquad T^{-1}_{ij} = T_{ij}$$

şi deci

$$(46)\qquad A^{-1} = T_{1,s_1} B^{-1}.$$

Acum vom efectua primul ciclu exact după (19) sau (20). După terminarea ciclului 1, se alege din nou cel mai mare element în modul de pe linia a doua a matricei transformate, excluzînd însă din această operaţie primul element. Fie s_2 coloana pe care se găseşte acest element. Din nou vom reţine numărul s_2, şi apoi vom schimba coloana 2 cu coloana s_2. Se obţine astfel o matrice în locul matricei A, căreia i se aplică operaţiile elementare ale ciclului 2 din diagrama (19) sau (20). Şi aşa mai departe. La sfîrşitul procesului (adică al celor n cicluri) se obţine în locul matricei A o matrice pe care o notăm cu X. Această matrice este inversa matricei Y. Iar matricea Y este o matrice obţinută din A printr-o permutare a coloanelor :

$$Y = A\,T_{1,s_1}\,T_{2,s_2}\,\ldots\,T_{n,s_n}. \tag{47}$$

Aşa că :

$$X = Y^{-1} = T^{-1}_{n,s_n}\,T^{-1}_{n-1,s_{n-1}}\,\ldots\,T^{-1}_{1,s_1}A^{-1} \tag{48}$$

şi

$$A^{-1} = T_{1,s_1}\,T_{2,s_2}\ldots T_{n,s_n}X. \tag{49}$$

Este de observat că produsul de matrici din (49) nu trebuie efectuat. Este suficient de urmărit schimbările de linii necesare pentru a obţine din matricea x matricea A^{-1}. Acest lucru se face cu uşurinţă prin teoria permutărilor şi a transpoziţiilor, asupra căruia nu mai insistăm.

În încheiere anunţăm că vor apare unul sau două articole cu programele efective ale variantelor studiate mai sus.

Primită la redacţie la 5 iulie 1966

Facultatea de matematică şi mecanică a Universităţii
din Bucureşti, str. Academiei nr. 14.

BIBLIOGRAFIE

1. E.T. Goodwin, *Modern computing methods.* New York, 1960.
2. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры,* Москва—Ленинград, 1963.

[illegible]

[illegible]

(17) [illegible]

[illegible]

(18) [illegible]

[illegible]

Intrată la redacţie la [illegible] iulie 1958

[illegible]

BIBLIOGRAFIE

1. [illegible], Modern computing methods, New York, [illegible].
2. [illegible]

EXTENSIUNI ALE POLINOAMELOR AREOLARE

DE

ILEANA TOMA

Nota este consacrată extinderii reprezentării polinomului areolar în cazul unei ecuații iterate de tip Beltrami și generalizării ei pe algebre Banach.

În teza sa [1] și în [2], acad. prof. N. Teodorescu a introdus polinomul areolar de ordinul n cu ajutorul derivatei areolare și a funcțiilor α-olomorfe, stabilind reprezentarea :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \bar{z}^k \Phi_k(z), \tag{1}$$

unde Φ_k sînt funcții monogene în domeniul considerat.

Pe de altă parte, acad. prof. M. Nicolescu, în lucrările [3] și [4] stabilește reprezentări pentru funcțiile poliarmonice cu ajutorul funcțiilor armonice și al funcției Green.

În Nota precedentă [5] am arătat că reprezentarea (1) se menține pentru soluțiile iteratei ecuației

$$\partial_{\bar{z}} w - A(z) w = 0. \tag{1}$$

În lucrarea [6], D. Pascali stabilește o reprezentare de tip polinomial pentru funcțiile analitice generalizate de ordinul n.

Lucrarea de față își propune stabilirea unei reprezentări a soluțiilor generalizate ale iteratei ecuației

$$Lw \equiv \partial_{\bar{z}} w - q(z)\, \partial_z w + A(z) w = 0 \tag{2}$$

și extinderii acestei reprezentări în cadrul axiomatizării lui Min Tzu Hoa [7].

1. Fie G un domeniu al planului complex, care conține originea, mărginit și cu frontiera formată dintr-un număr finit de curbe simple, rectificabile și închise. Să considerăm ecuația (2), în derivate generalizate. Soluția acestei ecuații este dată de formula :

$$w(z) = \Phi(W(z))\, e^{T_G\, \omega(z)},$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 387–392, BUCUREȘTI, 1967

unde Φ este o funcţie olomorfă în domeniul $W(G)$, $W(z)$ este omeomorfismul fundamental al ecuaţiei lui Beltrami :

$$\partial_{\bar{z}} w - q(z)\, \partial_z w = 0$$

iar T_G este operatorul lui Pompeiu

$$T_G f(z) \equiv -\frac{1}{\Pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Prin $\omega(z)$ am notat soluţia ecuaţiei integrale

$$\omega - q(z)\, \Pi_G\, \omega + A(z) = 0,$$

unde Π_G este operatorul

$$\Pi_G f(z) \equiv -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Demonstrarea acestor fapte se află în lucrarea [8] a lui I.N. Vekua.

Vom mai considera şi ecuaţia iterată

$$L^{n+1} w = 0 \tag{3}$$

în legătură cu care vom demonstra următoarea teoremă :

Teorema 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie $w(z)$ să fie soluţie a ecuaţiei* (3) *este ca $w(z)$ să se reprezinte sub forma unui polinom de ordinul n în $\bar{z}$, cu coeficienţi soluţii ale ecuaţiei* (2).

Demonstraţie. Într-adevăr, fie

$$w(z) = \sum_{k=0}^{n} \bar{z}^k w_k(z)$$

unde $Lw_k = 0$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n$. Să calculăm $Lw_j \bar{z}^j$:

$$\begin{aligned} Lw_j \bar{z}^j &= \partial_{\bar{z}}(w_j \bar{z}^j) - q(z)\, \partial_z (w_j \bar{z}^j) + A w_j \bar{z}^j = \\ &= j w_j \bar{z}^{j-1} + \bar{z}^j \partial_{\bar{z}} w_j - q(z)\, \bar{z}^j \partial_z w_j + A w_j \bar{z}^j = \\ &= j w_j \bar{z}^{j-1} + \bar{z}^j L w_j = j w_j \bar{z}^{j-1}. \end{aligned}$$

Repetînd acest calcul, ajungem la concluzia :

$$L^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} w_k \bar{z}^k\right) = L^n (Lw_0 + Lw_1 \bar{z} + \ldots + Lw_n \bar{z}^n) = \ldots = n!\, Lw_n = 0.$$

Pentru demonstrarea reciprocei vom folosi procedeul de inducţie completă relativ la n. Pentru $n = 0$, rezultatul este banal. Presupunem afirmaţia adevărată pentru n şi s-o demonstrăm pentru $n+1$. Într-adevăr, $L^{n+1} w = 0$ implică

$$L^n w = w_n, \tag{4}$$

unde $Lw_n = 0$. Soluţia generală a ecuaţiei (4) este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene. Prin raționamentul de inducție completă, soluția generală a ecuației omogene este

$$w'(z) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k \bar{z}^k,$$

unde $Lw_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Observăm acum că o soluție particulară a ecuației (4) este

$$\frac{1}{n!} w_n \bar{z}^n$$

cu $Lw_n = 0$. Într-adevăr,

$$L^n\left(\frac{w_n}{n!}\bar{z}^n\right) = L^{n-1} n\bar{z}^{n-1}\frac{w_n}{n!} = \ldots = w_n.$$

Cum înmulțirea cu o constantă nu ne scoate din clasa soluțiilor ecuației (1), renotăm cu w_n expresia $\frac{w_n}{n!}$ și rezultă că soluția ecuației (4) se poate pune sub forma:

$$w(z) = \sum_{k=0}^{n} w_k \bar{z}^k,$$

unde $Lw_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Această teoremă este valabilă și în condițiile mai generale ale axiomatizării lui Min Tzu Hoa [7].

TEOREMA 2. *Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach, comutativă și cu element unitate e. Fie D un operator liniar, definit pe $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ și cu valori în $\mathcal{A}$, care are următoarele proprietăți:*

a) *există $d \in \mathcal{D}$ astfel încît $Dd = e$;*

b) *oricare ar fi f, g din $\mathcal{D}$, $D(fg) = fDg + gDf$.*

Atunci, dacă $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este un operator aditiv, cu proprietatea $F(0) = 0$, satisfăcînd în plus condiția:

c) *$(D + F)^{j-1}(F(d^j w) - d^j Fw) = 0$ pentru orice $j = 1,2, \ldots, n$ și orice $w \in (D + F)^{-1}(0)$, soluția ecuației iterate*

$$(D + F)^{n+1} w = 0 \tag{5}$$

este un polinom de ordinul n în d, cu coeficienți soluții ale ecuației

$$Lw \equiv (D + F)\, w = 0. \tag{6}$$

dacă acestea există. Reciproc, orice polinom de această formă este soluție a ecuației (5).

Demonstrație. A doua parte a teoremei este imediată. Într-adevăr, fie

$$w = \sum_{k=0}^{n} w_k d^k$$

unde $Lw_k = 0$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n$. Atunci

$$\begin{aligned} L^{n+1}w &= L^n(Lw_0 + Lw_1 d + \ldots . + Lw_n d^n) = L^n((D+F)(w_1 d) + \\ &+ \ldots + Lw_n d^n) = L^n((w_1 Dd + Fw_1 d + dDw_1) + \\ &+ \ldots + Lw_n d^n) = \ldots . = n!\, Lw_n = 0. \end{aligned}$$

Pentru prima parte, pentru $n = 0$, rezultatul este evident. Să-l presupunem adevărat pentru n pași și să-l demonstrăm pentru $n+1$. Ecuația (5) este echivalentă cu

$$(D+F)^n = w_n \tag{7}$$

unde $Lw_n = 0$. Conform ipotezei de inducție, soluția ecuației omogene

$$(D+F)\, w^n = 0$$

este un polinom de ordinul $n-1$ în d, cu coeficienți w_j soluții ale ecuației (6). Se vede acum că o soluție particulară a ecuației (7) este $\dfrac{w_n}{n!} d^n$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} (D+F)^n\left(\frac{w_n}{n!} d^n\right) &= (D+F)^{n-1}\left(\frac{1}{n!} Dw_n d^n + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} w_n + F\left(\frac{w_n}{n!} d^n\right)\right) = \\ &= (D+F)^{n-1}\left(\frac{1}{n!} d^n (D+F)\, w_n + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} w^n + F\left(\frac{w_n}{n!} d^n\right) - d^n F w_n\right) = \\ &= (D+F)^{n-2}\left(\frac{1}{(n-2)!} d^{n-2} w_n + F\left(\frac{w_n}{(n-1)!} d^{n-1}\right) - d^{n-1} F w_n\right) = \ldots = \\ &= (D+F)(dw_n) = w_n . \end{aligned}$$

Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

Aplicînd-o acum în diferite cazuri particulare, obținem unele rezultate stabilite anterior.

I. Dacă $\mathcal{D}$ este mulțimea funcțiilor de o variabilă reală admițînd derivată de ordinul I într-un domeniu G al dreptei reale, D derivata obișnuită, iar $F \equiv 0$, soluția ecuației $y^{(n)} = 0$ este polinomul de gradul $n-1$ în x, cu coeficienți constante reale.

II. Dacă $\mathcal{D}$ este mulțimea funcțiilor ce admit derivate areolare de ordinul I după $\bar{z}$ într-un domeniu G al planului complex $D \equiv \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ și $F \equiv 0$, obținem polinomul areolar ca soluție a ecuației iterate

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial \bar{z}^{n+1}} = 0.$$

III. Dacă $\mathcal{D}$ este aceeași ca în exemplul precedent, $D \equiv \partial_{\bar{z}}$, iar $Fw \equiv -Aw$, obținem polinoamele A-areolare.

IV. În fine, teorema 1 se obţine din teorema 2 dacă $\mathcal{D}$ este mulţimea funcţiilor ce admit derivate generalizate după z şi $\overline{z}$, $Dw \equiv \partial_{\overline{z}} w - q(z)\partial_z w$, iar $Fw \equiv Aw$. Se vede că $\overline{z}$ este soluţie a ecuaţiei

$$\partial_{\overline{z}} w - q(z)\partial_z w = 1. \tag{8}$$

Deci cu ajutorul teoremei 2 am obţinut un rezultat în plus faţă de teorema 1, anume că soluţia ecuaţiei (3) se exprimă ca polinom de ordinul n în *orice* soluţie a ecuaţiei (8), nu numai în $\overline{z}$.

Condiţia c) impusă operatorului F este esenţială pentru reprezentarea polinomială ce intervine în teorema 2. Acest fapt este subliniat de următoarea :

PROPOZIŢIE. *În condiţiile* a) şi b) *ale teoremei* 2, *dacă orice soluţie a ecuaţiei iterate* (5) *admite reprezentarea polinomială*

$$w = \sum_{j=0}^{n} w_j d^j, \tag{9}$$

atunci operatorul aditiv F pentru care $F(0) = 0$, satisface condiţia

$$(D + F)^j (F(d^j w) - d^j Fw) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{10}$$

pentru orice $w \in (D+F)^{-1}(0)$.

Demonstraţie. În ipotezele propoziţiei, pentru un j arbitrar cuprins între 1 şi n, polinomul $d^j w$, unde w este soluţie a ecuaţiei (6), satisface ecuaţia :

$$(D+F)^{j+1}(d^j w) = 0,$$

sau

$$(D+F)^j (j d^{j-1} w + d^j Dw + F(d^j w)) = 0.$$

Adunînd şi scăzînd $d^j Fw$, obţinem tocmai condiţia (10).

Cu ajutorul acestei propoziţii putem stabili pentru care dintre operatorii de tip $(D + F)$ este valabilă reprezentarea polinomială (9).

S-o aplicăm de exemplu iteratei ecuaţiei :

$$(D + F) w \equiv \partial_{\overline{z}} w + B\overline{w}, \qquad B \not\equiv 0 \tag{11}$$

În acest caz, $D \equiv \partial_{\overline{z}}$, iar $Fw \equiv B\overline{w}$. Pentru îndeplinirea condiţiei trebuie ca

$$(D + F)^j ((\overline{z}^j - z^j) B\overline{w}) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n \tag{12}$$

Să presupunem că expresia $(\overline{z} - z) B\overline{w}$ satisface ecuaţia (11). Atunci iterata a treia a ecuaţiei (11) admite ca soluţie expresia $(\overline{z}^3 - z^3) B\overline{w}$ dacă şi numai dacă B satisface ecuaţia :

$$2B\overline{B} + (\overline{z} - z)\partial_{\overline{z}}(B\overline{B}) = 0. \tag{13}$$

Or, conform celor arătate de acad. prof. N. Teodorescu în [1], soluţia acestei ecuaţii este dată de formula

$$|B| = -\frac{\Phi(z)}{\overline{z} - z}, \tag{14}$$

unde $\Phi(z)$ trebuie să fie olomorfă în domeniul considerat G.

Punînd condiţia ca membrul drept al egalităţii (14) să fie real şi pozitiv, rezultă $\Phi \equiv 0$.

În concluzie, soluţia iteratei ecuaţiei (11) nu se poate reprezenta polinomial în $\overline{z}$ decît dacă $B \equiv 0$, şi în acest caz se obţine chiar polinomul areolar.

Primită la redacţie la 14 iunie 1966

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. N. TEODORESCU, *La dérivée aréolaire et ses applications dans la physique mathématique* (Teză Gauthier-Villars, Paris 1931.
2. N. TEODORESCU, *La dérivée aréolaire*. Bucarest, 1936.
3. M. NICOLESCU, *Les fonctions polyharmoniques* — Herman, — Paris, 1936.
4. M. NICOLESCU, *Unele proprietăţi de descompunere ale funcţiilor de mai multe variabile şi în particular ale funcţiilor poliarmonice*. Rev. Univ. C.I. Parhon şi a Politehnicii Bucureşti, *4*–*5*, 53–63 (1954).
5. I. CHRISTU, *Derivata A — areolară* St. cerc. mat., **17**, 9, 1449–1456 (1965).
6. D. PASCALI, *Funcţii analitice generalizate de ordinul n*. St. cerc. mat., **17**, *9*, 1385–1390 (1965).
7. MIN TZU HOA, Scientia Sinica, **XII**, *9*, 1269–1283 (1963).
8. I.N. VEKUA, *Обобщенные аналитические функции*, Moscova, 1959.

ASUPRA UNOR CATEGORII DE MODULE

DE

NICOLAE RADU

Se consideră $u : A \to B$ un omomorfism de inele comutative cu element unitate, cu ajutorul căruia se pun în evidență subcategorii pline ale categoriei A-modulelor. Se demonstrează proprietăți ale acestor categorii și echivalența unora dintre ele în anumite condiții asupra lui u și B. Rezultatele generalizează pe cele din [1], unde A se consideră domeniu de integritate, iar B corpul său de fracții.

1. DEFINIȚII ȘI PROPRIETĂȚI GENERALE

(1.1). Fie A un inel comutativ cu element unitate, B o A-algebră comutativă, $u : A \to B$ omomorfismul structural. Notăm cu $B^* = B/\mathrm{Im}u$ iar dacă M este un A modul, notăm

$$t(M) = \mathrm{Ker}(u \otimes 1_M) \tag{1.1.1}$$

Notăm cu **T** subcategoria plină a categoriei A-modulelor formată din A-modulele M cu proprietatea că $B \otimes_A M = 0$.

Cu $\mathbf{T}_f$ notăm subcategoria plină a celor A-module M pentru care $t(M) = 0$, iar cu **D** subcategoria plină a categoriei A-modulelor formată din A-modulele M pentru care $u \otimes 1_M : M \to B \otimes_A M$ este aplicație sujectivă.

Este clar că un A-modul M care se află în același timp în categoriile $\mathbf{T}_f$ și **D**, are în mod natural o structură unică de B-modul care prelungește structura sa de A-modul.

Dacă B este A-modul plat, iar M este un A-modul astfel ca Ann $M \supset t(A)$, atunci din șirul exact

$$0 \to A/t(A) \to B \to B^* \to 0$$

rezultă că

$$t(M) \approx \mathrm{Tor}_1^A (B^*, M). \tag{1.1.2}$$

ST. CERC. MAT., TOM 19, NR. 3, P. 393-402, BUCUREȘTI, 1967

În particular, M se află în T_f dacă și numai dacă $\mathrm{Tor}_1^A(B^*, M) = 0$. (Aici s-a notat cu $\mathrm{Ann}M$ idealul lui A format din elementele x cu proprietatea $xM = 0$).

LEMĂ. (1.2). *Fie M un A-modul; considerăm următoarele afirmații*

(i) *M este în $\mathbf{T}$*;

(ii) $t(M) = M$;

(iii) $\mathrm{Hom}_A(M, B) = 0$.

a) *Există implicațiile* (i) $\Rightarrow$ (ii), (i) $\Rightarrow$ (iii).

b) *Dacă B este corp, atunci* (iii) $\Rightarrow$ (i).

c) *Dacă u este epimorfism în categoria inelelor unitare comutative* (ceea ce vom spune pe scurt epimorfism de inele) *iar B este A-modul plat, atunci* (ii) $\Rightarrow$ (i).

d) *Dacă B este A-modul plat iar* $\mathrm{Ann}M \supseteq t(A)$, *atunci (ii) este echivalentă cu (iv)*

$$\mathrm{Tor}_1^A(B^*, M) \approx M.$$

În particular, dacă B este un inel de fracții ale lui A iar $u : A \to B$ omomorfismul canonic, (i) *și* (ii) *sînt echivalente. Dacă A este domeniu de integritate iar B corpul său de fracții, $u : A \to B$ fiind omomorfismul canonic,* (i), (ii), (iii) *și* (iv) *sînt echivalente.*

Demonstrație. a) și b) rezultă imediat. Pentru a demonstra c) observăm că din faptul că u este epimorfism de inele, rezultă că pentru orice B-modul N, omomorfismul canonic $u \otimes 1 : A \otimes_A N \to B \otimes_A N$ este izomorfism. Aici și în cele de urmează un B-modul va fi considerat ca A-modul prin intermediul lui u.

Considerăm atunci șirul exact

$$0 \to t(M) \to M \to B \otimes_A M.$$

Deoarece B este A-modul plat, rezultă atunci șirul exact

$$0 \to B \otimes_A t(M) \to B \otimes_A M \to B \otimes_A M$$

De aici obținem $B \otimes_A t(M) = 0$, în particular pentru $t(M) = M$ se obține afirmația din c).

d) rezultă din (1.1.2).

(1.3) Pentru un A-modul M definim omomorfismul canonic de A-module:

$$(1.3.1) \qquad \varphi_M : \mathrm{Hom}_A(B, M) \to M$$

prin $\varphi_M(f) = f(1)$, pentru $f \in \mathrm{Hom}_A(B, M)$. Fie

$$(1.3.2) \qquad h(M) = \mathrm{Im}\varphi_M.$$

Notăm cu $\mathbf{H}_r$ subcategoria plină a categoriei A-modulelor ale cărei obiecte sînt A-modulele cu proprietatea $h(M) = 0$ iar cu $\mathbf{H}_d$ subcategoria plină a categoriei A-modulelor cu obiectele acele A-module pentru care $h(M) = M$.

LEMĂ. (1.4). *Pentru un A-modul M, următoarele afirmații sînt echivalente*:

(i) *M se află în $\mathbf{H}_r$*;

(ii) $\mathrm{Hom}_A(B, M) = 0$;

(iii) $\mathrm{Hom}_A(N, M) = 0$ *pentru orice B-modul N.*

Demonstrația este imediată.

LEMĂ (1.5). *Pentru un A-modul M considerăm următoarele afirmații*

(i) *M este în* $\mathbf{H}_d$;

(ii) *există un B-modul N și un epimorfism de A-module*

$$N \to M.$$

(iii) $\mathrm{Hom}_A\ (A/t(A),\ M) \xrightarrow{\sim} M$.

Există aplicațiile (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Demonstrația este imediată.

(1.6). Notăm cu $\mathbf{C}$ subcategoria plină a categoriei A-modulelor formată din acele A-module M care sînt în $\mathbf{H}_r$ și $\mathrm{Ext}^1_A\ (B,\ M) = 0$. Din (1.4) rezultă că un A-modul M este în $\mathbf{C}$ dacă și numai dacă $\mathrm{Ext}^i_A\ (B,\ M) = 0$ pentru $i = 0{,}1$.

Notăm cu $\mathbf{C}_f$ subcategoria plină a categoriei A-modulelor ale cărei obiecte sînt A-modulele M cu proprietatea că $\mathrm{Ext}^i_A\ (B,\ M) = 0$ pentru orice $i \in \mathrm{N}$.

LEMĂ. (1.7). *Un A-modul M este în $\mathbf{C}$ dacă și numai dacă pentru orice B-modul N,* $\mathrm{Ext}^i_A\ (N,\ M) = 0$ *pentru* $i = 0{,}1$.

Demonstrație. Suficiența condiției este evidentă. Pentru a devodi necesitatea se observă mai întîi că $\mathrm{Ext}^i_A\ (N,\ M) = 0$ pentru $i = 0{,}1$ cînd N este B-modul liber, apoi se aplică functorul $\mathrm{Ext}^i_A\ (?\ M)$ unui șir exact de forma

$$0 \to E \to F \to N \to 0$$

în care E și F sînt B-module iar F este B-modulul liber.

LEMĂ. (1.8). *Fie M un A-modul. Cu notațiile precedente există șirurile exacte* :

$$0 \to M/t(M) \to B \otimes_A M \to B^* \otimes_A M \to 0 \tag{1.8.1}$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(B^*,\ M) \to \mathrm{Hom}_A(B,\ M) \to h(M) \to 0. \tag{1.8.2}$$

Dacă $\mathrm{Ann}\ M \supseteq t(A)$, *atunci există șirul exact la stînga*

$$0 \to M/h(M) \to \mathrm{Ext}^1_A\,(B^*,\ M) \to \mathrm{Ext}^1_A(B,\ M) \to 0 \tag{1.8.3}$$

iar dacă $t(A) = 0$, *adică u este monomorfism de inele, atunci acest șir este exact.*

2. PROPRIETĂȚI ALE CATEGORIEI C

LEMĂ. (2.1). *Fie*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \tag{2.1.1}$$

un șir exact de A-module.

a) *Dacă M' și M'' sînt în* $\mathbf{C}$, *atunci M este în* $\mathbf{C}$.

b) *Dacă M este în* $\mathbf{C}$, *atunci M' este în $\mathbf{C}$ dacă și numai dacă M'' este în* $\mathbf{H}_r$.

c) *Dacă M este un A-modul din* $\mathbf{C}$, *iar M' este în* $\mathbf{C}_f$, *atunci M'' este în* $\mathbf{C}$.

Demonstrație. Din șirul exact (2.1.1) obținem șirul exact

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(B,\ M') \to \mathrm{Hom}_A(B,\ M) \to \mathrm{Hom}_A(B,\ M'') \to \mathrm{Ext}^1_A\,(B,\ M') \to \ldots$$

din care se deduc imediat afirmațiile lemei.

Din această lemă și din faptul că functorii $\mathrm{Ext}_A^i\,(B, ?)$ $i \in \mathbf{N}$ permută cu produsele directe, rezultă următoarea teoremă:

TEOREMĂ. (2.2). *O limită proiectivă (în categoria A-modulelor) a unor module din* **C** *este în* **C**, *deci* **C** *posedă limite proiective.*

LEMĂ. (2.3). *Fie M și N două A-module; dacă M este în* **T** *sau N este în* $\mathbf{H}_r$, *atunci* $\mathrm{Hom}_A\,(M, N)$ *este în* $\mathbf{H}_r$.

Rezultă din izomorfismele canonice functoriale:

$$\mathrm{Hom}_A(B, \mathrm{Hom}_A(M, N)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(B\otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(B, M)).$$

LEMĂ (2.4). *Presupunem că B este A-modul plat, M un A-modul din* **T** *iar Q un A-modul injectiv, atunci* $\mathrm{Hom}_A\,(M, Q)$ *este în* $\mathbf{C}_f$.

Demonstrație. În condițiile lemei există izomorfismele canonice functoriale ([2], Cap. IV, § 5) pentru $n \in \mathbf{N}$:

$$\mathrm{Ext}_A^n\,(B, \mathrm{Hom}_A\,(M, Q) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A\,(\mathrm{Tor}_n^A\,(B, M), Q).$$

Deoarece $\mathrm{Tor}_n^A\,(B, M) = 0$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ (pentru $n=0$, fiindcă M este în **T**, iar pentru $n \geqslant 1$ deoarece B este A-modul plat), obținem afirmația lemei.

TEOREMĂ. (2.5). *Presupunem că B este A-modul plat și fie M și N două A-module*

(i) *Dacă M este în* **T** *sau N este în* **C**, *atunci* $\mathrm{Hom}_A\,(M, N)$ *este în* **C**.

(ii) *Dacă M este în* **T** *iar* $\mathrm{Hom}_A\,(M, N)=0$, *atunci* $\mathrm{Ext}_A^1\,(M, N)$ *este în* **C**.

Demonstrație. Considerăm șirul exact de A-module

$$0 \to N \to Q \to P \to 0$$

în care Q este A-modul injectiv. Din acest șir exact se obține șirul exact

$$(2.5.1) \quad 0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, Q) \to \mathrm{Hom}_A(M, P) \to \mathrm{Ext}_A^1(M, N) \to 0.$$

Dacă M este în **T**, din (2.3) rezultă că primele trei A-module din șirul de mai sus sînt în $\mathbf{H}_f$. Mai mult, din (2.4) rezultă că $\mathrm{Hom}_A\,(M, Q)$ este în $\mathbf{C}_f$ deci din (2.1) rezultă că $\mathrm{Hom}_A\,(M,N)$ este în **C**.

Dacă $\mathrm{Hom}_A\,(M, N) = 0$, cum $\mathrm{Hom}_A\,(M, P)$ este în **C**, rezultă că $\mathrm{Ext}_A^1\,(M, N)$ este în **C**, (2.1).

Presupunem acum că N este în **C**. Fie atunci

$$0 \to E \to F \to M \to 0$$

un șir exact de A-module în care F este liber. Deducem atunci șirul exact:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A\,(M, N) \to \mathrm{Hom}_A\,(F, N) \to \mathrm{Hom}_A\,(E, M).$$

Evident, $\mathrm{Hom}_A\,(F, N)$ este în **C** iar Hom (M, N) și $\mathrm{Hom}_A\,(E, M)$ sînt în $\mathbf{H}_r$ (2.3), atunci din (2.1) deducem că $\mathrm{Hom}_A\,(M, N)$ este în **C**.

LEMĂ. (2.6). *Dacă M este un A-modul din* **T** *iar N este un A-modul din* $\mathbf{T}_f$, *rezultă* $\mathrm{Hom}_A\,(M, N) = 0$.

Demonstrație. Deoarece prin ipoteză aplicația canonică $N \to B\otimes_A N$ este injectivă, rezultă șirul exact

$$0 \to \mathrm{Hom}_A\,(M, N) \to \mathrm{Hom}_A\,(M, B\otimes_A N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B\,(B\otimes_A M,\ B\otimes_A N) = 0.$$

COROLAR. (2.7). *Presupunem că B este A-modul plat și fie M și N două A-module. Dacă una din următoarele condiții este îndeplinită:*

(i) *M este în* $\mathbf{T}$ *și* $\mathbf{H}_d$ *iar N este în* $\mathbf{H}_r$;

(ii) *M este în* $\mathbf{T}$ *iar B este în* $\mathbf{T}_f$,

atunci $\mathrm{Ext}^1_A(B^*, M)$ *este în* $\mathbf{C}$.

Rezultă din (2.5) și (2.6).

COROLAR. (2.8). *Presupunem că $u : A \to B$ este epimorfism de inele, că B este A-modul plat și fie M din* $\mathbf{H}$ *sau* $\mathbf{T}$; *atunci* $\mathrm{Ext}^1_A(B^*, M)$ *este în* $\mathbf{C}$.

În adevăr, în aceste condiții B^* este în T și afirmația rezultă din (2.7).

COROLAR. (2.9). *Presupunem că $u : A \to B$ este bimorfism în categoria inelelor și că B este A-modul plat. Dacă M este un A-modul din* $\mathbf{H}_r$, *atunci M este în* $\mathbf{C}$ *dacă și numai dacă omomorfismul canonic* $M \to \mathrm{Ext}^1_A(B^*, M)$ *este izomorfism.*

Demonstrație. Necesitatea condiției rezultă din șirul exact (1.8.3) datorită faptului că $\mathrm{Ext}^1_A(B, M)$ este B-modul și utilizînd (2.1). Suficiența rezultă din (2.8).

TEOREMĂ. (2.10) *Fie diagrama de A-module*

$$\begin{tikzcd} & M' \\ M \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\ & M'' \end{tikzcd}$$

în care $\mathrm{Ker}\,\alpha$ *este în* $\mathbf{H}_d$, *iar* $\mathrm{Coker}\,\alpha$ *este B-modul.*

(i) *Dacă M'' este în* $\mathbf{H}_r$, *atunci există cel mult un A-omomorfism* $\gamma : M' \to M''$ *astfel ca* $\gamma\alpha = \beta$.

(ii) *Dacă M'' este în* $\mathbf{C}$, *atunci există un astfel de γ și numai unul singur.*

Demonstrație. Dacă M'' este în $\mathbf{H}_r$ și $\mathrm{Ker}\,\alpha$ este în $\mathbf{H}_d$ rezultă că $\mathrm{Ker}\,\alpha \sqsubseteq \mathrm{Ker}\,\beta$, deci eventual factorizînd cu $\mathrm{Ker}\,\alpha$ putem presupune că α este monomorfism. Atunci din șirul exact.

$$0 \to M \xrightarrow{\alpha} M' \to \mathrm{Coker}\,\alpha \to 0$$

se obține șirul exact

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Coker}\,\alpha, M'') \to \mathrm{Hom}_A(M', M'') \to \mathrm{Hom}_A(M, M'') \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{Coker}\,\alpha, M'') \to 0$$

Deoarece M'' este în $\mathbf{H}_r$, iar $\mathrm{Coker}\,\alpha$ este B-modul, rezultă că $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Coker}\,\alpha, M'') = 0$ deci aplicația canonică

$$\mathrm{Hom}_A(M', M'') \to \mathrm{Hom}_A(M, M'')$$

este injectivă, deci (i) este dovedită.

Dacă M'' este în C, atunci și $\mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{Coker}\,\alpha, M'') = 0$ și rezultă (ii).

COROLAR. (2.11). *Dacă $u : A \to B$ este monomorfism de inele, atunci pentru orice A-modul M și orice A-modul N din* $\mathbf{C}$ *există izomorfismul canonic functorial*

(2.11.1) $$\mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}^1_A(B^*, M), N).$$

Rezultă din teorema precedentă şi din şirul exact (1.8.3).

COROLAR. (2.12). *Presupunem că* $u : A \to B$ *este bimorfism în categoria inelelor şi că* B *este* A*-modul plat.*

Dacă

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \tag{2.12.1}$$

este un şir exact de A*-module, atunci şirul*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_A(B^*, M') \to \mathrm{Ext}^1_A(B^*, M) \to \mathrm{Ext}^1_A(B^*, M'') \to 0 \tag{2.12.2}$$

este exact la dreapta în **C**. *Dacă, în plus,* M'' *este în* $\mathbf{H}_r$ *acest şir este exact.*

Demonstraţie. Din (2.8) rezultă că A-modulele din şirul (2.12.2) sînt în **C**, apoi din (2.11) rezultă că functorul $M \rightsquigarrow \mathrm{Ext}^1_A(B^*, M)$ este un functor de completare [3] de la categoria A-modulelor la categoria **C** de unde rezultă corolarul.

(2.13). Presupunem că $u : A \to B$ este bimorfism în categoria inelelor, că B este A-modul plat; atunci pe A-modulul $H = \mathrm{Ext}^1_A(B^*, A)$ se poate introduce o structură de inel astfel încît omomorfismul canonic $v : A \to \mathrm{Ext}^1_A(B^*, A)$ să fie omomorfism de inele. În adevăr, dacă notăm cu $m : A \times A \to A$ operaţia de înmulţire în A, din (2.8) şi (2.11) rezultă că există o unică aplicaţie $m' : H \times H \to H$ care face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times A \arrow[r, "v \times v"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_A(B^*, A \times A) \approx H \times H \arrow[d, "m'"] \\
A \arrow[r, "v"] & H
\end{tikzcd}$$

Evident m' defineşte o operaţie algebrică pe **H**.

Se verifică imediat că această operaţie este comutativă (datorită faptului că operaţia m este comutativă pe A), asociativă şi distributivă faţă de adunare şi din (2.13.1) rezultă vă v este onomorfism de inele. Mai mult, această structură de inel pe H este unica care prelungeşte (prin intermediul lui v) structura de inel al lui A.

Dacă M este un A-modul din **C**, atunci, analog ca mai sus, se poate introduce pe M o structură unică de H-modul care extinde structura sa de A-modul.

Mai mult, dacă $u' : A \to C$ este un omomorfism de inele iar C este un A-modul din **C**, există un unic omomorfism de A-algebre $w : H \to C$ care face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "u"'] & H \arrow[d, "w"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

În adevăr, ştim că există un w care este omomorfism de A-module şi care face comutativă diagrama de mai sus. Rămîne să arătăm că w este omomorfism de inele.

Pentru aceasta fie un $h_1 \in H$. Considerăm A-omomorfismele f_1, $f_2 : H \to C$ definite prin $f_2(h) = W(h_1h)$, $f_2(h) = W(h_1)W(h)$. Se observă că $f_1v = f_2v$ deci $f_1=f_2$ adică $W(h_1h) = W(h_1)W(h)$.

PROPOZIŢIE. (2.14). *Presupunem $u : A \to B$ bimorfism în categoria inelelor, B este A-modul plat şi A în $\mathbf{H}_r$. Atunci omomorfismul de A-module $\eta : \mathrm{Hom}_A(H, M) \to M$ definit prin $\eta(f)=f(1)$, pentru $f \in \mathrm{Hom}_A(H, M)$ este izomorfism pentru orice A-modul M din $\mathbf{H}_r$ imagine omomorfă a unui A-modul din $\mathbf{C}$.*

Demonstraţie. Presupunem mai întîi că M este chiar un A-modul din $\mathbf{C}$. Atunci din şirul exact (1.8.3) rezultă şirul exact

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(H^*, M) \to \mathrm{Hom}_A(H, M) \to \mathrm{Hom}_A(A, M) \to \mathrm{Ext}^1_A(H^*, M) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_A(H, M) \to 0$$

unde s-a notat $H^* = \mathrm{Ext}^1_A(B, A)$. Deoarece M este în $\mathbf{C}$ iar H^* este B-modul, rezultă

$$\mathrm{Hom}_A(H^*, M) = 0 \tag{2.14.1}$$

$$\mathrm{Ext}^1_A(H, M) = \mathrm{Ext}^1_A(H^*, M) = 0 \tag{2.14.2}$$

deci în acest caz η este izomorfism.

În cazul general considerăm şirul exact de A-module

$$0 \to M' \to M'' \to M \to 0$$

în care M'' este în $\mathbf{C}$. Deoarece M este în $\mathbf{H}_r$, rezultă că şi M' este în $\mathbf{C}$ (2.1). Din acest şir se obţine diagrama comutativă cu liniile exacte (2.14.2) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(H, M') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(H, M'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(H, M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M'' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Deoarece primele două omomorfisme verticale sînt izomorfisme, rezultă că şi cel de-al treilea este izomorfism.

(2.15). Din propoziţia (2.14) rezultă că un A-modul din $\mathbf{H}_r$ care este imagine omomorfă a unui A-modul din $\mathbf{C}$, are în mod canonic o structură de H-modul care extinde structura sa de A-modul. Se poate arăta analog ca în (2.13) că această structură de A-modul a lui M este unica care extinde structura sa de A-modul.

PROPOZIŢIE. (2.16). *Presupunem că $u : A \to B$ este bimorfism de inele, B este A-modul plat. Fie M şi N după H-module.*

(i) *Dacă N este A-modul din $\mathbf{H}_r$, atunci*

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_H(M, N)$$

(ii) *Dacă B este A-modul din $\mathbf{C}$, atunci*

$$\mathrm{Ext}^1_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_A(M, N)$$

(iii) *Dacă* A *este în* $\mathbf{H}_r$ *și* N *este* A*-modul din* $\mathbf{C}$, *atunci*

$$\mathrm{Ext}_A^n\,(M,\ N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_H^n\,(M,\ N) \text{ pentru toți } n \in \mathrm{N}.$$

Demonstrație (i). Este suficient să arătăm că orice A-omomorfism de la M la N este și H-omomorfism. Acest lucru se demonstrează analog ca în (2.13).

(ii) Fie

$$0 \to L' \to L \to N \to 0$$

un șir exact de H-module, cu L, H-modul liber. Atunci

$$\mathrm{Ext}_H^1\,(M,\ N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}\,(\mathrm{Hom}_H\,(L,\ N) \to \mathrm{Hom}_H\,(L',\ N))$$

Deoarece $\mathrm{Ext}_A^1\,(L,\ N) = 0$ (2.14.2) rezultă că

$$\mathrm{Ext}_A^1\,(M,\ N) = \mathrm{Coker}\,(\mathrm{Hom}_A\,(L,\ N) \to \mathrm{Hom}_A\,(L',\ N))$$

și afirmația rezultă din (i).

(iii) Din șirul exact (1.8.3) pentru $M = A$, rezultă $\mathrm{Ext}_A^n\,(H,\ N) = 0$ pentru orice $n \in N$ deci ([2], VI, 4.1.4) rezultă

$$\mathrm{Ext}_H^n\,(M,\ \mathrm{Hom}_A\,(H,\ N)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_A^n\,(M,\ N)$$

și (iii) rezultă atunci din (2.14).

COROLAR. (2.17). *Dacă* N *este un* H*-modul care este* A*-modul din* $\mathbf{H}_r$, *atunci omomorfismul canonic* $\eta : \mathrm{Hom}_A\,(H,\ M) \to N$ *este izomorfism și deci structura sa de* H*-modul este unica structură care prelungește pe cea de* A*-modul.*

3. ECHIVALENȚA UNOR SUBCATEGORII ALE CATEGORIEI A-MODULELOR

(3.1) Fie M un A-modul, omomorfismul canonic functorial de la $B^* \otimes_A \mathrm{Hom}_A\,(B^*,\ M)$ la M care asociază lui $b^* \otimes f$ pe $f\,(b^*)$ pentru $b^* \in B^*$, $f \in \mathrm{Hom}_A\,(B^*,\ M)$ are imaginea conținută în $h(M)$ încît determină un A-omomorfism

$$\varphi : B^* \otimes_A \mathrm{Hom}_A\,(B^*,\ M) \to h(M). \tag{3.1.1}$$

LEMĂ. (3.2) *Dacă* B *este* A*-modul plat,* $u : A \to B$ *epimorfism de inele, iar* $h(M)$ *este în* $\mathbf{T}$, *atunci omomorfismul* (3.1.1) *este izomorfism functerial.*

Demonstrație. Avem diagrama comutativă cu liniile exacte

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes_A \mathrm{Hom}_A\,(B^*,\ M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{B} \otimes_A \mathrm{Hom}_A\,(B^*,\ M) \arrow[r] \arrow[d] & B \otimes_A \mathrm{Hom}_A\,(B^*,\ M) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A\,(B^*,\ M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A\,(B,\ A) \arrow[r] & (hM) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.2.1}$$

în care primele două omomorfisme verticale sînt izomorfisme deci și φ este izomorfism.

PROPOZIȚIE. (3.3). *Presupunem că* $u : A \to B$ *este epimorfism de inele iar* B *un* A*-modul plat. Atunci un* A*-modul* M *este în* $\mathbf{T}$ *și* $\mathbf{H}_d$ *dacă și numai dacă*

$$B^* \otimes_A \mathrm{Hom}\,(B^*, M) \xrightarrow{\sim} M.$$

Demonstrație. Suficiența este imediată, iar necesitatea rezultă din (3.2).

Propoziție. (3.4) *Presupunem că* $u : A \to B$ *este bimorfism în categoria inelelor și că* B *este* A*-modul plat. Atunci un* A*-modul* M *este din* $\mathbf{T}_f$ *și* $\mathbf{C}$ *dacă și numai dacă*

$$M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A\,(B^*, B^* \otimes_A M).$$

Demonstrație. Suficiența rezultă din (2.5). Pentru a demonstra necesitatea, observăm că din șirul exact (1.8.1) obținem șirul exact

$$0 \to \mathrm{Hom}_A\,(B^*, M) \to \mathrm{Hom}_A\,(B^*, B \otimes_A M) \to \mathrm{Hom}_A\,(B^*, B^* \otimes_A^* M) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}_A^1\,(B^*, M) \to \mathrm{Ext}_A^1\,(B^*, B \otimes_A M) \to \dots$$

Avem însă $\mathrm{Hom}_A\,(B^*, B \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B\,(B \otimes_A B, B \otimes_A M) \to 0.$

Iar $\mathrm{Ext}_A^1\,(B^*, B \otimes_A M)$ este B-modul, deci este pe de o parte în $\mathbf{H}_d$, iar pe de altă parte în $\mathbf{C}$ (2.8), deci este nul. Așadar obținem $\mathrm{Hom}_A\,(B^*, B \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_A^1\,(B^*, M) \xrightarrow{\sim} M$(2.9).

Observație. (3.5). Dacă $u : A \to B$ este epimorfism de inele iar B este A-modul plat, din demonstrația propoziției (3.4) rezultă că pentru un A modul M din $\mathbf{T}_f$ există izomorfismul canonic functorial de A-module :

(3.5.1) $$\mathrm{Ext}_A^1\,(B^*, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A\,(B^*, B^* \otimes_A M)$$

Dacă presupunem în plus că A este în $\mathbf{T}_f$, atunci obținem izomorfismul canonic functorial de A-module.

(3.5.2) $$\mathrm{Ext}_A^1\,(B^*, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A\,(B^*, B^*).$$

Însă $\mathrm{Hom}_A\,(B^*, B^*)$ are în mod natural o structură de A-inel, operația de înmulțire este compunerea A-omorfismelor. Atunci din (2.13) rezultă că (3.5.2) este chiar un omomorfism de inele, deci $\mathrm{Hom}_A\,(B^*, B^*)$ este un inel comutativ și chiar mai mult, tot din (2.13) rezultă că structura sa de A-inel este unică.

(3.6) Notăm cu $\mathbf{TH}_d$ subcategoria plină a categoriei A-modulelor care sînt în $\mathbf{T}$ și $\mathbf{H}_d$ și cu $\mathbf{T}_f\mathbf{C}$ subcategoria plină a categoriei A-modulelor ale cărei obiecte sînt A-modulele din $\mathbf{T}_f$ și $\mathbf{C}$. Atunci din (3.3) și (3.4) rezultă

COROLAR. (3.7). *Categoriile* $\mathbf{TH}_d$ *și* $\mathbf{T}_f\mathbf{C}$ *sînt echivalente.*

LEMĂ. (3.8). *Dacă* M *este un* A*-modul, următoarele afirmații sînt echivalente*

(i) M este în $\mathbf{D}$,

(ii) $B^* \otimes_A M = 0$,

(iii) $B^* \otimes_A M/t(M) = 0$.

(3.9). Din lema precedentă rezultă imediat că o limită inductivă (în categoria A-modulelor) de A-module din $\mathbf{D}$ este în $\mathbf{D}$. Dacă în șirul exact $M' \to M \to M'' \to 0$, M' și M'' sînt în $\mathbf{D}$, M este în $\mathbf{D}$. Dacă

M este un A-modul, atunci există un unic sub-A-modul maximal al lui M care se află în $\mathbf{D}$ pe care îl notăm cu $D(M)$. ($D(M)$ este limita inductivă a submodulelor lui M care se află în D). Evident, $M/D(M)$ nu are sub-A-module din $\mathbf{D}$, deci $M/D(M)$ este în $\mathbf{H}_r$ şi $\mathbf{T}_f$.

TEOREMĂ. (3.10). *Fie* M *un* A*-modul din* $\mathbf{C}$; *atunci* :

(i) $D(M)$ *este în* $\mathbf{C}$

(ii) $D(M)$ *este intersecţia tuturor submodulelor lui* M *din* $\mathbf{C}$ *care conţin pe* $t(M)$.

(iii) $M/D(M)$ *este în* $\mathbf{T}_f$ *şi dacă* M' *este un submodul al lui* M *din* $\mathbf{C}$ *şi* $\mathbf{D}$ *astfel ca* $t(M) \subseteq M'$, *atunci* $M' = D(M)$.

(iv) *Dacă în plus* $u : A \to B$ *este bimorfism în categoria inelelor şi* B *este* A*-modul plat, atunci există izomorfismul canonic functorial*

$$D(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_A(B^*, t(M)). \tag{3.10.1}$$

Demonstraţie. (i) Deoarece $M/D(M)$ este în $\mathbf{H}_r$ (3.9), afirmaţia rezultă din (2.1).

(ii) Fie N intersecţia tuturor submodulelor lui M din $\mathbf{C}$ care conţin pe $t(M)$. Avem, evident, din (i) că $N \subseteq D(M)$ şi din faptul că N şi $D(M)$ sînt din $\mathbf{C}$ (2.2), rezultă că $D(M)/N$ este în $\mathbf{H}_r$. Pe de altă parte, deoarece $D(M)/t(M)$ este B-modul iar $D(M)/N$ este imagine omomorfă a sa, rezultă că $D(M)/N$ este în $\mathbf{H}_d$ deci $D(M) = N$.

(iii) Rezultă imediat din (3.9) şi (ii).

(iv) Rezultă din faptul că $t(M)$ este în $\mathbf{H}_r$, $D(M)$ este în $\mathbf{C}$ iar $D(M)/t(M)$ este B-modul (2.10).

Observaţie. (3.11) Functorul D de la categoria A-modulelor în categoria D este un functor de normalizare [3].

(3.12). Notăm cu $\mathbf{DC}$ subcategoria plină a categoriei A-modulelor formată din acele A-module care sînt în $\mathbf{D}$ şi $\mathbf{C}$ şi cu $\mathbf{TH}_r$ subcategoria plină a categoriei A-modulelor care conţine A-modulele din $\mathbf{T}$ şi $\mathbf{H}_r$.

TEOREMĂ (3.13). *Presupunem că* $u : A \to B$ *este bimorfism de inele*; *atunci categoriile* $\mathbf{DC}$ *şi* $\mathbf{TH}_r$ *sînt echivalente.*

Demonstraţie. Considerăm functorul $t : \mathbf{DC} \to \mathbf{TH}_r$ care asociază lui M pe $t(M)$ şi functorul $s : \mathbf{TH}_r \to \mathbf{DC}$, unde $S(M) = \mathrm{Ext}^1_A(B^*, M)$.

Din (1.8.3) rezultă că ts este izomorf functorial cu $1_{\mathbf{TH}_r}$, iar din (3.10.1) că st este izomorf functorial cu $1_{\mathbf{DC}}$.

Primită la redacţie la 19 septembrie 1966

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti,
str. Academiei nr. 14.

BIBLIOGRAFIE

1. MATLIS E., *Cotorsion modules.* Memoirs of the Amer. Math. Soc. **49** (1964).
2. CARTAN, H., EILENBERG E, *Homological Algebra.* Princeton University Press, 1956.
3. JURCHESCU M, LASCU A, *Morfisme stricte, categorii cantoriene, functori de completare.* St. cerc. mat. **18**, *2*, 219–234 (1966).

PROPRIETĂȚI ALE SERIEI FOURIER ASOCIATĂ UNEI FUNCȚII NEINTEGRABILE DE SINGULARITĂȚI DATE

DE

MARIANA CRAIU

Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathcal{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ care îndeplinește condițiile a), b), c) pentru $p = 2n$. În lucrare se studiază proprietățile seriei Fourier asociată funcției $f(x)$ și se arată că este de forma (8).
Se dă o formă integrală coeficienților a_m b_m, se determină modul cum se comportă coeficienții cînd m tinde la infinit, se stabilește teorema 4.1 privind sumabilitatea seriilor $S_k(x)$ și $S_k^{\infty}(x)$.

1. Să considerăm funcția $f(x)$ definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathcal{M} \subset [-\pi, \pi]$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Fie $\mathcal{M}_{2n} \subset \mathcal{M}$ o mulțime finită $\mathcal{M}_{2n} = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ care îndeplinește condițiile :

a) $x_1 = -\pi + \dfrac{\pi}{2n} \qquad x_{2n} = \pi - \dfrac{\pi}{2n}$, n fix ;

b) $x_{k+1} - x_k = \dfrac{\pi}{n}$;

c) funcția $\varphi(x) = f(x) \prod\limits_{k=1}^{2n} (x - x_k)$, $x \in [-\pi, r] - \mathcal{M}$ este integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

În această situație : $x_k = -\pi + \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1,2,\ldots,2n$, iar funcția $\varphi(x) = \cos nx \, f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$ este integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ deoarece $\prod\limits_{k=1}^{2n} (x - x_k)$ are aceleași zerouri ca și $\cos nx$ pe $[-\pi, \pi]$.

2. Dacă seria asociată funcției $\varphi(x)$ este

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \tag{1}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 403 – 413, BUCUREȘTI, 1967

trebuie să avem

$$(2)\qquad \frac{\alpha_0}{2} + \sum (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \equiv \cos nx \times$$

$$\times \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right],$$

unde seria :

$$(3)\qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

este seria asociată funcției neintegrabile $f(x)$.

Coeficienții seriei (3) sînt soluții ale sistemului infinit

$$(4)\qquad \alpha_0 = a_n,\ 2\alpha_1 = a_{n-1} + a_{n+1}, \ldots, 2\alpha_n = a_0 + a_{2n}, \ldots, 2\alpha_k = a_{k-n} + a_{k+n}$$

$$2\beta_1 = b_{n+1} - b_{n-1},\ 2\beta_2 = b_{n+2} - b_{n-2}, \ldots, 2\beta_n = b_{2n},\ 2\beta_{n+1} = b_1 + b_{2n+1}, \ldots$$

soluție dată de :

$$a_{2pn+s} = (-1)^p a_s + 2\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \alpha_{(2p-1-2k)n+s}, \qquad (s = 0,1,\ldots,n-1)$$

$$(5)\qquad a_{(2p+1)n} = 2\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \alpha_{(2p-2k)n}$$

$$a_{(2p+1)n+s} = (-1)^{p-1} a_{n-s} + 2\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \alpha_{(2p-2k)n+s}, \qquad (s = 1,2,\ldots,n-1)$$

și

$$b_{2pn+s} = (-1)^p b_s + 2\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \beta_{(2p-1-2k)n+s}, \qquad (s = 0,1,2,\ldots,n)$$

$$(5')$$

$$b_{(2p+1)n+s} = (-1)^p b_{n-s} + 2\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \beta_{(2p-2k)n+s}, \qquad (s = 1,2,\ldots,n-1),$$

unde $p = 1,2,3,\ldots$, și

$$(6)\qquad \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \cos kt \,\mathrm{d}t\,;\quad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \sin kt \,\mathrm{d}t.$$

Înlocuind pe (6) în (5) și însumînd obținem :

$$a_{2pn+s} = (-1)^p a_s + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,[\cos(2pn+s)\,t + (-1)^{p-2} \cos t]\,\mathrm{d}t$$

$$(s = 0,1,\ldots,n-1)$$

$$(7)\qquad a_{(2p+1)n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,[\cos(2p+1)\,nt + (-1)^p \cos nt]\,\mathrm{d}t$$

$$a_{(2p+1)n+s} = (-1)^{p-1} a_{n-s} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,[\cos(2pn+n+s)\,t +$$

$$+ (-1)^p \cos(n-s)\,t]\,\mathrm{d}t, \qquad (s = 1,2,\ldots,n-1)$$

şi

$$\begin{aligned} &b_{2pn+s}=(-1)^p b_s + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,[\sin(2pn+s)t+(-1)^{p-1}\sin st]\,\mathrm{d}t, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (s=0,1,\ldots,n) \\ (7') \quad &b_{(2p+1)n+s}=(-1)^p b_{n-s}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\sin(2pn+n+s)t+ \\ &\qquad +(-1)^{p-1}\sin(n-s)t]\,\mathrm{d}t, \qquad (s=1,2,\ldots,n-1) \end{aligned}$$

3) Dacă înlocuim pe a_k şi b_k, daţi de (7) şi (7′), în (3) şi considerăm pe $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_n$ nedeterminaţi, putem enunţa următoarea teoremă:

TEOREMA 3.1. *Fie $f(x)$ o funcţie definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulţime $\mathfrak{M} \subset [-\pi, \pi]$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Fie $\mathfrak{M}_{2n}$ o mulţime care îndeplineşte condiţiile* a), b), *f satisfăcînd în raport cu $\mathfrak{M}_{2n}$ şi condiţia* c).

Seria Fourier asociată funcţiei $f(x)$ este dată de:

$$(8) \quad \begin{aligned} f(x) \sim S^*(x) &+ \lambda_0 S_0(x) + \lambda_1 S_1(x) + \ldots + \lambda_{n-2} S_{n-2}(x) + \\ &+ \lambda_{n-1} S_{n-1}(x) + \mu_1 S_1^*(x) + \mu_2 S_2^*(x) + \ldots + \mu_n S_n^*(x), \end{aligned}$$

unde $S^*(x)$ este seria (3) cu coeficienţii a_k, b_k daţi de (7) şi (7′) în care se ia $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = b_1 = \ldots = b_n = 0$, iar $S_0(x)$, $S_1(x) \ldots S_n(x)$, $S_1^*(x), \ldots$ $S_n^*(x)$ sînt serii trigonometrice independente de $f(x)$, anume:

$$\begin{aligned} &S_0(x) = \frac{1}{2} - \cos 2nx + \cos 4nx - \cos 6nx + \cos 8nx - \ldots \\ (9) \quad &S_k(x) = \cos kx - \cos(2n-k)x - \cos(2n+k)x + \cos(4n-k)x + \\ &\qquad + \cos(4n+k)x - \cos(6n-k)x - \cos(6n+k)x + \ldots, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k=1,2,\ldots,n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &S_k^*(x) = \sin kx + \sin(2n-k)x - \sin(2n+k)x - \sin(4n-k)x + \\ &\qquad + \sin(4n+k)x + \sin(6n-k)x - \ldots, \qquad (k=1,2,\ldots,n-1) \\ (9') \quad &S_n^*(x) = \sin nx - \sin 3nx + \sin 5nx - \sin 7nx + \ldots \end{aligned}$$

4. În legătură cu sumabilitatea seriilor $S_k(x)$ şi $S_k^*(x)$ avem următoarea teoremă:

TEOREMA 4.1. *Seriile $S_k(x)$, $(k = 1,2,\ldots, n-1)$, date de* (9) *şi* (9′) *sînt sumabile* $(C, 1)$ *către* 0 *pe mulţimea $[-\pi, \pi] - \mathfrak{M}_{2n} + \mathfrak{M}'_p$, unde $\mathfrak{M}'_p \subset \mathfrak{M}_{2n}$ este mulţimea punctelor $x_h = -\pi + \dfrac{(2h-1)\pi}{2n}$ cu $h = \dfrac{2sn+n-k}{2k}$, $k = 1,2,\ldots, n-1$, iar s natural; $S_0(x)$ este sumabilă* $(C, 1)$ *către* 0 *pe $[-\pi, \pi] - \mathfrak{M}_{2n}$.*

Seriile $S_k^*(x)$ sînt sumabile $(C, 1)$ către 0 pe mulţimea $[-\pi, \pi] - \mathcal{M}_{2n} + \mathcal{M}_p''$, unde $\mathcal{M}_p'' \subset \mathcal{M}_{2n}$ este mulţimea punctelor $x_h = \pm \frac{(2h+1)\pi}{2n}$ cu $h = \frac{2sn-k}{2k}$, $k = 1,2,\ldots,n$, s natural.

Demonstraţie. Vom considera spre exemplu seria:

$$S_n^*(x) = \sin nx - \sin 3nx + \sin 5nx - \sin 7nx + \ldots$$

cu suma parţială de ordinul p

$$s_p(x) = (-1)^p \frac{\sin(2pn+2n)x}{2\cos nx}$$

iar

$$\sigma_p(x) = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{p-1}}{p} = -\frac{\sin pnx \cos(pn+n)x}{p\cos nx}$$

$\sigma_p(x) \to 0$ pentru $p \to \infty$ în afara punctelor pentru care $\cos nx = 0$, adică a punctelor mulţimii $\mathcal{M}_{2n}$; deci mulţimea $\mathcal{M}_p''$ nu conţine nici un punct în acest caz.

Demonstraţia este analoagă şi în celelalte cazuri.

5. Fie $f^*(x)$ o funcţie definită pe $[0, \pi]$ în afara unei mulţimi de măsură nulă, neintegrabilă pe $(0, \pi)$. Fie

$$f(x) = \begin{cases} f^*(x), & x \in (0, \pi) \\ -f^*(-x), & x \in (-\pi, 0) \end{cases} \tag{10}$$

periodică de perioadă 2π. Integralele

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt dt, \qquad m = 0,1,\ldots$$

sînt nule în sensul valorii lui Cauchy.

Să presupunem că funcţia $\varphi(x) = \cos n f(x)$ este integrabilă pe $(0, \pi)$.

Seria Fourier ataşată funcţiei $f(x)$ este:

$$f(x) \simeq b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_k \sin kx + \ldots \tag{11}$$

Funcţia integrabilă $\varphi(x) = \cos nx f(x)$ are seria Fourier

$$\cos nx f(x) \simeq \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \tag{12}$$

Deoarece $\varphi(x)$ este o funcţie impară pe intervalul $(-\pi, \pi)$, rezultă $\alpha_0 = \alpha_k = 0$, deci

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \cos nx \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx. \tag{11'}$$

Înmulțind ambii membri din (11′) cu sin px și ținînd seama că

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx \sin px \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(k-p)\,x - \cos(k+p)x]\cos nx\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n+k-p)x + \cos(k-p-n)x - \cos(k+p+n)x -$$

$$- \cos(k+p-n)x]\,\mathrm{d}x$$

și

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx \sin px \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & k = p \\ 0 & k \neq p \end{cases}$$

avem

$$\beta_p = \frac{1}{2}(b_{p+n} - b_{n-p}), \quad p < n; \quad \beta_n = \frac{1}{2}b_{2n}$$

(12)

$$\beta_p = \frac{1}{2}(b_{p+n} + b_{p-n}), \quad p > n.$$

Din (12) rezultă

$$b_{2pn+k} = 2[\beta_{(2p-1)n+k} - \beta_{(2p-3)n+k} + \ldots + (-1)^{p-1}\beta_{n+k}] + (-1)^p b_k,$$
$$(k = 0,1,2,\ldots, n)$$

$$b_{(2p+1)n+k} = 2\,[\beta_{2pn+k} - \beta_{(2p-2)n+k} + \ldots + (-1)^p\beta_k] + (-1)^p b_{n-k},$$
$$(k = 1,2,\ldots, n-1)$$

Ținînd seama de expresiile coeficienților β_k,

$$\beta_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt \sin kt \,\mathrm{d}t$$

obținem

$$b_{2pn+k} - b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,[\sin(2pn+k)\,t - \sin kt]\,\mathrm{d}t$$

de unde

$$b_{2pn+k} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(2pn+k)\,t\,\mathrm{d}t,$$

adică regula de calcul a coeficienților Fourier pentru o funcție integrabilă. Reciproca este de asemenea adevărată.

6. Fie $f(x)$ definită de 10.

În acest paragraf ne propunem să demonstrăm următoarea teoremă :

TEOREMA 6.1 *Dacă funcția* $\varphi(x) = \prod_{k=1}^{2n}(x - x_k)f(x)$ *este cu variație mărginită pe* $[-\pi, \pi]$, *atunci seria Fourier :*

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots$$

atașată funcției $f(x)$ *are coeficienții* b_n *mărginiți.*

Demonstrație. Deoarece funcția $\varphi(x) = \prod_{k=1}^{2n} (x-x_k)\, f(x)$ este mărginită pe $(-\pi, \pi)$, rezultă că integralele

$$\int_0^{\pi} \sin mt\, f(t)\, \mathrm{d}t, \qquad m = 1,2,\ldots$$

există și sînt finite.

Pentru a arăta acest lucru despărțim intervalul $(0, \pi)$ în subintervalele :

$$\left[0, \frac{\pi}{n}\right) \cup \left[\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{n-1}{n}\pi, \pi\right]. \tag{13}$$

Fiecare din aceste intervale conține un x_k și numai unul singur. Funcția

$$\sin mx f(x) = \prod_{k=1}^{2n} (x-x_k) f(x) \frac{\sin mx}{\prod_{k=1}^{2n} (x-x_k)}$$

este integrabilă pe $(0, \pi)$, fiind produsul între o funcție mărginită și o funcție integrabilă.

Este suficient să arătăm că acest lucru se petrece pe unul din intervalele reuniunii (13).

Funcția $\varphi(x) \prod_{k=2}^{2n} (x-x_k)$ este mărginită pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{n}\right]$.

Rămîne să arătăm că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin mx}{x-\frac{\pi}{2n}}\, \mathrm{d}x$ există.

Schimbarea de variabilă $x - \frac{\pi}{2n} = u$ transformă integrala astfel :

$$\left| \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin\left(mu + \frac{m\pi}{2n}\right)}{u}\, \mathrm{d}u \right| = \left| \cos \frac{m\pi}{2n} \right| \left| \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin mu}{u}\, \mathrm{d}u \right| = \tag{14}$$

$$= \left| \cos \frac{m\pi}{2n} \int_{-\frac{m\pi}{2n}}^{\frac{m\pi}{2n}} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u \right| = \left| 2 \cos \frac{m\pi}{2n} \right| \int_0^{\frac{m\pi}{2n}} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u < \pi.$$

Același raționament poate fi repetat pentru fiecare din subintervalele (13).

Deoarece $\varphi(x)$ este cu variație mărginită pe $[0, \pi]$, putem scrie

$$\varphi(x) = \varphi(0) + P(x) - N(x),$$

unde

$$P(x) = \frac{1}{2}\left[V(x) + \varphi(x) - \varphi(0)\right]$$

$$N(x) = \frac{1}{2}\left[V(x) - \varphi(x) + \varphi(0)\right]$$

sînt crescătoare și pozitive ; $V(x)$ reprezintă variația totală a lui φ pe $[0, x]$.

Avem

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin mt f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin mt f(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_{\frac{(n-1)\pi}{n}}^{\pi} \sin mt f(t)\,\mathrm{d}t\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin mt f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}} [\Phi(0) + P(t) - N(t)]\frac{\sin mt}{t - \frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Phi(0)\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin mt}{t-\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}} P(t)\frac{\sin mt}{t-\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}} N(t)\frac{\sin mt}{t-\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{d}t.$$

Aplicăm a 2-a formulă a mediei și obținem

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin mt f(t)\mathrm{d}t = \frac{2\Phi(0)}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin mt}{t-\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}P\left(\frac{\pi}{n}\right)\int_a^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin mt}{t-\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{d}t -$$

$$- \frac{2}{\pi}N\left(\frac{\pi}{n}\right)\int_b^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin mt}{t-\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{d}t$$

dar

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin mt}{t-\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{d}t\right| < \pi \text{ din majorarea (14).}$$

De aici rezultă că șirul (b_m) este mărginit.

7. Ne propunem să demonstrăm următoarea teoremă:

Teorema 7.1. *Într-un punct* $x \in [-\pi, \pi]$ *de continuitate al funcției* $f(x)$ *care îndeplinește condițiile* a), b), c), *sumele* $s_p(x)$ *ale seriei trigonometrice atașată funcției* $f(x)$ *au proprietatea*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{s_p(x)}{\ln p} = 0$$

dacă : $\varphi(x) = \prod_{k=1}^{2n} (x - x_k) f(x)$ *este mărginită pentru* $x \in [-\pi, \pi]$.

Demonstrație. Vom calcula pe $s_{2pn}(x)$, deoarece rezultatele sînt asemănătoare și pentru celelalte sume.

Folosind (7) şi (7′) obţinem

$$s_{2pn}(x) =$$

$$= a_0\left[\frac{1}{2} + (-1)^{p-1}\frac{\sin 2pnx \sin nx}{\cos nx}\right] + a_1(-1)^{p-1}\frac{\sin 2pnx \sin(n-1)x}{\cos nx} + \ldots$$

$$\ldots + a_{n-1}(-1)^{p-1}\frac{\sin 2pnx \sin x}{\cos nx} + b_1(-1)^{p-1}\frac{\sin 2pnx \cos(n-1)x}{\cos nx} + \ldots$$

$$\ldots + b_n(-1)^{p-1}\frac{\sin 2pnx}{\cos nx} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, A^*_{2pn}(x, t)\,\mathrm{d}t,$$

unde

$$A^*_{2pn}(x, t) = \frac{\sin\frac{4pn+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}} - \frac{\sin 2pnx \operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}}{2\cos nx}(\cos nx - \cos nt) -$$

$$- \frac{\cos nt}{\cos nx}\sin^2 pnx + \frac{\cos 2pnx}{2}, \quad p - \text{impar}.$$

Să considerăm un punct de continuitate $x \neq -\pi + \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ al funcţiei $f(x)$. Presupunem punctul situat în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right)$.

Se alege intervalul $[x-\delta, x+\delta] \subset \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right)$ astfel ca :

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad t \in [x-\delta, x+\delta].$$

Într-un punct de continuitate al lui $f(x)$ se poate scrie

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{4pn+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}} f(x)\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Ne propunem să evaluăm diferenţa

$$s_{2pn}(x) - f(x) = B(x) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[A^*_{2pn}(x, t) f(t) - \frac{\sin\frac{4pn+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}} f(x)\right]\mathrm{d}t,$$

unde

$$B(x) =$$

$$= a_0\left[\frac{1}{2} + (-1)^{p-1}\frac{\sin 2pnx \sin nx}{\cos nx}\right] + a_1(-1)^{p-1}\frac{\sin 2pnx \sin (n-1)x}{\cos nx} + \dots$$

$$\dots + a_{n-1}(-1)^{p-1}\frac{\sin 2pnx \sin x}{\cos nx} + b_1(-1)^{p-1}\frac{\sin 2pnx \cos (n-1)x}{\cos nx} + \dots$$

$$\dots + b_n(-1)^{p-1}\frac{\sin 2pnx}{\cos nx}.$$

Pentru un interval $\left(x - \frac{1}{p},\ x + \frac{1}{p}\right) \subset [x-\delta,\ x+\delta]$ avem următoarea descompunere :

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2n}-A} + \int_{-\frac{\pi}{2n}-A}^{-\frac{\pi}{2n}+A} + \int_{-\frac{\pi}{2n}+A}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x-\frac{1}{p}} + \int_{x-\frac{1}{p}}^{x+\frac{1}{p}} + \int_{x+\frac{1}{p}}^{x+\delta} +$$

$$+ \int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{2n}-A} + \int_{\frac{\pi}{2n}-A}^{\frac{\pi}{2n}+A} + \int_{\frac{\pi}{2n}+A}^{\pi} = \sum_{i=1}^{9} I_i.$$

Integralele I_1, I_3, I_4, I_7, I_9 sînt mărginite deoarece integranții sînt funcții continue pe intervalul de integrare. Putem scrie deci

$$I_\alpha \leqslant M_\alpha \text{ dacă } \alpha = 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 9.$$

Evaluăm integrala I_5 :

$$I_5 = \int_{x-\frac{1}{p}}^{x+\frac{1}{p}} \frac{\sin \frac{4pn+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} [f(t) - f(x)]\, \mathrm{d}t + \int_{x-\frac{1}{p}}^{x+\frac{1}{p}} D(x, t) f(t)\, \mathrm{d}t,$$

unde

$$D(x, t) = \frac{\cos 2pnx}{2} - \frac{\cos nt}{\cos nx}\sin^2 pnx -$$

$$- \frac{\sin 2pnx \operatorname{ctg}\frac{t-x}{2} \sin n\frac{t-x}{2} \sin n\frac{t+x}{2}}{\cos nx}.$$

Avînd în vedere că $D(x, t)$ este continuă pe $\left[x - \frac{1}{p},\ x + \frac{1}{p}\right]$ în raport cu t, putem scrie :

$$I_5 \leqslant 2\varepsilon \int_{x-\frac{1}{p}}^{x+\frac{1}{p}} \frac{\sin \frac{4pn+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} \mathrm{d}t +$$

$$+ M' = 2\varepsilon \int_{-\frac{1}{p}}^{\frac{1}{p}} \frac{\sin \frac{4pn+1}{2} u}{\sin u} \cdot \frac{u}{u} \mathrm{d}n + M'$$

$$|I_5| \leqslant \frac{2\varepsilon(4pn+1)}{p} + M'$$

Integrala I_6 se poate scrie :

$$I_6 = \int_{x+\frac{1}{p}}^{x+\delta} \frac{\sin \frac{4pn+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} [f(t) - f(x) \mathrm{d}t + \int_{x+\frac{1}{p}}^{x+\delta} D(x, t)\ f(t)\ \mathrm{d}t$$

$$|I_6| \leqslant \varepsilon \int_{x+\frac{1}{p}}^{x+\delta} \frac{\sin \frac{4pn+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} \cdot \frac{\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}} \mathrm{d}t + M''.$$

Deoarece $\left|\frac{\frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}}\right| < \frac{\pi}{2}$ iar $\left|\sin \frac{4pn+1}{2}(t-x)\right| < 1$, pentru I_6,

obținem

$$I_6 \leqslant \pi\varepsilon(\ln\delta + \ln p) + M''.$$

Integralele I_2, I_8 sînt de același tip. Vom evalua una dintre ele și anume I_8 :

$$I_8 = \int_{\frac{\pi}{2n}-A}^{\frac{\pi}{2n}+A} A^*_{2pn}(x, t) f(t)\, \mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2n}+A}^{\frac{\pi}{2n}+A} \frac{\sin \frac{4pn+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} f(x)\ \mathrm{d}t.$$

A 2-a integrală există.

Avînd în vedere că în jurul punctului $t = \frac{\pi}{2n}$, integrantul se poate scrie $A^{**}_{2pn}\left(t - \frac{\pi}{2n}\right) f(t)$, prima integrală există conform condiţiei c)

Putem scrie deci : $|I_8| < M$

Primită la redacţie la 9 august 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Marcel N. Roşculeţ, *Sur la Série de Fourier attachée à une fonction non integrable.* Rev. Roum. Math. pures et appl., *2*, (1966).
2. Marcel N. Roşculeţ, *Cercetări asupra seriilor trigonometrice.* St. cerc. mat., *4* (1965).

ANALIZA LOGICĂ A ALGORITMILOR (II)

DE

E. MUNTEANU
(Cluj)

Prezenta Notă este o continuare a lucrării [1]. Pentru rezolvarea problemei de analiză a algoritmilor formulată în [1], este necesar ca algoritmul schemă-graf să fie adus la forma canonică.

În lucrare se definește forma canonică a unui algoritm schemă-graf (2.3) și se dau metode de aducerea unui algoritm la forma canonică. Prima metodă (teorema 2) este un procedeu universal care permite aducerea oricărui algoritm la forma canonică. Neajunsul acestui procedeu constă în aceea că se obține o formă canonică cu o structură complicată a ciclului.

A doua metodă, bazată pe transformările schemelor-graf cu două intrări, cu două ieșiri și cu cicluri ce se intersectează, permite obținerea formei canonice în care ciclurile nu au structură simplă, ea se poate aplica însă numai la anumite clase de algoritmi care sînt descrise în lucrare.

În lucrarea [1] a fost formulată problema analizei algoritmilor ca o corespondență între sistemul de condiții logice care descrie formularea unei probleme și algoritmul de rezolvare a acestei probleme.

Pentru rezolvarea problemei de analiză, în aceeași lucrare a fost introdusă noțiunea de formulă atașată unui algoritm și a fost dată o metodă de construire a formulei atașate unui algoritm schemă-graf fără cicluri.

Construirea formulei atașate unui algoritm cu cicluri se poate face, deocamdată, numai în cazul cînd algoritmul este adus la așa-numita formă canonică.

În această Notă se definește forma canonică a algoritmilor schemă-graf și se studiază transformările cu ajutorul cărora se poate obține în anumite cazuri forma canonică a unui algoritm dat.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 415–422 BUCUREȘTI, 1967

1. DESCOMPUNEREA UNEI SCHEME-GRAF

Vom generaliza noţiunea de schemă-graf introdusă de A.L. Kalujnin [2] în felul următor :

Printr-o *schemă-graf generalizată* înţelegem un obiect matematic, descris în felul următor.

Fie dată mulţimea $T = \{T_1, T_2,..., T_n\}$, ale cărei elemente le vom numi *operatori de transformare* şi mulţimea $L = \{L_1, L_2,..., L_n\}$, ale cărei elemente le vom numi *operatori logici.*

O schemă-graf generalizată este un graf finit, G, legat şi orientat, ale cărui vîrfuri le vom numi *noduri*. Anumite noduri sînt legate între ele prin *săgeţi.*

Graful G satisface următoarele proprietăţi :

1. Există anumite noduri marcate care se numesc *intrări* şi care sînt singurele noduri în care nu intră nici o săgeată ; din fiecare intrare pleacă numai o săgeată. Notăm aceste noduri cu I_1, $I_2,..., I_p$.

2. Există anumite noduri marcate care se numesc *ieşiri* şi care sînt singurele noduri din care nu pleacă nici o săgeată. Notăm aceste noduri cu E_1, $E_2,..., E_q$.

3. Oricărui nod al grafului G, diferit de o intrare sau de o ieşire, i se ataşază un operator de transformare T_i sau un operator logic L_j. În primul caz nodul se numeşte T-nod iar în al doilea caz L-nod.

4. Din fiecare T-nod pleacă o singură săgeată şi din fiecare L-nod pleacă două săgeţi. În ultimul caz cele două săgeţi sînt marcate una cu semnul plus (+) şi cealaltă cu semnul minus (—).

Interpretarea unei scheme-graf generalizate este analogă cu interpretarea dată în lucrarea [1]. Vom păstra în continuare notaţiile introduse în această lucrare.

Este evident că orice schemă-graf este o schemă-graf generalizată pentru care $p = 1$ şi $q = 1$.

Să considerăm o schemă-graf S. Fie operatori O_t, care diferă de intrare şi O_1, care diferă de ieşire.

Definiţia 1. Operatorii O_t şi O_1 se numesc separabili dacă O_l este succesul operatorului O_t şi nu există un drum invers de la operatorul O_t la operatorul O_l.

Dacă operatorii O_t şi O_1 sînt separabili, vom spune că operatorul O_1 se separă de operatorul O_t.

Pentru fiecare operator de atribuire al schemei-graf S, există cel mult un operator care se separă de operatorul respectiv, iar pentru fiecare operator logic există cel mult doi operatori care se separă de operatorul logic considerat.

Dacă operatorii O_{q_k} şi O_{p_k} sînt separabili, vom spune că ei formează o pereche şi vom nota această pereche în felul următor :

$$D_k = (O_{p_k}, O_{q_k}) \tag{1}$$

înțelegînd prin aceasta că operatorul O_{q_k} se separă de operatorul O_{p_k}.

Vom nota mulțimea tuturor perechilor schemei-graf S astfel

$$V = \{V_1, V_2, ..., V_h\} \tag{2}$$

unde fiecare element V_i ($i = 1, 2,..., h$) este de forma (1).

DEFINIȚIA 2. Vom spune că submulțimea nevidă

$$V^* = \{V_{k_1}, V_{k_2}, ..., V_{k_m}\}, \qquad m \leqslant h$$

a mulțimii V formează o *tăietură* în schema-graf S, dacă după înlăturarea săgeților care leagă operatorii $O_{p_{k_1}}, O_{p_{k_2}}, ..., O_{p_{k_m}}$ cu operatorii $O_{q_{k_1}}$, $O_{q_{k_2}}, ..., O_{q_{k_m}}$ respectiv, schema-graf S se descompune în două părți nelegate între ele cu săgeți.

Numim aceste două părți subschemă-graf determinate de tăietura V. Vom nota cu $\Gamma_S^1 (V^*)$, subschema-graf a cărei intrare coincide cu intrarea schemei-graf S, și cu $\Gamma_S^2 (V^*)$, schema-graf a cărei ieșire coincide cu ieșirea schemei-graf S.

Următoarele proprietăți sînt evidente:

1.1. Subschema-graf $\Gamma_S^1 (V^*)$ are cel puțin o ieșire.

1.2. Subschema-graf $\Gamma_S^2 (V^*)$ are cel puțin o intrare.

1.3. Fiecărei intrări a subschemei-graf $\Gamma_S^2 (V^*)$ îi corespunde cel puțin o ieșire a subschemei-graf $\Gamma_S^2 (V^*)$. Din proprietățile 1.1 și 1.2 rezultă că schemele-graf $\Gamma_S^1 (V^*)$ și $\Gamma_S^2 (V^*)$ sînt scheme-graf generalizate.

TEOREMA 1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca o schemă-graf S să admită cel puțin o tăietură este ca mulțimea perechilor schemei să fie nevidă.*

Este evident că dacă schema-graf S admite cel puțin o tăietură, atunci mulțimea V este nevidă.

Fie $V = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$, mulțimea tuturor perechilor schemei-graf S. Presupunem că V este nevidă. Vom arăta că în acest caz S admite cel puțin o tăietură. Fie $V_1 = (O_{p_1}, O_{q_1})$. Înlăturăm din S săgeata care unește pe O_{p_1} cu O_{q_1}. Dacă S se descompune în două subscheme-graf, atunci $V^* = \{V_1\}$ și teorema este demonstrată. Dacă nu, înseamnă că în graful neorientat al schemei S, există un drum de la operatorul O_{q_1} la operatorul O_{p_1}. Fie $O_{i_1}, ..., O_{i_k}$, totalitatea operatorilor care aparțin acestui drum. Pentru fiecare $0 \leqslant j \leqslant k$, căutăm în graful orientat un drum de la operatorul O_{i_j} la operatorul $O_{i_{j+1}}$. Dacă pentru orice $0 \leqslant j \leqslant k$ există un astfel de drum, atunci există un drum, în graful orientat, de la operatorul O_{q_1} la O_{p_1}. Această concluzie este falsă deoarece $(O_{p_1}, O_{q_1}) \in V$. Rezultă atunci că pentru un anumit j nu există un drum orientat de la O_{i_j} la $O_{i_{j+1}}$, dar acești operatori sînt legați printr-o săgeată. Înseamnă deci că această săgeată pleacă de la operatorul $O_{i_{j+1}}$ la operatorul O_{i_j}. Prin urmare $(O_{i_{j+1}}, O_{i_j}) \in V$. Înlăturăm și această săgeată și dacă S se descompune în două subscheme, atunci $V^* = \{V_1, (O_{i_{j+1}}, O_{i_j})\}$, iar dacă nu, procesul se continuă.

După un număr finit de pași procesul de construire a mulțimii V se termină, fie atunci cînd se obține o mulțime ce determină o tăietură în schema S, fie atunci cînd $V^* = V$. În ultimul caz mulțimea V determină o tăietură. Într-adevăr, după înlăturarea săgeților, care leagă operatorii $O_{p_1}, O_{p_2}, \dots, O_{p_h}$ cu operatori $O_{q_1}, O_{q_2}, \dots, O_{q_h}$ nu există nici un drum din operatorul O_{p_i} în operatorul O_{q_i} și nici operatorul O_{q_i} în operatorul O_{p_i}, deoarece V este mulțimea tuturor perechilor de operatori separabili.

DEFINIȚIA 3. Orice schemă-graf generalizată, care admite cel puțin o tăietură se numește *decompozabilă*.

Din definiția 3 și teorema 2 rezultă că orice schemă-graf generalizată a cărei mulțime a perechilor de operatori separabili este nevidă, este o schemă decompozabilă.

O schemă-graf generalizată care nu este decompozabilă se numește *indecompozabilă*. Mulțimea perechilor de operatori separabili a unei scheme-graf generalizate indecompozabilă este vidă.

Descompunerea unei scheme-graf în subscheme-graf se face efectuînd toate tăieturile posibile în schema dată.

2. FORMA CANONICĂ A UNEI SCHEME-GRAF

2.1. Schema-graf S se numește *elementară*, dacă ea are forma din figura 1, unde blocul *1* este o schemă-graf generalizată cu o singură intrare (1) și care nu conține cicluri. Vom numi această schemă, *subschemă-graf interioară ciclului.*

2.2. Schema-graf S este de tip elementar, dacă ea are aceiași formă (fig. 1) și subschema-graf interioară ciclului este o schemă-graf generalizată oarecare cu o singură intrare.

Evident că orice schemă-graf elementară este o schemă-graf de tip elementar.

Noțiunea de formă canonică a unei scheme-graf S se definește în felul următor :

2.3. Vom spune că o schemă-graf S este adusă la forma canonică dacă ea satisface una din următoarele cerințe :

a) S nu conține cicluri.

b) S este o schemă-graf elementară.

c) S este o schemă-graf de tip elementar, a cărei subschemă-graf interioară ciclului este adusă la forma canonică.

d) S are forma din figura 2 unde subschemele-graf *1* și *2* sînt aduse la forma canonică.

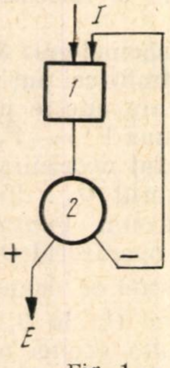


Fig. 1

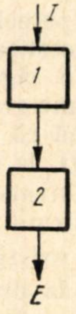


Fig. 2

DEFINIȚIA 4. Algoritmul schemă-graf $\mathfrak{A}$ este adus la forma canonică, dacă schema-graf corespunzătoare este adusă la forma canonică.

TEOREMA 2. *Orice algoritm schemă-graf poate fi adus la forma canonică.*

Pentru a demonstra această teoremă vom da o metodă de construire a formei canonice a unui algoritm schemă-graf oarecare. Fie algoritmul $\mathfrak{A}$, care constă din operatorii $O_0, O_1, \dots, O_n$, unde O_n este ieșirea.

Dacă O_j este un operator de atribuire şi O_l este succesorul lui, iar i este o variabilă care nu intră în descrierea algoritmului $\mathfrak{A}$, atunci vom nota cu K_j ($j = 1, 2, \ldots, n-1$) schema-graf din figura 3.

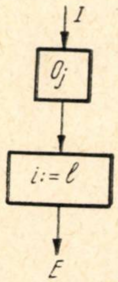


Fig. 3

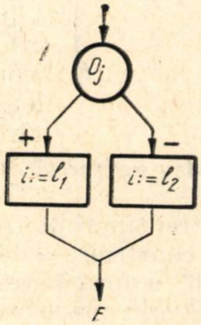


Fig. 4

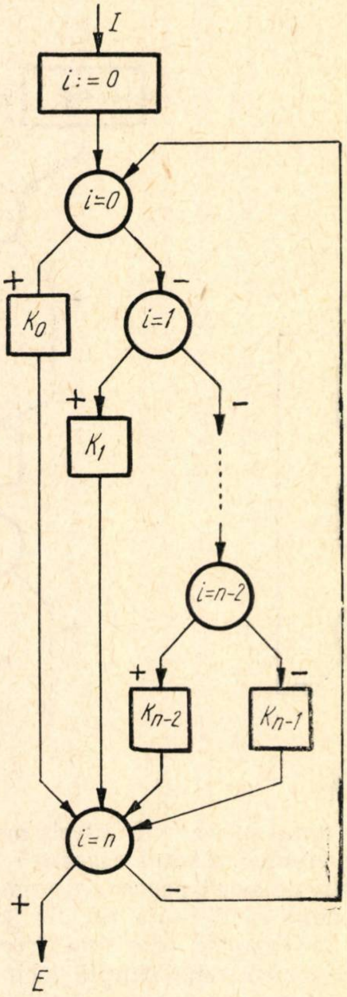


Fig. 5

Dacă O_j este un operator logic iar O_{l_1} şi O_{l_2} sînt succesorii lui, atunci vom nota cu K_j schema-graf generalizată din figura 4.

Construim algoritmul schemă-graf $\mathfrak{A}^*$ a cărui schemă-graf S este cea din figura 5.

Este evident că algoritmul $\mathfrak{A}^*$ este echivalent cu algoritmul $\mathfrak{A}$, iar schema-graf S este elementară. Rezultă deci că algoritmul $\mathfrak{A}^*$ este forma canonică a algoritmului $\mathfrak{A}$.

Metoda aceasta nu corespunde întrutotul scopului pe care îl urmărim, deoarece se obţine o schemă-graf elementară, cu o structură foarte complicată a ciclului chiar şi în cazurile simple. Or, pentru a construi formula ataşată unui algoritm, noi tindem să obţinem o formă canonică cu o structură simplă a ciclurilor.

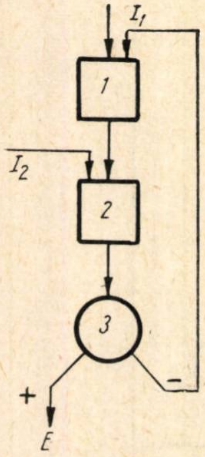


Fig. 6

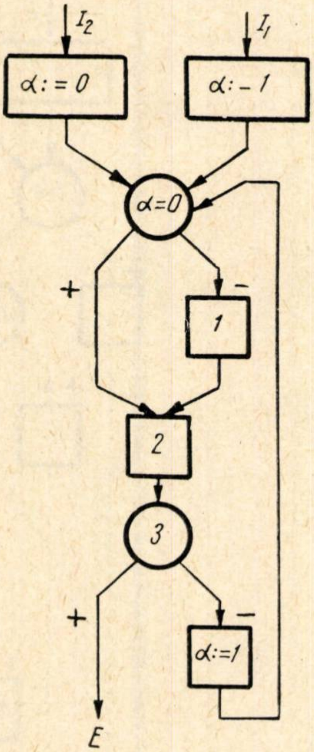


Fig. 7

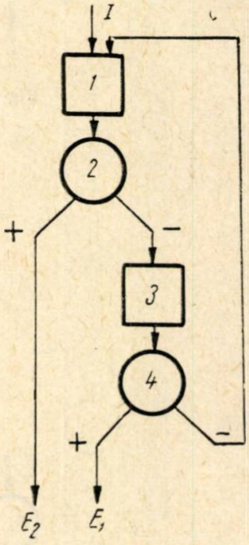


Fig. 8

Vom numi procedeul descris mai sus *procedeu universal* de construire a formei canonice a unui algoritm dat.

Alături de acest procedeu, vom introduce trei tipuri de transformări, care ne permit să definim un alt procedeu de construire a formei canonice, care în cazurile cele mai frecvente ne dă o formă canonică cu o structură a ciclurilor mai simplă decît cea obţinută prin procedeul universal.

2.4. Schema-graf generalizată S se numeşte *schemă-graf cu două intrări*, dacă este de forma din figura 6 unde subschemele *1* şi *2* sînt scheme-graf oarecare, care nu au alte intrări şi ieşiri decît cele reprezentate în figură.

Fie $\mathfrak{A}$ algoritmul definit de S şi de o interpretare dată şi α o variabilă ce nu intră în descrierea lui $\mathfrak{A}$. Atunci $\mathfrak{A}$ este echivalent cu algoritmul definit de schema-graf din figura 7 şi de aceeaşi interpretare.

Schema-graf generalizată din figura 7 se descompune într-o schemă-graf generalizată fără cicluri şi o schemă-graf de tip elementar.

2.5. Schema-graf generalizată S se numeşte *schemă-graf cu două ieşiri* dacă este de forma din figura 8 unde schemele-graf *1* şi *2* sînt oarecare şi nu conţin alte intrări şi alte ieşiri decît cele reprezentate în figură.

Fie $\mathfrak{A}$ algoritmul definit de S şi de o interpretare dată, iar α şi β variabile ce nu intră în descrierea lui $\mathfrak{A}$. Atunci $\mathfrak{A}$ este echivalent cu algoritmul definit de schema-graf din figura 9 şi de aceeaşi interpretare.

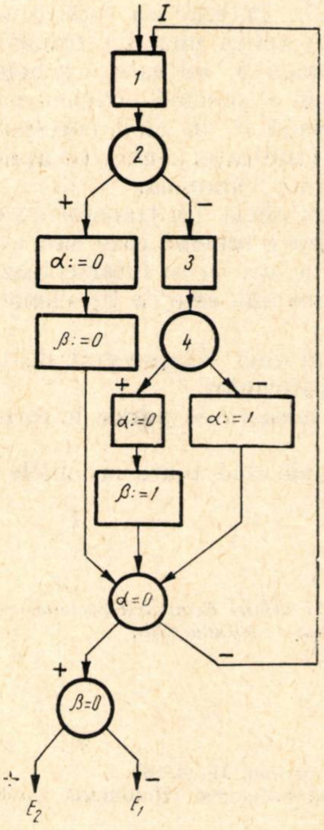


Fig. 9

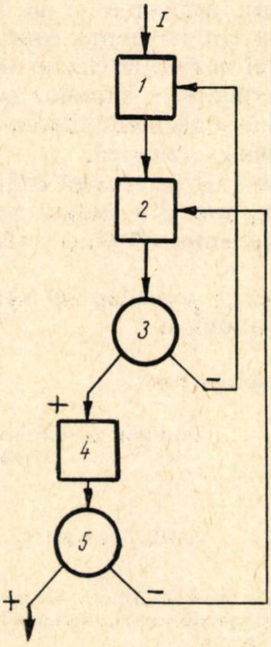


Fig. 10

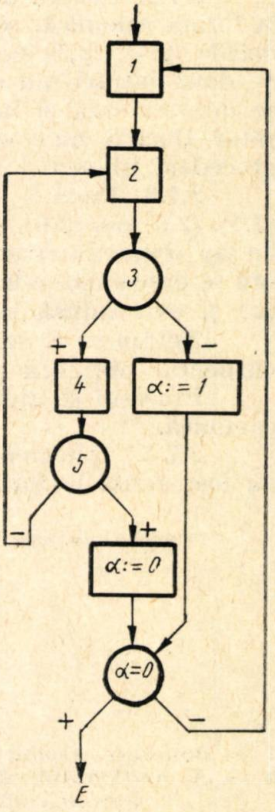


Fig. 11

Schema-graf generalizată din figura 9 se descompune într-o schemă-graf de tip elementar şi o schemă-graf generalizată fără cicluri.

2.6. Schema-graf S se numeşte schemă *cu cicluri ce se intersectează* dacă este de forma din figura 10 unde subschemele *1*, *2* şi *4* sînt oarecare şi nu au alte intrări şi ieşiri decît cele reprezentate în figură.

Fie $\mathfrak{A}$ algoritmul definit de schema-graf S şi de o interpretare dată, iar α o variabilă ce nu intră în descrierea lui $\mathfrak{A}$. Atunci $\mathfrak{A}$ este echivalent cu algoritmul definit de aceeaşi interpretare şi de schema-graf din figura 11. Schema-graf din figura 11 este o schemă-graf de tip elementar.

Schemele cu două intrări, cu două ieşiri şi schemele cu cicluri ce se intersectează nu epuizează toate tipurile de scheme-graf neaduse la forma canonică.

Pe baza acestor transformări descrise mai sus, definim următorul procedeu de construire a formei canonice.

2.7. Fie algoritmul schemă-graf $\mathfrak{A}$ definit de schema-graf S şi de o interpretare dată.

2.7.1. Descompunem schema-graf S în subschemele indecompozabile $S_1, S_2, \ldots, S_k$.

2.7.2. Pentru fiecare schemă S_i ($i = 1, 2, \ldots, k$), care nu este adusă la forma canonică, se verifică dacă nu se poate aplica una din transformările (2.4), (2.5) sau (2.6), adică se verifică dacă S_i nu este o schemă cu două intrări sau o schemă cu două ieşiri sau o schemă cu cicluri ce se intersectează şi în caz afirmativ se transformă S_i în mod corespunzător. Dacă S_i nu este de unul din cele trei tipuri indicate, atunci se aplică procedeul universal pentru aducerea ei la forma canonică.

2.7.3. Dacă S_i a fost transformată conform uneia din transformările (2.4), (2.5) sau (2.6), atunci în fiecare caz se obţine o schemă care sau este de tip elementar (transformarea schemelor cu cicluri ce se intersectează) sau se descompune în două subscheme dintre care una este de tip elementar şi este adusă la forma canonică.

Notăm cu S'_i schema-graf interioară ciclului unei scheme-graf de tip elementar obţinută printr-una din aceste transformări.

Procesul se aplică schemei S'_i pînă cînd aceasta se aduce la forma canonică.

2.7.4. Aplicarea acestui procedeu se termină cînd toate schemele S_i au fost aduse la forma canonică.

Primită la redacţie la 9 august 1966

Institutul de calcul al Academiei Republicii Socialiste
România — Filiala Cluj.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Munteanu, *Analiza logică a algoritmilor (I)*. St. cerc. matem. **18**, (1966).
2. Л. А. Калужнин, *Об алгоритмизации математических задач*. Проблемы кибернетики, вып. 3. (1959).

OPERATORI HYPONORMALI (I)

DE

VASILE I. ISTRĂŢESCU

Prezenta expunere este destinată teoriei operatorilor hyponormali (T este hyponormal dacă $T^*T - TT^* \geqslant 0$) şi se bazează pe materialul prezentat la seminarul de *Analiză Fourier şi teoria operatorilor*. În această primă parte se expun rezultate cunoscute în literatură, se dau diferite extensii unor teoreme precum şi unele demonstraţii noi.

Bibliografia se află la sfîrşitul părţii a doua.

Introducere. Fie H un spaţiu Hilbert iar $\mathcal{L}(H)$ algebra Banach a operatorilor liniari şi mărginiţi definiţi pe H. Una din problemele importante în teoria operatorilor pe spaţii Hilbert este aceea a existenţei unei prelungiri a operatorului $T \in \mathcal{L}(H)$. De exemplu, dacă ne punem problema ca operatorul $T \in \mathcal{L}(H)$ să aibă o prelungire normală, se deduce imediat, ca o condiţie necesară, că

$$\|T^* x\| \leqslant \|Tx\| \qquad x \in H$$

sau

$$T^* T - TT^* \geqslant 0 . \tag{1}$$

Rezultă astfel că într-un anumit sens, operatorii care satisfac relaţia (1) sînt cei mai apropiaţi de operatorii normali.

În cele ce urmează ne vom ocupa tocmai de astfel de operatori.

1. DEFINIŢII. PROPRIETĂŢI

DEFINIŢIA 1.1. Un operator $T \in \mathcal{L}(H)$ este hyponormal dacă

$$T^* T - TT^* \geqslant 0 .$$

PROPOZIŢIA 1.1. *Dacă T este hyponormal, atunci* :

a) *pentru orice z, $T_z = T - zI$ este hyponormal* ;

b) *dacă $Tx = zx$, atunci $T^* x = \bar{z}x$* ;

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 423–437, BUCUREŞTI, 1967

c) *dacă* $Tx_1 = z_1 x_1$, $Tx_2 = z_2 x_2$, $z_1 \neq z_2$, *atunci*

$$\langle x_1, x_2 \rangle = 0 .$$

Demonstrație. Avem

a) $T_z^* = T^* - \bar{z} I$. Deci

$$T_z^* T_z - T_z T_z^* = (T^* - \bar{z} I)(T_z - zI) - (T - zI)(T^* - \bar{z} I) =$$

$$= T^* T - T T^* \geqslant 0 ;$$

b) $\| T^* x - \bar{z} x \|^2 = \langle T_x^* x - \bar{z} x, T^* x - \bar{z} x \rangle = \langle T^* T x, x \rangle -$

$- \langle T_x^*, \bar{z} x \rangle - \langle \bar{z} x, T_x^* \rangle + |z|^2 \, \|x\|^2 = 0 ;$

c) $\langle x_1, x_2 \rangle = \dfrac{1}{\bar{z}_2} \langle x_1, T x_2 \rangle = \dfrac{z_1}{\bar{z}_2} \langle x_1, x_2 \rangle = \dfrac{\bar{z}_2}{z_1} \langle x_1, x_2 \rangle$

și cum $z_1 \neq z_2$, deducem că trebuie să avem $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ și propoziția este demonstrată.

Fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Prin $W(T)$ vom înțelege închiderea mulțimii $\langle Tx, x \rangle$ cu $\|x\| = 1$. Se știe că, conform teoremei lui Hausdorff-Toeplitz, $W(T)$ este o mulțime convexă și conține spectrul lui T (pe care-l vom nota cu $\sigma(T)$). În cele ce urmează ne vor interesa proprietățile legate de spectrul operatorului T în cazul cînd este hyponormal.

Vom da mai întîi cîteva leme care prezenta inters și în sine.

PROPOZIȚIA 1.2. *Dacă T este hyponormal și $\| T \| \leqslant 1$, atunci subspațiul*

$$M = \{ x, x \in H, \ T T^* x = x \}$$

are următoarele proprietăți:

1°. *este închis*;
2°. $T^* T \; x = x$;
3°. $TM \subset M$;
4°. T/M *este o izometrie.*

Demonstrație. Faptul că M este închis, este evident. Pentru a demonstra proprietatea 2° vom calcula $\| T^* T \, x - x \|$. Vom avea

$$\| T^* T x - x \|^2 = \langle T^* T x - x, T^* T x - x \rangle = \| T^* T x \|^2 - \| T x \|^2 -$$

$$- \| T^* x \|^2 + \| x \|^2 = \| T^* T x \|^2 - \| T^* x \|^2 \leqslant \| T x \|^2 - \| T x \|^2 \leqslant 0.$$

Pentru proprietatea 3° observăm că dacă $x \in M$, $T^* T x = x$ și deci

$$T T^* (T x) = T (T^* T x) = T x .$$

Operatorul T/M este evident o izometrie.

Observație. Propoziția 1.2 furnizează, pentru diferite subclase de operatori hyponormali, subspații invariante. Problema care se pune este de a găsi subspații $M \neq \{0\}$.

PROPOZIȚIA 1.3. *Orice operator izometric are o valoare proprie aproximativă de modul* 1.

Demonstrație. Fie T izometric. Deci $T^* T = I$ (fără ca să avem în mod necesar $TT^* = I$). Dacă $1 \in \sigma(T)$, cum $\| T \| = 1$, rezultă că 1 este o valoare proprie aproximativă, adică există x_n, $\| x_n \| = 1$ astfel ca $\| Tx_k - x_n \| \to 0$.

Dacă $1 \overline{\in} \sigma(T)$, atunci $I - T$ are invers și fie

$$A = i(I + T)(I - T)^{-1} = i(I - T)(I + T).$$

Cum $T^* T = I$, este imediat că $A = A^*$. Deci $A + iI$ și $A - iI$ sînt operatori în invers continuu și

$$(I - T)A = i(I + T),$$

rezultă că

$$T = (A - iI)(A + iI)^{-1} = (A + iI)^{-1}(A - iI).$$

Cum A este simetric, spectrul aproximativ al lui A nu este vid. Fie deci $\alpha \in \sigma(A)$ cu

$$\|Ax_n - \alpha x_n\| \to 0$$

și fie

$$\mu = (\alpha + i)^{-1}(\alpha - i).$$

Să arătăm că μ este o valoare proprie aproximativă pentru T. Vom avea

$$\begin{aligned} T - \mu I &= (A + iI)^{-1}(A - iI) - (\alpha + i)^{-1}(\alpha - i)I = \\ &= (\alpha + i)^{-1}(A + iI)^{-1}[(\alpha + i)(A - iI) - (\alpha - i)(A + iI)] = \\ &= 2i(\alpha + i)^{-1}(A + iI)^{-1}(A - \alpha I). \end{aligned}$$

De aici rezultă imediat afirmația făcută, pentru că $A + iI$ este mărginită, iar $\{x_n\}$ satisface relația

$$\|(A - \alpha)x_n\| \to 0.$$

Proprietatea este astfel demonstrată.

TEOREMA 1.1. *Orice operator hyponormal T are o valoare proprie aproximativă μ astfel ca $\| T \| = |\mu|$.*

Demonstrație. Putem presupune fără a restrînge generalitatea, că $\| T \| = 1$. Cum $TT^* \geqslant 0$ și $\| TT^* \| = 1$, 1 este o valoare proprie aproximativă pentru TT^*. Construind un spațiu Hilbert ajutător, și anume spațiul șirurilor de elemente mărginite $\{x_n\}$, $x_n \in H$, cu

$$\langle s, t \rangle = g \lim \langle x_n, y_n \rangle,$$

unde $s = (x_n)$, $t = (y_n)$, putem presupune că 1 este o valoare proprie pentru TT^*. Deci

$$M = \{x,\ TT^* x = x\}$$

nu se reduce la subspațiul nul. În T/M este o izometrie. Deci, conform propoziției 1.3, are o valoare proprie aproximativă. Deci există $x_n \in M$ astfel ca

$$\| Tx_n - \mu x_n \| \to 0$$

și teorema este demonstrată.

O altă demonstrație a acestei teoreme poate fi dată utilizînd formula razei spectrale, dată de Beurling-Gelfand.

În adevăr,

$$\gamma_T = \lim \| T^n \|^{1/n} .$$

Vom arăta că $\gamma_T = \| T \|$. În adevăr, pentru orice $x \in H$, $\| x \| = 1$,

$$(2) \qquad \| Tx \|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^* Tx, x \rangle \leqslant \| T^* Tx \| \leqslant \| T^2 x \| .$$

De aici deducem cu ușurință că

$$\| T^2 \| = \| T \|^2 .$$

Dacă $\| T^n \| = \| T \|^n = 1$ și $\| T^{n+1} \| = \| T \|^{n+1} = 1$, atunci $\| T^{n+2} \| = \| T \|^{n+2} = 1$.

În adevăr,

$$\| T^{n+1} x \|^2 = \left\| T \frac{T^n x}{\| I^n x \|} \right\|^2 \| T^n x \|^2 \leqslant \left\| T^2 \frac{T^n x}{\| T^n x \|} \right\| \| T^n x \|^2 =$$

$$= \| T^{n+2} x \| \, \| T^n x \|$$

de unde

$$\| T^{n+2} \| \geqslant 1 .$$

Prin inducție deducem că

$$\| T^n \| = \| T \|^n , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Deci $\gamma_T T = \| T \|$ și teorema este astfel demonstrată.

Observație. În această demonstrație, faptul că operatorul este hyponormal intervine numai sub forma inegalității (2). Este evident următorul corolar:

COROLARUL 1.1. *Orice operator hyponormal, nilpotent generalizat este nul.*

Să scriem pe T sub forma

$$T = T_1 + i T_2 ,$$

unde T_i sînt simetrici. Faptul că T este hyponormal implică

$$T_1 T_2 - T_2 T_1 = i/2 \, (T^* T - T T^*) .$$

Pentru operatorii normali, ca o consecință a teoremei spectrale, se știe că $\mathrm{Pr}^x \sigma(T) = \sigma(T_1)$ $\mathrm{Pr}^y \sigma(T) = \sigma(T_2)$. Vom arăta acum cum se poate extinde această teoremă la operatorii hyponormali.

TEOREMA 1.2. *Dacă T este hyponormal, atunci*:

1) $x_0 \in \sigma(T_1)$, *există y_0' real astfel ca pentru un anumit șir h_n*,

$$(T_1 - x_0) h_n \to 0 , \; (T_2 - y_0') h_n \to 0 .$$

2) *pentru* $x_0 + i y_0 \in \sigma(T)$, *atunci* $x_0 \in \sigma(T_1)$, $y_0 \in \sigma(T_2)$.

Demonstrație. 1) Fie $x_0 \in \sigma(T_1)$. În acest caz există f_n astfel ca

$$(T_1 - x_0) f_n \to 0$$

și deci

$$T_2 (T_1 - x_0) f_n \to 0 .$$

Însă

$$(3) \qquad (T_1 - x_0 I)\, T_2 - T_2 (T_1 - x_0 I) = i\,(T^* T - T T^*)$$

şi deci cum $C = T^* T - T T^* \geqslant 0$, rezultă că

$$C f_n \to 0 .$$

În adevăr, $C^{1/2} f_n \to 0$ după cum rezultă din relaţia (3) pe care o aplicăm elementelor f_n şi înmulţim scalar cu f_n. Din (3) rezultă că

$$(T_1 - x_0 I)\, T_2 f_n \to 0 .$$

Repetînd procedeul pentru şirul $\{T_2 f_n\}$ vom avea că

$$(T_1 - x_0 I)\, T_2 f_n \to 0.$$

Analog pentru orice putere a lui T_2. De aici rezultă că pentru orice polinom,

$$(T_1 - x_0 I)\, p\,(T) f_n \to 0 .$$

Prin urmare pentru orice funcţie φ aproximabilă uniform pe axa reală, de polinoame, are loc relaţia

$$(T_1 - x_0 I)\, \varphi\,(T) f_n \to 0 .$$

Cum T este simetric,

$$T = \int \lambda \, \mathrm{d}F\,(\lambda)$$

şi fie $\sigma(T_2) \subset [c, d]$. Atunci $\|F([c, d]) f_n\| = 1$ pentru orice n. Deci, pentru cel puţin unul din intervalele $\Delta_1 = \left[\, c, \frac{1}{2}(c + d) \right]$, $\Delta_2 = \left[\frac{1}{2}(c + d), d \,\right]$, de exemplu $\Delta = \Delta_2$, trebuie să avem relaţia

$$\|F(\Delta_2) f_n^{(2)}\| \geqslant 1/2 , \qquad n = 1, 2, \ldots ,$$

unde $\{f_n^{(2)}\}$ este un subşir al lui $\{f_n\}$.

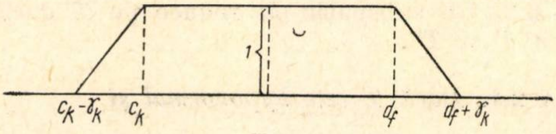
Continuînd obţinem un şir de intervale $\{\Delta_k\}$, $\mu(\Delta_k) \leqslant \frac{d - c}{2^k}$ incluse unul în următorul lui, astfel ca

$$\|F(\Delta_k) f_n^{(k)}\| \geqslant \frac{1}{2^{k-1}},$$

$\{f_n^{(k+1)}\}$ fiind un subşir al lui $\{f_n^{(k)}\}$.

Fie y_0' numărul real determinat de şirurile de numere reale care sînt definite de extremităţile intervalelor Δ_k.

Vom defini o funcţie φ_k continuă pe axa reală care are graficul următor :



unde $\gamma_k \to 0$, $\gamma_k > 0$.

Este evident că

$$0 \leqslant (2^{k-1})^{-1} \leqslant \|F(\Delta k) f_n^{(k)}\| \leqslant \|\varphi_k(T_2) f_n^{(k)}\| \leqslant \|f_n^{(k)}.$$

Fie $g_{kn} = \varphi_k(T_2) f_k^{(n)} / \|\varphi_k(T_2) f_k^{(n)}\|$. Este clar că pentru orice k.

$$(T_1 - x_0 I)\, g_{kn} \to 0$$

şi din definiţia şirului g_{kn},

$$\|(T_2 - y_0')\, g_{kn}\| \leqslant d_k - c_k + \gamma_k .$$

Cum $\gamma_k \to 0$, putem determina un subşir $g_k m_k = h_k$ astfel ca

$$(T_1 - x_0 I)\, h_k \to 0$$

$$(T_2 - y_0' I)\, h_k \to 0$$

şi 1) este demonstrată.

Observaţie. Analog se procedează dacă ne dăm $y_0 \in \sigma(T_2)$.

2) Fie $q = x_0 + iy_0 \in \sigma(T)$. Să luăm $T_z = T - zI$. Rezultă imediat că

$$T_z T_z^* = (T_1 - xI)^2 + (T - yI)^2 + C$$

dacă $z = x + iy$.

Dacă $T_q T_q^*$ este singular, există $\{f_n\}$, $\|f_n\| = 1$ astfel ca

$$\langle T_q^* T_q f_n, f_n \rangle \to 0 .$$

Din relaţiile de mai sus, ţinînd seama că $C \geqslant 0$, rezultă că

$$(T_1 - x_0 I) f_n \to 0 ,$$

$$(T_2 - y_0 I) f_n \to 0 .$$

În cazul $T_q T_q^* > 0$, operatorul $T_q^* T_q$ este singular şi deci există un disc în $\sigma(T)$ (discul are centrul în q). Fie y_0' maximul valorilor y, pentru care $z = x + iy$, Tz este singular.

În acest caz $x_0 + iy_0 \in \sigma(T)$ şi $T_{x_0+iy_0} T^*_{x_0+iy_0}$ trebuie să fie singular; deducem ca şi mai sus că $x_0 \in \sigma(T_1)$ şi evident $y_0 \in \sigma(T_2)$.

2. TEOREMA DE STRUCTURĂ ŞI APLICAŢII

S. Berberian a pus problema dacă un operator hyponormal şi compact trebuie să fie în mod necesar normal. Problema a fost rezolvată în sens afirmativ de T. Andô. În acest paragraf vom da teoreme de acest tip.

Definiţia 2.1. Un subspaţiu închis $M \subset H$ este invariant pentru operatorul T dacă pentru orice $x \in M$, $Tx \in M$.

Definiţia 2.2. Un subspaţiu M reduce pe T dacă este invariant pentru operatorii T şi T^*.

Are loc:

Propoziţia 2.1. *Dacă T este hyponormal şi*

$$M = \{x,\ Tx = zx\},$$

atunci M reduce pe T.

Demonstrație. Consecința imediată a propoziției 1.1 b).

PROPOZIȚIA 2.2. *Dacă T este hyponormal și $M \subset H$ este invariant pentru T, atunci T_M este hyponormal.*

Demonstrație. Trebuie să arătăm că

$$\| T_M x \| \geqslant \| T_M^* x \|$$

oricare ar fi $x \in M$. Însă T^*/M admite ca prelungire pe T^* și afirmația este demonstrată.

TEOREMA 2.1. *Dacă T este hyponormal și pentru un întreg $k \geqslant 1$ operatorul $T^* T^k$ este compact, atunci T este normal.*

Observație. Pentru $k = 1$, $T^* T = C$, C compact dacă și numai dacă T este compact.

Demonstrația teoremei va rezulta din următoarea propoziție care prezintă interes și în sine.

PROPOZIȚIA 2.3. *În spațiul Hilbert H există un șir $\{x_n\}$, $\| x_n \| = 1$ astfel încît*

$$
\begin{array}{lll}
1^\circ & \| T^* x_n \| \to 1 & \\
2^\circ & \| T^m x_n \| \to 1 & m = 1, 2, 3, \ldots \\
3^\circ & T^* T x_n - x_n \to 0 & \\
4^\circ & T T^* x_n - x_n \to 0 & \\
5^\circ & T^* T^m x - T^{m-1} x_n \to 0 & m = 1, 2, 3, \ldots
\end{array}
$$

Demonstrație. Observăm că 1° → 4° și 2° → 3°. Rămîne să demonstrăm numai 1°, 2° și 5°. Din definiție rezultă că există un șir $\{x_n\}$, $\| x_n \| = 1$ (Evident, presupunem că în teorema 2.1, $\| T \| = 1$, ceea ce nu restrînge generalitatea), astfel ca $\| T^* x_n \| \to 1 = \| T \| = \| T^* \|$. Cum am observat mai sus (demonstrația teoremei 1.1),

$$\| Tx \|^2 \leqslant \| T^2 x \|$$

și deci

$$\lim \| T x_n^2 \| = 1 ,$$

adică $\| T^2 \| = 1$.

Să presupunem acum că pentru un întreg l avem relațiile:

$$\lim \| T^{l-1} x_n \| = 1$$

$$\lim \| T^l x_n \| = 1 ;$$

atunci

$$\lim \| T^{l+1} x_n \| = 1 .$$

Aceasta rezultă imediat din relația

$$\left\| T^2 \frac{T^{l-1} x_n}{\| T^{l-1} x_n \|} \right\| \geqslant \left\| \frac{T^{l+1} x_n}{\| T^{l-1} x_n \|} \right\|^2 .$$

Prin inducție, rezultă 2°.

Pentru a demonstra 5° să punem

$$y_n (m) = T^* T^m x_n - T^{m-1} x_n$$

și

$$\delta_n(m) = \|y_n(m)\|^2;$$

aplicînd 2° rezultă că $\delta_n(m) \to 0$ pentru orice m fix. Propoziția este astfel demonstrată.

Demonstrația teoremei 2.1. Fie k întregul pentru care $T^* T^k$ este un operator compact și $\{x_n\}$ șirul găsit în propoziția de mai sus. Deducem că $\{T^{k-1} x_n\}$ conține un subșir convergent. Prin inducție, repetînd raționamentul, deducem că $\{x_n\}$ conține un subșir convergent $\{x_{n_k}\}$.

Fie

$$x_0 = \lim x_{n_k}.$$

Este evident că

$$T^* T x_0 = x_0$$

$$T T^* x_0 = x_0$$

și subspațiul M (propoziția 1.2) nu se reduce la $\{0\}$. Din propoziția 1.3 deducem că există λ, $|\lambda| = 1$ și $\{y_n\} \subset M$ astfel ca

$$Ty_n - \lambda y_n \to 0.$$

Exact ca mai sus, arătăm că λ este o valoare proprie pentru T și de asemenea $\bar{\lambda}$ este valoare proprie pentru T^*.

Fie M cel mai mic subspațiu închis care conține orice subspațiu propriu al lui T și fie $N = M^{\perp}$. Este clar că N este invariant pentru T și T^* și deci $T^* T^k$ este complet continuu pe N. Însă T pe N este hyponormal. Rezultă că $N = 0$ și teorema este demonstrată.

TEOREMA 2.2. *Dacă T este hyponormal și pentru doi întregi p și q*

$$T^{*p} T^q = C, \ C \text{ compact},$$

atunci T este normal.

Demonstrația acestei teoreme se face aproape la fel cu cea a teoremei 2.1 și de aceea o omitem.

DEFINIȚIA 2.3. Un operator T se zice normaloid dacă

$$\|T\| = \sup|\lambda|, \quad \lambda \in W(T),$$

unde $W(T) = \{\langle Tx, x\rangle, \|x\| = 1\}$, T de clasă (n).

TEOREMA 2.3. *Dacă T este un operator hyponormal, invertibil, atunci T^{-1} este normaloid și*

$$T^{-1} = \{\min|\mu|, \ \mu \in \sigma(T)\}^{-1}.$$

Demonstrație. Fie $y \in H$ și $\|y\| = 1$. Cum T este invertibil, deducem că există x, $x \in H$, astfel încît $y = T^2 x$. Deci, ținînd seama că T este hyponormal,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^* Tx, x\rangle \leqslant \|T^2 x\| \times \|x\| = \|x\|.$$

Deci

$$\|Tx\|^2 \leqslant \|x\| = \|T^{-2} y\|$$

adică

$$\|T^{-1} y\|^2 \leqslant \|T^{-2} y\|.$$

Deci T este de clasă (n) și afirmația este demonstrată.

Observație. Demonstrația arată că teorema este adevărată și pentru operatori de clasă (n). Estimarea normei este consecința teoremei lui Dunford.

Să observăm că dacă $i\lambda$ nu este în spectru ($\sigma(T)$ real), avem

$$\|R_i\lambda\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|},$$

relație de care ne vom folosi pentru stabilirea naturii operatorului T (în fapt, teorema lui Nieminen, care afirmă că T este autoadjunct).

Ca un corolar al teoremei 2.3 notăm

TEOREMA 2.4. *Dacă T este de clasă (n) cu spectrul pe cercul unitate, atunci el este o izometrie.*

În adevăr, T este normaloid și deci cum $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$, avem

$$\|Tx\| = \|x\|.$$

oricare ar fi $x \in H$.

Dacă T este hyponormal, atunci el este unitar. Într-adevăr, un operator hyponormal cu spectrul pe cercul unitate trebuie să fie unitar, pentru că

$$\langle x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \leqslant \langle T^* Tx, x\rangle \leqslant \langle x, x\rangle.$$

TEOREMA 2.5. *Dacă T este hyponormal și z un punct izolat al spectrului, atunci z este în spectrul punctual.*

În adevăr, utilizînd proprietatea de hyponormalitate, putem presupune că $z = 0$ și cum $z = 0$ este izolat, fie C_ε un cerc care-l înconjură disjunct de restul spectrului. Fie

$$E_{z_0} = \int_{C_\varepsilon} (T - zI)^{-1}\, dz,$$

care se verifică, prin procedeu standard, că este un proiector. Spațiul $E_{z_0}H$ este invariant pentru T și deci restricția lui T la acest spațiu este un operator hyponormal. Cum spectrul este în $\sigma(T) \cap C_\varepsilon$, rezultă că restricția lui T la $E_{z_0}H$ este un operator nilpotent generalizat. Deci este nul. Deci $E_{z_0}H = \{x, Tx = 0\}$ și teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă reprezintă o aplicație a acestei teoreme.

TEOREMA 2.6. *Dacă T este un operator hyponormal, $\sigma(T)$ are un singur punct limită, atunci T trebuie să fie normal.*

Demonstrație. Vom putea presupune, utilizînd proprietatea de hyponormalitate, că punctul limită este zero.

Cum T este hyponormal, există $\lambda_1 \in \sigma_1'(T)$, $|\lambda_1| = \|T\|$. Fie

$$M_1 = \{x, Tx = \lambda_1 x\}$$

care nu este vidă, conform teoremei 2.5.

Din propoziția 1.1 b) rezultă că M reduce pe T, și din proprietățile spectrelor $\lambda_1 \overline{\in} (T/M_1^{\perp})$, $M_1^{\perp}$ este complementul ortogonal al lui M_1 și $T/M_1^{\perp}$ este hyponormal, iar T/M_1 este normal.

Vom continua în acest mod şi vom obţine spaţiile $M_i = \{ x, x \in H, Tx = \lambda_i x\}$ care reduc pe T şi $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$ reduce pe T, $T / \overset{n}{\underset{i-1}{\oplus}} M_i$ este normal şi $T / \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i^{\top}$ este hyponormal. Cum zero este singurul punct limită în spectru, $T / \overset{n}{\underset{i-1}{\oplus}} M_i \to T$ şi teorema este demonstrată.

Consecinţa 1. (Un caz particular al teoremei 2.1). *Dacă T este hyponormal şi compact, atunci el trebuie să fie compact.*

Consecinţa 2. *Dacă T are un număr finit de puncte limită în spectru şi este hyponormal, atunci el trebuie să fie normal.*

Dacă z_0 este un punct limită, fie C_ε un cerc care nu intersectează $\sigma(T)$ şi conţine numai punctul z_0 în interior. Punînd

$$E_{z_0} = \int_{C_\varepsilon} (T - z)^{-1}\, \mathrm{d}z$$

obţinem un proiector, spaţiul $E_{z_0} H$ este invariant pentru T şi $\sigma(T/E_{z_0}H) \subset C_\varepsilon$ şi aplicăm teorema. Deducem că $T/E_{z_0}H$ este normal. După un număr finit de aplicări ale acestui procedeu, obţinem că T este normal.

Să considerăm operatorul hyponormal T scris sub forma

$$T = H + iJ.$$

În acest caz condiţia de hyponormalitate se scrie

$$HJ - JH = \frac{i}{2}(T^*T - TT^*).$$

Fie acum A şi B doi operatori mărginiţi, A autoadjunct şi B astfel ca :

$$AB - BA = C$$

să fie un operator pozitiv (autoadjunct). Are loc

Teorema 2.7. $\|C\| \leqslant \|B\|$ măs sp A.

Demonstraţie. Cum A este operator autoadjunct, rezultă că

$$A = \int_m^M \lambda E(\mathrm{d}\lambda).$$

Pentru orice Δ, interval în $[m, M]$, avem

$$E(\Delta)\, CE(\Delta) = \int_\Lambda \lambda \mathrm{d}EBE(\Delta) - E(\Delta)B\int_\lambda \lambda E(\mathrm{d}\lambda)$$

care se obţine din

$$C = AB - BA$$

prin înmulţire la dreapta şi la stînga cu $E(\Delta)$.

Relaţia se păstrează dacă λ este înlocuit prin $\lambda - \alpha$. Alegem α punctul de la jumătatea segmentului Δ. Deci $|\lambda - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}$d. Deducem

$$\|C^{1/2} E(\Delta) x\| \leqslant \left[2\,\|B\|\, E(\Delta)\, x\|^2\, \frac{1}{2}\, d\right]^{1/2}.$$

Dacă luăm acum o diviziune, prin aplicarea inegalității lui Schwarz obținem

$$\|C^{1/2}x\| \leqslant \|B\| \text{ măs sp } (A)\, \|x\|$$

și cum $\|C^{1/2}\| = \|C\|^{1/2}$ teorema este demonstrată.

Observație. Din această teoremă rezultă imediat consecința 1, căci măsura Lebesgue a spectrului unui operator simetric și compact este nulă.

TEOREMA 2.8. *Dacă A și B sînt operatori mărginiți, unitar echivalenți autoadjuncți și*

$$A - B \geqslant 0,$$

atunci

$$\text{măs sp } U \geqslant 2\pi \, \|A - B\| \, \delta^{-1},$$

unde U, $B = UAU^*$ și δ este distanța dintre maximul și minimul numerelor din spectrul lui A.

Demonstrație. Cum U este unitar, avem

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda}\, dE\lambda$$

și fie $S = \{\lambda, \lambda \in [0, 2]\}, e^{i\lambda} \in \text{sp } U\}$, $S^* [0, 2\pi] - S$. Fie $f(\lambda)$ o funcție măsurabilă în raport cu familia spectrală a operatului U, care este zero pe S. În acest caz avem

$$\int_0^{2\pi} f(\lambda)\, e^{i\lambda}\, dE\lambda = 0\,.$$

Cum $D = A - B \geqslant 0$ are rădăcină pătrată, fie aceasta $D^{1/2}$ și aplicînd-o relației de mai sus obținem

$$(4)] \qquad D^{1/2} \int_0^{2\pi} f(\lambda)\, e^{i\lambda}\, dE_\lambda = 0.$$

Putem presupune că S^* nu este vidă. În adevăr, în caz contrar $S = [0, 2\pi]$ și relația pe care vrem să o demonstrăm are loc.

Să presupunem acum că f este o funcție nulă pe S și care are derivata întîi continuă. În acest caz ea este egală cu suma seriei Fourier atașată. Fie

$$f(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ik\lambda}$$

și înlocuind-o în (4) obținem

$$c_0\, D^{1/2} + \sum{}' c_k\, D^{1/2}\, U^k = 0\,.$$

($\sum'$ înseamnă că $k = 0$ se omite). Fie x un element arbitrar în H. Din inegalitatea lui Schwarz rezultă

$$\|C^{1/2}\, c_0 x\|^2 \leqslant \sum{}' |c_k|^2 \sum{}' \|D^{1/2}\, U^k\, x\|^2.$$

Cum $D = A - B$, rezultă relațiile

$$\sum_{0}^{n} U^{*k} \; DU^{k} = U^{*n} \; AU^{n} - UAU^{*}$$

$$\sum_{0}^{n} U^{k} \; DU^{*k} = UAU^{*} - U^{n+1} \; AU^{*n+1}$$

oricare ar fi $n = 0, 1, 2, \ldots$, Adunîndu-le obținem

$$\sum_{-n}^{n} U^{k} \; DU^{*k} = U^{*n} \; AU^{n} - U^{n+1} \; AU^{*n+1}$$

și deci

$$\left\langle \sum_{-\pi}^{n} U^{k} \, DU^{*k} \, x, \, x \right\rangle = \sum_{-n}^{n} \| D^{1/2} \; U^{*k} \; x \| \leqslant \delta \langle x, x \rangle,$$

unde δ este cel specificat în teoremă.

Obținem astfel că

$$\sum{}' \, \| D^{1/2} \; U^{*k} \; x \| \leqslant \delta \, \langle x, \; x \rangle - \langle Dx, \; x \rangle \tag{5}$$

și să luăm $x_n \in H$, cu proprietatea că $Dx_n - \|D\| \, x_n \to 0$.

Din relația lui Parseval și cele de mai sus (5) rezultă că

$$(2\pi)^{-1} \int_{0}^{2\pi} |f(\lambda)|^{2} \, \mathrm{d}\lambda \;\; \|D\| \leqslant \Big[(2\pi)^{-1} \int_{0}^{2\pi} |f(\lambda)|^{2} \, \mathrm{d}\lambda \; -$$

$$- \Big[|2\pi|^{-1} \int_{0}^{2\pi} f(\lambda) \; \mathrm{d}\lambda)^{2} \Big] (\delta - \|D\|).$$

Dacă $f_n(\lambda)$ este un șir de funcții uniform mărginit, cu derivatele întîi continue, egal cu 0 pe S, și tinzînd aproape peste tot către funcția caracteristică a lui S, relația ultimă se păstrează și pentru această funcție, și deducem că

$$(\text{măs } S^{*}/2\pi)^{2} \; \|D\| \leqslant (\text{măs } S^{*}/2\pi) \; (1 - \text{măs } S^{*}/2\pi) \; (\delta - \|D\|)$$

și cum măs S^{*} + măs $S = 2\pi$, relația din teoremă rezultă din aceasta prin înlocuirea indicată. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 2.9. *Dacă A și B sînt mărginiți, A autoadjunct iar*

$$C = AB - BA$$

este autoadjunct pozitiv, au loc relațiile

1) $\pi \|C\| \leqslant \dfrac{\mathrm{d}_B}{2}$ măs sp A, $\mathrm{d}_B = \max \lambda - \min \mu$, $\lambda \in \delta\,(\operatorname{Im} B)$, $\mu \in \delta\,(\operatorname{Im} B)$

2) $\pi \|C\| \leqslant \|B\|$ măs sp A.

Demonstrație. Cum avem

$$C = AB - BA = BA - AB,$$

rezultă că

$$AJ - JA = ic, \quad J = \frac{1}{2i} (B - B^*).$$

Cum

$$(A + iI)\, J - J (A + iI) = iC,$$

înmulţind cu $(A + iI)^{-1}$ la dreapta şi la stînga obţinem

$$J (A + iI)^{-1} - (A + iI)^{-1}\, J = - i (A + iI)^{-1}\, C (A + iI)^{-1}$$

şi cum, dacă U este transformata lui Cayley a operatorului A,

$$JU - UJ = -2\ (A + iI)^{-1}\, C (A + iI)^{-1}$$

şi deci

$$UJU^* - J = 2Q^*\ CQ,$$

unde

$$Q = (A - iI)^{-1}.$$

Putem aplica teorema 2.8 şi obţinem

$$\text{măs sp } U \geqslant 2\pi \, \| D \|\, d, \ d = \mathrm{d}_B .$$

Însă

$$\| Q^*\ CQ \| = \sup \langle Q^* CQ\ \ x, x \rangle \geqslant \| C \| \inf \| Qx \|^2, \| x \| = 1$$

şi deci cum

$$Q = (A + iI)^{-1},$$

rezultă că

$$\| Qx \|^2 = \int \left| \frac{1}{\lambda + i} \right|^2 \mathrm{d} \langle E(\lambda)\ x, \rangle \geqslant \frac{1}{1 + \| A \|^2}$$

adică

$$\text{(5')} \qquad \text{măs sp } U \geqslant 4\pi \| C \| \frac{1}{\mathrm{d} (1 + \| A \|^2)}$$

Dacă $\mathrm{e}^{i\alpha} = (\lambda - i)\ (\lambda + i)^{-1}$, atunci

$$\mathrm{d}\alpha = 2 \left(\frac{1}{1 + \lambda^2} \right) \mathrm{d}\lambda$$

şi deci

$$\text{măs sp } U = \int_S \mathrm{d}\alpha = 2 \int_{\mathrm{sp} A} \frac{1}{1 + \lambda^2} \mathrm{d}\lambda \leqslant 2 \text{ măs sp } A$$

de unde, punînd $A_t = tA$ (t real),

$$tC = A_t\, B - BA_t .$$

Relaţia (5′) ne dă

$$2 \text{ măs sp } A_t \geqslant 4\pi t \, \| C \| \, \frac{1}{\mathrm{d}_B\, (1 + t^2\, \| A \|^2)}$$

şi cum sp $A_t = t$ sp A, pentru t tinzînd către zero, obţinem relaţia cerută. Teorema este demonstrată.

Vom da acum două teoreme de structură pentru operatori hyponormali în care va interveni în mod esenţial natura spectrului.

Din teorema lui N. Dunford ([19], 337) rezultă imediat:

TEOREMA 2.10. *Dacă T este hyponormal şi spectral, atunci el este scalar.*

Această teoremă ne dă dreptul să considerăm operatorii spectrali hyponormali de forma

$$T = Q\,AQ^{-1}.$$

Are loc

TEOREMA 2.11. *Dacă T este hyponormal spectral şi aria $\sigma(T) = 0$, atunci T este normal.*

Demonstraţie. Cum T este scalar, atunci $T = QAQ^{-1}$, A fiind un operator normal, iar Q un operator autoadjunct mărginit şi cu invers mărginit. Fie $\{\Delta_i\}_1^n$ o acoperire finită a lui $\sigma(T)$ cu proprietatea că aria $\Delta_i \leqslant \frac{i}{n^2}$. Pentru $x_i \in E(\Delta_i)H$, E fiind măsura spectrală a lui A, avem

$$\|(A - z_i l)\,x_i\| \leqslant \left[\int_{\Delta_i} |z - z_i|^2 \,\mathrm{d}\,\|E(z)\,x\|^2)\right]^{1/2} \leqslant \frac{1}{n}$$

şi deci

$$\|(A - z_i I)\,Q^2\,x_i\| = \|(A^* - \bar{z}_i)\,Q^2\,x_i\| = \|Q\,(T^* - \bar{z}_i)\,Qx_i\| \leqslant$$

$$\leqslant \|T^* - z_i)\,Qx_i\|\,\|Q\| \leqslant \|(T - z_i)\,Qx_i\|\,\|Q\| =$$

$$= \|Q\,(A - z_i)\,x_i\|\,\|Q\| \leqslant \|Q\|^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

În mod analog

$$\|Q^2\,(A - z_i)\,x_i\| \leqslant \|Q\|^2 \frac{1}{n}$$

de unde rezultă

$$\|AQ^2 - Q^2A)\,x_i\| \leqslant 2\,\|Q\|^2 \frac{1}{n},\ \ x_i \in E(\Delta_i)\,H.$$

Cum $E(\Delta_i)\,H \perp E(\Delta_j)\,H$, $i \neq j$, atunci pentru $y \in H$, $\|y\| = 1$, $y = \sum a_i\,x_i$, $\sum |a_i|^2 \leqslant 1$, care este o mulţime densă în H,

$$\|(AQ^2 - Q^2A)\,y\| = \|\sum a_i\,(AQ^2 - Q^2A)\,x_i\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum |a_i|\,\|(AQ^2 - Q^2A)\,x_i\| \leqslant \left\{(\textstyle\sum_i |a_i|^2)\sum\left(2\,\|Q\|^2 \frac{1}{n}\right)\right\} = 2\,\|Q\|^2 \frac{i}{n}$$

ceea ce implică $AQ^2 = Q^2A$ şi deci $AQ = QA$. Deci $T = A$ şi teorema este demonstrată.

Vom da acum cîteva aplicaţii la teorema de structură.

Înainte de aceasta vom reaminti o teoremă importantă a lui J. Calkin.

Dacă $\mathcal{L}(H)$ este algebra operatorilor liniari şi mărginiţi pe un spaţiu Hilbert, atunci mulţimea $I(H)$ a operatorilor compacţi formează un ideal bilateral închis.

Are deci sens să considerăm algebra cît

$$\mathcal{C} = \mathcal{L}(H)/I(H)$$

şi în ea să introducem o involuţie, indusă de involuţia naturală din $\mathcal{L}(H)$. Teorema lui Calkin afirmă că $\mathcal{C}$ este în acest caz o B^*-algebră. Rezultă că o putem considera ca algebra operatorilor liniari şi mărginiţi pe un spaţiu Hilbert H_1.

Se verifică imediat că, dacă $\overline{T}$ este imaginea lui $T \in \mathcal{L}(H)$,

1. $T^{-1} \to \overline{T}^{-1}$,
2. $T^* \to \overline{T}^*$,
3. $T \geqslant 0 \to \overline{T} \geqslant 0$.

TEOREMA 2.13. *Dacă T este un operator hyponormal şi există un întreg $k \geqslant 1$ astfel că T^k este un operator compact, atunci T este compact (şi deci normal).*

Demonstraţie. $\overline{T}$ este în acest caz un operator nilpotent generalizat care este şi hyponormal. Deci trebuie să fie nul şi teorema este demonstrată.

TEOREMA 2.14. *Dacă T este un operator cu partea imaginară compactă şi T^k pentru un întreg k este compact, atunci T este compact.*

Fie $\overline{T} = \overline{a} + i\overline{b}$. Din ipoteză rezultă că $\overline{b} = 0$ şi $\sigma(\overline{T}) = 0$. Deci $\overline{T} = 0$ şi teorema este demonstrată.

TEOREMA 2.15. *Dacă T are proprietăţile*

1. *hyponormal*
2. *spectral*
3. *polinomial compact,*

atunci partea sa nilpotentă este compactă şi deci T este scalar.

Demonstraţie. Din ipoteză rezultă că $\sigma(T)$ are numai un număr finit de puncte şi cum T este hyponormal, el trebuie să fie normal.

Teorema este demonstrată.

Primită la redacţie la 15 iulie 1966

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România, Str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

OPERATORI HYPONORMALI (II)

DE

VASILE I. ISTRĂŢESCU

În această parte se studiază unele clase de operatori care generalizează clasa operatorilor hyponormali. Se dau teoreme de structură pentru diferite clase de operatori şi unele proprietăţi.

Atît prezentarea materialului cît şi unele rezultate aparţin autorului. Expunerea diferă în unele puncte de cele prezentate în cadrul seminarului de *Analiza Fourier şi teoria operatorilor*.

3. O GENERALIZARE A NOŢIUNII DE OPERATOR HYPONORMAL

Am văzut că orice operator hyponormal satisface următoarea relaţie :

$$\text{pentru } x \in H, \ \|x\| = 1 \ \|Tx\|^2 \leqslant \|T^2x\|.$$

Această relaţie nu depinde de structura Hilbertiană a spaţiului şi prin urmare poate fi extinsă la alte spaţii. Aceasta sugerează următoarea definiţie :

DEFINIŢIA 3.1. Un operator T definit pe un spaţiu Banach B este de clasă (N) dacă

$$x \in B, \ \|x\| = 1 \ \|Tx\|^2 \leqslant \|T^2x\|.$$

Are loc evident

PROPOZIŢIA 3.1. *Orice operator hyponormal este de clasă* (N).

În cele ce urmează extindem cîteva teoreme de la operatori hyponormali la operatori de clasă (N).

TEOREMA 3.1. *Pentru orice operator de clasă* (N),

$$\gamma_T = \|T\|$$

(γ_T *este raza spectrală*, $\gamma_T = \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$).

Demonstraţie. Fie $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$ astfel ca $\|Tx_n\| \to \|T\|$. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că $\|T\| = 1$. În acest caz este evident că

$$\lim \|T^2x_n\| \geqslant \lim \|Tx_n\|^2 = 1$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 439–448, BUCUREŞTI, 1967

şi deci

$$\|T^2\| = 1.$$

Exact ca şi în a doua demonstraţie a teoremei 1.1 (Nota I) se arată că pentru orice n,

$$\|T^n\| = \|T\| = 1.$$

şi deci $\gamma_T = 1$.

COROLARUL 3.1. *Orice operator de clasă* (N) *nilpotent generalizat este nul.*

Vom presupune acum că operatorul T de clasă (N) este definit pe un spaţiu Hilbert H.

PROPOZIŢIA 3.2. *Subspaţiul* M *definit prin*

$$M = \{x,\ x \in H,\ TT^*x = x\}$$

are următoarele proprietăţi:

$$1^\circ \quad x \in M \to T^*Tx = x.$$

$$2^\circ \quad x \in M \to Tx \in M.$$

3° T/M *este un operator izometric.*

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm 1° şi pentru 2°, 3° demonstraţia este aceeaşi ca la propoziţia 1.2.

În adevăr, fie $x \in M$, $\|x\| = 1$, atunci

$$\|T^*Tx - x\|^2 = \|T^*Tx\|^2 - \langle T^*Tx, x\rangle - \langle x, T^*Tx\rangle + 1 =$$

$$= \|T^*Tx\|^2 - 2\|Tx\|^2 + 1 = \|T^*Tx\|^2 - 2\|TTT^*x\|^2 + 1 =$$

$$= \|T^*Tx\|^2 - 2\left\|T^2\frac{T^*x}{\|T^*x\|}\right\|^2 \|T^*x\|^2 + 1 \leqslant$$

$$\leqslant \|T^*Tx\|^2 - \frac{2}{\|T^*x\|^2} + 1 \leqslant 0$$

şi deci $\|T^*Tx - x\| = 0$. Propoziţia este demonstrată. Rezultatul obţinut permite să demonstrăm o teoremă referitoare la structura operatorilor de clasă (N) care sînt complet continui.

TEOREMA 3.2. *Dacă* T *este complet continuu, atunci el este normal.*

În adevăr, din teorema 3.1 rezultă că există λ_1, $\lambda_1 \in (T)$, astfel ca $\|T\| = |\lambda_1|$. Fie

$$M_1 = \{x,\ x \in H \quad Tx = \lambda_1 x\}$$

care nu se reduce la 0 după cum rezultă din complet-continuitate. Însă el reduce şi pe T şi deci T/M_1 este normal. Vom continua în acest mod şi obţinem spaţiile M_i, care reduc pe T. Cum zero este singurul punct limită în spectru, rezultă că $T/\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to T$ şi teorema este demonstrată.

Teorema 3.3. *Dacă T este inversabil, atunci și T^{-1} este de clasă (N).*

Demonstrație. Fie $y \in H$, $\|y\| = 1$. Cum T este inversabil, există $x \in H$ astfel ca

$$y = T^2 x.$$

Deducem imediat că

$$\| Tx\|^2 \leqslant \| T^2 x\| \, \|x\| = \|x\|.$$

și deci cum $x = T^{-2}y$, $Tx = T^{-1}y$, avem

$$\| T^{-1}y\|^2 \leqslant \| T^{-2}y\|$$

și teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă că

$$\| T^{-1}\| = [\min |\mu|, \quad \mu \in \sigma(T)]^{-1}$$

Corolarul 3.2. *Dacă T are spectrul pe cercul unitate și este de clasă (N), atunci el este o izometrie.*

Următoarea teoremă reprezintă o extensiune a teoremei 2.2 (Nota I)

Teorema 3.4. *Dacă există doi întregi p și q astfel ca*

$$T^{*p} T^{1} = C, \tag{6}$$

C un operator compact, atunci T este normal.

Demonstrație. Fie $\lambda \in \sigma(T)$ astfel ca $|\lambda| = \|T\|$. Se știe că λ este în spectrul aproximativ și deci există x_n astfel ca

$$Tx_n - \lambda x_n \to 0.$$

Cum λ are proprietatea $|\lambda| = \|T\|$, este de asemenea cunoscut că

$$T^* x_n - \bar{\lambda} x_n \to 0.$$

Ținînd seama de relația (6), rezultă imediat că $\{x_n\}$ admite un subșir convergent. Fie $x_0 = \lim x_{nk}$. Este evident că

$$Tx_0 = \lambda x_0$$

$$T^* x_0 = \bar{\lambda} x_0$$

și deci $M\lambda_1 = \{x, \ Tx = \lambda_1 x\}$ reduce pe T și nu este spațiul $\{0\}$.

Pe spațiul $M\lambda_1^{\perp}$, T nu are în spectru pe λ_1. Se vede imediat că singurul punct de acumulare din $\sigma(T)$ este zero. În adevăr, în caz contrar, argumentul de mai sus ne arată că există λ_n, $|\lambda_n| \geqslant \varepsilon > 0$, astfel ca

$$Tx_n = \lambda_n x_n$$

și din (6) rezultă că x_n admite un subșir convergent. Însă

$$\|x_n - x_m\| \geqslant 2$$

ceea ce reprezintă o contradicție. Rezultă că, continuînd în modul indicat mai sus, obținem spațiile $M\lambda_i$, care reduc pe T și din observația făcută $T / \bigoplus_{i=1}^{n} M\lambda_i \to T$. Deci T este normal și teorema este demonstrată.

TEOREMA 3.5. *Dacă T este polinomial compact, atunci el este normal.*

Demonstrație. Fie $p(\lambda) = \sum_0^n a_i \lambda_i$ polinomul pentru care $\sum_0^n a_i T^i = c$, c un operator compact.

Fie, de asemenea, $x_n \in H$ astfel ca

$$Tx_n - \lambda_0 x_n \to 0, \quad |\lambda_0| = \|T\|$$

și prin urmare

$$\sum_0^n a_i T^i x_n - p(\lambda_0)\, x_n \to 0$$

adică

$$Cx_n - p(\lambda_0)\, x_n \to 0.$$

Putem presupune că λ_0 nu este rădăcină a lui $p(\lambda)$ și deci $\{x_n\}$ admite un subșir convergent. Rezultă astfel că

$$M = \{x,\ Tx = \lambda_0 x\}$$

nu se reduce la $\{0\}$ și reduce pe T. Demonstrația faptului că T este normal, continuă aproape la fel cu cea dată în teorema 3.4 și de aceea o omitem.

TEOREMA 3.6. *Dacă T satisface relația*

$$\|(T-z)^{-1}x\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{d}(z,\, \sigma(T))}$$

și $\sigma(T)$ are un număr finit de puncte, atunci este normal.

Demonstrație. Fie $z_i \in \sigma(T)$ și C_ε un cerc care-l conține numai pe z_i în interior. Fie

$$P_i = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} (T-z)^{-1}\,\mathrm{d}z$$

care este un proiector, care evident comută cu T și

$$\|P_i\| \leqslant 1$$

de unde rezultă că P_i este autoadjunct. Cum pentru $x \in P_i H$

$$\|(T-z_i)\,x\| = \left\| \frac{1}{2\pi}\int_{C_\varepsilon} (z-z_j)\,(T-z_i)^{-1}\,x\,\mathrm{d}z \right\| \leqslant \varepsilon$$

și deci făcînd $\varepsilon \to 0$ obținem

$$Tx = z_i x$$

și deci $T = \sum z_i P_i$. Teorema este demonstrată.

4. SUBSPAȚII INVARIANTE

Am văzut că dîndu-se un operator hyponormal, îi putem atașa subspațiul

$$M = \{x,\ x \in H,\quad TT^* x = x\}$$

care este invariant pentru T. În general însă acest spaţiu nu diferă de $\{0\}$. Problema care ne-o punem este de a demonstra existenţa unor subspaţii invariante ţinînd seama de forma specifică a operatorului.

Definiţia 4.1. Un operator T definit pe un spaţiu Banach este hermitic dacă $\langle Tx, x\rangle$ este real pentru o aplicaţie al lui $B \times B$

$$\langle x, y\rangle \to C$$

cu proprietăţile :

1. $\langle x, y\rangle$ este liniară în x.
2. $\langle x, x\rangle > 0 \quad x \neq 0$.
3. $|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$.
4. $\langle x, x\rangle = \|x\|$.

G. Lumer a arătat că dacă T este hermitian, atunci

$$\|e^{itT}\| \leqslant M < \infty$$

oricare ar fi t real.

Să considerăm grupul abelian $G = R^1$ şi reprezentarea mărginită uniform

$$U_t = e^{itT}.$$

Utilizînd această reprezentare demonstrăm următoarea teoremă :

Teorema 4.1. *Dacă S este un operator mărginit pe un spaţiu Banach care comută cu T, T fiind un operator hermitic, atunci S are subspaţii invariante netriviale.*

Demonstraţie. Pentru orice mulţime închisă σ din $R^1 = G$ să punem $M_\sigma = \{x, x \in B, \langle U_t x, x^*\rangle = \varphi_{x, x^*}(t)$ are mulţimea spectrală în σ pentru orice $x^* \in B^*\}$.

Se verifică imediat că M_σ este un spaţiu vectorial şi închis. Cum pentru orice întreg n avem

$$T^n S = S T^n,$$

rezultă că pentru orice t real

$$e^{it}S = S\, e^{itT}$$

şi M_σ este invariant şi pentru S. Problema care se pune este de a arăta că există σ astfel ca

$$\{0\} < M_\sigma < B.$$

Aceasta rezultă imediat din teorema lui Beurling-Kaplansky Helson referitoare la sinteza spectrală a funcţiilor din $L^\infty(R^1)$.

Definiţia 4.2. Un operator T pe un spaţiu Hilbert este cvasinormal dacă $T(T^*T) = (T^*T)\,T$.

Este evident că orice operator cvasinormal este hyponormal.

Teorema 4.2. *Orice operator cvasinormal are subspaţii proprii invariante.*

Demonstrație. Dacă $T^*T \neq I$, afirmația teoremei rezultă din teorema 4.1. Dacă $T^*T = I$, atunci T este o izometrie și exact ca mai sus se demonstrează existența subspațiilor invariante (teorema lui R. Godement).

DEFINIȚIA 4.3. Se spune că operatorul T definit pe un spațiu Hilbert M posedă proprietatea de sinteză spectrală, dacă orice subspațiu propriu invariant conține cel puțin un vector propriu și mulțimea vectorilor proprii îl generează.

TEOREMA 4.3. *Proprietatea de sinteză spectrală pentru T este echivalentă cu proprietatea :*

1) *orice subspațiu invariant conține cel puțin un vector propriu, atunci cînd T este hyponormal.*

Demonstrație. Este evident, ținînd seama de propoziția 1.1 b), că proprietatea de sinteză spectrală implică 1).

Dacă 1) are loc, atunci pentru subspațiul M închis fie M^v subspațiul închis generat de vectorii proprii conținuți în el. Dacă presupunem că proprietatea de sinteză spectrală nu are loc, complementul ortogonal al lui M^v în M va fi $\neq \{0\}$. Fie $x \in M^v_\perp$ și cum $Tx \in M$, să arătăm că $M^v_\perp$ este invariant. Dacă $y \in M^v$, atunci $T^*y = \alpha y$ și deci

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0,$$

ceea ce arată că $M^v_\perp$ este invariant și deci conține cel puțin un vector propriu nenul, însă M^v conținea toți vectorii proprii și avem astfel contradicție. Deci $M^v_\perp = 0$ și $M = M^v$.

PROPOZIȚIA 4.1. *Dacă T este un operator hyponormal, atunci*

$$\|Tx\| = \|T^*x\|$$

dacă și numai dacă $TT^*x = T^*Tx$.

Demonstrație. Este evident că condiția pusă este suficientă. Să demonstrăm necesitatea. Avem, conform inegalității lui Schwarz,

$$|\langle (T^*T - TT^*)\, x\, y\rangle|^2 \leqslant \langle (T^*T - TT^*)\, x, x\rangle \langle (T^*T - TT^*)\, y, y\rangle$$

și cum y este arbitrar, propoziția este demonstrată.

Se verifică imediat că mulțimea elementelor x cu proprietatea din propoziția 4.1 este un spațiu vectorial închis.

DEFINIȚIA 4.4. Un operator T definit pe H este subnormal dacă există un spațiu Hilbert $K \supset H$ și un operator normal T_1 definit pe K astfel ca $Tx = T_1x$ dacă $x \in H$.

PROPOZIȚIA 4.2. *Dacă T este un operator subnormal, atunci*

$$M = \{x, \|Tx\| = \|T^*x\|\}$$

este un subspațiu invariant pentru T.

Demonstrație. Vom observa că

$$M = \{x, T_1^*x = T^*x, x \in H\},$$

unde T_1 este operatorul din definiția 4.4 și deci trebuie să arătăm că

$$\|T^2x\| = \|T^*Tx\|$$

dar

$$\| T^2x\| = \| T_1^2x\| = \| T_1^*T_1x\| = \| T_1T_1^*x\| = \| T_1T^*x\| = \| TT^*x\| = \| T^*Tx\|$$

şi propoziţia este demonstrată.

TEOREMA 4.4. *Dacă T este subnormal şi există $x \in H$ astfel ca $\| Tx\| = \| T\|$, atunci T are subspaţii invariante*

Demonstraţie. Cum $\| Tx\| = \| T\|$, există $y \in H$, $\|y\| = 1$ astfel ca $\| T^*y\| = \| T\|$. Dar

$$\| T\| \leqslant \| T^*y\| \leqslant \| Ty\| \leqslant \| T\|$$

şi deci subspaţiul considerat în propoziţia 4.2 nu se reduce la subspaţiul 0 şi din aceeaşi propoziţie deducem că este invariant pentru T, teorema este astfel demonstrată.

Observaţie. Această teoremă pentru clasa operatorilor cvasinormali este un caz particular al teoremei 4.3. Metodele de demonstraţie sînt evident complet diferite.

5. În acest paragraf vom da o nouă generalizare a noţiunii de operator hyponormal diferită de cea din §3. Această generalizare se referă numai la operatori definiţi pe un spaţiu Hilbert.

DEFINIŢIA 5.1. Un operator T mărginit definit pe un spaţiu Hilbert H este hyponormal de ordin m dacă pentru întregul m avem

$$H^mJ - JH^m = iC_m, \quad T = H + iJ$$

unde C_m este un operator pozitiv.

Observaţie. Mulţimea operatorilor 1-hyponormali este identică cu mulţimea operatorilor hyponormali pentru că, în acest caz,

$$C_1 = T^*T - TT^*.$$

TEOREMA 5.1. *Dacă T este un operator hyponormal de ordin m, atunci*

$$\sigma(H) = \mathrm{Pr}^x(\sigma(T))$$

$$\sigma(J) = \mathrm{Pr}^y(\sigma(T)).$$

Demonstraţie. Dacă $x_0 \in \sigma(H)$, atunci există $f_n \in H$, $\|f_n\| = 1$ astfel ca

$$(H - x_0)\, f_n \to 0$$

şi deci, pentru orice k,

$$(H^k - x_0H^{k-1})f_n \to 0$$

de unde pentru $k = m$ avem

$$(H^m - x_0H^{m-1})f_n \to 0.$$

Dar

$$\langle JH\, f_n, f_n\rangle \to r, \ r \text{ un număr real}$$

pentru că

$$\langle JHf_n, f_n\rangle = \langle Hf_n, Jf_n\rangle$$

şi deci

$$\lim \langle JHf_n, f_n \rangle = \langle \lim x_0 f_n,\ Jf_n \rangle = x_0 \langle \lim Jf_n, f_n \rangle,$$

ceea ce trebuia arătat.

Se verifică imediat că dacă

$$\lim \langle JH^j f_n, f_n \rangle = r_1, \quad r_1 \text{ real},$$

atunci

$$\lim \langle JH^{j+1} f_n, f_n \rangle = r, \quad r \text{ real}.$$

Cum pentru $i = 1$ afirmaţia a fost demonstrată mai sus, se deduce că

$$\lim \langle JH^i f_n,\ f_n \rangle = r_i, \quad r_i \text{ real}$$

oricare ar fi i fix.

Din identitatea

$$\langle f_n,\ (H^m - x_0 H^{n-1}) Jf_n \rangle - \langle f_n,\ J(H^m - x_0 H^{m-1})\, f_n \rangle -$$
$$- \langle f_n,\ x_0 J\, H^{m-1} f_n \rangle + \langle f_n,\ x_0 H^{m-1} Jf_n \rangle = i \langle C_m f_n, f_n \rangle$$

şi din cele arătate mai sus rezultă $\langle C_m f_n,\ f_n \rangle \to 0$. Dar $C_m \geqslant 0$ şi deci $\| C_m^{\frac{1}{2}} f_n \| \to 0$. Deci $C_m f_n \to 0$.

Ca şi în teorema 1.2 (Nota I), deducem că există un şir $\{ gk_n \}$ definit prin

$$g_{k_n} = \Phi_k(J) f_n^k / \| \Phi_k(J) f_n^k \|$$

astfel ca

$$(H^m - x_0^m)\, g_{kn} \to 0 \quad \text{pentru } n \to \infty$$

şi

$$(J - y_0')\, g_{kn} \to 0 \quad \text{pentru } n \to \infty$$

unde y_0' este numărul real care se defineşte ca şi în demonstraţia teoremei 1.2 (Nota I). Putem alege un subşir $h_k = g_k m_k$ astfel ca relaţiile de mai sus să aibă loc pentru $k \to \infty$. Din identitatea

$$(H - x_0)\,(H^{m-1} + \cdots + x_0^{m-1})\, g_{k\,m\,k} \to 0$$

se deduce că $x_0 + iy_0' \in \operatorname{sp}(T) = \sigma(T)$.

Fie acum $y_0 \in \sigma(J)$. Există g_n, $\|g_n\| = 1$, astfel ca

$$(J - y_0)\, g_n \to 0.$$

Se deduce imediat că $C_m g_n \to 0$. Dacă H are spectrul în $[c, d]$, atunci H^m are spectrul în $[c^m, d^m]$.

Definim punctul $x_0' \in [c, d]$ prin procedeul indicat în demonstraţia teoremei 1.2 (Nota I). Este evident că $x_0'^m \in [c^m, d^m]$ şi că

$$H^m = \int_{[c^m,\, d^m]} \mu \, \mathrm{d}G(\mu).$$

Din construcţie, punctul $x_0'^m$ satisface condiţia că există $\{f_{k,n}\}$ astfel ca

$$f_{k,n} = \Phi_k(H^m) f_n^k / \| \Phi_k(H^m) f_n^k \|$$

cu proprietatea

$$(H^m - x_0'^m) f_{k,n} \to 0$$

$$(J - y_0) f_{k,n} \to 0.$$

Putem alege un subşir $f_{k,m}$ astfel încît aceste relaţii să aibă loc pentru $k \to \infty$. Din identitatea

$$(H - x_0'^m) f_{k,m} = (H^{m-1} + \cdots + x^{m-1})(H - x_0') f_{k,m}$$

se deduce că $x' + iy_0 \in \sigma(T)$ şi teorema este demonstrată.

Corolarul 1. *Dacă T este un operator hyponormal de ordin m şi este compact, atunci*

$$H^m J = J H^m. \tag{7}$$

În adevăr, operatorul $T_m = H^m + iJ$ este hyponormal. Cum spectrul lui J este proiecţia spectrului $\sigma(T)$ pe Oy, rezultă că măsura sa Lebesgue este nulă. Deci trebuie să avem relaţia (7).

Corolarul 2. *Dacă T este un operator hyponormal de ordin m, nilpotent generalizat, atunci el este operatorul identic nul.*

În adevăr, operatorii hermitici H şi J au în acest caz în spectru numai pe zero şi deci trebuie să fie nuli.

6. Referinţe şi comentarii. a) Noţiunea de operator hyponormal a fost introdusă de P.R. Halmos în [1] cu o altă denumire. S-au considerat diferite clase de operatori care generalizează clasa operatorilor hyponormali. Printre acestea menţionăm pe cele considerate de C.R. Putnam [2], [3]:

1°. C_1 $T_\theta \in C_1$ $T_\theta = e^{i\theta} T + e^{-i\theta} T^*$

2°. C_2 $T \in C_2$, $T^*T - TT^* \geqslant 0$ sau $\leqslant 0$.

Aceste generalizări au inconvenientul că sînt strîns legate de structura de spaţiu Hilbert. O generalizare în care structura de spaţiu Hilbert nu este esenţială a fost dată în [4].

Vom menţiona acum o problemă care apare în mod natural: să considerăm că operatorul T este hyponormal şi spectrul său $\sigma(T)$ este o mulţime în plan cu următoarele proprietăţi: mulţimea funcţiilor $R(\sigma(T))$ regulate pe $\sigma(T)$ are proprietatea $R(\sigma(T)) = C(\sigma(T))$.

Exemple de operatori cu aceste proprietăţi sînt:

1) Operatori cu $\sigma(T)$ astfel încît aria $\sigma(T) = 0$;

2) Operatorii cu proprietatea că $\sigma(T)$ este nicăieri densă şi complementara conexă.

Problema care se pune este aceea dacă aceşti operatori sînt în mod necesar normali.

Pentru rezultate parţiale în acest sens a se vedea [5].

b) Propoziţiile 1.2 şi 1.3 apar în [6]. Demonstraţiile teoremei 1.1 a lui Andô [7] aparţin lui S. Berberian [6] şi J. Stampfli [8].

Teorema 1.2 este dată de C.R. Putnam în [3].

Teorema 2.1 reprezintă o generalizare a teoremei lui Andô (care se obţine pentru $k=1$) şi se găseşte în [4] împreună cu propoziţia 2.3 pe care se bazează.

Teoremele 2.3—2.4 se găsesc sub o formă puţin diferită în [4]. Teoremele date în text apar în [9]. Teoremele 2.5 şi 2.6 şi consecinţele 1 şi 2 sînt date în [8].

Teoremele 2.7—2.9 sînt date în [10], unde se găsesc şi alte aplicaţii decît cele date aici.

Teorema 2.11 este dată în [8]. Teoremele legate de algebra lui Calkin apar în [11].

Clasa de operatori introdusă prin definiţia 3.1 apare în [4] împreună cu teoremele 3.1—3.2. Teoremele 3.3—3.4 sînt date în [9]. Proprietăţile legate de subspaţii invariante apar în [12]. Teoremele 3.5, 4.3 sînt noi. De asemenea § 5.

Primită la redacţie la 15 iulie 1966

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România Str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. P.R. Halmos, *Normal dilatations and extensions of operators*. Summa Bras. Math., **2**, 124—134 (1950).
2. C.R. Putnam, *On semi-normal operators*. Pacif. J. of. Math., **7**, 1649—1652 (1957).
3. C.R. Putnam, *On the spectra of semi-normal operators*. Trans. A.M.S., **119** , *3*, 509—524 (1965).
4. V. Istrăţescu, *On some hyponormal operators*. Pacif. J. of. Math..
5. J. Stampfli, *Hyponormal operators and spectral density*. Trans. A.M.S., **117**, *5*, 469—477 (1965).
6. S. Berberian, *A note on hyponormal operators*, Pacif. J. of Math., **12** (*14*), 1171—1175 (1962).
7. T. Andô, *On hyponormal operators*, Proc. A.M.S., **14**, 290—291 (1963).
8. J. Stampfli, *Hyponormal operators*, Pacif. J. Math., **12**, (*14*), 1453—1458 (1962).
9. V. Istrăţescu, T. Saitô and T. Yoshino, *On a class of operators*. Tôhoku Math. Journ.
10. C.R. Putnam, *Commutators, perturbations and unitary spectra*. Acta. Math., **106**, 215—232 (1960).
11. I. Istrăţescu, *Some applications of a theorem of Calkin*.
12. I. Istrăţescu and V. Istrăţescu, *Some remarks on hermitian operators* (va apărea).
13. A. Brown, *On a class of operators*. Proc. A.M.S., **4**, 723—728 (1953).
14. C.R. Putnam, *Commutators, absolutely continuous spectra and singular integral operators*. Amer. J. of Math., LXXXVI, *2*, 310—316.
15. R. Godement, *Théorèmes tauberiens et théorie spectrale*. Ann. Ec. Norm. Sup., **64** (1947).
16. H. Helson, *Spectral synthesis of bounded functions*. Ark. Mat., **1** (1951).
17. I. Koplansky, *Primary ideals in group algebras*. Proc. Math. Acad. Sci., S.U.A., **35** (1949).
18. U. Fixman, *Problems in spectral operators*. Pacif. J. of Math., **9** (*4*) (1959).
19. N. Dunford, *Spectral operators*. Pacif. J. of. Math., **4** (1954).
20. T. Nieminen, *A condition for the serlf adjointness of a linear operator*. Ann. Acad. Sci. Fen. Ser. A, I, *316* (1962).

FAMILII COMPOZABILE DE OPERATORI

DE

IOANA CIORĂNESCU

În lucrarea de faţă vom studia analog cu familiile compozabile de distribuţii scalare, introduse în [1], familii compozabile de operatori cu ajutorul cărora se pot reprezenta operatorii liniari şi continui pe spaţii de distribuţii vectoriale în anumite spaţii local convexe.

Vom folosi următoarele notaţii:

Fie B un spaţiu Banach, B^* dualul său; notăm prin $\mathcal{D}B$ spaţiul funcţiilor indefinit derivabile cu suportul compact conţinut în R şi cu valori în spaţiul B; $(\mathcal{D}B)^*$ va desemna dualul lui $\mathcal{D}B$ şi se va numi spaţiul distribuţiilor cu valori în B^* [2].

Vom considera şi spaţiul distribuţiilor cu valori în B care este, după Schwartz [4], spaţiul aplicaţiilor liniare şi continue ale lui $\mathcal{D}$ în B, organizat ca spaţiu local convex cu topologia convergenţei uniforme pe părţile mărginite ale lui $\mathcal{D}$. Vom nota acest spaţiu prin $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}, B)$. Avem $(\mathcal{D}B)^* = \mathcal{L}_b(\mathcal{D}, B^*)$, [5].

În [3] este dată următoarea:

TEOREMĂ (Sebastiao e Silva). *Există o corespondenţă biunivocă între aplicaţiile liniare şi continue ale lui* $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}_K; B)$ *în* E *şi aplicaţiile lui* R *în* $\mathcal{L}_b(B, E)$ *indefinit diferenţiabile şi cu suportul în compactul* K *unde* B *e un spaţiu Banach, iar* E *un spaţiu local convex, complet prin şiruri.*

Aici $\mathcal{D}_K$ este spaţiul funcţiilor indefinit derivabile cu suportul inclus în compactul K.

În cele ce urmează vom studia cazul aplicaţiilor liniare şi continue ale lui $(\mathcal{D}B)^*$ în dualul unui spaţiu local convex tonelat, precum şi aplicaţiile lui $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}, B)$ în spaţiul $\mathcal{L}_b(E, B)$, unde E e tot local convex tonelat.

FAMILII COMPOZABILE DE OPERATORI

Fie $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s \in R}$ o familie de operatori liniari şi continui, definiţi pe un spaţiu local convex tonelat E şi cu valori în spaţiul Banach B, depinzînd de un parametru real s.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 449–454, BUCUREŞTI, 1967

DEFINIŢIA 1. Vom spune că familia de operatori $\mathcal{U}$ este compozabilă, dacă verifică condiţiile :

a) Pentru orice $\varphi \in E$, notînd prin :

$$\Psi(s) = (U_s, \varphi)$$

avem $\Psi \in \mathcal{D}B$.

b) Pentru orice şir generalizat $\varphi_\iota \to 0$ în E, $\iota \in I$, avem :

$$\Psi_\iota(s) = (U_s, \varphi_\iota) \to 0 \text{ în } \mathcal{D}B.$$

Se observă că dacă $\varphi^* \in (\mathcal{D}B)^*$, putem introduce o operaţie de compoziţie $\mathcal{U} \circ \varphi^*$ prin condiţia :

$$< \mathcal{U} \circ \varphi^*, \varphi > \; = \; < \varphi^*(s), (U_s, \varphi) > \text{ pentru orice } \varphi \in E.$$

Datorită condiţiei b) avem $\mathcal{U} \circ \varphi^* \in E'$ şi s-a definit astfel un operator de la $(\mathcal{D}B)^*$ în E', dualul spaţiului E.

Dacă $B = R$, atunci familia de operatori devine o familie $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in R}$ de funcţionale şi în acest caz, pentru orice $w \in \mathcal{L}_b\ (\mathcal{D}, F)$, unde F este un alt spaţiu Banach, putem introduce o operaţie de compoziţie $\mathcal{F} \circ w$, prin relaţia :

$$< \mathcal{F} \circ w, \varphi > \; = \; < w(s), (f_s, \varphi) > \text{ pentru orice } \varphi \in E.$$

Tot datorită condiţiei b, $\mathcal{F} \circ w \in \mathcal{L}\ (E, F)$ şi s-a definit astfel un operator de la $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}; F)$ în $\mathcal{L}_b(E, F)$.

PROPOZIŢIA 1.1. *Operatorul generat de familia compozabilă de operatori, precum şi cel generat de familia de funcţionale liniare continue* $\mathcal{F}$, *sînt liniari şi continui.*

Vom demonstra propoziţia pentru familia $\mathcal{U}$, demonstraţia pentru cazul familiei de funcţionale fiind analoagă.

Liniaritatea fiind evidentă, vom verifica numai continuitatea. Fie pentru aceasta $\varphi_\iota^* \to 0$ în $(\mathcal{D}B)^*$, $\iota \in I$ şi fie $\mathcal{M}$ o mulţime mărginit din E; avem

$$| \mathcal{U} \circ \varphi_\iota^* |_{\mathcal{M}} = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}} | < \mathcal{U} \circ \varphi_\iota^*, \varphi > | = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}} | < \varphi_\iota^*(s), (U_s, \varphi) > | =$$

$$= \sup_{\Psi \in \mathcal{M}^*} | < \varphi_\iota^*, \Psi > | = | \varphi_\iota^* |_{\mathcal{M}} \to 0,$$

unde prin $\mathcal{M}^*$ am notat mulţimea mărginită din $\mathcal{D}B$:

$$\mathcal{M}^* = \{ \Psi \mid \Psi(s) = (U_s, \varphi), \varphi \in \mathcal{M} \}.$$

Vom demonstra acum :

TEOREMA 1. *Există o corespondenţă biunivocă între operatorii liniari şi continui de la* $(\mathcal{D}B)^*$ *în* E' *şi familiile compozabile de operatori* $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s \in R}$ *cu* $U_s \in \mathcal{L}\ (E, B)$.

S-a văzut că orice familie compozabilă $\mathcal{U}$ determină un operator liniar continuu de la $(\mathcal{D}B)^*$ la E'. Să arătăm că, invers, orice operator T de la $(\mathcal{D}B)^*$ la E' e determinat de o astfel de familie. Pentru aceasta observăm că în general E şi F fiind două spaţii local convexe, dintre care E e tonelat, avem

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(E,\ F) \sim \mathcal{L}(F',\ E').$$

Aşadar, în cazul nostru avem :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}((\mathcal{D}B)^{*}\,;\ E') \sim \mathcal{L}(E\,;\ \mathcal{D}B)$$

şi deci lui T îi corespunde $\mathcal{U} : E \to \mathcal{D}B$ şi punînd

$$< U_s,\ \varphi > = < \mathcal{U},\ \varphi > (s)$$

rezultă că $\{U_s\}_{s \in R}$ e o familie compozabilă de operatori.

Teorema 1'. *Există o corespondenţă biunivocă între operatorii liniari şi continui de la* $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}\,;\ F)$ în $\boldsymbol{\mathcal{L}}_b\,(E,\ F)$ *şi familiile compozabile de funcţionale* $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in R},\ f_s \in E'$.

Vom demonstra întîi că avem :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_b(\mathcal{D},\ F)\,;\ \mathcal{L}_b(E\,;\ F)) \sim \mathcal{L}(E\,;\ \mathcal{D}).$$

Într-adevăr, relaţia

$$< Tw,\ \varphi > = < w,\ \mathcal{U}\varphi >,\ \ \varphi \in E, \tag{1}$$

unde $w \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathcal{D}\,;\ F)$ realizează corespondenţa biunivocă menţionată.

Fie, pentru verificare, întîi $\mathcal{U} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}\,(E\,;\ \mathcal{D})$ şi fie $w_\iota \to 0$ în $\boldsymbol{\mathcal{L}}_b\,(\mathcal{D}\,;\ F)$, $\iota \in I$. Dacă $\mathcal{M}$ e o mulţime mărginită din E, avem :

$$|\,Tw_\iota|_{\mathcal{M}} = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}} \|< Tw_\iota,\ \varphi >\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}} \|< w_\iota,\ \mathcal{U}\varphi >\| =$$

$$= \sup_{\Psi \in \mathcal{M}^{*}} \|< w_\iota,\ \Psi >\| = |\,w_\iota|_{\mathcal{M}^{*}} \underset{\iota \in I}{\to} 0,$$

unde $\mathcal{M}^{*}$ este imaginea prin operatorul $\mathcal{U}$ a mulţimii $\mathcal{M}$, deci e mărginită în $\mathcal{D}$. Prin urmare T e continuă. Fie acum $T \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_h(\mathcal{D}\,;\ F)\,;\ \mathcal{L}_b\,(E\,;\ F))$; să arătăm că $\mathcal{U}$ dat de relaţia (1) este continuu de la E la $\mathcal{D}$. Fie pentru aceasta $\varphi_\iota \in \mathcal{D}$, $\varphi_\iota \to 0$ în E, $\iota \in I$, avem pentru orice $w \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathcal{D}\,;\ F)$, $< w, \mathcal{U}\varphi_\iota > \to 0$ în F, de aici rezultă că $\mathcal{U}\varphi_\iota \to 0$ slab în $\mathcal{D}$ deci şi tare, şi prin urmare $\mathcal{U}$ e continuu.

Teorema rezultă acum din faptul că orice $\mathcal{U} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(E\,;\ \mathcal{D})$ determină o familie compozabilă de funcţionale prin :

$$< f_s,\ \varphi > = < \mathcal{U},\ \varphi > (s),\ \ \forall \varphi \in E.$$

Propoziţia 1.2. *Fie* $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s \in R}$, *unde* $U_s \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(E\,;\ B)$ *o familie compozabilă de operatori ; funcţia* $\Phi(s) = U_s : R \to \boldsymbol{\mathcal{L}}_b\,(E,\ B_7)$ *este indefinit diferenţiabilă.*

Observăm că datorită faptului că E e tonelat, rezultă că $\mathcal{L}(E,\ B)$ este complet pentru topologia convergenţei uniforme pe părţile mărginite ale lui E, [6], corolarul 2, th 4, III, § 3.

Se ştie că orice funcţie reală cu valori într-un spaţiu local-convex, cvasicomplet, indefinit derivabilă în topologia slabă este indefinit derivabilă şi în topologia iniţială [7], [8].

În cazul nostru funcția $\Phi(s)$ este o funcție cu valori operatori și are proprietatea a); pentru a demonstra propoziția folosim același raționament ca în [7]; modificînd lema de bază ce pregătește demonstrația avem:

LEMĂ. *Fie o funcție* $\Psi(s) : R \to B$ *cu suportul compact* K, *indefinit derivabilă. Atunci expresia*

$$E = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\frac{\Psi(s+\alpha) - \Psi(s)}{\alpha} - \frac{\Psi(s+\beta) - \Psi(s)}{\beta}\right]$$

este mărginită cînd $0 < |\alpha| < 1$, $0 < |\beta| < 1$, $\alpha \neq \beta$ *și* $s \in K$.

Această lemă nu e decît transpunerea lemei corespunzătoare din [7], dată pentru funcții scalare.

Cu aceasta demonstrația propoziției noastre se face prin inducție ca în [7], folosind teorema Banach — Steinhaus.

COROLAR. *Funcția* $\Phi(s) = f_s : R \to E'$ *este indefinit derivabilă*, $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in R}$ *fiind o familie compozabilă de funcționale.*

Se observă că în demonstrarea propoziției 1.2 s-a folosit numai proprietatea a) pentru familia de operatori $\{U_s\}_{s \in R}$.

Vom arăta acum că dacă spațiul E este în plus și bornologic, proprietatea b) a familiei se poate înlocui prin:

b') *Dacă* $\varphi \in M$, *unde* $\mathcal{M}$ *e mărginită în* E, *atunci mulțimea de funcții*

$$\mathcal{M}^* = \{\Psi / \Psi(s) = (U_s, \varphi), \ \varphi \in \mathcal{M}\}$$

are suportul într-un același compact.

Putem arăta că b') → b).

Pentru aceasta amintim propoziția 6, din [6], III, § 4.

Dacă E e un spațiu local convex iar F e un spațiu tonelat, orice aplicație biliniară separat continuă u de la $E \times F$ într-un spațiu local convex G este $\mathfrak{S}$-hipocontinuă pentru orice mulțime $\mathfrak{S}$ de părți mărginite ale lui E. În acest caz, dacă $M \in \mathfrak{S}$ și Q e mărginită în F, $u(M \times Q)$ e mărginită în G.

Punînd $u(U, \varphi) = (U, \varphi)$ pentru $U \in \mathcal{L}_b(E, B)$, $\forall \varphi \in E$, u e evident separat continuă și sînt îndeplinite condițiile propoziției menționate mai sus și deci mulțimea:

$$\{Y_{s,\varphi} \mid Y_{s,\varphi} = u(U_s, \varphi), \ s \in R, \ \varphi \in \mathcal{M}\}$$

este mărginită în B, adică familia $\mathcal{M}^*$ de funcții cu valori în B este mărginită, oricare ar fi s din suportul comun.

Analog se arată că pentru orice p natural familia de funcții

$$\{D^p \Psi \mid \Psi(s) = (U_s, \varphi), \ \varphi \in \mathcal{M}\}$$

este egal mărginită, ținînd seama că mulțimea de operatori $\{D_s^p\, U_s\}_{s \in R}$ este mărginită în $\mathcal{L}_b(E, B)$.

Prin urmare, mulțimea $\mathcal{M}^*$ este mărginită în $\mathcal{D}B$ și deci operatorul $\mathcal{U}$ determinat de $\{U_s\}_{s \in R}$ transformă orice mulțime mărginită $\mathcal{M}$ din E într-o mulțime $\mathcal{M}^*$ mărginită în $\mathcal{D}B$; E fiind bornologic, rezultă că U e continuu.

Totodată a reieşit :

TEOREMA 2. *E fiind un spaţiu local convex tonelat bornologic, există o corespondenţă biunivocă între aplicaţiile liniare şi continui ale lui**) $(\mathcal{D}_K B)^*$ *în E' şi funcţiile indefinit derivabile de variabilă reală cu valori în $\mathcal{L}_b(E, B)$ şi cu suportul în K. În aceleaşi ipoteze pentru E există de asemenea o corespondenţă biunivocă între aplicaţiile liniare şi continue ale lui $\mathcal{L}_b$ $(\mathcal{D}_k, F)$ în $\mathcal{L}_b(E, F)$ şi funcţiile indefinit derivabile de variabilă reală cu valori în E' şi cu suportul în K.*

Aceasta coincide cu rezultatul dat de teorema lui Sebastiao e Silva. În primul caz se ia B^* în rolul lui B şi E' în rolul lui E şi se observă că avem :

$$\mathcal{L}_b(E\,;\,B) \approx \mathcal{L}_b(B^*, E')$$

unde acest izomorfism, amintit în teorema 1, este chiar topologic. Într-adevăr, pentru orice mulţime $\mathcal{M}$ mărginită în E, avem :

$$|T|_{\mathcal{M}} = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |Tf|_{\mathcal{M}} = \sup_{\|f\|\leqslant 1}\ \sup_{\varphi\in\mathcal{M}} |< Tf, \varphi >| =$$

$$= \sup_{\varphi\in\mathcal{M}}\ \sup_{\|f\|\leqslant 1} |< f, U\varphi >| = \sup_{\varphi\in\mathcal{M}} \|U\varphi\| = |U|_{\mathcal{M}},$$

unde $T \leftrightarrow U$ (prin $< Tf, \varphi > = < f, U\varphi >$), şi $f\in B^*$, $\varphi\in E$.

În al doilea caz se ia în rolul lui E spaţiul $\mathcal{L}_b(E\,;\,F)$ (care e complet) şi se demonstrează că :

$$\mathcal{L}_b(F, \mathcal{L}_b(E\,;\,F)) \approx E'.$$

Într-adevăr, avem corespondenţa $T\in\mathcal{L}_b(F, \mathcal{L}_b\ (E\,;\,F)) \leftrightarrow f\in E'$ dată de relaţia :

$$< Tx, \varphi > = < f, \varphi > \cdot x, \qquad x\in B,\ \varphi\in E.$$

Izomorfismul este şi topologic deoarece pentru orice $\mathcal{M}$ mărginit în E, avem :

$$|T|_{\mathcal{M}} = \sup_{\|x|\leqslant 1} |Tx|_{\mathcal{M}} = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\ \sup_{\varphi\in\mathcal{M}} \|< Tx, \varphi >\| =$$

$$= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\ \sup_{\varphi\in\mathcal{M}} |< f, \varphi >| \cdot \|x\| = \sup_{\varphi\in\mathcal{M}} |< f, \varphi >| = |f|_{\mathcal{M}}.$$

Vom considera acum anumite cazuri particulare :

a) Cazul în care $E = \mathcal{D}$ iar $B = C$; familia compozabilă de operatori devine o familie compozabilă de distribuţii scalare şi regăsim rezultatul din [9] :

Există o corespondenţă biunivocă între aplicaţiile liniare continue de la $\mathcal{D}'$ în $\mathcal{D}'$ şi familiile compozabile de distribuţii scalare.

b) Cazul în care $E = \mathcal{D}$, familia compozabilă de operatori devine o familie compozabilă de distribuţii cu valori în spaţiul Banach B şi avem :

---

*) $\mathcal{D}_K\, B$ este spaţiul funcţiilor indefinit derivabile definite pe R cu valori în B şi cu suportul în compactul K.

Există o corespodenţă biunivocă între aplicaţiile liniare continue ale lui $(\mathcal{D}B)^*$ în $\mathcal{D}$ şi familiile compozabile de distribuţii cu valori în B.

c) Cazul în care $E = \mathcal{D}F$; familia compozabilă de funcţionale $\{f_s\}_{s\in R}$, $f_s \in E'$, devine o familie de distribuţii cu valori în F^* şi avem :

Există o corespondenţă biunivocă între aplicaţiile liniare continue ale lui $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}; F)$ în $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}\,F, F)$ şi familiile compozabile de distribuţii cu valori în F^*.

Primită la redacţie la 15 iulie 1966

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România Str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. ROMULUS CRISTESCU, *Familles composables des distributions et systèmes physiques linéaires* Rev. Roum. de math. pures et appl., **9** (1964).
2. G. MARINESCU, *Distribution à valeurs dans le dual d'un espace de Banach*. Mat. Ann., *134*, 195—204 (1958).
3. SEBASTIAO e. SILVA, *Sur la définition et la structure des distributions vectorielles*. Portug. Math., **19**, 1—80 (1960).
4. L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*. Ann. Inst. Fourier, **7**, 1—139 (1957).
5. G. MARINESCU, *Espaces vectorielles pseudotopologiques et théorie de distributions*. Berlin, 1963.
6. N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*. XVIII, livre V, chap. III, IV, V, 1965.
7. EDWARDS, *Dérivatives of vector valued functions*. Mathematika, **5**, 9—10 (1958).
8. I. CIORĂNESCU, *Asupra unor proprietăţi ale funcţiilor vectoriale slab derivabile*. St. cerc. mat., **18**, *5*, 763—767 (1966).
9. M. ŞABAC, *Familii compozabile de distribuţii şi transformata Fourier*. St. cerc. mat., **17**, 607—613 (1965).

ASUPRA ESTIMAȚIEI DENSITĂȚII DE REPARTIȚIE A UNUI PROCES STAȚIONAR ÎN SENS LARG

DE

I. VĂDUVA

Folosindu-se unele rezultate cunoscute, referitoare la estimația densității de repartiție în cazul variabilelor aleatoare [3] sau vectorilor aleatori [4], în această Notă se definește estimația densității de repartiție a unui proces staționar în sens larg și se studiază unele proprietăți ale ei.

Introducere. Fie $\{\mathbf{\Omega}, \mathbf{K}, P\}$ un cîmp de probabilitate și $\mathbf{x}(t,\omega)$ un proces staționar în sens larg definit pe acest cîmp, unde $t \in \mathbf{R}$.

Presupunem că procesul $\mathbf{x}(t, \omega)$ este măsurabil pe $\mathbf{R} \times \mathbf{\Omega}$ în raport cu măsura produs $\mathrm{d}t \times \mathrm{d}P$, unde $\mathrm{d}t$ este măsura Lebesgue și de asemenea presupunem că $E(|\mathbf{x}(t, \omega)|) < \infty$. Dacă procesul este și metric tranzitiv, atunci se știe ([2], § 26, teorema 1) că aproape pentru orice ω

$$\mathbf{x}^*(\omega) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} \mathbf{x}(t, \omega)\mathrm{d}t$$

există și este finită. Limita $\mathbf{x}^*(\omega)$ se numește media aritmetică a procesului $\mathbf{x}(t, \omega)$.

În această Notă vom presupune în plus că $\mathbf{x}(t, \omega)$ este D-integrabil, adică

$$\iint\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{\Omega}} |\mathbf{x}(t, \omega)|\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}P(\omega)$$

există și este finită. Deci din teorema lui Fubini rezultă că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(t, \omega)\mathrm{d}t$$

există aproape pentru orice ω, este finită și măsurabilă pe $\mathbf{\Omega}$. De asemenea presupunem că procesul are funcția de repartiție unidimensională $F(a)$ și admite densitatea de repartiție unidimensională $f(a)$.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 455–460, BUCUREȘTI, 1967

Fie $\mathbf{x}_t(\omega)$ o realizare a procesului şi fie

$$e_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x}_t(\omega) \leqslant a \\ 0 & \mathbf{x}_t(\omega) > a \end{cases}$$

care este integrabilă pe $\mathbf{T} \times \Omega$, unde $\mathbf{T} = [-T, T]$. Atunci din teorema lui Fubini rezultă că măsura

$$m\{\omega ; \mathbf{x}_t(\omega) \leqslant a ; |t| \leqslant T\} = \int_{-T}^{T} e_t(\omega)\mathrm{d}t$$

există şi este finită aproape pentru orice ω. U. Grenander ([1], § 5, 14) defineşte estimaţia funcţiei de repartiţie $F(a)$ ca fiind dată de statistica

$$F_T(a, \omega) = \frac{1}{2T} m\{\omega ; \mathbf{x}_t(\omega)\ a ; |t| \leqslant T\}$$

şi arată că este o estimaţie consistentă pentru $F(a)$ în orice punct a de continuitate al acesteia.

Estimaţia densităţii de repartiţie. Fie $\mathbf{x}(t, \omega)$ un proces stocastic staţionar în sens larg care are densitatea de repartiţie $f(a)$. Presupunem că procesul este D-integrabil şi metric tranzitiv, adică ergodic.

Fie $\mathbf{x}_t(\omega)$ o realizare a procesului şi fie

$$\varepsilon_t(\omega) = \begin{cases} 1 & a - h < \mathbf{x}_t(\omega) \leqslant a + h \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \tag{1}$$

unde $h = h(T) > 0$ şi

$$\lim_{T\to\infty} h(T) = 0. \tag{2}$$

Să notăm

$$\mu_T(a) = \mu\{\omega ; a - h(T) < \mathbf{x}_t(\omega) \leqslant a + h(T) ; |t| \leqslant T\} = \int_{-T}^{T} \varepsilon_t(\omega)\mathrm{d}t \cdot \tag{3}$$

Măsura μ_T există deoarece $\varepsilon_t(\omega)$ este integrabilă pe $\mathrm{T} \times \Omega$.

DEFINIŢIA 1. *Statistica*

$$f_T(a, \omega) = \mu_T(a) \cdot \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{2h(T)} \tag{4}$$

este o estimaţie a densităţii teoretice de repartiţie $f(a)$ în punctul a.

TEOREMA 1. *Dacă funcţia teoretică de repartiţie F este absolut continuă iar procesul $\mathbf{x}(t, \omega)$ satisface condiţiile precizate anterior, atunci estimaţia definită de relaţia* (4) *este o estimaţie consistentă pentru densitatea de repartiţie $f(a)$ în orice punct a de continuitate al acesteia.*

Demonstraţie. Dacă în relaţia (1) h este fixat, atunci, în condiţiile precizate anterior, se deduce, conform teoremei ergodice, că următoarele relaţii au loc aproape pentru orice ω

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varepsilon_t(\omega)\mathrm{d}t = E[\varepsilon_t(\omega)] = P[a - h < \mathbf{x}(t, \omega) \leqslant a + h] =$$

$$= F(a + h) - F(a - h) = f(c) \cdot 2h, \qquad c \in (a - h,\ a + h).$$

De aici rezultă că aproape pentru orice ω

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2h(T)} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varepsilon_t(\omega)\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} f_T(a, \omega) = f(a)$$

deoarece $c \to a$ cînd $T \to \infty$ și $f(a)$ este continuă în a. Teorema este astfel demonstrată.

Dacă luăm în considerare estimația funcției de repartiție F_T definită de U. Grenander, constatăm că

$$f_T(a, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h(T)} K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right) \mathrm{d}F_T(y, \omega), \tag{5}$$

unde

$$K(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{cînd } |z| \leqslant 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \tag{6}$$

Evident

$$E\,[f_T(a, \omega)] = \frac{1}{h(T)} \int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right) \mathrm{f}(y)\mathrm{d}y.$$

Vom căuta condițiile pe care trebuie să le satisfacă funcția K astfel încît funcția f_T definită de (5) să fie o estimație deplasată (asimptotic nedeplasată) pentru $f(a)$. Demonstrăm mai întîi :

TEOREMA 2. *Fie $K(y)$ o funcție cu valori reale definită pe* **R**, *măsurabilă și avînd următoarele proprietăți* :

1° $\sup_{y\in R} |K(y)| < \infty$;

2° $\int_{-\infty}^{+\infty} |K(y)|\, \mathrm{d}y < \infty$;

3° $\lim_{|y|\to\infty} |yK(y)| = 0$

și fie $h(T) > 0$ satisfăcînd relația (2). *Fie de asemenea g o funcție definită pe* **R** *și cu valori reale, integrabilă* ;

4° $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y < \infty$.

Să definim

$$g_T(x) = \frac{1}{h(T)} \int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{y}{h(T)}\right) g(x-y)\mathrm{d}y.$$

Atunci în orice punct x de continuitate al lui g avem

$$\lim_{T\to\infty} g_T(x) = g(x) \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)\mathrm{d}y.$$

Demonstrație. Fie x un punct de continuitate al lui g. Observăm că

$$g_T(x) - g(x)\int_{-\infty}^{+\infty} K(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{h(T)}\int_{-\infty}^{+\infty} [g(x-y) - g(x)]K\left(\frac{y}{h(T)}\right)\mathrm{d}y \cdot$$

Să considerăm acum $\delta > 0$ și să divizăm mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale în două părți disjuncte astfel

$$\mathbf{R} = \{y : |y| \leqslant \delta\} \cup \{y ;\ |y| > \delta\}.$$

Atunci avem

$$\left| g_T(x) - g(x)\int_{-\infty}^{+\infty} K(y)\mathrm{d}y \right| \leqslant \sup_{|y|\leqslant\delta} |g(x-y) - g(x)| \cdot \Big| \frac{1}{h(T)}\int_{|y|\leqslant\delta} K(y)\mathrm{d}y +$$

$$+ \int_{|y|<\delta} \left|\frac{g(x-y)}{y}\frac{y}{h(T)}\right| \cdot \left|K\left(\frac{y}{h(T)}\right)\right| \mathrm{d}y + g(x)\left|\int_{|y|>\delta} K(y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|y|\leqslant\delta}\left| g(x-y) - g(x)\right| \int_{|z|\leqslant\frac{\delta}{h(T)}} |K(z)|\,\mathrm{d}z + g(x)\int_{|z|>\frac{\delta}{h(T)}} |K(z)|\,\mathrm{d}z +$$

$$+ \frac{1}{\delta}\cdot\sup_{|z|>\frac{\delta}{h(T)}} |z\ K(z)| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\mathrm{d}z \cdot$$

Să analizăm pe rînd termenii ultimei părți a inegalității precedente. Cînd $T \to \infty$, primul termen tinde la zero, deoarece x este punct de continuitate al lui g iar funcția K este integrabilă. Al doilea termen tinde la zero deoarece $g(x)$ este finită și $\int_{-\infty}^{+\infty} |K(z)|\,\mathrm{d}z$ este convergentă. Al treilea termen tinde la zero din cauza condiției 3°. Teorema este deci demonstrată.

COROLAR 1. *Dacă funcția K satisface condițiile* 1°, 2°, 3° *și*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(y)\ \mathrm{d}y = 1,$$

atunci funcția $f_T\,(a,\ \omega)$ este o estimație asimptotic nedeplasată pentru $f(a)$ în orice punct de continuitate al acesteia.

Demonstrația corolarului rezultă imediat din teorema 2.

Vom demonstra acum o proprietate de consistență.

TEOREMA 3. *Dacă funcția $K(y)$ satisface condițiile corolarului 1 și este cu variație mărginită, atunci funcția $f_T\ (a,\ \omega)$ definită de* (1) *este o estimație consistentă pentru $f(a)$ în orice punct de continuitate al acesteia.*

Demonstrația. Observăm mai întîi că

$$f_T\,(a,\ \omega) - f(a) = \left[f_T\,(a,\ \omega) - \frac{1}{h(T)}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right)f(y)\,\mathrm{d}y\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{h(T)}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right)f(y)\,\mathrm{d}y - f(a)\right]\cdot$$

Deoarece $K(y)$ este cu variație mărginită, rezultă că

$$f_T(a,\ \omega) - \frac{1}{h(T)}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right) f(y)\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{h(T)}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right)\mathrm{d}F_T(y,\ \omega) - \frac{1}{h(T)}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{a-y}{h(t)}\right)\mathrm{d}F(y) =$$

$$= \frac{1}{h(T)} K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right)\Big[F_T(a,\ y) - F(y)\Big]_{y=-\infty}^{+\infty} +$$

$$+ \int_{-8}^{+\infty} [F_T(a - h(T)z, \omega) - F(a - h(T)z)]\,\mathrm{d}K(z).$$

Să observăm mai întîi că

$$\frac{1}{h(T)} K\left(\frac{a-h}{h(T)}\right)\Big[F_T(a,\ y) - F(y)\Big]_{y=-\infty}^{+\infty}$$

tinde către zero aproape pentru orice ω cînd $T \to \infty$.

Deci aproape pentru orice ω

$$f_T(a,\ \omega) - \frac{1}{h(T)}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right) f(y)\,\mathrm{d}y \sim$$

$$\sim \int_{-\infty}^{+\infty} [F_T(a - h(T)z,\ \omega) - F(a - h(T)z)]\,\mathrm{d}K(z).$$

unde semnul $\sim$ înseamnă egalitate asimptotică în raport cu T. Dacă în ultima relație facem $T \to \infty$, atunci rezultă că aproape pentru orice ω avem

$$\lim_{T\to\infty}\left[f_T(a,\ \omega) - \frac{1}{h(T)}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right) f(y)\,\mathrm{d}y\right] = 0 \tag{8}$$

și din teorema 2

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{h(T)}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right) f(y)\,\mathrm{d}y = f(a). \tag{9}$$

Ținînd seama de (8) și (9) în (7), rezultă că aproape pentru orice ω avem

$$\lim_{T\to\infty} f_T(a,\ \omega) = f(a)$$

și cu aceasta teorema este demonstrată.

Primită la redacție la 12 septembrie 1966

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
str. M. Eminescu nr. 47,
București

BIBLIOGRAFIE

1. U. Grenander, *Stochastic processes and statistical inference*, Arkiv för matematik, **1**, *3*, 155—277 (1950).
2. E. Parzen, *On estimation of a Probability Density Function and Mode*. Ann. Math. Stat., **33**, *3*, 1065—1876 (1962).
3. I. Văduva, *Estimaţia unei densităţi de repartiţie K-dimensională*. St. cerc. mat., **XIV**, *4*, 653—660 (1963).
4. К. Ито, *Вероятностные процессы*, выпуск I, Изд. иностр. лит. Москва (1960).

IDENTITĂȚILE LUI BIANCHI ȘI VEBLEN PENTRU TENSORUL SIMETRIC DE CURBURĂ A UNUI SPAȚIU CU CONEXIUNE AFINĂ. ECHIVALENȚA LOR

DE

C. I. ISPAS

În această lucrare se stabilesc identitățile lui Bianchi și Veblen pentru tensorul simetric de curbură al unui spațiu A_n cu conexiune afină introdus de acad. prof. Gh. Vrănceanu [2] și se demonstrează echivalența lor.

1. În cadrul spațiilor cu conexiune afină există mai multe căi pentru a obține identități Bianchi și Veblen.

Astfel, O. Veblen [1] pornește de la ecuațiile curbelor autoparalele și pe lîngă identitățile lui Bianchi, obține o a doua serie de identități care astăzi îi poartă numele. Acad. prof. Gh. Vrănceanu [2] ajunge pe o cale directă la identitățile Bianchi și Veblen, cu ajutorul formelor formulelor fundamentale (24), (24′), (24″) [2], p. 201. R. Blum [3] a arătat că identitățile Bianchi și Veblen sînt echivalente.

În această lucrare ne propunem să stabilim identități Bianchi și Veblen pentru tensorul simetric de curbură introdus de acad. prof. Gh. Vrănceanu a unui spațiu A_n cu conexiune afină și să dăm formulele de trecere de la unele la celelalte, deci echivalența lor.

2. DEFINIȚIA 1. După H. Weyl [4], se zice că un spațiu $A_n(x^1, \ldots, x^n)$ este un spațiu cu conexiune afină, dacă există un sistem de n^3 funcții $\Gamma^i_{jk}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ce se numesc componentele conexiunii, care printr-o transformare de coordonate

$$\overline{x}^\alpha = \overline{x}^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

se transformă după formulele :

$$\frac{\partial^2 \overline{x}^\alpha}{\partial x^i\, \partial x^j} = \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^k}.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 461–467, BUCUREȘTI, 1967

DEFINIȚIA 2. După O. Veblen [1] un sistem de coordonate $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, se zice sistem de coordonate normale asociate unui punct $P_0\,(x_0^i)$, dacă sînt îndeplinite condițiile:

$$S\left(\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^{l_1}}\right) = 0,\ S\left(\frac{\partial^2 \Gamma^i_{jk}}{\partial x^{l_1}\partial x^{l_2}}\right) = 0,\ \ldots,\ S\left(\frac{\partial^p \Gamma^i_{jk}}{\partial x^{l_1}\partial x^{l_2}\ldots\partial x^{l_n}}\right) = 0$$

unde semnul S ne arată că trebuie să permutăm indicii (j, k, l_1), $(j, k, l_1, l_2), \ldots, (j, k, l_1, l_2, \ldots, l_p)$ şi să facem suma astfel ca să obţinem o expresie simetrică în indicii respectivi.

DEFINIŢIA 3. Tensorii de tensiune şi de curbură asociaţi unui spaţiu cu conexiune afină sînt definiţi de formulele:

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$$

$$\Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk}\cdot\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\cdot\Gamma^s_{jk}\,.$$

Proprietăţile de simetrie, antisimetrie în perechile de indici, le vom nota cu (jk) pentru simetrie şi $[jk]$ pentru antisimetrie; deci

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} \Rightarrow \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = 0 \Rightarrow \Gamma^i_{(jk)} = 0$$

$$\Gamma^i_{jk} = -\,\Gamma^j_{kj} \Rightarrow \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj} = 0 \Rightarrow \Gamma^i_{[jk]} = 0\,.$$

Proprietatea

$$\Gamma^i_{jkl} + \Gamma^i_{klj} + \Gamma^i_{ljk} = 0 \Rightarrow \Gamma^i_{<jkl>} = 0\,.$$

Proprietatea

$$\Gamma^i_{jkl/m} + \Gamma^i_{ljm/k} + \Gamma^i_{mlk/j} + \Gamma^i_{kmj/l} = 0 \Rightarrow \Gamma^i_{\{jkl/m\}} = 0\,.$$

3. Acad. prof. Gh. Vrănceanu [2] asociază unui spaţiu cu conexiune afină A_n, tensorul

$$G^i_{jkl} = \Gamma^i_{jkl} + \Gamma^i_{kjl} = \Gamma^i_{jkl} - \Gamma^i_{klj} \tag{1}$$

pentru care este evidentă proprietatea de simetrie în indicii j, k adică

$$G^i_{(jk)l} = 0 \tag{2}$$

în opoziţie cu tensorul Γ^i_{jkl}, care este strîmb simetric în indicii k, l, deci

$$\Gamma^i_{j[kl]} = 0\,. \tag{3}$$

Pentru tensorul Γ^i_{jkl} sînt stabilite identităţile Bianchi şi Veblen [2] iar echivalenţa lor este dată în [3].

Ne propunem să stabilim identităţile lui Bianchi şi Veblen pentru tensorul simetric G^i_{jkl}, în cazul cînd A_n este un spaţiu cu conexiune afină simetrică, adică $\Gamma^i_{(jk)} = 0$, ceea ce atrage că torsiunea este nulă:

$$T^i_{jk} = 0\,. \tag{4}$$

TEOREMA 1. *Dacă se dă un spaţiu cu conexiune afină A_n cu coeficienţii Γ^i_{jk}, pentru care tensorul de torsiune $T^i_{jk} = 0$, iar tensorii de curbură sînt Γ^i_{jkl} şi G^i_{jkl}, atunci avem identităţile lui Bianchi*

$$G^i_{j((kl)/r) = 0} \tag{B}$$

sau dezvoltat :

$$(\mathrm{B}') \qquad G^i_{jkl/r} + G^i_{jlr/k} + G^i_{jrk/l} - G^i_{jlk/r} - G^i_{jkr/l} - G^i_{jrl/k} = 0.$$

Demonstrație. Plecăm de la formula fundamentală stabilită de acad. prof. Gh. Vrănceanu [2] ¹), care cu notațiile introduse se scrie :

$$(5) \qquad \Gamma^i_{<jkl>} = T^i_{<jk/l>} + T^i_{s<j} \cdot T^s_{kl>} .$$

Dacă

$$(6) \qquad T^i_{<jk/l>} + T^i_{s<j} \cdot T^s_{kl>} = A^i_{jkl} ,$$

atunci avem

$$(7) \qquad \begin{aligned} \Gamma^i_{jkl} + \Gamma^i_{klj} + \Gamma^i_{ljk} &= A^i_{jkl} \\ \Gamma^i_{jkl} - \Gamma^i_{klj} &= G^i_{jkl} \\ \Gamma^i_{jkl} - \Gamma^i_{ljk} &= - G^i_{ljk} \end{aligned}$$

care prin adunare ne conduce la formula [2] ²)

$$(8) \qquad 3 \cdot \Gamma^i_{jkl} = G^i_{jkl} - G^i_{ljk} + A^i_{jkl} .$$

Cum spațiul lA_n este fără torsiune, adică $T^i_{jk} = 0$, atunci $A^i_{jkl} = 0$ și formula (8) devine

$$(9) \qquad 3 \cdot \Gamma^i_{jkl} = G^i_{jkl} - G^i_{ljk} .$$

Identitățile lui Bianchi pentru tensorul Γ^i_{jkl}, prin înmulțire cu 3, se scriu sub forma :

$$(10) \qquad 3\, B^i_{jklr} = 3\,(\Gamma^i_{jkl/r} + \Gamma^i_{jlr/k} + \Gamma^i_{jrk/l}) = 0.$$

Ținînd cont de (9) și (10), obținem

$$(10') \qquad 3\, B^i_{jklr} = G^i_{jkl/r} - G^i_{ljk/r} + G^i_{jlr/k} - G^i_{rjl/k} + G^i_{jrk/l} - G^i_{kjr/l} = 0 .$$

Grupînd termenii, folosind proprietatea de simetrie a tensorului G^i_{jkl} în indicii jk și notînd

$$3\, B^i_{jklr} = \mathcal{B}^i_{jklr} ,$$

obținem pentru (10′) :

$$(11) \qquad \mathcal{B}^i_{jklr} = G^i_{jkl/r} + G^i_{jlr/k} + G^i_{jrk/l} - G^i_{jlk/r} - G^i_{jkr/l} - G^i_{jrl/k} = 0$$

sau folosind notațiile introduse

$$(11') \qquad \mathcal{B}^i_{jklr} = G^i_{j<kl/r>} - G^i_{j<lk/r>} = 0$$

final

$$(\mathcal{B}) \qquad G^i_{j<(kl)/r>} = 0$$

adică identitățile lui Bianchi pentru tensorul simetric $G^i_{(jk)l}$.

Pentru a ușura reținerea lor, remarcăm că primii trei termeni din (11) păstrează simetria circulară a indicilor de covarianță — ultimii trei — iar partea cu semnul minus se obține din prima parte prin schim-

---

¹) (24), p. 201.

²) p. 202.

barea indicilor din mijloc; astfel își schimbă locurile k cu l, l cu r, r cu k. De asemenea, partea negativă prezintă simetria circulară în ultimii trei indici de covarianță; notațiile de la începutul lucrării ne permit scrierea condensată din $(\mathfrak{B})$.

TEOREMA 2. *Dacă se dă un spațiu cu conexiune afină* A_n *cu coeficienții de conexiune* Γ^i_{jk}, *pentru care tensorul de torsiune* $T^j_{jk} = 0$, *iar tensorii de curbură sînt* Γ^i_{jkl} *și* G^i_{jkl}, *atunci avem identitățile lui Veblen*

$$G^i_{\{j(kl)/r\}} = 0 \tag{V}$$

sau dezvoltat:

$$G^i_{jkl/r} + G^i_{ljr/k} + G^i_{rlk/j} + G^i_{krj/l} - G^i_{jlk/r} - G^i_{lrj/k} - G^i_{rkl/j} - G^i_{kjr/l} = 0 \tag{V'}$$

Demonstrație. Identitățile lui Veblen pentru tensorul Γ^i_{jkl} în cazul $T^i_{jk} = 0$ se scriu prin înmulțire cu 3:

$$3\,V^i_{kjlr} = 3\,(\Gamma^i_{jkl/r} + \Gamma^i_{ljr/k} + \Gamma^i_{rlk/j} + \Gamma^i_{krj/l}) = 0. \tag{12}$$

Dacă în (12) ținem cont de (9), obținem:

$$3V^i_{kjlr} = G^i_{jkl/r} - G^i_{ljk/r} + G^i_{ljr/k} - G^i_{rlj/k} + G^i_{rlk/j} - G^i_{krl/j} + G^i_{krj/l} - G^i_{jkr/l} = 0. \tag{13}$$

Folosind proprietatea de simetrie a lui $G^i_{(jk)l}$, grupînd termenii în mod convenabil și folosind notațiile introduse, formula (13) se scrie sub forma finală:

$$G^i_{\{j(kl)/r\}} = 0 \tag{$\mathcal{V}$}$$

care ne dă identitățile Veblen pentru tensorul simetric $G^i_{(jk)l}$.

Observație. În identitățile (B) și (V) apar simboli de notație ca $\langle (kl)/r \rangle$ în (B) și $\{j(kl)/r\}$ în $(\mathcal{V})$; subliniem faptul că indiferent de ordinea în care dezvoltăm parantezele (kl), $\langle kl/r \rangle$, $\{jkl/r\}$, obținem același rezultat.

TEOREMA 3. *Date fiind ipotezele și rezultatele din teoremele 1 și 2, avem* $(\mathfrak{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{V})$, *adică echivalența identităților Bianchi și Veblen pentru tensorul simetric* $G^i_{(jk)l}$.

Demonstrație. A demonstra $(\mathscr{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{V})$, revine la a demonstra formulele:

$$\mathcal{V}^i_{jklr} = \mathscr{B}^i_{jklr} + \mathscr{B}^i_{lrjk} \tag{a}$$

$$2\,\mathscr{B}^i_{jklr} = \mathcal{V}^i_{jklr} + \mathcal{V}^i_{jlrk} + \mathcal{V}^i_{jrkl} \tag{b}$$

formule ce arată că identitățile Bianchi și Veblen sînt echivalente.

În formula (a), ținînd cont de identitățile $(\mathscr{B})$ și $(\mathcal{V})$, avem:

$$G^i_{\{k(jl)/r\}} = G^i_{j<(kl)/r>} + G^i_{l<(rj)/k>} \tag{14}$$

sau efectuînd calculele:

$$G^i_{\{kjl/r\}} - G^i_{\{klj/r\}} = G^i_{j<kl/r>} - G^i_{j<lk/r>} + G^i_{l<rj/k>} - G^i_{l<jr/k>}$$

sau încă :

$$(15)\quad \overset{1}{\dot{G}}{}^i_{kjl/r} + \overset{2}{\dot{G}}{}^i_{lkr/j} + \overset{3}{\dot{G}}{}^i_{rlj/k} + \overset{4}{\dot{G}}{}^i_{jrk/l} - \overset{5}{\dot{G}}{}^i_{klj/r} - \overset{6}{\dot{G}}{}^i_{jkr/l} - \overset{7}{\dot{G}}{}^i_{rjl/k} - \overset{8}{\dot{G}}{}^i_{lrk/j} =$$

$$= \overset{1}{\dot{G}}{}^i_{jkl/r} + \overset{9}{\dot{G}}{}^i_{jlr/k} + \overset{4}{\dot{G}}{}^i_{jrk/l} - \overset{10}{\dot{G}}{}^i_{jlk/r} - \overset{6}{\dot{G}}{}^i_{jkr/l} - \overset{7}{\dot{G}}{}^i_{jrl/k} +$$

$$+ \overset{3}{\dot{G}}{}^i_{lrj/k} + \overset{10}{\dot{G}}{}^i_{ljk/r} + \overset{2}{\dot{G}}{}^i_{lkr/j} - \overset{9}{\dot{G}}{}^i_{ljr/k} - \overset{8}{\dot{G}}{}^i_{lrk/j} - \overset{5}{\dot{G}}{}^i_{lkj/r}.$$

Termenii cu același număr se reduc dacă ținem seama de proprietățile de simetrie $G^i_{(jk)l} = 0$ în primii doi indici de covarianță (jk).

În mod asemănător formula (b) devine cu ajutorul lui $(\mathcal{B})$ și $(\mathcal{V})$:

$$(16)\qquad 2 \cdot G^i_{j<(kl)/r>} = G^i_{\{k(jl)/r\}} + G^i_{\{l(jr)/k\}} + G^i_{\{r(jk)/l\}}$$

sau efectuînd calculele :

$$(17)\quad 2 \cdot \left[G^i_{j<kl/r>} - G^i_{j<kl/r>}\right] = G^i_{\{kjl/r\}} - G^i_{\{klj/r\}} + G^i_{\{ljr/k\}} - G^i_{\{lrj/k\}} +$$

$$+ G^i_{\{rjk/l\}} - G^i_{\{rkj/l\}}$$

sau încă :

$$(18)\qquad 2 \cdot [\overset{1}{\dot{G}}{}^i_{jkl/r} + \overset{2}{\dot{G}}{}^i_{jlr/k} + \overset{3}{\dot{G}}{}^i_{jrk/l} - \overset{4}{\dot{G}}{}^i_{jlk/r} - \overset{5}{\dot{G}}{}^i_{jkr/l} - \overset{6}{\dot{G}}{}^i_{jrl/k}] =$$

$$= \overset{1}{\dot{G}}{}^i_{kjl/r} + G^i_{lkr/j} + G^i_{rlj/k} + \overset{3}{\dot{G}}{}^i_{jrk/l} - G^i_{klj/r} - \overset{5}{\dot{G}}{}^i_{jkr/l} - \overset{6}{\dot{G}}{}^i_{rjl/k} - G^i_{lrk/j} +$$

$$+ \overset{2}{\dot{G}}{}^i_{ljr/k} + G^i_{rlk/j} + G^i_{krj/l} + \overset{1}{\dot{G}}{}^i_{jkl/r} - G^i_{lrj/k} - \overset{4}{\dot{G}}{}^i_{jlk/r} - \overset{5}{\dot{G}}{}^i_{kjr/l} - G^i_{rkl/j} +$$

$$+ \overset{3}{\dot{G}}{}^i_{rjk/l} + G^i_{krl/j} + G^i_{lkj/r} + \overset{2}{\dot{G}}{}^i_{jlr/k} - G^i_{rkj/l} - \overset{6}{\dot{G}}{}^i_{jrl/k} - \overset{4}{\dot{G}}{}^i_{ljk/r} - G^i_{klr/j}.$$

Toți termenii din membrul întîi se reduc cu egalii lor din membrul doi (sînt notați cu $\overset{p}{\dot{G}}{}^i_{jkl/r}$), ținînd cont de proprietatea de simetrie a tensorului de curbură G^i_{jkl} în indicii de covarianță jk. Ceea ce a rămas în membrul doi se poate grupa după cum urmează :

$$(19)\qquad 0 = (G^i_{lkr} + G^i_{krl} + G^i_{rlk})_{/j} - (G^i_{lrk} + G^i_{rkl} + G^i_{klr})_{/j} +$$

$$+ (G^i_{rlj} - G^i_{lrj})_{/k} + (G^i_{krj} - G^i_{rkj})_{/l} + (G^i_{lkj} - G^i_{klj})_{/r}$$

relație evidentă dacă avem în vedere pe (2) și relația (24^{V}) stabilită de acad. prof. Gh. Vrănceanu [2] 3).

4. *Sistem complet de identități.* DEFINIȚIE. Vom spune că în $(\mathcal{B})$ avem un sistem complet de identități, dacă orice alt sistem de identități care conține termenii din $(\mathcal{B})$ este o consecință a sistemului $(\mathcal{B})$.

TEOREMA 4. *Sistemul de identități Bianchi* $(\mathcal{B})$ *pentru tensorul de curbură simetric* G^i_{jkl} *este un sistem complet de identități.*

Demonstrație. Considerăm relațiile

$$(20)\qquad \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l \cdot \partial x^r} = \frac{5}{24}\,(G^i_{jkl/r} + G^i_{jkr/l}) - \frac{1}{24}\,(G^i_{lrj/k} + G_{lrk/j})$$

și

$$(21)\quad \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jk}}{\partial x^r \cdot \partial x^l} + \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jr}}{\partial x^k \cdot \partial x^l} + \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jl}}{\partial x^r \cdot \partial x^k} + \frac{\partial^2 \Gamma^i_{kl}}{\partial x^j \cdot \partial x^r} + \frac{\partial^2 \Gamma^i_{kr}}{\partial x^j \cdot \partial x^l} + \frac{\partial^2 \Gamma^i_{rl}}{\partial x^j \cdot \partial x^k} = 0.$$

---

3) p. 203.

stabilite de acad. prof. Gh. Vrănceanu [2] 4). Relaţiile (20) ne spun că derivatele de ordinul al doilea ale coeficienţilor de conexiune afină se exprimă cu ajutorul componentelor tensorului derivat al tensorului de curbură în punctul P_0. Relaţiile (21) sînt condiţiile pentru ca coordonatele în P_0 să fie normale.

Fie N numărul identităţilor $(\mathcal{B})$.

Avem evident din (20), (21) :

$$\text{Numărul}\,\frac{\partial^2\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l\cdot\partial x^r}-\text{numărul}\sum\left(\frac{\partial^2\Gamma^i_{jk}}{\partial x^r\cdot\partial x^l}\right)=\text{numărul}\;G^i_{jkl/r}-N. \tag{22}$$

Cum numărul

$$\frac{\partial^2\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l\cdot\partial x^r}=n\cdot\left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2=\frac{n^3\cdot(n+1)^2}{4},$$

numărul

$$\sum\left(\frac{\partial^2\Gamma^i_{jk}}{\partial x^r\cdot\partial x^l}\right)=\frac{n^2\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{24}$$

şi numărul

$$G^i_{jkl/r}=\frac{n^3\cdot(n^2-1)}{3},$$

după rezultatele din [2], [3], [4], rezultă că (22) devine :

$$\frac{n^3\cdot(n+1)^2}{4}-\frac{n^2\cdot(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{24}=\frac{n^3\cdot(n^2-1)}{3}-N. \tag{23}$$

Ecuaţia (23) ne dă pe N :

$$N=\frac{n^2\cdot(n^2-1)\,(n-2)}{8}, \tag{24}$$

numărul identităţilor Bianchi $(\mathcal{B})$.

Calculul direct al lui N din $(\mathcal{B})$, ţinînd cont de proprietatea de simetrie a tensorului G^i_{jkl} în indicii de covarianţă (jk) şi de simetria ciclică în indicii (klr) din $(\mathcal{B})$, ne dă pentru N tot

$$\frac{n^2\,(n^2-1)\cdot(n-2)}{8}.$$

Deci identităţile lui Bianchi $(\mathcal{B})$ pentru tensorul simetric de curbură G^i_{jkl}, formează un sistem complet de identităţi.

Orice alt sistem de identităţi în derivatele covariante ale lui G^i_{jkl} se exprimă cu ajutorul lui $(\mathcal{B})$, ceea ce ne confirmă formulele (B).

---

4) p. 204.

La fel din formulele (B) rezultă:

TEOREMA 5. *Identităţile lui Veblen formează un sistem complet de identităţi pentru tensorul* G^i_{jkl}.

Primită la redacţie la 3 mai 1966

Academia Tehnică Militară

BIBLIOGRAFIE

1. O. VEBLEN, *Normal coordinates for the geometry of paths.* P.N.A.S., S.U.A. *8* 192—197. (1922).
2. GH. VRĂNCEANU, *Leçons de géometrie différentielle.* vol. I, Bucureşti, 1957, 200—205.
3. R. BLUM, *Sur les identités de Bianchi et Veblen.* C. R. Paris, **224**, 889 (1947).
4. H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie.* J. Springler, Berlin, 1918.
5. R. BLUM, *Anzahl der Identitäten von Bianchi in einer* V_n. Académie Roumaine, Bulletin de la Sect. Sc., **XXVIII**, *6* 351—353.

ASUPRA FORMULELOR FRENET ALE UNEI FAMILII DE DIRECȚII ξ^{λ}_{1} DEFINITĂ PE O CURBĂ (C) DINTR-UN SPAȚIU RIEMANN V_n

DE

PETRE STAVRE

În această lucrare stabilim reperul și formulele Frenet ale unei familii de direcții ξ^{λ}_{1} definită pe o curbă (C) din V_n. Se dă apoi o interpretare geometrică a mărimilor introduse.

Pornind de la formulele din [1], în [2] se dă un cîmp de repere de-a lungul unei curbe (C) dintr-un spațiu V_n respectiv dintr-un spațiu euclidian E_n. Pentru cazul curbelor din E_n, se dă și o interpretare geometrică „torsiunilor" $\frac{1}{T_a}$ puse în evidență.

În [3] se arată că fiind dată o familie de direcții ξ^{λ}_{1} definită pe (C), se poate stabili reperul și ecuațiile Frenet ale familiei ξ^{λ}_{1}. Acestea se mai pot obține și din [5] particularizînd spațiul cu conexiune afină L_n într-un spațiu V_n. Plecînd de aici, în cele ce urmează vom arăta că formulele din [2] pot fi extinse pentru familia de direcție ξ^{λ}_{1}. Particularizînd ξ^{λ}_{1} așa ca ξ^{λ}_{1} să fie tangenți curbei (C), vom regăsi rezultatele [2]. Vom da și interpretarea geometrică a invarianților introduși pentru familia ξ^{λ}_{1}.

Particularizînd apoi și familia ξ^{λ}_{1} și spațiul V_n, vom regăsi interpretarea din [2]. Vom mai face apoi unele precizări.

1. Fie V_n un spațiu Riemann cu sistem de coordonate (x^i) și curba (C) dată prin

$$x^{\lambda} = x^{\lambda}(s), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

unde „s" este parametru natural al curbei. Fie

$$\underset{1}{I}^{\lambda} = \xi^{\lambda}_{1}(s) \tag{1.2}$$

o familie de direcții definită pe (C) (unde vom presupune că $\underset{1}{I}^{\lambda}$ sînt versori). Vom presupune condițiile suficiente de regularitate verificate, pe parcursul lucrării pentru a nu specifica mereu. Conform celor spuse mai

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 469–475, BUCUREȘTI, 1967

sus, putem determina un sistem complet de invarianţi ai lui (1.2) şi $(n-1)$ versori ortogonali doi cîte doi şi ortogonali pe $\underset{1}{I}^{\lambda}$ asociaţi în mod invariant acestei familii, adică putem stabili reperul şi formulele Frenet ale familiei (1.2):

$$\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s}=\sum_{i=1}^{n} a_i\,\xi_i^{\lambda} \text{ cu } \sum_{i=1}^{n} a_i^2=1 \tag{1.3}$$

$$\frac{D}{\mathrm{d}s}\,\xi_p^{\lambda}=-k_{p-1}\,\xi_{p-1}^{\lambda}+k_p\,\xi_{p+1}^{\lambda},\quad p=1,2,\ldots,n \text{ cu } k_0=k_n=0,$$

unde D este operatorul de diferenţiere covariantă în V_n.

Fie familia de direcţii (1.2) pe care o vom nota cu $\underset{1}{I}^{\lambda}$ definită pe curba (C) din V_n de metrică

$$\mathrm{d}s^2=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j. \tag{1.4}$$

Să notăm cu $\tau^i=\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}$ versorul vectorului tangent la curba (C) şi cu $\underset{2}{I}^{\lambda}$ versorul ξ_2^{λ} din (1.3) dat de

$$\frac{D}{\mathrm{d}s}\underset{1}{I}^{\lambda}=k_1\underset{2}{I}^{\lambda} \tag{1.5}$$

unde $k_1=\sqrt{\dfrac{D}{\mathrm{d}s}\underset{1}{I}^{\lambda}\dfrac{D}{\mathrm{d}s}\underset{1}{I}_{\lambda}}$ (cu interpretarea geometrică cunoscută).

Să presupunem că am asociat familiei $\underset{1}{I}^{\lambda}$ încă $(n-2)$ versori $\underset{2}{I}^{\lambda}\ldots\underset{n}{I}^{\lambda}$ care împreună cu primii doi să formeze un n-uplu ortonormal orientat pozitiv ca şi n-uplul $(\xi_1^{\lambda}=\underset{1}{I}^{\lambda}\ \xi_2^{\lambda}=\underset{2}{I}^{\lambda}\ \xi_3^{\lambda}\ldots\xi_n^{\lambda})$. Avem dar $\underset{1}{I}^{[\lambda_1}\underset{2}{I}^{\lambda_2}\ldots\underset{n}{I}^{\lambda_n]}\neq 0$.

Ţinînd seama că $\left(\dfrac{D}{\mathrm{d}s}\underset{\alpha}{I}^{[\lambda_1}\right)\underset{2}{I}^{\lambda_2}\ldots\underset{n}{I}^{\lambda_n]}=0$ avem (unde $\alpha=3,\ldots,n$)

$$\frac{D}{\mathrm{d}s}\underset{\alpha}{I}^{\lambda}=\underset{\alpha}{b}\underset{2}{I}^{\lambda}+a_{\alpha}^{k}\underset{k}{I}^{\lambda}\qquad(\alpha,k=3,\ldots,n), \tag{1.6}$$

de unde

$$\begin{gathered} b_{\alpha}=-\underset{\alpha}{I}^{\mu}\frac{D}{\mathrm{d}s}\underset{2}{I}_{\mu} \\ a_{\alpha}^{k}=\underset{k}{I}^{\mu}\frac{D}{\mathrm{d}s}\underset{\alpha}{I}_{\mu}=-\underset{\alpha}{I}^{\mu}\frac{D}{\mathrm{d}s}\underset{k}{I}_{\mu}=-a_{k}^{\alpha}. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Dacă X_{γ}^{α} este un sistem fundamental de soluţii al sistemului

$$\frac{\mathrm{d}X^{\alpha}}{\mathrm{d}s}=a_{\gamma}^{\alpha}X^{\gamma}\qquad(\alpha,\gamma=3,\ldots,n) \tag{1.8}$$

unde $\|a_{\gamma}^{\alpha}\|$ este matricea strîmb simetrică de mai sus, atunci (vezi [2]) putem pune

$$X_i^{\alpha}X_j^{\alpha}=\delta_{ij}, \tag{1.9}$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kroneker. Să considerăm vectorii

$$\underset{i}{\widetilde{I}}^{\lambda} = X_i^k \underset{k}{I}^{\lambda} \qquad (i, k = 3, \ldots, n). \tag{1.10}$$

Cum

$$\underset{i}{\widetilde{I}}^{\lambda} \underset{j}{\widetilde{I}}_{\lambda} = \delta_{ij} \underset{i}{\widetilde{I}}^{\lambda} \underset{1}{I}_{\lambda} = 0 \quad \underset{i}{\widetilde{I}}^{\lambda} \underset{2}{I}_{\lambda} = 0$$

putem spune că n-uplul $(\underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda} = \underset{1}{I}^{\lambda}, \underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda} = \underset{2}{I}^{\lambda}, \underset{3}{\widetilde{I}}^{\lambda}, \ldots, \underset{n}{\widetilde{I}}^{\lambda})$ este ortonormal. Avem

$$\underset{1}{\widetilde{I}}^{[\lambda_1} \underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda_2} \ldots \underset{n}{\widetilde{I}}^{\lambda_n]} \neq 0. \tag{1.11}$$

Am obţinut dar un n-uplu ortonormal de versori asociaţi familiei $\underset{1}{I}^{\lambda}$. Diferenţiind covariant (1.10), obţinem, ţinînd seama de (1.6), (1.7),

$$\frac{D}{\mathrm{d}s} \underset{\alpha}{\widetilde{I}}^{\lambda} = X_\alpha^k b_k \underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda}, \qquad (\alpha, k = 3, \ldots, n) \tag{1.12}$$

Dacă notăm

$$X_\alpha^k b_k = \widetilde{T}_{\alpha-1}, \qquad (\alpha, k = 3, \ldots, n) \tag{1.13}$$

putem scrie

$$\frac{D}{\mathrm{d}s} \underset{\alpha}{\widetilde{I}}^{\lambda} = \widetilde{T}_{\alpha-1} \underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda}, \qquad (\alpha = 3, \ldots, n). \tag{1.14}$$

Cum $\underset{1}{\widetilde{I}}^{[\lambda_1} \left(\frac{D}{\mathrm{d}s} \underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda_2} \right) \underset{3}{\widetilde{I}}^{\lambda_3} \ldots \underset{n}{\widetilde{I}}^{\lambda_n]} = 0$ rezultă că $\frac{D}{\mathrm{d}s} \underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda}$ este o combinaţie liniară numai de $(\underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda}, \underset{3}{\widetilde{I}}^{\lambda}, \underset{4}{\widetilde{I}}^{\lambda}, \ldots \underset{n}{\widetilde{I}}^{\lambda})$. Avem deci

$$\frac{D}{\mathrm{d}s} \underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda} = a \underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda} + c^k \underset{k}{\widetilde{I}}^{\lambda}, \qquad (k = 3, \ldots, n \text{ (sumare)}) \tag{1.15}$$

Diferenţiind covariant şi ţinînd seama de cele de mai sus, avem

$$a = - \underset{2}{\widetilde{I}}^{\mu} \frac{D}{\mathrm{d}s} \underset{1}{\widetilde{I}}_{\mu} = - k_1, \; c^\alpha = - \underset{2}{\widetilde{I}}^{\mu} \frac{D}{\mathrm{d}s} \underset{\alpha}{\widetilde{I}}_{\mu} = - \widetilde{T}_{\alpha-1} \qquad (\alpha = 3, \ldots, n)$$

de unde obţinem formulele

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^{\lambda} = \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{a}_i \underset{i}{\widetilde{I}}^{\lambda} \quad \text{cu} \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{a}_i^2 = 1 \\ \frac{D}{\mathrm{d}s} \underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda} = k_1 \underset{2}{I}^{\lambda} \\ \frac{D}{\mathrm{d}s} \underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda} = - k_1 \underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda} - \widetilde{T}_{\alpha-1} \underset{\alpha}{\widetilde{I}}^{\lambda}, \; \frac{D}{\mathrm{d}s} \underset{\alpha}{\widetilde{I}}^{\lambda} = \widetilde{T}_{\alpha-1} \underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda}, \qquad (\alpha = 3, \ldots, n), \end{array} \right. \tag{1.16}$$

(sumare după $\alpha = 3, \ldots, n$)

unde k_1 o numim „curbură” și $\widetilde{T}_{\alpha-1}$ $(\alpha = 3, \ldots, n)$ torsiunile familiei $\underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda}$. Avem

Teorema 1. *Curburile* k_1, *torsiunile* $\widetilde{T}_{\alpha-1}$ *și versorii principali* $\underset{k}{\widetilde{I}}^{\lambda}$ *ai familiei* $\underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda}$ *definiți ca mai sus, satisfac relațiile* (1.16).

Teorema 2. *Fiind date funcțiile* $k_1(s)$, $\widetilde{T}_{\alpha-1}(s)$, $\widetilde{a}_i(s)$ *nenule, continue* (cu $\sum\limits_1^n \widetilde{a}_i^2 = 1$), definite pentru $s \in [s, s_2]$ cu condițiile inițiale $x^i(s_0) = x_0^i\, \underset{i}{\widetilde{I}}^{\lambda}(s_0) = \underset{i}{\widetilde{I}}{}_0^{\lambda}$ n-uplul $\underset{1}{\widetilde{I}}{}_0^{\lambda} \ldots \underset{n}{\widetilde{I}}{}_0^{\lambda}$ fiind ortonormal, există cel puțin într-o vecinătate $V_{s_0}(s_0 \in (s, s_2))$ un singur arc de curbă (C) și o singură familie de direcții $\underset{1}{\widetilde{I}}$ pe (C) care să admită ca invarianți pe k_1, $\widetilde{T}_{\alpha-1}$, $\widetilde{a}_i$ și care să verifice condițiile inițiale.

Cum din (1.17) obținem sistemul de ecuații diferențiale

$$
(1.17)\quad \begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s} = \widetilde{a}_1 \underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda} + \ldots + \widetilde{a}_n \underset{n}{\widetilde{I}}^{\lambda} \quad \dfrac{\mathrm{d}\widetilde{I}_1^{\lambda}}{\mathrm{d}s} = -\,\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}\, \widetilde{I}_1^{\alpha}\, \dfrac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} + k_1 \underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda} \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda} = -\,\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}\, \underset{2}{\widetilde{I}}^{\alpha}\, \dfrac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} - k_1 \underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda} - \widetilde{T}_{\alpha-1} \underset{\alpha}{\widetilde{I}}^{\lambda}, \qquad (\alpha = 3, \ldots, n) \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \underset{p}{\widetilde{I}}^{\lambda} = -\,\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}\, \underset{p}{\widetilde{I}}^{\alpha}\, \dfrac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} + \widetilde{T}_{p-1} \underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda}, \qquad (p = 3, \ldots, n)
\end{cases}
$$

demonstrația teoremei 2 se face aplicînd teorema de existență și unicitate. Apoi se arată ușor că soluția $(\underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda}\, \underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda} \ldots \underset{n}{\widetilde{I}}^{\lambda})$ formează un n-uplu ortonormal pentru care familia $\underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda}$ admite ca invarianți pe k_1, $\widetilde{T}_{\alpha-1}$ (se ține seama de (1.16) și de felul cum au fost introduși).

Particularizînd familia $\underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda} = \tau^{\lambda} = \dfrac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s}$, formulele (1.16) duc la rezultatele din [2]. Vom numi $\underset{\alpha}{\widetilde{I}}^{\lambda}$ $(\alpha = 3, \ldots, n)$ „binormalele“ familiei $\underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda}$ care în cazul particular de mai sus sînt binormalele curbei (C) [2].

2. *Interpretarea geometrică.* k_1 are interpretarea cunoscută. Fie $P_0 \in (C)$ luat ca origine și $\underset{\alpha}{\widetilde{I}}^{\lambda}(0) = \underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}_0^{\lambda} = (\underset{\alpha}{\widetilde{I}}^{\lambda}(s))_{s=0}$ $(\alpha = 3, \ldots, n)$ cu formulele (1.16) socotite în P_0. Fie $P(s) \in C$ într-o vecinătate a lui P_0 și (1.16) formulele în $P(s) \in C$. Fie θ_{α} unghiul a două poziții vecine ale binormalelor familiei $\widetilde{I}_1^{\lambda}$. Dacă transportăm $\underset{\alpha}{\widetilde{I}}^{\lambda}(0)$ prin paralelism, din P_0 în P, obținem vectorii $'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}^{\lambda}(s)$. Putem scrie (în acest caz în (1.17) condiția de „continuitate” trebuie „întărită” prin „k, $\widetilde{T}_a$, $\widetilde{a}$ analitice”)

$$
(2.1)\qquad '\underset{\alpha}{\widetilde{I}}^{\lambda}(s) = \underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}_0^{\lambda} + s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\, '\underset{\alpha}{\widetilde{I}}^{\lambda}\right)_0 + \frac{s^2}{2\,!}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\, '\widetilde{I}^{\lambda}(s)\right)_0 + \ldots
$$

Ținînd seama de paralelism, avem

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,{}'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}(s)\right)_0 = \left(-\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}\,{}'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\beta}\,\tau^{\mu}\right)_0 \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\,{}'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}(s)\right)_0 = \left(-\frac{\mathrm{d}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}}{\mathrm{d}s}\,{}'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}\tau^{\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}\,\Gamma^{\beta}_{\sigma\omega}\,{}'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\sigma}\,\tau^{\mu}\,\tau^{\omega} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}\,{}'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\beta}\,\frac{\mathrm{d}\,\tau^{\mu}}{\mathrm{d}s}\right)_0$$

……

Putem scrie dezvoltarea

$$\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}(s) = \underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}_{0} + s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}(s)\right)_0 + \frac{s^2}{2\,!}\left(\frac{\mathrm{d}^2\,\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 + \dots \tag{2.3}$$

unde

$\dfrac{D}{\mathrm{d}s}\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = \dfrac{\mathrm{d}\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}}{\mathrm{d}s} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\beta}\,\tau^{\mu}$. De aici se calculează ușor $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}\right)_0, \left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}\right)_0, \dots$

Din (2.1), în care ținem seama de (2.2) și de (2.3), obținem

$$\cos\,\theta_{\alpha} = 1 - \frac{s^2}{2\,!}\left(\frac{D}{\mathrm{d}s}\,{}'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}\,\frac{D}{\mathrm{d}s}\,{}'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}_{\lambda}\right)_0 + \dots \tag{2.4}$$

(căci $({}'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}(s))_0 = \underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}_{0}$). De aici

$$\lim_{s\to 0}\left(\frac{\theta_{\alpha}}{s}\right)^2 = \left(\frac{D}{\mathrm{d}s}\,{}'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}\,\frac{D}{\mathrm{d}s}\,{}'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}_{\lambda}\right)_0 \quad \lim_{s\to 0}\frac{\theta_{\alpha}}{s} = \sqrt{(g_{\lambda\mu}\,{}'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}\,{}'\underset{\alpha}{\widetilde{I}}{}^{\mu}\,\widetilde{T}^2_{\alpha-1})_0} = (\widetilde{T}_{\alpha-1})_0$$

(am ținut seama de (1.16)). Ca atare

$$\lim_{s\to 0}\frac{\theta_{\alpha}}{s} = \widetilde{T}_{\alpha-1} \qquad (\alpha = 3, \dots, n). \tag{2.5}$$

Iată dar interpretarea geometrică („torsiunile" familiei de direcții $\underset{1}{I}{}^{\lambda}$ sînt limita raportului dintre unghiul a două poziții vecine ale „binormalelor" familiei și arcul curbei). Particularizînd familia $\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = \tau^{\lambda}$ și spațiul $V_n = E_n$ dăm peste interpretarea din [2].

3. *Relații între k_a și $\widetilde{T}_{\alpha-1}$, $(a = 1, \dots, n-1\,;\ \alpha = 3, \dots, n)$.* Vom stabili relațiile între invarianții k_a (1.3) și $\widetilde{T}_{\alpha-1}$ ai familiei $\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = \underset{1}{I}{}^{\lambda} = \xi^{\lambda}_{1}$ definită pe (C). Acestea sînt necesare atît pentru a putea calcula k_a, cînd cunoaștem $\widetilde{T}_{\alpha-1}$ și reciproc, cît și pentru studiul teoretic al unor varietăți ca:

— Studiul curbelor V_{n-1} din V_n.

— Studiul configurațiilor Myller [4] $\mathfrak{M}$ $(C,\ \xi^{\lambda}_{1}\ T^{n-1})$ din V_n.

Avem reperele ortonormale $R_1(M\,;\ \xi^{\lambda}_{k})\,;\ R_2(M\,;\ \underset{k}{\widetilde{I}}{}^{\lambda})$. Deci putem scrie

$$\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = \xi^{\lambda}_{1} \qquad \underset{2}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = \xi^{\lambda}_{2}$$

$$\underset{r}{\widetilde{I}}{}^{\lambda} = \sum_{j=1}^{n}\cos\,\psi_{rj}\,\xi^{\lambda}_{j} \qquad (r = 3, \dots, n). \tag{3.1}$$

Evident că

$$(3.2)\quad \cos\psi_{k1} = \cos\psi_{1k} = \delta^1_k \quad \cos\psi_{k2} = \cos\psi_{2k} = \delta^2_k, \ (k = 1, \ldots, n).$$

Ca atare matricea asociată lui (3.1) este

$$(3.3)\qquad M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi_{33} & \ldots & \cos\psi_{3n} \\ 0 & 0 & \cos\psi_{43} & \ldots & \cos\psi_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cos\psi_{n3} & \ldots & \cos\psi_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{cu } |M| \neq 0.$$

Derivînd covariant (3.1) şi ţinînd seama de (1.3), (1.16) şi forma matricii (3.3), avem

$$\sum_{a=3}^{n} \widetilde{T}_{a-1} \cos\psi_{al} = -k_2\,\delta^l_3, \qquad (l = 1, \ldots, n;\ a = 3, \ldots, n)$$

$$(3.4)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\psi_{aj} + \cos\psi_{aj-1}\,k_{j-1} - \cos\psi_{aj+1}\,k_j = \widetilde{T}_{a-1}\,\delta^j,$$

$$j = 2, \ldots, n \ \text{ cu } \ k_0 = k_n = 0$$

Pentru $l = 3$ şi $j = 2$ avem, ţinînd seama de (3.2),

$$(3.5)\quad \begin{aligned} &\sum_{a=3}^{n} \widetilde{T}_{a-1} \cos\psi_{a3} = -k_2 \\ &-\cos\psi_{a3}\,k_2 = \widetilde{T}_{a-1} \qquad (a = 3, \ldots, n) \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$(3.6)\qquad k_2 = \sqrt{\sum_{a=3}^{n} \widetilde{T}^2_{a-1}}.$$

Particularizînd familia şi spaţiul $V_n = E_n$, obţinem rezultatele din [2], p. 1303. Făcînd $j = 3$ în a doua relaţie (3.4), obţinem

$$\text{(a)}\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\psi_{a3} = \cos\psi_{a4}\,k_3.$$

Ţinînd seamă de relaţia a doua din (3.5), avem

$$\text{(b)}\qquad \cos\psi_{a4}\,k_3 = \frac{-k_2\,\widetilde{T}'_{a-1} + k'_2\,\widetilde{T}_{a-1}}{k_2^2}.$$

Amplificînd cu $\cos\psi_{a4}$, sumînd şi ţinînd seama de condiţiile de ortogonalitate în matricea (3.3), avem

$$(3.7)\qquad k_3 = \frac{-\sum\limits_{a=3}^{n} \widetilde{T}'_{a-1}\cos\psi_{a4}}{\sqrt{\sum\limits_{a=3}^{n} \widetilde{T}^2_{a-1}}}.$$

Procedînd tot astfel din aproape în aproape găsim ceilalţi invarianţi.

De observat relaţia simplă care dă „torsiunile" familiei $\underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}$ şi anume a doua relaţie din (3.5).

Dacă am considera o configuraţie Myller $\mathfrak{M}$ $(C, \xi_1^{\lambda}, T^{n-1})$ în care în locul invarianţilor X_a (4.1) [4], am folosi (1.16) (cu $n^{\lambda} = \nu_1^{\lambda} = \underset{1}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}$ $\nu_2^{\lambda} = \underset{2}{\widetilde{I}}{}^{\lambda}$ $k_1 = x_1$) rezultatele (4.3) din [4] rămîn aceleaşi ca şi rezultatul generalizat al lui Bortolotti (6.7), [4]. Evident că putem considera şi pentru familia ξ_1^{λ} din $\mathfrak{M}$ $(C, \xi^{\lambda}, T^{\lambda-1})$ formulele de forma (1.16) şi calculele se vor mai simplifica.

Primită la redacţie la 12 martie 1966

Institutul Pedagogic Craiova

BIBLIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială.* vol. I, Bucureşti, 1961.
2. GH. N. RIZESCU şi N. N. TEODORESCU, *Asupra generalizării formulelor lui Frenet.* St. cerc. mat., **18**, *8* (1965).
3. V. HLAVATY, *Les courbes de la variété generale a n dimensions.* Memorial des Sci. Math., **LXIII** (1934).
4. R. MIRON, *Configuraţii Myller* $\mathfrak{M}$ $(C, \xi^{\lambda}, T^{n-1})$ *în spaţii Riemanniene* V_n. St. cerc. ştiinţ. (Iaşi), **2** (1961).
5. P. STAVRE, *Asupra invariaţilor unei familii de direcţii într-un spaţiu cu conexiune afină* L_n St. cerc. ştiinţ. (Iaşi), **2** (1963).

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate in continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele și grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor din text sau alfabetică. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.
Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

1967 APR 20

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.
CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU şi M. JURCHESCU, **Topologie. Categorii. Suprafeţe riemanniene**, 1966, 394 p., 21,50 lei.
ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.
N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.
SILVIU GUIAŞU şi RADU THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.
SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.
O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.
P.P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 1966, 669 p., 38 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.
S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 3, P. 315—476, BUCUREŞTI, 1967

I. P. „Informaţia" — c. 4286

43 831

Lei 12.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

4

TOMUL 19

1967

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

Acad. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
Acad. GR. G. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

Pentru completarea colecţiei şi primirea la timp a revistei, reînnoiţi abonamentul dv. pe anul 1967.
În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuţa 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

F 762

TOM. 19, Nr. 4
1967

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

S U M A R

Pag.

O. BERECHET, O observaţie asupra problemei Cauchy-Nicolescu pentru ecuaţia iterată a căldurii 479
IOANA CIORĂNESCU, Teorema asupra suporturilor distribuţiilor 483
EUGEN CÂMPU, Asupra derivatei unei funcţii aditive de domeniu 489
ROMULUS CRISTESCU, Observaţii privind suporturile unor operatori liniari 493
MARIANA CRIŞAN-ZVERCA, Asupra programării unei strategii prestabilite de aplicare a metodei lui Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare 497
AVRAM ŞT. FILIPESCU, Asupra unei clase de ecuaţii funcţionale 503
B. JANKÓ, M. BALÁZS, Despre unicitatea soluţiei ecuaţiilor operaţionale neliniare 509
I. MARUŞCIAC, Infrapolinoame şi legătura lor cu derivata unui polinom 515
ELENA MURGULESCU, Asupra determinării punctelor de inflexiune în cazul unor curbe remarcabile 523
VASILE OPROIU, Asupra conexiunilor din spaţiul fibrat tangent la un spaţiu fibrat principal 531
ALEXANDRU RADU, Funcţia caracteristică a lui Hilbert . . . 537
CONSTANTIN RAISCHI, Asupra unui model algebric al categoriilor gramaticale 549
MARCEL N. ROŞCULEŢ, Cercetări asupra seriilor trigonometrice. VI. Asupra sumabilităţii seriei Fourier asociată unei funcţii neintegrabile 565
TOMA N. STANCIU, Puterile funcţiei lui Möebius 583
MARIUS I. STOKA, Grupurile de olonomie ale spaţiilor A_4 . 585
N. N. TEODORESCU, GH. N. RIZESCU, Asupra perechilor de spaţii Riemann cu tensorii de curbură proporţionali 609
RODICA TRANDAFIR, Familii de varietăţi cu unu, doi şi trei parametri măsurabile din spaţiul euclidian E_3 619
MIRCEA VASIU, Asupra ecuaţiei de dispersie a unei plasme radiative cu conductivitate electrică finită 635
RECENZII 645

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P 477-646, BUCUREŞTI, 1967

1883

O OBSERVAȚIE ASUPRA PROBLEMEI CAUCHY-NICOLESCU PENTRU ECUAȚIA ITERATĂ A CĂLDURII

DE

O. BERECHET

Se extinde o teoremă a lui M. Nicolescu [1] privind ecuația iterată a căldurii.

Fie ecuația iterată a căldurii :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{(p)}=0 \tag{1}$$

sau folosind notația $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial t}$,

$$\triangle^{(p)} u = 0. \tag{2}$$

În [1] acad. prof. Miron Nicolescu formulează și rezolvă o problemă de tip Cauchy pentru această ecuație :

Fie $f_0(x), \ldots, f_{p-1}(x)$, p funcții continue pe axa reală. Să se determine o funcție policalorică de ordinul p astfel încît să avem :

$$\lim_{y\to 0} u(x, y) = f_0(x)$$

$$\lim_{y\to 0} \triangle^i u(x, y) = f_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, p-1).$$

În memoriul citat problema este rezolvată în banda $0 < y < \dfrac{1}{4k}$ în ipoteza că $|f_i(x)| < Me^{Kx^2}$ și se arată că această soluție admite reprezentarea de tip Poisson :

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(\xi) - \frac{y}{1!} f_1(\xi) + \frac{y^2}{2!} f_2(\xi) + \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^{p-1}\frac{y^{p-1}}{(p-1)!} f_p(\xi)\right] e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4y}}\, d\xi. \tag{3}$$

De asemenea se arată că această soluție este unică.

Folosind un rezultat recent al lui M. Nicolescu—C. Foiaș, putem extinde acest rezultat după cum urmează :

TEOREMA DE REPREZENTARE : *Fie* $u(x, y)$ *o funcție policalorică de ordinul* p *în banda deschisă*

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \delta$$

continuă în banda închisă

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 \leqslant y \leqslant \delta$$

în care verifică condițiile :

$$(4) \qquad \begin{aligned} & u(x, y) > -M\,\mathrm{e}^{Kx^2} \\ & \Delta^i u(x, y) > -M\,\mathrm{e}^{Kx^2} \qquad (i = 1, \ldots, p-1) \end{aligned}$$

unde

$$0 \leqslant K < \frac{1}{4\delta}$$

atunci această funcție se poate reprezenta sub forma

$$\begin{aligned} u(x, y) = {} & \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \left[u(\xi, h) - \frac{y-h}{1!} \Delta u(\xi, h) + \ldots + \right. \\ (5) \qquad & \left. + (-1)^{p-1} \frac{(y-h)^{p-1}}{(p-1)!} \Delta^{p-1} (\xi, h) \right] \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

oricare ar fi h *astfel ca*

$$0 \leqslant h < y < \delta$$

TEOREMA DE UNICITATE. *Unicitatea problemei Cauchy - Nicolescu pentru ecuația iterată a căldurii, în banda* $0 < y < Y$ *are loc în clasa funcțiilor verificînd inegalitățile :*

$$(6) \qquad \begin{aligned} & u(x, y) > -M\,\mathrm{e}^{Kx^2} \\ & \Delta^i u(x, y) > -M\,\mathrm{e}^{Kx^2} \qquad (i = 1, \ldots, p-1) \end{aligned}$$

M *și* K *fiind constante pozitive.*

Pentru demonstrație ne va fi utilă următoarea :

LEMĂ. *Fiind dată o funcție policalorică de ordinul* p *într-un domeniu* D, *există* p *funcții* $u_0, \ldots, u_{p-1}$ *calorice în* D, *astfel încît, oricare ar fi constanta* h, *să avem :*

$$(7) \quad u = u_0 - (y-h)\,u_1 + (y-h)^2 u_2 + \ldots + (-1)^{p-1} (y-h)^{p-1} u_{p-1}$$

Reprezentarea este unică.

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema fundamentală de reprezentare a funcțiilor policalorice (vezi [1]) că în condițiile lemei, există p

funcții calorice în D, $v_0, \ldots, v_{p-1}$, astfel încît :

$$u = v_0 + yv_1 + \ldots + y^{p-1} v_{p-1}$$

prin regruparea termenilor după puterile lui $(y - h)$ și schimbarea notațiilor.

Demonstrarea teoremei de reprezentare. Din (7) rezultă cu ușurință

$$\Delta^{p-1} u = (p - 1)!\, u_{p-1}.$$

Dar prin ipoteză $\Delta^{p-1} u > - M\, \mathrm{e}^{Kx^2}$, deci

$$u_{p-1} > - \frac{M}{(p-1)!} \cdot \mathrm{e}^{Kx^2} = - M_1\, \mathrm{e}^{Kx^2}$$

și conform teoremei de reprezentare din [2], putem scrie :

$$u_{p-1}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} u_{p-1}(\xi, h)\, \mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(p-1)!} \Delta^{p-1} u(\xi, h)\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\, \mathrm{d}\xi.$$

Tot din (7) obținem :

$$\Delta^{p-2} u = (p - 2)!\, u_{p-2} - (p - 1)!\, (y - h)\, u_{p-1}. \tag{8}$$

Dar $\Delta^{p-2} u > - M\, \mathrm{e}^{Kx^2}$ deci

$$(p - 2)!\, u_{p-2} > - M\, \mathrm{e}^{Kx^2} + (p - 1)!\, (y - h)\, u_{p-1} >$$

$$> - M\, \mathrm{e}^{Kx^2} - (y - h)\, M\, \mathrm{e}^{Kx^2} = - M(1 + y - h)\, \mathrm{e}^{Kx^2} >$$

$$> - M(1 + \delta)\, \mathrm{e}^{Kx^2} = - M_2'\, \mathrm{e}^{Kx^2}$$

prin urmare

$$u_{p-2} > - M_2\, \mathrm{e}^{Kx^2}$$

și conform teoremei de reprezentare din [2]

$$u_{p-2}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} u_{p-2}(\xi, h)\, \mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(p-2)!} \Delta^{p-2} u(\xi, h)\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\, \mathrm{d}\xi$$

deoarece din (8) rezultă

$$\Delta^{p-2} u(\xi, h) = (p - 2)!\, u_{p-2}(\xi, h).$$

Repetînd procedeul obţinem în general :

$$u_i(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i!} \Delta^i u(\xi, h)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\, d\xi.$$

Înlocuind aceste valori în (7) obţinem formula (5).

Demonstrarea teoremei de unicitate se face exact ca în [2], pag. 475—476.

Primită la redacţie la 16 noiembrie 1966

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România, Str. M.
Eminescu nr. 47, Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Nicolescu, St. cerc. mat., 3—4, 243—332 (1954).
2. M. Nicolescu, C. Foiaş, Rend. Sc. fis. mat. e nat. Accad. Lincei **XXXVII**, 466—476 (1965).

TEOREME ASUPRA SUPORTURILOR DISTRIBUŢIILOR

DE

IOANA CIORĂNESCU

În lucrarea de faţă se studiază modul în care se schimbă suportul unei distribuţii printr-o transformare liniară şi continuă a lui $\mathcal{D}'$ în $\mathcal{D}'$. Se dă de asemenea o condiţie necesară şi suficientă pentru ca o familie de distribuţii depinzînd de un parametru real să fie compozabilă.

I. În [1] sînt introduse familiile compozabile de distribuţii generalizîndu-se produsul de convoluţie iar în [2] se arată că există o corespondenţă biunivocă între mulţimea familiilor compozabile de distribuţii şi aplicaţiile liniare şi continui ale lui $\mathcal{D}$ în $\mathcal{D}$. Există de asemenea o corespondenţă biunivocă între familiile compozabile de distribuţii şi aplicaţiile liniare şi continue ale lui $\mathcal{D}'$ în $\mathcal{D}'$.

Pe de altă parte, avem următoarea reformulare a teoremei nucleelor :

Orice aplicaţie liniară şi continuă L *a spaţiului* $\mathcal{D}_t$ *în spaţiul* $\mathcal{D}'_s$ *este dată de un nucleu (distribuţie din* $(\mathcal{D}_s \times \mathcal{D}_t)'$*) unic determinat* $w\,(s, t)$, *prin relaţia :*

$$(L\,\psi(t),\ \varphi(s)) = (w(s, t),\ \varphi(s)\ \psi(t))$$

unde $\varphi \in \mathcal{D}_s$, $\psi \in \mathcal{D}_t$.

Cum orice operator liniar şi continuu al lui $\mathcal{D}_t$ în $\mathcal{D}_s$ este evident continuu şi de la $\mathcal{D}_t$ în $\mathcal{D}'_s$, cele de mai sus rămîn valabile şi în acest caz. Prin urmare fiecărei familii compozabile de distribuţii $\{w_s\}_{s\in R}$ i se asociază un nucleu $w(s, t)$, legătura dintre ele fiind dată de :

$$[(w_s(t),\ \psi(t)),\ \varphi(s)] = (w(s, t),\ \varphi(s)\ \psi(t))$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}_s$ şi $\psi \in \mathcal{D}_t$.

Menţionăm că în [3] sînt studiate nucleele ce definesc aplicaţii liniare şi continue respectiv de la :

$$\mathcal{E} \to \mathcal{D}',\ \mathcal{D} \to \mathcal{E}',\ \mathcal{E} \to \mathcal{E}',\ \mathcal{D} \to \mathcal{E},\ \mathcal{E}' \to \mathcal{D}'$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 483–488, BUCUREŞTI, 1967

— nuclee compacte, compactificabile, semiregulate, regulate, dar nu și nucleele definind operatori liniari și continui de la $\mathcal{D}$ la $\mathcal{D}$.

În cele ce urmează vom căuta să stabilim o legătură între suportul distribuției $w(s, t)$ și suporturile distribuțiilor $\{w_s(t)\}_{s\in R}$ și folosind acest rezultat vom da o condiție necesară și suficientă ce se referă și la suporturi pentru ca o familie de distribuții depinzînd de un parametru real să fie compozabilă.

Vom trece apoi la evaluarea suportului unei distribuții, imagine printr-un operator liniar și continuu al unei distribuții date x; particularizînd familia compozabilă luînd $w_s = \tau_s w$, unde w este o distribuție cu suportul compact iar τ_s este operatorul de translație, vom regăsi relația pentru suporturi :

$$\text{supp}\ (x \ast w) \subset \text{supp}\ w + \text{supp}\ x.$$

II. Vom demonstra :

TEOREMA 1. *O familie de distribuții* $w = \{w_s\}_{s\in R}$ *este compozabilă dacă și numai dacă sînt verificate condițiile* :

1.1) *Funcția* $\Phi(s) = w_s : R_t \to \mathcal{D}'_s$ *cste indefinit derivabilă* ;

1.2) *Pentru orice* n, *există* $k(n)$, n, $k(n) \in N$ *astfel încît* :

$$w \circ \mathcal{D}_t[-n, n] \subset \mathcal{D}_t[-h(n), k(n)],$$

unde $w \circ \mathcal{D}_t[-n, n]$ *este imaginea lui* $\mathcal{D}_t[-n, n]$ *prin operatorul* W *generat de familia* $\{w_s\}_{s\in R}$ *iar* $\mathcal{D}_t[-n, n]$ *este subspațiul lui* $\mathcal{D}_t$ *format din funcții cu suportul în compactul* $[-n, n]$.

Demonstrație. Dacă familia $\{w_s\}_{s\in R}$ este compozabilă, ea posedă evident proprietățile 1.1) și 1.2) : proprietatea 1.1) rezultînd din faptul că o funcție cu valori într-un spațiu local convex complet slab indefinit derivabilă este și tare indefinit derivabilă [4] iar proprietatea 1.2) rezultînd dintr-o teoremă generală a lui Grothendieck [5] ce apare dată pentru distribuții în [6] sub forma :

LEMĂ. *Fie* W *un operator liniar continuu de la* $\mathcal{D}$ *la* $\mathcal{D}$; *atunci pentru fiecare* $n \in N$, *există* $k(n) \in N$ *astfel încît să avem*

$$W(\mathcal{D}[-n, n]) \subset \mathcal{D}[-k(n), k(n)].$$

Invers, o familie $\{w_s\}_{s\in R}$ de distribuții cu proprietățile 1.1) și 1.2) are evident proprietatea că :

$$\psi(s) = (w_s, \varphi) \in \mathcal{D}_s \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{D}_t.$$

Să arătăm că dacă $\varphi_n \to 0$ în $\mathcal{D}$, rezultă că și $(w_s, \varphi_n) \to 0$ în D. Pentru aceasta vom arăta că operatorul generat de familia $\{w_s\}_{s\in R}$ transformă mulțimile mărginite din $\mathcal{D}$ în mulțimi mărginite în $\mathcal{D}$, iar $\mathcal{D}$ fiind bornologic, va rezulta astfel continuitatea dorită.

Fie $\mathcal{M}$ o mulțime mărginită în $\mathcal{D}$ și $\mathcal{M}^*$ imaginea ei prin operatorul W. Cum funcțiile din $\mathcal{M}$ au suportul într-un același compact, rezultă că și funcțiile din $\mathcal{M}^*$ au suportul inclus într-un același compact. Pentru a demonstra egal-mărginirea funcțiilor din $\mathcal{M}^*$ și a derivatelor lor de orice ordin pe suportul comun, amintim următoarea teoremă [7] :

Dacă E *este un spațiu local convex și* F *este un spațiu tonelat, orice aplicație biliniară separat continuă* u *de la* $E \times F$ *într-un spațiu local convex*

G este $\mathfrak{S}$-hipocontinuă pentru orice mulțime $\mathfrak{S}$ de părți mărginite ale lui E. În acest caz dacă $M \in \mathfrak{S}$ și Q e mărginită în F, atunci $u(M \times Q)$ e mărginită în G.

Luînd în cazul nostru : $E = \mathcal{D}'$, $F = \mathcal{D}$ și $G = R$ iar

$$u(x, \varphi) = (x, \varphi) \text{ pentru orice } x \in \mathcal{D}', \ \varphi \in \mathcal{D},$$

u e evident separat continuă și sînt îndeplinite condițiile teoremei de mai sus ; deci mulțimea de funcții :

$$\{\psi_\varphi \mid \psi_\varphi(s) = u(w_s, \varphi) = (w_s, \varphi)\}$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{M}$, este egal mărginită pe suportul comun. La fel se arată că oricare ar fi întregul p, funcțiile $\mathcal{D}^p \psi_\varphi$, sînt de asemenea egal mărginite pentru orice $\varphi \in \mathcal{M}$. De aici rezultă mărginirea mulțimii de funcții $\mathcal{M}^*$ în $\mathcal{D}$.

Vom demonstra acum :

TEOREMA 2. *Fie $\{w_s\}_{s \in R}$ o familie compozabilă de distribuții și fie $w(s, t)$ distribuția în două variabile asociată. Avem* :

$$\operatorname{supp} w(s, t) = \overline{\{(s, t) \mid t \in \operatorname{supp} w_s(t)\}}.$$

Demonstrație. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}_s$ și $\psi \in \mathcal{D}_t$ avem :

$$(w(s, t), \varphi(s)\,\psi(t)) = ((w_s(t), \psi(t))\,\varphi(s) = (f(s), \varphi(s))$$

unde $f(s) = (w_s, \psi) \in \mathcal{D}_s$.

Fie s_0 fixat și fie $t_0 \in \operatorname{supp} w_{s_0}(t)$; pentru orice vecinătate $V(t_0)$ a punctului t_0, există o funcție $\psi_0 \in \mathcal{D}_t$ cu $\operatorname{supp} \psi_0 \subset V(t_0)$ astfel încît :

$$f(s_0) = (w_{s_0}, \psi_0) \neq 0.$$

Prin urmare $s_0 \in \operatorname{supp} f$ și deci oricare ar fi vecinătatea $U(s_0)$ a lui s_0, există o funcție $\varphi_0 \in \mathcal{D}_s$ cu $\operatorname{supp} \varphi_0 \subset U(s_0)$, astfel încît

$$(f(s) ; \varphi_0(s)) \neq 0,$$

deci avem :

$$(w(s, t), \varphi_0(s)\,\psi_0(t)) \neq 0.$$

Cum orice vecinătate a punctului (s_0, t_0) conține o vecinătate de forma $U(s_0) \times V(t_0)$, cu $U(s_0)$ vecinătate a lui s_0, iar $V(t_0)$ vecinătate a lui t_0, rezultă că

$$(s_0, t_0) \in \operatorname{supp} w(s, t)$$

și deci că

$$\{(s, t) \mid t \in \operatorname{supp} w_s(t)\} \subset \operatorname{supp} w(s, t).$$

Pentru a demonstra incluziunea inversă, fie o funcție

$$\Phi(s, t) = \varphi(s)\,\psi(t) \in \mathcal{D}_{(s,t)} \text{ cu } \operatorname{supp} \Phi = \operatorname{supp} \varphi \times \operatorname{supp} \psi \subset$$
$$\{(s, t) \mid t \in \complement \operatorname{supp} w_s\}.$$

Înseamnă că pentru $s_0 \in \text{supp}\ \varphi$ fixat, avem:

$$s_0 \times \text{supp}\ \psi \subset \{(s_0, t) \mid t \in \complement\ \text{supp}\ w_{s_0}(t)\}$$

sau că:

$$\text{supp}\ \psi \subset \complement\ \text{supp}\ w_{s_0}.$$

Prin urmare $f(s_0) = (w_{s_0}, \psi) = 0$ și deci funcția $f(s)$ se anulează pe suportul lui φ. Aceasta implică însă faptul că

$$(w(s, t), \varphi(s)\ \psi(t)) = 0.$$

Cum orice funcție $\Phi(s, t)$ indefinit derivabilă cu suportul compact este limita unor combinații liniare finite de funcții de forma $\varphi(s)' \cdot \psi(t)$ ce au suportul în același compact, rezultă că $w(s, t)$ se anulează pe mulțimea $\{(s, t) \mid t \in \complement\ \text{supp}\ w_s(t)\}$ de unde rezultă că:

$$\text{supp}\ w(s, t) \subset \overline{\{(s, t) \mid t \in \text{supp}\ w_s(t)\}}.$$

Observăm că expresia pentru suportul distribuției $w(s, t)$ mai poate fi pusă și sub forma:

$$\text{supp}\ w(s, t) = \overline{\bigcup_{s \in R} [s \times \text{supp}\ w_s(t)]}$$

Putem da acum teorema

TEOREMA 3. *$\{w_s\}_{s \in R}$ este o familie compozabilă de distribuții dacă și numai dacă sînt îndeplinite următoarele două condiții:*

2.1) *Funcția $\Phi(s) = w_s : R_s \to \mathcal{D}'_t$ este indefinit derivabilă.*

2.2) *$w(s, t)$ fiind distribuția în două variabile asociată, orice paralelă la axa s (și axa t), în planul (s, t) taie suportul lui $w(s, t)$ în puncte la distanță finită.*

Demonstrație. Din lema amintită, rezultă că pentru orice n există $k(n)$ astfel încît pentru orice s, $|s| > k(n)$ să avem:

$$[-n, n] \cap \text{supp}\ w_s(t) = \emptyset.$$

Aceasta înseamnă, revenind la distribuția $w(s, t)$, ținînd seama de expresia găsită pentru suportul lui $w(s, t)$, că între oricare două paralele la axa s este cuprinsă o porțiune mărginită din suportul lui $w(s, t)$, ceea ce se poate enunța ca în teoremă. Reciproc, evident 2.2 $\Rightarrow$ 2.1.

În cazul în care $w_s = \tau_s$ avem: $\text{supp}\ w_s = \text{supp}\ w + s$ iar suportul distribuției $w(s, t)$ este domeniul cuprins între paralelele duse la bisectoarea întîi prin punctele de pe axa t determinate de extremitățile suportului distribuției w. Se observă că avem condiția de mai sus îndeplinită numai dacă w are suportul mărginit și ținînd seama că funcția $\Phi(s) = \tau_s w$ este indefinit derivabilă, regăsim un rezultat din [5] — familia $\{\tau_s w\}_{s \in R}$ este compozabilă dacă și numai dacă w are suportul compact.

III. Avem:

PROPOZIȚIA 1. *Dacă $\psi \in \mathcal{D}_t$ și notăm prin $f(s) = (w_s(t), \psi(t))$ avem:*

$$\text{supp}\ f \subset \overline{\{s / \text{supp}\ \psi \cap \text{supp}\ w_s \neq \emptyset\}}.$$

Demonstraţie. Aceasta este evidentă ţinînd seama că:

$$\mathrm{supp}\ f = \overline{\{s \mid f(s) \neq 0\}} \text{ iar } f(s) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{supp}\ \psi \cap \mathrm{supp}\ w_s \neq \emptyset .$$

În cazul în care $w_s = \tau_s w$, unde w este cu suportul compact,

$$f(s) = (w(t),\ \psi(t+s)) = w \ast \bar{\psi},$$

unde $\bar{\psi}(t) = \psi(-t)$ şi atunci $s \in \mathrm{supp}\ f$; există $t \in \mathrm{supp}\ \psi$ încît $t \in \mathrm{supp}\ w + s \Rightarrow$ există t încît $s \in \mathrm{supp}\ w - t \Rightarrow \mathrm{supp}\ f \subset \mathrm{supp}\ w - \mathrm{supp}\ \psi = \mathrm{supp}\ w + \mathrm{supp}\ \bar{\psi}$ şi regăsim o relaţie cunoscută asupra suporturilor.

TEOREMA 4. *Dacă* $\{w_s\}_{s \in R}$ *este o familie compozabilă de distribuţii, atunci pentru orice distribuţie* x *avem:*

$$\mathrm{supp}\ w \circ x \subset \overline{\bigcup_{s \in \mathrm{supp}\ x} \mathrm{supp}\ w_s},$$

unde $w \circ x$ *este imaginea distribuţiei* x *prin operatorul definit de familia* $\{w_s\}_{s \in R}$.

Demonstraţie. Avem pentru orice $\psi \in \mathcal{D}_t$:

$$(w \circ x,\ \psi) = (x(s),\ (w_s(t),\ \psi(t))) = (x(s),\ f(s)).$$

Fie $\psi \in \mathcal{D}_t$ cu $\mathrm{supp}\ \psi \subset \bigcap_{s \in \mathrm{supp}\ x} \complement\, \mathrm{supp}\ w_s$; după propoziţia de mai sus, avem:

$$\mathrm{supp}\ f \subset \overline{\{\sigma \mid \mathrm{supp}\ \psi \cap \mathrm{supp}\ w_\sigma \neq \emptyset\}} \subset$$

$$\subset \overline{\{\sigma \mid (\bigcap_{s \in \mathrm{supp}\ x} \complement\, \mathrm{supp}\ w_s) \cap \mathrm{supp}\ w_\sigma \neq \emptyset\}} =$$

$$= \overline{\{\sigma \mid \bigcap_{s \in \mathrm{supp}\ x} (\complement\, \mathrm{supp}\ w_s \cap \mathrm{supp}\ w_\sigma) \neq \emptyset\}} \subset \overline{\complement\, \mathrm{supp}\ x}$$

deoarece dacă $\sigma \in \mathrm{supp}\ x$, una din mulţimile intersecţiei din partea stîngă ar fi chiar $\complement\, \mathrm{supp}\ w_\sigma \cap \mathrm{supp}\ w_\sigma = \emptyset$, intersecţia nu ar mai fi $\neq \emptyset$.

Aşadar $\mathrm{supp}\ f \subset \overline{\complement\, \mathrm{supp}\ x}$ şi deci $(x, f) = 0$ deoarece f e nulă împreună cu toate derivatele sale pe $\mathrm{supp}\ x$ [8]; rezultă că $(w \circ x,\ \psi) = 0$.

Distribuţia $w \circ x$ fiind nulă pe mulţimea $\bigcap_{s \in \mathrm{supp}\ x} \complement\, \mathrm{supp}\ w_s$, rezultă:

$$\mathrm{supp}\ w \circ x \subset \overline{\bigcup_{s \in \mathrm{supp}\ x} \mathrm{supp}\ w_s}.$$

Observăm că dacă $w_s = \tau_s w$, cu w cu suportul compact, găsim:

$$\mathrm{supp}\ (w \ast x) \subset \overline{\bigcup_{s \in \mathrm{supp}\ x} (\mathrm{supp}\ w + s)} = \mathrm{supp}\ w + \mathrm{supp}\ x$$

şi regăsim relaţia suporturilor de la convoluţie.

Primită la redacţie la 17 august 1966

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Romulus Cristescu, *Familles composables des distributions et systèmes physiques linéaires.* Revue Roum. de math. pures et appl., *9* (1964).
2. M. Şabac, *Familii compozabile de distribuţii şi transformata Fourier.* St. cerc. mat., **17**, 607—613 (1965).
3. Laurent Schwartz, *Théorie des noyaux.* Proc. Inst. Congress of math. 220—230 (1950).
4. R. Edwards, *Derivatives of vector valued functions.* Mathematika, **5**, 9—10 (1958).
5. A. Grothendieck, *Espaces vectoriels topologiques.* Sao Paulo, 1954.
6. M. Şabac, *Sur la structure des opérateurs linéaires et continus sur quelques espaces localement convexes.* Revue Roum. de math. pures et appl. (à paraître).
7. N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques.* Hermann, Paris, tome 2, 1955.
8. L. Schwartz, *Théorie des distributions.* tome 1. Chap. III, § 8, th. XXXIII Paris, 1954.

ASUPRA DERIVATEI UNEI FUNCŢII ADITIVE DE DOMENIU

DE

EUGEN CÂMPU

Se arată că derivata unei funcţii aditive de domeniu este continuă în interiorul domeniului de definiţie.

Fie F o funcţie reală de domeniu, definită pentru orice domeniu compact şi măsurabil Jordan, conţinut într-un domeniu n-dimensional dat D, de asemenea compact şi măsurabil Jordan. Cu alte cuvinte, F asociază fiecărui domeniu G compact, măsurabil Jordan şi conţinut în D, un număr real bine determinat $F(G)$. Vom presupune despre funcţia F că îndeplineşte în D următoarele două condiţii :

a) F este o funcţie aditivă de domeniu, cu alte cuvinte pentru orice descompunere a unui domeniu compact G, măsurabil Jordan şi conţinut în D, în două domenii compacte şi măsurabile Jordan G_1 şi G_2, astfel încît intersecţia $G_1 \cap G_2$ este de măsură Jordan nulă, avem $F(G) = F(G_1) + F(G_2)$. Evident, proprietatea se extinde la orice descompunere a lui G într-un număr finit de domenii compacte, măsurabile Jordan şi avînd, două cîte două, o intersecţie de măsură Jordan nulă.

b) F este derivabilă în fiecare punct P din interiorul lui D. Cu alte cuvinte, fiind dat un punct P din Int D, există un număr $f(P)$ cu proprietatea că pentru orice număr pozitiv ε există un număr pozitiv δ, astfel încît, oricare ar fi domeniul compact şi măsurabil Jordan G care conţine punctul P şi are diametrul mai mic sau egal cu δ, are loc inegalitatea

$$\left| f(P) - \frac{F(G)}{\text{măs. } G} \right| < \varepsilon.$$

Vom arăta, în aceste condiţii, că funcţia f : Int $D \to R$, care asociază fiecărui punct P interior lui D valoarea $f(P)$ a derivatei funcţiei de domeniu F în punctul P, este o funcţie continuă în fiecare punct interior lui D.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 489–492, BUCUREŞTI, 1967

Pentru fixarea ideilor și a notațiilor, vom desfășura demonstrația în cazul în care D este un domeniu din planul euclidian, dar va fi evident că toate considerațiile se transpun la cazul în care D este un domeniu din spațiul euclidian cu n dimensiuni ($n > 1$).

Fie $P \in \mathrm{Int}\, D$. Să notăm cu f derivata lui F : $\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}\right)_Q = f(Q)$. Să arătăm că f este continuă în P. Prin $S(Q\,; r)$ notăm sfera cu centrul în punctul Q și raza $r > 0$, iar prin $\mathcal{D}$ notăm familia subdomeniilor compacte și măsurabile Jordan, ale lui D.

Fie $\varepsilon > 0$.

F este derivabilă în P, deci există $\delta > 0$ astfel încît pentru orice $G \in \mathcal{D}$, cu diam. $G \leqslant \delta$ și $P \in G$, avem

$$\left| f(P) - \frac{F(G)}{\text{aria } G} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Luăm un δ astfel încît $S(P\,;\ \delta) \subseteq D$.

Alegem $\eta = \frac{\delta}{5}$.

Vom arăta că oricare ar fi Q, *astfel încît* $\rho(P, Q) < \eta$, *avem* $| f(P) - f(Q) | < \varepsilon$. (Am notat $\rho(P, Q) = \text{dist. } (P, Q)$).

Fie deci $Q \in D$, astfel încît $\rho(P, Q) < \eta$.

F este derivabilă în Q, deci există un domeniu $H \in \mathcal{D}$, să-l luăm de forma $H = \overline{S}(Q, r)$, pentru simplificare, astfel încît diam $H < \frac{\delta}{5}$, $Q \in H$ și

$$\left| f(Q) - \frac{F(H)}{\text{aria } H} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Îl putem lua pe H, deci raza r, în așa fel încît $P \notin H$. Evident, H depinde de ε și Q.

Să notăm

$$K = \overline{S\left(P\,; \frac{\delta}{2}\right) - H}$$

$$L = \overline{S\left(P\ ; \frac{\delta}{2}\right)}.$$

Din felul cum au fost aleși Q și H, rezultă că $H \subseteq S\left(P\,; \frac{2\delta}{5}\right)$, deci mulțimea $S\left(P\,; \frac{\delta}{2}\right) - H$ este un domeniu, K este un domeniu închis, $P \in K$ și diam. $K \leqslant \delta$.

De asemenea,

$$P \in L, \quad \text{diam. } L \leqslant \delta, \quad K \cup H = L, \quad \text{aria } (K \cap H) = 0.$$

Rezultă că pentru K şi L se poate aplica relaţia (1). Aplicînd-o, obţinem :

$$-\frac{\varepsilon}{2} < f(P) - \frac{F(L)}{\text{aria } L} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} < f(P) - \frac{F(K)}{\text{aria } K} < \frac{\varepsilon}{2}$$

sau

$$-\frac{\varepsilon}{2}\,(\text{aria } L) < f(P)\,.\,\text{aria } L - F(L) < \frac{\varepsilon}{2}\,(\text{aria } L)$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\,(\text{aria } K) < f(P).\,\text{aria } K - F(K) < \frac{\varepsilon}{2}\,(\text{aria } K).$$

Scăzînd aceste inegalităţi membru cu membru şi ţinînd seama că aria L = aria K + aria H şi $F(L) = F(K) + F(H)$, obţinem :

$$-\frac{\varepsilon}{2}\,(\text{aria } H) < f(P).\,\text{aria } H - F(H) < \frac{\varepsilon}{2}\,(\text{aria } H),$$

adică $-\frac{\varepsilon}{2} < f(P) - \frac{F(H)}{\text{aria } H} < \frac{\varepsilon}{2}$, deci

$$\left| f(P) - \frac{F(H)}{\text{aria } H} \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3}$$

Combinînd relaţiile (2) şi (3), obţinem

$$|f(P) - f(Q)| \leqslant \left| f(P) - \frac{F(H)}{\text{aria } H} \right| + \left| \frac{F(H)}{\text{aria } H} - f(Q) \right| < \varepsilon\,,$$

deci f este continuă în punctul P şi teorema este demonstrată.

Observaţii. Rezultatul stabilit mai sus arată că, spre deosebire de derivata unei funcţii aditive de domeniu unidimensional, care poate fi discontinuă în unele puncte, derivata unei funcţii aditive de domeniu n-dimensional ($n > 1$) nu poate fi discontinuă decît pe frontiera domeniului de definiţie. Aceasta se explică prin faptul că, pe dreaptă, noţiunea de domeniu coincide cu aceea de interval deschis, în timp ce într-un spaţiu euclidian de dimensiune n mai mare ca 1, intervalele n-dimensionale deschise sînt un caz foarte particular de domenii n-dimensionale. De aici rezultă caracterul foarte restrictiv al existenţei derivatei unei funcţii aditive de domeniu n-dimensional, cu $n > 1$.

În demonstraţia dată mai sus, condiţia $n > 1$ a intervenit în momentul în care am afirmat că mulţimea $S\left(P\,;\,\frac{\delta}{2}\right) - H$ este un domeniu. Este clar că, în cazul $n = 1$, această afirmaţie n-ar mai fi fost adevărată.

Fiind dată o funcţie reală f, definită pe domeniul compact măsurabil Jordan $D \subset R^2$, presupunem că există o funcţie reală F aditivă de domeniu, definită şi derivabilă în fiecare punct P din interiorul lui D şi astfel încît

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}\right)_P = f(P).$$

Integrala funcţiei f pe D se poate defini prin valoarea $F(D)$ (această integrală poate fi numită *integrala în sensul primitivei*) şi această valoare este egală cu integrala Riemann a funcţiei f pe D (pentru toate acestea, a se vedea, de exemplu, capitolul 9 din [1]). Ţinînd seama de rezultatul stabilit mai sus, putem deci enunţa următoarea teoremă:

Necesar şi suficient ca o funcţie reală f, definită pe domeniul compact D, măsurabil Jordan, $D \subset R^n$ $(n > 1)$, să fie integrabilă în sensul primitivei pe orice domeniu compact G, măsurabil Jordan, inclus în interiorul lui D, este ca f să fie continuă în interiorul lui D.

Primită la redacţie la 19 noiembrie 1966

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti
str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Manual de analiză matematică*, vol. II, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.

OBSERVAŢII PRIVIND SUPORTURILE UNOR OPERATORI LINIARI

DE

ROMULUS CRISTESCU

Suporturile funcţionalelor regulate definite pe un spaţiu liniar reticulat [1] de funcţii reale, au fost studiate de John S. Pym în lucrarea [2], în care se stabileşte legătura dintre continuitatea funcţionalei şi existenţa suportului. Rezultatele pot fi extinse pentru cazul operatorilor regulaţi cu valori într-un spaţiu liniar complet reticulat, după cum arătăm în ceea ce urmează.

Fie T o anumită mulţime, $\mathcal{B}$ spaţiul liniar reticulat (cu ordinea punctuală) a funcţiilor reale mărginite pe T şi $\mathcal{F}$ un subspaţiu liniar reticulat al lui $\mathcal{B}$ aşa ca $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$ $(\mathbf{1}(t) \equiv 1)$.

Fie $\mathcal{Y}$ un spaţiu liniar complet reticulat.

Fie U un operator regulat care aplică $\mathcal{F}$ în $\mathcal{Y}$.

Vom spune că U *posedă suport*, dacă există cel puţin o mulţime nevidă $E \subset T$ (suport parţial [2]) cu următoarele proprietăţi:

(i) dacă $\mathbf{0} \leqslant f \in \mathcal{F}$ şi există $t \in E$ aşa ca $f(t) \neq 0$, atunci $|U|(f) \neq \mathbf{0}$;

(ii) dacă $f \in \mathcal{F}$ şi $f(t) = 0$ pentru orice $t \in E$, atunci $|U|(f) = \mathbf{0}$.

Dacă U posedă suport, atunci reuniunea tuturor suporturilor parţiale se va numi *suportul* lui U şi se va nota spt U.

Mulţimea spt U are proprietăţile (i) şi (ii).

Din definiţie rezultă că dacă există spt U, atunci există şi spt $|U|$ şi reciproc; are loc egalitatea spt $U =$ spt $|U|$.

Dacă pentru operatorul U nu există nici o mulţime nevidă E cu proprietatea (i), vom zice că U este *complet fără suport.*

Pentru orice $f \in \mathcal{F}$ vom pune

$$P(f) = \{t \mid f(t) > 0\}.$$

Fie $(\mathcal{F}, \mathcal{Y})_r$ spaţiul operatorilor regulaţi care aplică $\mathcal{F}$ în $\mathcal{Y}$.

---

[1] Terminologia şi notaţiile sînt cele din [1].

[2] Definiţia suportului parţial este identică cu cea dată în [2] pentru funcţionale.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 493–495, BUCUREŞTI, 1967

Dacă $U \in (\mathcal{F}, \mathcal{Y})_r$ vom pune

$$F(U) = \{f \mid \mathbf{0} \leqslant f \leqslant \mathbf{1}\,;\, f \in \mathcal{F}\,;\, |U|(f) = |U|(\mathbf{1})\}$$

$$S(U) = \bigcap_{f \in F(U)} P(f).$$

Se stabilesc ca în [2] următoarele două propoziţii :

PROPOZIŢIA 1. *Operatorul* U *este complet fără suport, dacă şi numai dacă* $S(U) = \emptyset$.

PROPOZIŢIA 2. *Dacă operatorul regulat (nenul)* U *este complet* (o)*-continuu, atunci* U *posedă suport şi* spt $U = S(U)$.

Vom demonstra acum

LEMA 1. *Fie* U, $V \in (\mathcal{F}, \mathcal{Y})_r$. *Dacă* U *este complet fără suport iar* V *este complet* (o)*-continuu, atunci* $U \perp V$.

Demonstraţie. Fie mai întîi U, $V \geqslant 0$. În acest caz trebuie arătat [1] că $U = (U - V)_+$ adică

$$U(f) = \sup_{\mathbf{0} \leqslant g \leqslant f} \{U(g) - V(g)\} \tag{1}$$

oricare ar fi $f \geqslant \mathbf{0}$.

Dacă $\mathbf{0} \leqslant g \leqslant \mathbf{1}$, atunci avem evident

$$U(\mathbf{1}) \geqslant \sup_{\mathbf{0} \leqslant g \leqslant \mathbf{1}} \{U(g) - V(g)\}. \tag{2}$$

Pe de altă parte, cu propoziţia 2, avem $S(U) = \emptyset$, din care rezultă $\inf F(U) = \mathbf{0}$. Folosind complet (o)-continuitatea operatorului V, deducem [3] $\inf\limits_{g \in F(U)} V(g) = \mathbf{0}$, de unde rezultă

$$\sup_{g \in F(U)} \{U(g) - V(g)\} = U(\mathbf{1}). \tag{3}$$

Egalitatea (3) se menţine, evident, dacă înlocuim $F(U)$ prin $\{g \mid \mathbf{0} \leqslant g \leqslant \mathbf{1}\}$, deci (1) are loc pentru $f = \mathbf{1}$. Cu alte cuvinte $(U \wedge V)(\mathbf{1}) = 0$.

Dacă f este un element pozitiv oarecare al lui $\mathcal{F}$, atunci există un număr $\lambda > 0$, aşa ca $\mathbf{0} \leqslant f \leqslant \lambda\, \mathbf{1}$, de unde deducem imediat $(U \wedge V)(f) = \mathbf{0}$. Rezultă $U \wedge V = 0$.

Dacă U şi V nu sînt pozitivi, n-avem decît să ţinem seama că $S(U) = S(|U|)$ şi că odată cu V, şi operatorul $|V|$ este complet (o)-continuu.

LEMA 2. *Fie* $0 < U \in (\mathcal{F}, \mathcal{Y})_r$. *Dacă* U *nu este complet* (o)*-continuu, atunci există un operator complet fără suport* U' *aşa ca* $0 < U' \leqslant U$.

Demonstraţie. Există un şir generalizat $\{f_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ de elemente din $\mathcal{F}$ cu $\mathbf{0} \leqslant f_\delta \leqslant \mathbf{1}$ şi $f_\delta \downarrow \mathbf{0}$ astfel ca $U(f_\delta) \downarrow y_0 > \mathbf{0}$.

Fie $z_0 = U(\mathbf{1})$. Deoarece U este nenul, $z_0 \neq \mathbf{0}$. Spaţiul $\mathcal{Y}$ fiind arhimedian, există $\mu > 0$ aşa ca $y_0 \not\leqslant \mu z_0$. Punînd

$$g_\delta = (f_\delta \vee \mu\, \mathbf{1}) - \mu\, \mathbf{1}$$

---

[3] Putem considera şirul generalizat $\{l_g\}_{g \in F(U)}$ cu $l_g = g$. Avem $l_g \downarrow \mathbf{0}$, de unde $V(l_g) \downarrow \mathbf{0}$.

rezultă

$$U(g_\delta) \geqslant (y_0 \vee \mu z_0) - \mu z_0 > 0. \tag{4}$$

Restul demonstraţiei urmează întocmai metoda lui J.S. Pym (a se vedea demonstraţia suficienţei la teorema 11 din [2]).

Se pune

$$h_\delta = \frac{2}{\mu}\left((f_\delta \wedge \mu \mathbf{1}) - \frac{1}{2}\mu \mathbf{1}\right)_+$$

şi se consideră subspaţiile lui $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}_{1\delta} = \{f \mid f(t) = 0 \text{ dacă } h_\delta(t) = 1\}$$

$$\mathcal{F}_{2\delta} = \{f \mid f(t) = 0 \text{ dacă } h_\delta(t) \neq 1\}.$$

Fie $\mathcal{F}_\delta$ suma subspaţiilor $\mathcal{F}_{1\delta}$ şi $\mathcal{F}_{2\delta}$.

Se defineşte un operator U_δ pe $\mathcal{F}$ după cum urmează. Se pune $U_\delta(f) = 0$ dacă $f \in \mathcal{F}_{1\delta}$ şi $U_\delta(f) = U(f)$ dacă $f \in \mathcal{F}_{2\delta}$. Se extinde U_δ pe $\mathcal{F}_\delta$ prin liniaritate. Se observă că $|U_\delta(f)| \leqslant U(|f|)$ şi se aplică teorema de prelungire a lui Hahn-Banach-Kantorovici ([1] p. 201). Dacă U'_δ este prelungirea considerată a lui U_δ, se pune

$$U' = \inf_{\delta \in \Delta} (U'_\delta)_+ .$$

Operatorul U' verifică condiţiile din enunţul lemei (faptul că U' este nenul, rezultă cu (4) ca în [2]).

Din lemele 1 şi 2 rezultă.

TEOREMĂ. *Un operator regulat U, definit pe $\mathcal{F}$, cu valori în $\mathcal{Y}$ este complet (o)-continuu, dacă şi numai dacă U este ortogonal cu orice operator (regulat) complet fără suport.*

Această teoremă extinde teorema 11 din [2] pentru cazul operatorilor.

Primită la redacţie la 17 octombrie 1966

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. ROMULUS CRISTESCU, *Spaţii liniare ordonate*. Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1959.
2. JOHN S. PYM, *Positive functionals, additivity and supports*. Journ. London Math. Soc., **39**, 391–399 (1964).

ASUPRA PROGRAMĂRII UNEI STRATEGII PRESTABILITE DE APLICARE A METODEI LUI GAUSS DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

DE

MARIANA CRIȘAN-ZVERCA

Lucrarea de față cuprinde o parte introductivă, în care se indică pe scurt varianta strategică prestabilită de aplicare a metodei lui Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare stabilită de L. Todor în [1]. Se dau apoi, însoțite de explicații, schemele logice de calcul pe baza cărora a fost alcătuit programul de lucru pentru realizarea acestei variante la o mașină electronică de calcul. În acest fel se arată că la mașina CIFA—3 putem rezolva sisteme cu un număr dublu de ecuații față de numărul de ecuații cu care puteam rezolva sistemele aplicînd varianta clasică a lui Gauss.

1. *Introducere.* Fie dat un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute :

$$Ax = b. \tag{1}$$

Acestui sistem i se atașază o matrice $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$, care se numește matrice extinsă și ale cărei elemente sînt date prin :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= a_{ij}, & (i, j &= 1, \ldots, n) \\ \tilde{a}_{i,n+1} &= b_i, & (i &= 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{2}$$

Ideea care stă la baza metodei lui Gauss este trecerea succesivă de la sistemul (1) la un alt sistem, a cărui matrice să fie mai simplă (triunghiulară sau diagonală etc.) Acestei treceri de la un sistem la alt sistem îi corespunde o transformare a matricilor extinse respective. Pornind de la matricea $\tilde{A} = \tilde{A}^{\circ}$, ne propunem ca trecerea de la matricea $\tilde{A}^k$ la matricea $\tilde{A}^{k+1}$ (căreia, pornind de la sistemul inițial $S \equiv S_0$ îi corespunde transformarea sistemului S_k în S_{k+1}) să o realizăm prin două tipuri de operații notate simbolic cu „0” şi „1”. Asupra regulilor şi descrierii acestor operaţii nu vom insista, deoarece au fost expuse pe larg în [1]. Menţionăm că fiecărei operaţii de acest tip i se ataşază un „rang” k, care indică ordinea efectuării în timp a operaţiei respective, precum şi două numere întregi pozitive mai mici ca 1, i_k şi j_k şi pe care le vom numi „coordonatele” operaţiei.

Aceste convenţii permit punerea în evidenţă a unei matrici pătratice de ordinul n, pe care o vom numi matrice „diagramă”, şi o vom nota cu $\mathcal{D}$, matrice ale cărei elemente au partea dinainte de virgulă egală cu 0 sau 1, fapt ce ne indică tocmai tipul operaţiei; partea de după virgulă, considerată ca număr întreg, ne va da rangul operaţiei. În sfîrşit, cele două coordonate ale operaţiei vor fi tocmai linia şi coloana pe care se află situat elementul respectiv.

2. *Strategii prestabilite.* Vom înţelege prin strategii prestabilite acele strategii în care operaţiile şi ordinul lor este stabilit apriori. O astfel de strategie este şi cea a alegerii secvenţiale a elemenţilor „pivot” (vezi [2]). În cele ce urmează vom arăta cum se poate programa o strategie de acest fel, utilizînd în acest scop varianta descrisă prin matricea diagramă :

$$(3)\ \mathcal{D} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,1 & 0,4 \dots\dots\dots\dots & 0,k^2+k+2 \dots\dots & 0,(n-1)^2+n+1 \\ 0,2 & 1,3 \dots\dots\dots\dots & 0,k^2+k+3 \dots\dots & 0,(n-1)^2+n+2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0,\ k^2+1 & 0,k^2+2 \dots 0,\ k^2+k & 1,\ k^2+k+1 \dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0,(n-1)^2+1 & 0,(n-1)^2+2 \dots\dots & 0,\ (n-1)^2+n+1 & 1,\ (n-1)^2+n \end{pmatrix}$$

Această variantă transformă matricea $\widetilde{A}^{\circ}$ a sistemului dat, în matricea $\widetilde{A}^{n^2}$, ale cărei n prime coloane alcătuiesc matricea unitate şi, în care, ultima coloană reprezintă tocmai soluţia sistemului iniţial.

În realizarea variantei (3) vom desprinde n cicli. Primul ciclu este alcătuit din operaţia 1, 1 ; al doilea ciclu, din operaţiile : 0,2 ; 1,3 ; 0,4. În general, ciclul $k+1$ se compune din operaţiile : $0, k^2+1$; $0, k^2+2$; . . . . $0, k^2+k$; $1, k^2+k+1$; . . . ; $0, k^2+2k+1$.

Observăm că, de exemplu, pentru realizarea ciclului $k+1$ trebuie executate k operaţii de tipul „0” pe linia $k+1$ a matricei $\widetilde{A}^k$; o operaţie de tipul „1” pe aceeaşi linie şi încă k operaţii de tipul „0” pe coloana $k+1$ a matricei extinse $\widetilde{A}^k$. Considerînd avantajele folosirii variantei (3) în cazul realizării ei la o maşină electronică de calcul (vezi [1]), vom trece direct la programare.

3. *Programarea efectivă a variantei* (3). Fiecare ciclu se programează separat. Deoarece primul ciclu diferă de ciclii următori, schema logică, după care s-a programat realizarea lui, o vom reprezenta aparte în figura 1. În figurile 2, 3 şi 4 este ilustrată schema logică a programării pentru realizarea ciclului $k+1$. Această schemă serveşte pentru programarea oricărui ciclu k ($k = 2, \dots, n$).

Convenim să lăsăm adresele de la început (notate simbolic cu „A_1”, „A_2”, ...) libere pentru a înscrie în ele elementele matricilor transformate $\widetilde{A}^s$. Cum, după calculul făcut în [1], acest număr este de maximum $p(p+2)$ pentru $n = 2p-1$ și de maximum p^2+3p+1 pentru cazul

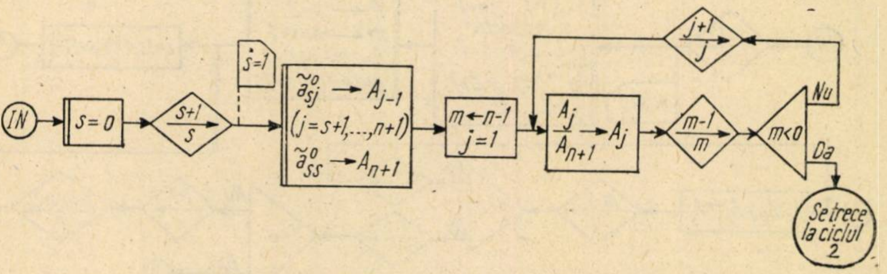

IN
s=0
s+1 → s
ṡ=1
$\tilde{a}^0_{sj} \to A_{j-1}$
(j=s+1,...,n+1)
$\tilde{a}^0_{ss} \to A_{n+1}$
m←n-1
j=1
$\frac{A_j}{A_{n+1}} \to A_j$
m-1 → m
m<0
Nu
Da
j+1 → j
Se trece la ciclul 2

Fig. 1. — Schema logică pentru realizarea ciclului 1

cînd $n = 2p$, instrucțiunile programului de lucru se vor memora începînd fie cu adresa $A_{p(p+2)+1}$, fie cu adresa A_{p^2+3p+2}.

Elementele matricei $\widetilde{A}^\circ$ se vor introduce în memoria lentă de unde, în funcție de ciclul ce se programează, sînt înscrise într-o anumită ordine în celulele corespunzătoare ale memoriei interne. Ordinea introducerii acestora în memoria rapidă a fost impusă de folosirea la fiecare pas a unui număr minim de celule.

4. *Programul alcătuit pentru realizarea primului ciclu.* Acesta este reprezentat prin schema logică din figura 1.

În schema logică din figura 1, numărul s, $(s = 1)$ ne indică faptul că ne aflăm la primul ciclu. Vom conveni ca numărul s să fie egal întotdeauna cu numărul de ordine al ciclului care se realizează la momentul respectiv. Pentru aceasta, la începutul fiecărui ciclu care se programează, se adună „convențional” (operația nu are loc efectiv în programul de lucru) o unitate la numărul s.

În al doilea bloc de inițializare din figura 1, este indicată ordinea introducerii elementelor primei linii a matricei $\widetilde{A}^0$ în celulele memoriei (interne). După cum se vede, aceasta este :

$$a_{12} \to A_1$$

$$a_{13} \to A_2$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$a_{1,n+1} \to A_n$$

$$a_{11} \to A_{n+1}$$

S-a folosit o adresă „contor” notată simbolic cu „m” care, prin negativarea conținutului ei ne va semnaliza terminarea operației 1,1 (deci și a ciclului 1). Remarcăm că, la sfîrșitul primului ciclu, devine disponibilă adresa „A_{n+1}” deoarece se știe că conținutul ei va fi egal cu 1 în urma executării operației 1,1.

5. *Programul alcătuit pentru realizarea ciclului $k+1$.* Acesta este ilustrat prin schemele logice din figurile 2, 3 și 4.

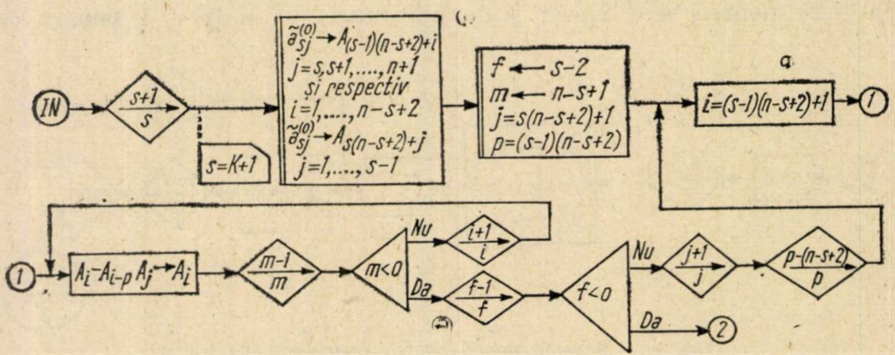

IN
$\frac{s+1}{s}$
$s=K+1$
$\tilde{a}_{sj}^{(0)} \to A_{(s-1)(n-s+2)+i}$
$j=s,s+1,\dots,n+1$
și respectiv
$i=1,\dots,n-s+2$
$\tilde{a}_{sj}^{(0)} \to A_{s(n-s+2)+j}$
$j=1,\dots,s-1$
$f \leftarrow s-2$
$m \leftarrow n-s+1$
$j=s(n-s+2)+1$
$p=(s-1)(n-s+2)$
$i=(s-1)(n-s+2)+1$
1
1
$A_i - A_{i-p} A_j \to A_i$
$\frac{m-1}{m}$
$m<0$
Nu
$\frac{i+1}{i}$
Da
$\frac{f-1}{f}$
$f<0$
Nu
$\frac{j+1}{j}$
$\frac{p-(n-s+2)}{p}$
Da
2

Fig. 2. — Schema logică pentru realizarea primelor k operații de tipul „0” din ciclul $k+1$.

În primul bloc de inițializare din figura 2 este indicată ordinea introducerii elementelor liniei $k+1$ din matricea $\tilde{A}^0$, din memoria lentă, în cea rapidă:

$$a_{k+1,\,k+1} \to A_{k(n-k+1)+1}$$

$$a_{k+1,\,k+2} \to A_{k(n-k+1)+2}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{k+1,\,n} \to A_{k(n-k+1)+n-k}$$

$$a_{k+1,\,n+1} \to A_{(k+1)(n-k+1)}$$

$$a_{k+1,\,1} \to A_{(k+1)(n-k+1)+1}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{k+1,\,k} \to A_{(k+1)(n-k+1)+k}.$$

Se vor mai folosi două celule contor notate cu „f” și „m”. Adresa „f” ne va indica terminarea executării operațiilor de tipul „0” de pe linia $k+1$ (operații ce sînt în număr de k). Celula „m” ne va semnaliza terminarea unei operații de tip „0” (o astfel de operație necesită în total calcularea a $n-k+1$, elemente ale liniei $k+1$).

După realizarea tuturor operațiilor de tipul „0” din linia $k+1$, devin disponibile adresele: $A_{(k+1)(n-k+1)+1}, \dots, A_{(k+1)(n-k+1)+k}$.

În schema logică reprezentată în figura 3, s-a folosit o adresă contor notată cu „f” care, prin negativarea conținutului ei, ne va semnaliza terminarea efectuării operației 1, k^2+k+1 (pentru aceasta, avem de calculat $n-k$ elemente ale liniei $k+1$ a matricei inițiale $\tilde{A}^0$). După ce s-a executat această operație, devine disponibilă adresa $A_{k(n-k+1)+1}$.

În schema logică din figura 4 s-a folosit o adresă notată cu „f”, adresă care ne va indica terminarea efectuării operațiilor de tipul „0” de pe coloana $k+1$ (avem de făcut k astfel de operații).

Adresa notată cu „m" ne va indica inițial terminarea executării unei singure operații de acest tip (care comportă calculul a $n-k$ elemente). Conform algoritmului stabilit în [1], terminarea unei operații de tipul „0" de pe coloana k este urmată de transpunerea elementelor calculate,

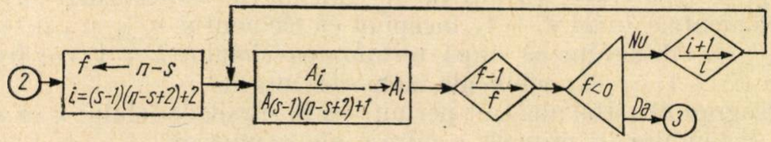

2
f ← n−s
i=(s−1)(n−s+2)+2
A_i
A(s−1)(n−s+2)+1
→A_i
f−1
f
f<0
Nu
i+1
i
Da
3

Fig. 3. — Schema logică pentru realizarea operației de tipul „1" din ciclul $k+1$.

la adrese cu un indice mai mic cu o unitate — în cazul operației 0, k^2+ $+k+2$ — decît indicele fostelor adrese unde se aflau memorate; sau,

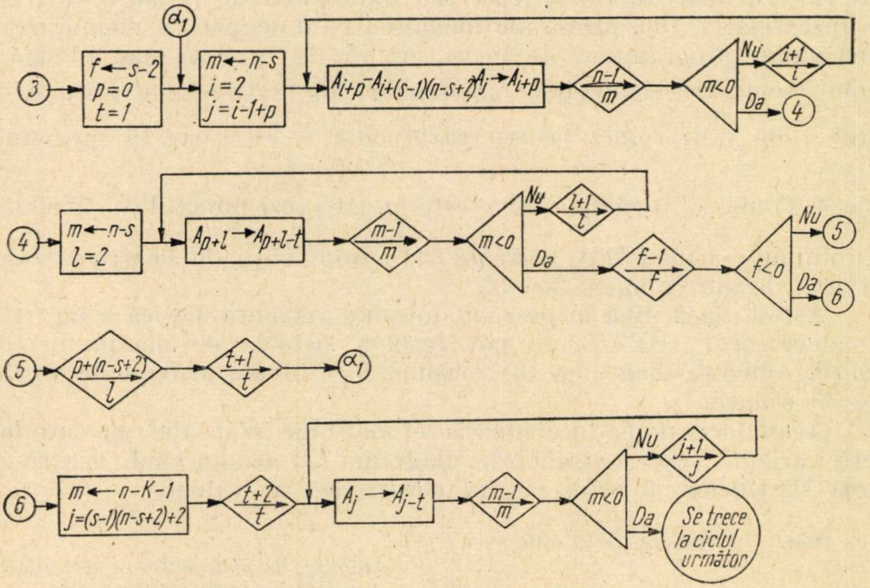

α1
3
f ← s−2
p=0
t=1
m ← n−s
i=2
j=i−1+p
A_{i+p} − A_{i+(s−1)(n−s+2)} A_j → A_{i+p}
n−1
m
m<0
Nu
i+1
i
Da
4
4
m ← n−s
l=2
A_{p+l} → A_{p+l−t}
m−1
m
m<0
Nu
l+1
l
Da
f−1
f
f<0
Nu
5
Da
6
5
p+(n−s+2)
l
t+1
t
α1
6
m ← n−K−1
j=(s−1)(n−s+2)+2
t+2
t
A_j → A_{j−t}
m−1
m
m<0
Nu
j+1
j
Da
Se trece la ciclul următor

Fig. 4. — Schema logică pentru realizarea ultimelor k operații de tipul „0" din ciclul $k+1$.

de transpunerea lor în celule cu un indice mai mic cu două unități — în cazul operației 0, k^2+k+3 — decît indicele fostelor adrese ale acestora (operație notată cu $A_j \to A_{j-2}$) ș.a.m.d.

În acest scop, s-a folosit din nou adresa „m" care, de astă dată, va indica pe fiecare linie de la 1 pînă la k, că am terminat transportul tuturor elementelor ce s-au calculat în cadrul operației „0" respective. Vom observa că distanța dintre două elemente care se află pe aceeași coloană este de $n-k+1$.

După terminarea operațiilor de tip „0" se trece la înscrierea elementelor $a_{k+1,k+2}, \ldots, a_{k+1,n+1}$ în celule, al căror număr de ordine (indice), este cu două unități mai mic decît cel al celulelor folosite pentru înregistrarea elementelor obținute la ultima operație de tip „0". Pentru aceasta, se va refolosi (cu conținut schimbat) adresa „m" care, de astă dată, ne va arăta, prin negativare, că am făcut transportul indicat mai sus pentru toate elementele liniei $k + 1$, începînd cu elementul $a_{k+1,k+2}$ și terminînd cu $a_{k+1,n+1}$. Observăm că după terminarea ciclului $k + 1$ vor fi ocupate primele $(k + 1)(n-k)$ celule ale memoriei interne.

Programul astfel alcătuit permite ca la sfîrșitul ciclului n să obținem soluția sistemului în primele n adrese ale memoriei.

6. Vom încerca, în cele ce urmează, să facem un calcul estimativ al valorii maxime pe care o poate avea numărul n (număr care reprezintă ordinul sistemului de rezolvat), așa încît rezolvarea sistemului cu ajutorul mașinii electronice de calcul CIFA-3 să fie posibilă.

În acest scop vom face socoteala numărului de celule din memorie care vor fi ocupate în cazul rezolvării unui sistem de n ecuații. Un număr de aproximativ 100 adrese ale memoriei va fi ocupat cu memorarea instrucțiunilor programului de lucru, număr la care se mai adaugă — în scopul memorării elementelor „nebanale" ale matricelor extinse $\bar{A}^s$ — fie $\frac{1}{4}(n^2 + 6n + 4)$ celule pentru cazul cînd n este par, fie un număr de $\frac{1}{4}(n + 1)(8n + 5)$ celule cînd n este impar (vezi punctul 3). Ținînd cont că volumul mașinii CIFA-3 este de 511 adrese, obținem pentru n valoarea maximă de aproximativ 34—35.

Astfel, dacă pînă în prezent, folosind varianta clasică a lui Gauss, la calculatorul CIFA-3, se pot rezolva sisteme de maximum 16—17 ecuații, aplicînd diagrama (3) reușim să rezolvăm sisteme de maximum 34—35 ecuații.

Acest lucru pune în evidență cel mai bine avantajele pe care le prezintă varianta reprezentată prin diagrama (3) atunci cînd, pentru rezolvarea sistemelor, folosim mașini electronice de calcul.

Primită la redacție la 12 iulie 1966

Facultatea de matematică și mecanică
a Universității din București
Str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. L. TODOR, *Asupra metodei lui Gauss de rezolvare a sistemelor liniare de mari dimensiuni și asupra inversării matricilor mari.* St. cerc. mat., **19**, *3* (1967).
2. Д. К. ФАДЕЕВА, В. Н. ФАДЕЕВА, *Вычислительные методы линейной алгебры*. Москва-Ленинград, 1963.

ASUPRA UNEI CLASE DE ECUAȚII FUNCȚIONALE

DE

AVRAM FILIPESCU ȘT.

(Timişoara)

Se cercetează soluția generală a ecuației funcționale (1), unde a, b, c, d, λ sînt constante arbitrare ($bc - ad \neq 0$) reale iar $f(x)$ este o funcție reală de variabilă reală, care, după tipul soluției căutate, poate fi : derivabilă, continuă, integrabilă, mărginită, măsurabilă etc.

Pentru a determina soluția generală a ecuației funcționale (1) se disting următoarele cazuri :

$\lambda > 0$, iar soluția generală este dată de (12);

$\lambda < 0$, iar soluția generală este dată de (18);

$\lambda = 0$, iar soluția generală este dată de (24).

Clasa de ecuații funcționale cuprinsă în structura ecuației funcționale (1), după diferitele valori ce le pot lua constantele arbitrare reale a, b, c, d, λ, cuprinde multe din ecuațiile funcționale cunoscute în literatură : [1], pag. 44, 73, 74, [2], [3], [4], [5], pag. 476, 477.

1. În literatura de specialitate (vezi cartea lui J. Aczél [1]), se studiază separat ecuațiile funcționale pentru funcțiile :

$$f(x) = \operatorname{tg} cx ; \; f(x) = C\operatorname{th} cx ; \; f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg} cx} ; \; f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} cx}$$

$$f(x) = \frac{\sin cx}{\sin (cx + a)} ; \; f(x) = \frac{-\sin cx}{\sin (cx + a)} ; \; f(x) = \frac{\operatorname{sh} cx}{\operatorname{sh} (cx + a)}$$

$$f(x) = -\frac{\operatorname{sh} cx}{\operatorname{sh} (cx + a)} ; \; f(x) = ax ; \; f(x) = \frac{c}{x} ; \; f(x) = \frac{cx}{1 - cx}$$

$f(x) = -\dfrac{cx}{1 - cx}$. (Vezi cartea lui J. Aczél [1], cu bibliografia corespunzătoare la pag. 73—74).

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 503–507, BUCUREȘTI, 1967

Ideea care ne-a condus la această lucrare a fost găsirea unei ecuaţii funcţionale, care să conţină şi un număr de parametri cu ajutorul căror parametri să putem îngloba toate tipurile de ecuaţii funcţionale corespunzătoare funcţiilor specificate mai sus, precum şi alte tipuri noi. De aceea o astfel de ecuaţie funcţională prezintă în realitate o clasă de ecuaţii funcţionale printr-o exprimare unică.

2. Fie ecuaţia funcţională :

$$(1)\quad f(x+y)=\frac{[d(bc-ad)+b(cd-ab)]f(x)f(y)+(c^2-\lambda a^2)[a+bf(x)+bf(y)]}{[\lambda b^2-d^2][af(x)+af(y)+bf(x)f(y)]+c(bc-ad)+a(\lambda ab-cd)},$$

unde $f(x)$ este funcţie reală de variabilă reală iar a, b, c, d şi λ sînt constante arbitrare reale care caracterizează clasa de ecuaţii funcţionale dată de (1). Soluţionarea ecuaţiei funcţionale (1) o facem în ipoteza $bc-ad\neq 0$; iar pentru numitorul ecuaţiei funcţionale (1) admitem că expresiile λb^2-d^2 ; $c(bc-ad)$; $a(\lambda ab-cd)$ nu se anulează simultan. În ceea ce priveşte parametrul λ, acesta poate avea valori pozitive, negative sau chiar zero.

Cazul I : $\lambda=\alpha^2>0$.

Ecuaţia funcţională în acest caz se scrie :

$$(2)\quad f(x+y)=\frac{[d(bc-ad)+b(cd-\alpha^2ab)]f(x)f(y)+(c^2-\alpha^2a^2)[a+bf(x)+bf(y)]}{[\alpha^2b^2-d^2][af(x)+af(y)+bf(x)f(y)]+c(bc-ad)+a(\alpha^2ab-cd)}.$$

Dacă în (2) facem schimbarea de funcţie :

$$(3)\qquad f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

se obţine următorul şir de rapoarte egale :

$$(4)\qquad \frac{g(x+y)}{M}=\frac{h(x+y)}{N}=\frac{1}{\mu(x,y)}$$

cu notaţiile:

$$M=[d(bc-ad)+b(cd-\alpha^2ab)]g(x)g(y)+(c^2-\alpha^2a^2)[bg(x)h(y)+ + bg(y)h(x)+ah(x)h(y)]$$

$$N=(\alpha^2b^2-d^2)[ag(x)h(y)+ag(y)h(x)+bg(x)g(y)]+[c(bc-ad)+ + a(\alpha^2ab-cd)]h(x)h(y)$$

unde funcţia $\mu(x,y)$ este o nouă funcţie necunoscută. Din (4) rezultă sistemul :

$$(5)\qquad \begin{cases} \mu(x,y)g(x+y)=[d(bc-ad)+b(cd-\alpha^2ab)]g(x)g(y)+ \\ \quad +(c^2-\alpha^2a^2)[bg(x)h(y)+bg(y)h(x)+ah(x)h(y)] \\ \mu(x,y)h(x+y)=[c(bc-ad)+a(\alpha^2ab-cd)]h(x)h(y)+ \\ \quad +(\alpha^2b^2-d^2)[ag(x)h(y)+ag(y)h(x)+bg(x)g(y)]. \end{cases}$$

Pentru soluţionarea sistemului (5) introducem funcţiile necunoscute $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$, legate de funcţiile $g(x)$ şi $h(x)$ prin relaţiile :

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi(x) = bg(x) + ah(x) \\ \psi(x) = dg(x) + ch(x) \end{cases} \qquad (bc - ad \neq 0)$$

În urma unui şir de calcule reducem sistemul funcţiilor $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ la forma canonică :

$$(7)\qquad \begin{cases} \mu(x, y)\varphi(x + y) = (bc - ad)[\varphi(x)\psi(y) + \varphi(y)\psi(x)] \\ \mu(x, y)\psi(x + y) = (bc - ad)[\alpha^2\varphi(x)\varphi(y) + \psi(x)\psi(y)] \end{cases}$$

Eliminînd funcţia necunoscută $\mu(x, y)$ obţinem

$$(8)\qquad \frac{\varphi(x + y)}{\psi(x + y)} = \frac{\varphi(x)\psi(y) + \varphi(y)\psi(x)}{\psi(x)\psi(y) + \alpha^2\varphi(x)\varphi(y)}.$$

Dacă introducem funcţia necunoscută

$$(9)\qquad \frac{\alpha\varphi(x)}{\psi(x)} = V(x),$$

atunci (8) se scrie :

$$(10)\qquad V(x + y) = \frac{V(x) + V(y)}{1 + V(x)V(y)}$$

care este ecuaţia funcţională a funcţiei tangentă hiperbolică. Soluţia generală pentru această ecuaţie funcţională este dată de literatura de specialitate în funcţii analitice, în funcţii derivabile, în funcţii continue, în funcţii integrabile, în funcţii sumabile, în funcţii mărginite, în funcţii măsurabile etc. şi are expresia :

$$(11)\qquad V(x) = \operatorname{th} nx, \ (n \in R).$$

Dacă revenim la funcţia $f(x)$ din ecuaţia funcţională (2) avem exprimarea soluţiei generale pentru această ecuaţie :

$$(12)\qquad f(x) = \frac{c \operatorname{th} nx - a\alpha}{b\alpha - d \operatorname{th} nx}, \quad (bc - ad \neq 0, \ n \in R \text{ şi } \alpha \in R).$$

Observăm că soluţia generală (12) conţine în cazul particular $a = 0$ şi $bc \neq 0$ soluţiile ecuaţiilor funcţionale (92) şi (93) din [1], pag. 74.

Cazul II : $\lambda = -\beta^2 < 0$

Ecuaţia funcţională (1) în acest caz se scrie :

$$(fx + y) = \frac{[d(bc-ad)+b(cd+\beta^2ab)]f(x)f(y)+(c^2+\beta^2a^2)[a+bf(x)+bf(y)]}{(\beta^2b^2+d^2)[-af(x)-af(y)-bf(x)f(y)]+c(bc-ad)-a(\beta^2ab+cd)}.$$

(13)

Metoda pentru soluţionarea ecuaţiei (13) nu va fi cea dată de Oct. Em. Gheorghiu în [2], care este analogă cu metoda folosită în cazul I, ci o metodă elementară bazată pe grupări de termeni pînă cînd ecuaţia (13) se aduce la forma :

$$\frac{a+bf(x+y)}{c+df(x+y)}=\frac{(a+bf(x))(c+df(y))+(a+bf(y))(c+df(x))}{(c+df(x))(c+df(y))-\beta^2(a+bf(x))(a+bf(y))}. \tag{14}$$

Dacă introducem funcţia :

$$U(x+y)=\beta\,\frac{a+bf(x)}{c+df(x)},\quad (bc-ad\neq 0), \tag{15}$$

atunci ecuaţia funcţională (14) devine :

$$U(x+y)=\frac{U(x)+U(y)}{1-U(x)\,U(y)} \tag{16}$$

care este ecuaţia funcţională a funcţiei tangentă circulară.

Soluţia generală ([13]) pentru (16) este :

$$U(x)=\operatorname{tg} mx,\qquad (m\in R). \tag{17}$$

Revenind la funcţia $f(x)$ din ecuaţia funcţională (13) avem următoarea expresie :

$$f(x)=\frac{c\operatorname{tg} mx-a\beta}{b\beta-d\operatorname{tg} mx},\quad (bc-ad\neq 0;\ m\in R;\ \beta\in R). \tag{18}$$

Observaţie. Dacă în soluţia generală (18) luăm $\beta^2=1$, atunci obţinem rezultatul dat de Oct. Em. Gheorghiu în [2]. Pentru $\beta^2=1$, $a=0$, $b=-1$, $c=-1$, $d=1$ obţinem soluţia generală a ecuaţiei lui V. Alaci [4], [5], pag. 476, [1], pag. 73.

Pentru $\beta^2=1$, $a=1$, $b=-1$, $c=0$, $d=1$ obţinem soluţia generală a celei de-a doua ecuaţii a lui V. Alaci [4], [5], pag. 477 [1], pag. 73. Pentru $a=0$, din (18) se obţine soluţia generală pentru ecuaţia funcţională (91) dată în [1] la pag. 74.

Cazul III : $\lambda=0$

În acest caz ecuaţia funcţională (1) se va scrie :

$$f(x+y)=\frac{(2bcd-ad^2)f(x)f(y)+c^2[a+bf(x)+bf(y)]}{bc^2-2acd-d^2[af(x)+af(y)+bf(x)f(y)]} \tag{19}$$

Grupînd şi ordonînd termenii în (19) obţinem

$$f(x+y)=\frac{c(a+bf(y))(c+df(x))+c(a+bf(x))(c+df(y))-a(c+df(x))(c+df(y))}{b(c+df(x))(c+df(y))-d(a+bf(x))(c+df(y))-d(a+bf(y))(c+df(x))} \tag{20}$$

sau

$$\frac{a+bf(x+y)}{c+df(x+y)}=\frac{a+bf(x)}{c+df(x)}+\frac{a+bf(y)}{c+df(y)}. \tag{21}$$

Se impune introducerea funcţiei:

$$T(x) = \frac{a + bf(x)}{c + df(x)}, \quad (bc - ad \neq 0) \tag{22}$$

şi atunci ecuaţia funcţională (21) devine:

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \tag{23}$$

a cărei soluţie generală este binecunoscută [1], pag. 44.

Revenind la funcţia $f(x)$ din ecuaţia funcţională (19), ea va avea următoarea expresie:

$$f(x) = \frac{c\,kx - a}{b - dkx}, \quad (bc - ad \neq 0,\ k \neq 0). \tag{24}$$

Observaţie. Pentru $a = 0$, $b = 1$, $ck = dk = m \neq 0$, atunci (24) este soluţia ecuaţiei (89) din cartea lui J. Aczél [1], pag. 73. Pentru $a = 0$, $b = 1$, $ck = -dk = -m \neq 0$ atunci soluţia (24) este corespunzătoare ecuaţiei funcţionale (90) din [1], pag. 74.

Primită la redacţie la 18 iulie 1966

Facultatea de Mecanică
Catedra de Matematici
Bulev. Mihai Viteazu Nr. 1
Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Basel — Stuttgart — Berlin, 1961, pag. 44, 73, 74 şi bibliografia la pag. 266—324.
2. Oct. Em. Gheorghiu, *Über eine Klasse von Funktionalgleichungen.* L'Enseignement Mathématique, X, *3—4*, 245—247 (1964).
3. M. Kuczma, *A survey of theory of functional equations.* Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série : Mathématiques et Physiques nr. 130, (1964), pag. 1—64 ; ecuaţia (34).
4. V. Alaci, *Sur deux équations fonctionnelles.* Mathematica (Cluj), XIX, 23—25 (1943).
5. M. Ghermănescu, *Ecuaţii funcţionale.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1960, pag. 473—477.

DESPRE UNICITATEA SOLUȚIEI ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINIARE

DE

B. JANKÓ și M. BALÁZS

(Cluj)

În lucrarea de față sînt prezentate teoreme de unicitate ale soluției ecuației operaționale $P(x) = \theta$, derivata $P(x)$ satisfăcînd o condiție de tip Hölder.

În cadrul lucrării de față ne ocupăm de problema unicității soluției pentru cazul ecuației operaționale de forma

$$P(x) = \theta, \tag{1}$$

unde $P(x)$ este o operație neliniară definită într-un domeniu complet S al spațiului liniar normat X cu valori în spațiul Y de același tip, θ fiind elementul nul al lui Y. Pentru cele ce urmează vom presupune că operația $P(x)$ este continuă și admite derivată de tip Fréchet.

L. V. Kantorovici demonstrează în [1] două teoreme, una pentru existența soluției ecuației (1) și alta pentru unicitatea soluției. Prima teoremă a fost generalizată de mai mulți autori, dintre care amintim pe [1] și [2]. În lucrarea de față vom da 4 teoreme de unicitate corespunzătoare teoremelor de existență stabilite în lucrările [4], [3].

TEOREMA 1. *Dacă operația* $P(x)$ *satisface condițiile* :

1°. *Există un punct* $x_0 \in X$ *pentru care operația* $P'(x_0)$ *admite un invers* $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ *astfel ca*

$$\|\Gamma_0\| \leqslant B_0 ;$$

2°. *Se cunoaște evaluarea în normă a expresiei* $\Gamma_0 P(x_0)$, *adică*

$$\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0 ;$$

3°. *Derivata în sens Fréchet a operației* $P(x)$ *satisface condiția lui Hölder*

$$\|P'(x') - P'(x'')\| < K \|x' - x''\|^{\alpha}, \; 0 < \alpha \leqslant 1,$$

K fiind o constantă, pentru orice x', x'' din sfera completă S din spațiul X dată de inegalitatea

$$\|x-x_0\| \leqslant \frac{(1+\alpha)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\eta_0;$$

4°. *Numerele B_0, K, η_0 satisfac condiția*

$$h_0 = B_0 K \eta_0^{\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Atunci ecuația (1) are o singură soluție $x^* \in S$ și ea este limita șirului $\{x_n\}$ dat de algoritmul lui Newton-Kantorovici

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n), \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

Demonstrație. În lucrarea [3] s-a demonstrat că dacă condițiile teoremei 1 sînt satisfăcute în sfera S_1 (în loc de sfera S), unde S_1 este dată de

$$\|x-x_0\| \leqslant \frac{1+\alpha}{\alpha}\eta_0,$$

atunci șirul (2) converge către o soluție x^* a ecuației (1) și $x^* \in S_1$. Este ușor de demonstrat inegalitatea

$$\frac{1+\alpha}{\alpha} \leqslant \frac{(1+\alpha)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}$$

ceea ce înseamnă că raza sferei S_1 este mai mică decît raza sferei S, de unde rezultă că ecuația (1) are o soluție la care tinde șirul (2) și în sfera S. Deci pentru a demonstra teorema 1 este destul să demonstrăm că x^* este unica soluție a ecuației (1) în sfera S.

Fie τ o soluție oarecare a ecuației (1) din sfera S și $\{x_n\}$ șirul (2). Să considerăm operația auxiliară

$$F_n(x) = x - \Gamma_n P(x).$$

Avem în mod evident $F_n(\tau) = \tau$, $F_n(x_n) = x_{n+1}$ și $F_n'(x_n) = \theta$. Folosind formula dată de Wertheim [2]

$$\|f(x_1) - f(x_2) - f'(x_2)(x_1 - x_2)\| \leqslant \frac{k}{1+\alpha}\|x_2 - x_1\|^{1+\alpha}, \tag{3}$$

pentru operația $F_n(x)$, obținem

$$\|F_n(\tau) - F_n(x_n) - F_n'(x_n)(\tau - x_n)\| \leqslant \frac{KB_0\|\tau - x_n\|^{1+\alpha}}{(1+\alpha)(1-h_{n-1})\ldots(1-h_0)},$$

de unde, folosind proprietatea operației $F_n(x)$ și inegalitatea cunoscută ([3])

$$h_n \leqslant \frac{\alpha}{1+\alpha},$$

rezultă

$$\| \tau - x_{n+1} \| \leqslant \frac{(1+\alpha)^{n-1}}{\eta_0^{\alpha}} h_0 \| \tau - x_n \|^{1+\alpha}$$

sau

$$\| \tau - x_{n+1} \| \leqslant \frac{(1+\alpha)^{n-2}\,\alpha}{\eta_0^{\alpha}} \| \tau - x_n \|^{1+\alpha}. \tag{4}$$

Fie $\| \tau - x_n \| \leqslant \rho \cdot \eta_0$. În acest caz, conform inegalității (4) avem

$$\| \tau - x_{n+1} \| \leqslant \alpha^{\sum\limits_{i=0}^{n} (1+\alpha)^i} \cdot (1+\alpha)^{-(1+\alpha)^{n-1}(3+2\alpha)} \cdot$$

$$\cdot (1+\alpha)^{\sum\limits_{i=1}^{n-2} i(1+\alpha)^{n-i-2}} \cdot \rho^{(1+\alpha)^{n+1}} \cdot \eta_0 ,$$

unde ultima inegalitate se demonstrează prin inducție completă.

Calculînd suma $\sum\limits_{i=1}^{n-2} i\,(1+\alpha)^{n-i-2}$, obținem

$$\| \tau - x_{n+1} \| \leqslant \left(\frac{1+\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (1+\alpha)^{-\alpha n} (1+\alpha)^{-\frac{1}{\alpha^2}} \cdot \eta_0 \cdot \left[\frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}}} \cdot \rho \right]^{(1+\alpha)^n}$$

Din ultima inegalitate rezultă că, dacă

$$\rho \leqslant \frac{(1+\alpha)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}},$$

atunci are loc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \tau$. Pe de altă parte însă avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. În consecință ecuația (1) în sfera S are o singură soluție x^* și teorema este demonstrată.

TEOREMA 2. *Fie îndeplinite condițiile 1° și 2° ale teoremei* 1, *condițiile 3° și 4° fiind înlocuite cu următoarele :*

3°′ *Derivata în sens Fréchet a operației* $P(x)$ *satisface condiția lui Hölder :*

$$\| P'(x') - P'(x'') \| \leqslant K . \| x' - x'' \|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

K fiind o constantă, pentru orice x', x'' din sfera completă S^* din spațiul X dată de inegalitatea

$$\| x - x_0 \| \leqslant 2\eta_0 ;$$

4°′ *Numerele* B_0, K, η_0 *satisfac condiția*

$$h_0 = B_0 K \eta_0^{\alpha} \leqslant \frac{1}{2}.$$

În aceste condiții dacă ecuația (1) admite o soluție în sfera S_1^* *definită de inegalitatea*

$$\|x-x_0\| \leqslant \frac{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{1-\alpha}{\alpha^2}}}\,\eta_0,$$

atunci ea are o singură soluție în această sferă și soluția este limita șirului (2).

Demonstrație. În lucrarea [3] s-a demonstrat că în condițiile teoremei 2 șirul (2) converge către o soluție x^* a ecuației (1) și $x^* \in S^*$. Fie τ o soluție a ecuației (1) din sfera S_1^*. Folosim aceeași operație auxiliară ca și în demonstrația precedentă. Pe baza formulei (3), luînd în considerare că $h_n \leqslant \frac{1}{2}$ ([3]), avem

$$\|\tau-x_{n+1}\| \leqslant \frac{2^{n-1}}{(1+\alpha)\cdot\eta_0^{\alpha}}\,\|\tau-x_n\|^{1+\alpha}. \tag{5}$$

Fie $\|\tau-x_0\| \leqslant \rho\eta_0$. În acest caz, conform inegalității (5), avem

$$\|\tau-x_{n+1}\| \leqslant (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\eta_0\cdot 2^{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha^2}}\left[\frac{\rho\cdot 2^{\frac{1-\alpha}{\alpha^2}}}{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\right]^{(1+\alpha)^{n+1}}.$$

Din ultima inegalitate rezultă că dacă

$$\rho \leqslant \frac{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{1-\alpha}{\alpha^2}}},$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \tau$, ceea ce este tocmai afirmația teoremei.

Observație. Raza sferei S_1^* este mai mică decît raza sferei S^*, deoarece este ușor de demonstrat că $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot 2^{\frac{\alpha-1}{\alpha^2}} \leqslant 2$.

TEOREMA 3. *Dacă operația $P(x)$ satisface condițiile*

1° *Există un punct $x_0 \in X$ pentru care operația $P'(x_0)$ are un invers* $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$;

2° *Se cunoaște evaluarea în normă a lui $\Gamma_0\,P\,(x_0)$, adică*

$$\|\Gamma_0\,P\,(x_0)\| \leqslant \eta_0;$$

3° *Derivata în sens Fréchet a operației $P\,(x)$ satisface condiția* :

$$\|\Gamma_n\,P'(x') - \Gamma_n P'(x'')\| \leqslant K\|\,x'-x''\,\|^{\alpha}$$

pentru orice x_n, x' și x'' din sfera $\overline{S}$ definită de inegalitatea

$$\|x-x_0\| < \left[\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\eta_0$$

din spațiul X;

4° *Numerele* K *și* η_0 *satisfac condiția*

$$\overline{h}_0 = K\,\eta_0^{\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Atunci ecuația (1) are o singură soluție x^* *în sfera* $\overline{S}$ *și ea este limita șirului* (2).

Demonstrație. În lucrarea [3] s-a demonstrat că, dacă condițiile teoremei 3 sînt satisfăcute, în locul sferei $\overline{S}$ luînd sfera $\overline{S}_1$ definită de inegalitatea

$$\|x-x_0\| \leqslant \frac{1+\alpha}{\alpha} \cdot \eta_0,$$

atunci ecuația (1) are o soluție în sfera $\overline{S}_1$ la care converge șirul (2). Se demonstrează ușor că

$$\frac{1+\alpha}{\alpha} \leqslant \left[\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

deci că raza sferei $\overline{S}$ este mai mare decît raza sferei $\overline{S}_1$, de unde rezultă că șirul (2) converge către o soluție x^* a ecuației (1) care se află în $\overline{S}$. Deci pentru a demonstra teorema 3 trebuie să demonstrăm că x^* este unica soluție a ecuației (1) în sfera $\overline{S}$.

Fie τ o soluție oarecare a ecuației (1) din sfera $\overline{S}$ și fie apoi $\{x_n\}$ șirul (2). Formula (3) aplicată la operația auxiliară

$$F_n(x) = x - \Gamma_n P(x)$$

ne conduce la inegalitatea

$$\|\tau - x_{n+1}\| \leqslant \frac{\alpha(1+\alpha)^{-2}}{\eta_0^{\alpha}} \|\tau - x_n\|^{1+\alpha},$$

de unde, dacă punem $\|\tau - x_0\| \leqslant \rho \cdot \eta_0$, obținem

$$\|\tau - x_{n+1}\| \leqslant \left[\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \eta_0 \left[(1+\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}} \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \rho\right]^{(1+\alpha)^{n+1}}.$$

Din ultima inegalitate rezultă că dacă

$$\rho < \left[\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \tau = x^*$. Deci ecuația (1) în sfera $\overline{S}$ are o singură soluție x^* și teorema este demonstrată.

TEOREMA 4. ***Fie îndeplinite condițiile 1° și 2° ale teoremei 2, condițiile 3° și 4° fiind înlocuite cu următoarele:***

3°'' ***Derivata în sens Fréchet a operației*** $P(x)$ ***satisface condiția:***

$$\|\Gamma_n P'(x') - \Gamma_n P'(x'')\| \leqslant K \cdot \|x' - x''\|^{\alpha}$$

pentru orice x_n, x' *și* x'' *din sfera* $\bar{S}^*$ *definită de inegalitatea*

$$\|x - x_0\| < [2\ (1 + \alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} \eta_0$$

din spațiul X;

4°″ *Numerele* K *și* η_* *satisfac condiția*

$$\bar{h}_0 = K\ \eta_0^{\alpha} \leqslant \frac{1}{2}\cdot$$

Atunci ecuația (*1*) *are o singură soluție* x^* *în sfera* $\bar{S}^*$ *și* x^* *este limita șirului* (*2*).

În demonstrația teoremei ne folosim în esență de același raționament ca și în cazul teoremelor precedente. Luăm în considerare că ecuaţia (1) în condițiile puse are soluție în sfera $\bar{S}^*$, la care tinde șirul (2) , deoarece raza sferei $\bar{S}_1^*$ în care ecuaţia (1) are soluție ([3]) este mai mică decît raza sferei $\bar{S}$.

Primită la redacție la 19 noiembrie 1966

Institutul pedagogic
Baia-Mare

BIBLIOGRAFIE

1. Л. В. Канторович, *О методе Ньютона.* **Труды** Мат. Инс-та В. А. Стеклова, **28**, 104—144 (1949).
3. В. А. Вертхейм, *Об условиях применения метода Ньютона.* ДАН СССР, **110**, *5*, 719—722 (1956).
3. B. Jankó, I. Coroian, M. Balázs, *Asupra metodei lui Newton — Kantorovici pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare.* Analele Univ. din Timişoara (sub tipar).
4. J. Fenyö, *Über die Lösung der im banachschen Raume definierten nichtlinearen Gleichungen.* Acta Math. Hungarica, **5**, *1—2*, 85—93 (1954).

INFRAPOLINOAME ȘI LEGĂTURA LOR CU DERIVATA UNUI POLINOM

DE

I. MARUȘCIAC
(Cluj)

Fie $P(z)$ un polinom cu toate rădăcinile sale pe mulțimea compactă K din planul complex. Se demonstrează (teorema 2) că derivata $P'(z)$ sau este un infrapolinom pe K, sau admite un divizor care este un infrapolinom pe K. De asemenea se arată în ce condiții are loc și proprietatea inversă. Astfel se arată (teorema 3) că în anumite condiții un infrapolinom pe K coincide cu derivata unui polinom cu toate rădăcinile pe mulțimea K. Ca o aplicație a teoremei 2 se demonstrează cunoscuta teoremă a lui Lucas — Gauss referitoare la punctele critice ale unui polinom.

1. Fie K o mulțime compactă din planul complex, iar $\mathfrak{P}_n(\alpha)$ mulțimea polinoamelor de gradul n

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots. + a_n \tag{1}$$

ai căror coeficienți verifică relația

$$L(P, \alpha) = a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n = 1, \tag{2}$$

unde $\alpha_0, \alpha_1 \ldots, \alpha_n$ sînt numere complexe date. Polinomul $P(z)$ se numește un *infrapolinom pe* K dacă nu există nici un polinom $Q(z) \in \mathfrak{P}_n(\alpha)$ care verifică relațiile

I $\qquad Q(z) = 0$, dacă $P(z) = 0$, $z \in K$;

II $\qquad |Q(z)| < |P(z)|$, dacă $P(z) \neq 0$, $z \in K$.

Mulțimea infrapolinoamelor pe K se va nota cu $\mathcal{J}_n(K, \alpha)$.

2. În prezenta Notă vom arăta legătura care există între infrapolinoamele definite pe mulțimea K și derivatele polinoamelor cu toate rădăcinile pe mulțimea K (teoremele 2 și 3), legătura care a fost stabilită

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 515–521, BUCUREȘTI, 1967

într-un caz particular, pentru aşa-numitele polinoame extremale, de V. Neumann [4] şi pentru polinoame Cebîşev de către T. S. Motzkin şi J. L. Walsh [5].

3. Să presupunem că numerele $\alpha_0, \alpha_1 \ldots, \alpha_n$ care figurează în (2) sînt în aşa fel încît oricare ar fi un sistem de $n+1$ puncte distincte $z_0, z_1, \ldots, z_n$ din K,

$$D(\alpha; z_0, z_1, \ldots, z_n) = \begin{vmatrix} \alpha_n & 1 & 1 \ldots 1 \\ \alpha_{n-1} & z_0 & z_1 \ldots z_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \alpha_0 & z_0^n & z_1^n \ldots z_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

În lucrarea [3] am demonstrat următorul rezultat:

TEOREMA 1. *Fie* $P(z) \in \mathfrak{P}_n(\alpha)$ *şi* $P(z) \neq 0$, $z \in M = \{z_k\}_0^n$. *Pentru ca* $P(z) \in \mathfrak{I}_n(M, \alpha)$, *este necesar şi suficient ca* $P(z)$ *să se poată exprima sub forma*

$$(3) \qquad P(z) = \omega(z) \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{L^k(z-z_k)},$$

unde

$$\omega(z) = (z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_n),$$

$$(4) \qquad L^j = L\left(\frac{\omega(z)}{z-z_j}, \alpha\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k \sigma_k (z_0, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n),$$

$\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *fiind funcţia simetrică elementară de ordinul* k *a numerelor* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *iar* $\lambda_k > 0$ *cu* $\Sigma \lambda_k = 1$.

În cazul cînd $\alpha_0 = \frac{1}{p}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, adică considerăm polinoamele de forma

$$(5) \qquad P(z) = p\, z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

teorema de mai sus se poate enunţa astfel

TEOREMA 1'. *Pentru ca un polinom* $P(z)$ *de forma* (5), *care nu se anulează pe mulţimea* $M = \{z_k\}_0^n$, *să fie un infrapolinom pe* M, *este necesar şi suficient ca acesta să se poată exprima sub forma*

$$(3') \qquad P(z) = p\, \omega(z) \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{z-z_k}, \lambda_k > 0, \quad \Sigma \lambda_k = 1.$$

Într-adevăr, în acest caz

$$L^j = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k \sigma_k (z_0, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n) = \frac{1}{p}$$

şi din (3) rezultă (3').

TEOREMA 2. *Fie* $P(z) = z^n + a_1 z^{n+1} + \ldots + a_n$ *un polinom cu toate rădăcinile sale pe mulţimea compactă* K. *Atunci derivata* $P'(z)$ *sau este un infrapolinom pe* K *de gradul* $n-1$ *cu primul coeficient fixat egal cu* n, *sau are un divizor de gradul $m-1$ care este un infrapolinom pe K cu primul coeficient egal cu n, unde m este numărul rădăcinilor distincte ale lui $P(z)$.*

a) Presupunem mai întîi că $P(z)$ are toate rădăcinile simple

$$P(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$$

şi fie $M=\{z_k\}_0^n$. Atunci derivînd logaritmic polinomul $P(z)$ obţinem

$$P'(z)=P(z)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k}=nP(z)\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{z-z_k},$$

unde

$$\lambda_k=\frac{1}{n} \quad \text{şi} \quad \Sigma\lambda_k=1.$$

Din teorema 1 rezultă că $P'(z)$ este un infrapolinom pe M cu primul coeficient egal cu n. Deoarece însă un infrapolinom pe M este totdeauna şi un infrapolinom pe orice mulţime compactă $A\supset M$, rezultă în particular că $P'(z)$ este un infrapolinom pe K.

b) Presupunem acum că $P(z)$ are rădăcini multiple, adică

$$P(z)=(z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\ldots(z-z_m)^{\alpha_m},$$

unde

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_m=n.$$

Derivînd şi acum logaritmic polinomul $P(z)$, avem

$$P'(z)=P(z)\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{z-z_k}.$$

Fie $\alpha_{k_i}>1$, $i=1,2,\ldots,r$ $(r\leqslant m)$. Atunci putem scrie

$$\frac{P'(z)}{(z-z_{k_1})^{\alpha_{k_1}-1}(z-z_{k_2})^{\alpha_{k_2}-1}\ldots(z-z_{k_r})^{\alpha_{k_r}-1}}=n(z-z_1)\ldots(z-z_m)\sum_{k=1}^{m}\frac{\frac{\alpha_k}{n}}{z-z_k}.$$

Notînd

$$Q(z)=\frac{P'(z)}{R(z)}, \tag{6}$$

unde

$$R(z)=\prod_{i=1}^{r}(z-z_{k_i})^{\alpha_{k_i}-1},$$

avem

$$Q(z)=n\omega(z)\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{z-z_k},\quad \omega(z)=\sum_{k=1}^{m}(z-z_k),\ \lambda_k=\frac{\alpha_k}{n}>0 \quad \text{şi} \quad \Sigma\lambda_k=1.$$

Pe baza teoremei 1′, rezultă că $Q(z)$ este un infrapolinom de gradul $m-1$ pe mulţimea $M=\{z_k\}_1^m$, deci şi pe K, cu primul coeficient egal cu n. Astfel teorema este demonstrată.

Din (6) se observă că $P'(z)$ se exprimă ca un produs de două polinoame — un infrapolinom cu primul coeficient egal cu n şi un polinom cu toate rădăcinile pe mulţimea K.

În anumite cazuri are loc şi o teoremă inversă. Astfel, fie $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ un infrapolinom pe K şi $P(z) \neq 0$, $z \in K$. Atunci pe baza unui rezultat al lui Fekete [1], există m ($n + 1 \leqslant m \leqslant 2n + 1$) puncte $\{z_k\}$ din K şi m numere pozitive λ_k cu $\Sigma\lambda_k = 1$, aşa încît $P(z)$ este un divizor al lui

$$R(z) = \omega(z) \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{z-z_k}, \quad \omega(z) = \prod_{k=1}^{m} (z-z_k). \tag{7}$$

TEOREMA 3. *Dacă* $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ *este un infrapolinom pe* K *şi care nu se anulează pe* K *şi dacă toate numerele* λ_k *din expresia* (7) *sînt raţionale, atunci există un polinom* $Q(z)$ *cu toate rădăcinile pe* K *aşa încît* $Q'(z)$ *sau coincide cu* $P(z)$, *sau admite ca divizor pe* $P(z)$.

Într-adevăr, dacă $P(z)$ este un infrapolinom care nu se anulează pe K, atunci are loc (7).

a) Dacă $\lambda_k = \frac{1}{m}$, $k = 1,2,\ldots, m$ şi $m = n + 1$, atunci rezultă că $P(z) = Q'(z)$, unde

$$Q(z) = \frac{1}{n+1}\, \omega(z),$$

căci, pe de o parte, din teorema 1′ rezultă că $P(z) = R(z)$, iar pe de altă parte

$$Q'(z) = \frac{1}{n+1}\, \omega(z) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{z-z_k} = R(z).$$

b) Dacă toate numerele λ_k, $k = 1,2,\ldots, m$, sînt numere raţionale, atunci rezultă că se pot găsi numere naturale α_k şi β aşa încît $\lambda_k = \frac{\alpha_k}{\beta}$ şi

$$\Sigma\, \alpha_k = \beta\, .$$

Atunci polinomul $R(z)$ din (7) se poate scrie sub forma

$$R(z) = \frac{1}{\beta}\, \omega(z) \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{z-z_k}. \tag{8}$$

Fie din nou $\alpha_{k_i} > 1$, $i = 1,2,\ldots, r$ ($r \leqslant m$). Atunci evident

$$\beta R(z) \prod_{i=1}^{r} (z-z_{k_i})^{\alpha_{k_i}-1} = Q'(z), \tag{9}$$

unde

$$Q(z) = (z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2} \ldots (z-z_m)^{\alpha_m}.$$

Din (9), întrucît polinomul $P(z)$ este un divizor al lui $R(z)$, rezultă că $P(z)$ este şi un divizor al lui $Q'(z)$ şi teorema este demonstrată.

Observaţie. Dacă printre numerele λ_k care figurează în expresia (7) există şi iraţionale, atunci, în general, $P(z)$ nu va fi un divizor al derivatei unui polinom cu toate rădăcinile pe mulţimea K, ceea ce arată că mulţimea infrapolinoamelor pe K este mai largă decît mulţimea derivatelor polinoamelor şi a divizorilor acestora, avînd toate rădăcinile pe mulţimea K.

Să presupunem acum că polinomul $P(z)$ are toate rădăcinile simple, adică

$$P(z) = \omega(z) = (z-z_0)(z-z_1)\dots(z-z_n).$$

Atunci rezultă că polinomul $\dfrac{P'(z)}{n+1}$ este un infrapolinom cu primul coeficient egal cu 1 pe mulţimea $M = \{z_k\}_1^n$. Se verifică însă uşor că un infrapolinom $I(z)$ de gradul n care nu se anulează pe K este totodată şi un polinom de abatere minimă de la zero pe mulţimea K în metrica ponderată

$$\| Q(z) \| = \max_{z\in K} [\mu(z) \mid Q(z) \mid], \quad \mu(z) = \frac{1}{|I(z)|}. \tag{10}$$

Pentru $K = M$ şi şi $I(z) = \dfrac{\omega'(z)}{n+1}$, rezultă atunci că polinomul

$$T(z) = \frac{\omega'(z)}{n+1}$$

este un polinom de abatere minimă de la zero pe M în metrica ponderată (10), unde

$$\mu(z) = \frac{n+1}{|\,\omega'(z)\,|}.$$

Aceasta este rezultatul lui T. S. Motzkin şi J. L. Walsh din [5].

Dacă ponderea $\mu(z)$ este constantă pe M, adică

$$|\,\omega'(z_k)\,| = \rho, \qquad k = 0, 1, \dots, n,$$

atunci rezultă că polinomul $T(z) = \dfrac{\omega'(z)}{n+1}$ este un polinom de abatere minimă pe M în metrica uniformă.

Dăm mai jos două exemple de polinoame $\omega(z)$ care au această proprietate.

Exemplul 1. Fie

$$\omega(z_k) = z^{n+1} - 1;$$

atunci

$$M = \{z_k\}_0^n, \text{ unde } z_k = e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}, \; k = 0, 1, \dots, n,$$

iar

$$\omega'(z) = (n+1)\,z^n \text{ şi } |\,\omega'(z_k)\,| = n+1, \; k = 0,1,\dots, n,$$

deci

$$T(z) = \frac{\omega(z)}{n+1}$$

este polinomul lui Cebîşev pe mulţimea M.

Exemplul 2. Fie

$$\omega(z) = (z^n - \alpha)(z^n - \overline{\alpha}),$$

unde $\alpha \neq 0$. Atunci

$$M = \{z_k\}_0^{n-1} \cup \{z'_k\}_0^{n-1},$$

unde

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{2k\pi+\theta}{n} i}, \quad z'_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{2k\pi-\theta}{n} i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

iar

$$\omega'(z) = 2nz^{n-1}(z^n - a), \text{ unde } a = R(\alpha).$$

Întrucît

$$|\omega'(z_k)| = 2n \rho^{\frac{n-1}{n}} |\alpha - a|, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$|\omega'(z'_k)| = 2n \rho^{\frac{n-1}{n}} |\overline{\alpha} - a|, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

şi

$$|\overline{\alpha} - a| = |\alpha - a|,$$

rezultă că polinomul

$$T(z) = \frac{\omega(z)}{2n}$$

este polinomul lui Cebîşev de gradul $2n-1$ ataşat mulţimii M.

Se ştie că există o mare analogie între distribuţia rădăcinilor infrapolinoamelor şi a derivatei polinoamelor cu toate rădăcinile pe mulţimea K. Teoremele 2 şi 3 arată că această analogie nu este întîmplătoare, ci este legată de proprietăţile extremale pe care le are derivata unui polinom faţă de rădăcinile polinomului.

Aceste două teoreme se pot folosi pentru deducerea diverselor proprietăţi ale derivatei unui polinom din proprietăţile infrapolinoamelor, sau invers, proprietăţi ale infrapolinoamelor din proprietăţile derivatei unui polinom. Astfel, din cunoscuta teoremă a lui Fejér, relativă la distribuţia zerourilor infrapolinoamelor şi din teorema 2 rezultă imediat clasica teoremă a lui Lucas-Gauss.

TEOREMA 4. ((Lucas-Gauss). *Punctele critice ale unui polinom sînt situate în învelitoarea convexă închisă a zerourilor acestuia.*

Într-adevăr, dacă

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n),$$

atunci din teorema 2 rezultă că polinomul $P'(z)$ este un infrapolinom pe $\{z_k\}_1^n$ cu primul coeficient egal cu n şi, prin urmare, conform teoremei lui

Fejér, are toate rădăcinile sale situate în învelitoarea convexă închisă a mulţimii $\{z_k\}_1^n$.

Dacă

$$P(z) = (z - z_1)^{\alpha_1}(z - z_2)^{\alpha_2} \ldots (z - z_m)^{\alpha_m},$$

ţinînd seamă de relaţia (6) şi de teorema 2, rezultă din nou că toate rădăcinile lui $P'(z)$ sînt situate în învelitoarea convexă închisă a mulţimii rădăcinilor polinomului $P(z)$ şi astfel teorema este demonstrată.

Primită la redacţie la 9 august 1966

Academia Republicii Socialiste România
Institutul de calcul Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. M. Fekete, *On the structure of extremal polynomials*. Proc. Nat. Acad. of Sci. USA, **37**, *2*, 95—103 (1951).
2. L. Fejér, *Über die Lage der Nullstellen von Polynomen die aus Minimum forderungen gewiser Art entspringen*. Mathem. Ann., **85**, 41—48 (1922).
3. I. Maruşciac, *Proprietăţi de structură a unor infrapolinoame condiţionate*. Studia Univ. Babeş-Bolyai Cluj, *1*, 13—27 (1966).
4. V. Neumann, *Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome*, Opere, vol. 1, pp. 10—24.
5. T. S. Motzkin, J. L. Walsh, *On the derivative of a polynomial and Chebyshev approximation*. Proc. Amer. Math. Soc., **4**, *1*, 76—87 (1953).

ASUPRA DETERMINĂRII PUNCTELOR DE INFLEXIUNE ÎN CAZUL UNOR CURBE REMARCABILE

DE

ELENA MURGULESCU

În lucrare se dă o metodă simplă pentru determinarea punctelor de inflexiune cu ajutorul metodelor teoriei funcţiilor de variabilă complexă în cazul unor curbe plane remarcabile care intervin în aplicaţii ale mecanicei fluidelor şi ale teoriei elasticităţii.

Ca aplicaţii se tratează cazul transformărilor care conduc la epitrohoide sau hipotrohoide.

1. În numeroase aplicaţii ale mecanicii fluidelor şi ale elasticităţii intervine studiul unor curbe remarcabile utilizîndu-se metode ale teoriei funcţiilor de variabilă complexă. În prezenta lucrare ne propunem să dăm o metodă simplă pentru determinarea punctelor de inflexiune ale unor astfel de curbe.

2. Fie

$$z = x + iy = z(Z) \tag{1}$$

o funcţie de variabilă complexă $Z = X + iY$, care realizează reprezentarea conformă a unui domeniu simplu conex (D) pe domeniul simplu conex (d).

Fie $Z = Z(t) = X(t) + iY(t)$, $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, reprezentarea parametrică a unei curbe (Γ) din domeniul (D). Fie curba (γ) $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ imaginea curbei (Γ) în planul $z = x + iy$. Condiţia care determină punctele de inflexiune ale curbei (γ) este

$$x'y'' - y'x'' = 0, \quad x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0, \tag{2}$$

unde x', x'', y', y'' sînt respectiv derivatele de ordinul întîi şi doi ale lui $x(t)$, $y(t)$.

Condiţia (2) poate fi scrisă sub forma complexă în felul următor

$$\operatorname{Im}\{(x' - iy')(x'' + iy'')\} = 0 \tag{3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 523–529, BUCUREŞTI, 1967

adică

$$\text{Im}\{\overline{z}'_t z''_{t^2}\} = 0, \quad |z'_t| \neq 0 \tag{3'}$$

unde

$$z'_t = x'_t + iy'_t,\ z''_{t^2} = x''_{t^2} + iy''_{t^2} \ \text{ iar } \ \overline{z} = x - iy,\ \overline{z}'_t = x'_t - iy'_t.$$

Ținînd seama de (1), putem să scriem

$$z'_t = z'(Z)\,Z'_t,\ z''_{t^2} = z''(Z)\,Z'_{t^2} + z'(Z)\,Z''_{t^2},\ \overline{z}'_t = \overline{z}'(Z)\,\overline{Z}'_t.$$

Prin urmare condiția (3′) este

$$|z'_t|^2\,\text{Im}\{\overline{z}'(Z)z''(Z)Z'_t\} + |z'(Z)|^2\,\text{Im}\{\overline{Z}'_t Z''_{t^2}\} = 0, \tag{4}$$

unde $|z'(Z)Z'_t| \neq 0$.

De cele mai dese ori curba (γ) apare ca imagine a unei circumferințe din planul Z cu centrul în origine, de rază r, relația $z = z(Z)$ asigurînd reprezentarea conformă a interiorului sau a exteriorului acestei circumferințe pe interiorul sau exteriorul curbei (γ). În aceste împrejurări avem

$$Z(t) = r\,e^{it} = r(\cos t + i \sin t),\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi). \tag{5}$$

Deci

$$\begin{aligned} x &= x(r\cos t,\ r\sin t) = x(t) \\ y &= y(r\cos t,\ r\sin t) = y(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Se constată imediat că

$$\overline{Z} = \frac{r^2}{Z},\ Z'_t = iZ \neq 0,\ \overline{Z}'_t = -\frac{ir^2}{Z},\ Z''_{t^2} = -Z. \tag{7}$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} z'_t &= iZ\,z'(Z) \\ z''_{t^2} &= -Z\,[Zz''(Z) + z'(Z)]. \end{aligned} \tag{8}$$

Condiția (4) devine

$$|z'(Z)|^2 + \text{Re}\{Z\overline{z}'(Z)z''(Z)\} = 0,\ |z'(Z)| \neq 0. \tag{9}$$

În relația precedentă se va putea înlocui $\overline{z}'(Z)$ prin $z'\left(\dfrac{r^2}{Z}\right)$ care este o funcție monogenă de Z. De asemenea pentru calcule va fi comod de a utiliza relația

$$|z'(Z)|^2 = z'(Z)\,\overline{z}'(Z) = z'(Z)\,\overline{z}'\left(\frac{r^2}{\overline{Z}}\right). \tag{10}$$

În mod analog vom utiliza relația

$$\begin{aligned} \text{Re}\{Z\,\overline{z}'(Z)z''(Z)\} &= \frac{1}{2}\{Z\,\overline{z}'(Z)z''(Z) + \overline{Z}\,z'(Z)\,\overline{z}''(Z)\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{Z\,\overline{z}'\left(\frac{r^2}{\overline{Z}}\right)z''(Z) + \frac{r^2}{Z}z'(Z)\,\overline{z}''\left(\frac{r^2}{\overline{Z}}\right)\right. \end{aligned} \tag{11}$$

Prin urmare condițiile care determină punctele de inflexiune sînt

$$(12)\qquad \begin{cases} 2z'(Z)\,\overline{z}'\left(\dfrac{r^2}{\overline{Z}}\right) + \left\{Z\,\overline{z}'\left(\dfrac{r^2}{\overline{Z}}\right)z''(Z) + \dfrac{r^2}{Z}\,z'(Z)\,\overline{z}''\left(\dfrac{r^2}{\overline{Z}}\right)\right\} = 0 \\ |\,Z\,| = r,\ |\,z'(Z)\,| \neq 0\,. \end{cases}$$

Se observă că dacă Z este o soluție a ecuației (12), atunci și $Z_1 = \dfrac{r^2}{\overline{Z}}$ este o soluție a acestei ecuații.

3. *Aplicații.* I. Vom considera cazul cînd

$$(13)\qquad z = \sum_{p=1}^{n} a_p Z^p\,.$$

În acest caz avem

$$\begin{cases} z'(Z) = \sum\limits_{p=1}^{n} p a_p Z^{p-1} \\ \overline{z}'\left(\dfrac{r^2}{\overline{Z}}\right) = \sum\limits_{q=1}^{n} q\,\overline{a}_q \dfrac{r}{Z^{q-1}} \end{cases}$$

$$z''(Z) = \sum_{p=1}^{n} p\,(p-1)\,a_p\,Z^{p-2}$$

$$\overline{z}''\left(\frac{r^2}{\overline{Z}}\right) = \sum_{q=1}^{n} q\,(q-1)\,\overline{a}_q\,\frac{r^{2q-4}}{Z^{q-2}}\,.$$

Înlocuind în (12) obținem ecuația

$$(14)\qquad \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} pq\,(p+q)\,a_p\,\overline{a}_q\,r^{2q-2}Z^{p-q} = 0\,.$$

Ecuația (14) poate fi transcrisă sub forma

$$(15)\qquad A_0 + \sum_{t=1}^{n-1} A_t Z^t + \sum_{t=1}^{n-1} B_t Z^{-t} = 0\,,$$

unde

$$(16)\qquad \begin{cases} A_t = \sum\limits_{j=1+t}^{n} j\,(j-t)\,(2j-t)\,r^{2j-2t-2}\,a_j\,a_{j-t}\,, \\ B_t = \sum\limits_{j=1}^{n-t} j\,(j+t)\,(2j+t)\,r^{2j+2t-2}\,a_j\,\overline{a}_{j+t}\,, \quad (t = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \end{cases}$$

Se verifică relațiile

$$(17)\qquad \begin{cases} \overline{A}_t\,r^{2t} = B_t \\ \overline{B}_t\,r^{-2t} = A_t \end{cases}$$

care ne asigură și direct că dacă Z este o soluție, atunci și $Z_1 = \dfrac{r^2}{\overline{Z}}$ este o soluție a ecuației (15).

Prin urmare forma finală a ecuației (15) este

$$A_0 + \sum_{l=1}^{n-1} A_l Z^l + \sum_{l=1}^{n-1} \bar{A}_l \frac{r^2}{Z^l} = 0 . \tag{18}$$

În cazul în care toți coeficienții a_p sînt reali, regăsim cazul clasic al ecuațiilor reciproce. Rezolvarea ecuației (18) care este de gradul $2n-2$ se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul $n-1$ prin substituția

$$Z + \frac{r^2}{Z} = \zeta . \tag{19}$$

Pe de altă parte, trebuind să ne limităm la soluțiile ecuației (18) pentru care $|Z| = r$, vom putea scrie

$$Z = r\,e^{i\sigma}, \quad \zeta = 2r\cos\sigma$$

prin urmare ne putem limita la găsirea soluțiilor ecuației în ζ care sînt reale și cuprinse între $(-2r, +2r)$.

Exemplu. Să luăm transformarea [1], [2]

$$z = a(Z + mZ^n) , \quad a > 0 , \tag{20}$$

unde m este o constantă astfel că $0 \leqslant m \leqslant \frac{1}{nr^{n-1}}$ iar n un întreg mai mare ca 1.

Prin transformarea (20) aplicată cercului $|Z| = r$ se pot obține curbe remarcabile. De exemplu pentru $n = 2$ avem melcul lui Pascal, iar pentru $n > 2$ avem o epitrochoidă.

Avem

$$z'(Z) = a(1 + mnZ^{n-1})$$

$$\bar{z}'\left(\frac{r^2}{\bar{Z}}\right) = a\left(1 + mn\frac{r^{2n-2}}{Z^{n-1}}\right)$$

$$z''(Z) = amn(n-1)Z^{n-2}$$

$$\bar{z}''\left(\frac{r^2}{\bar{Z}}\right) = amn(n-1)\frac{r^{2n-4}}{Z^{n-2}}$$

iar ecuația (18) este

$$Z^{n-1} + \frac{r^{2n-2}}{Z^{n-1}} = -\frac{2(1 + m^2n^3r^{2n-2})}{mn(n+1)} . \tag{21}$$

Ca urmare a ipotezelor făcute asupra constantelor m și n, $z'(Z)$ nu se anulează în interiorul cercului $|Z| < r$.

Să punem

$$Z^{n-1} = T ; \tag{22}$$

sîntem astfel conduși la ecuația de gradul al II-lea :

$$T^2 + 2\,\frac{1 + m^2n^3r^{2n-2}}{mn(n+1)}\,T + r^{2n-2} = 0. \tag{23}$$

Dacă luăm $m = \frac{1}{2r}$, $n = 2$, avem cazul cardioidei și deci ecuația (23) devine

$$(T + r)^2 = 0 \; ; \tag{23'}$$

de aici rezultă că singura soluție ar fi

$$Z = -r$$

or în cazul de față ea nu îndeplinește condiția $z'(Z) \neq 0$. Rezultă că cardioida nu are puncte de inflexiune.

Dacă luăm cazul

$$z = Z - \frac{1}{10} Z^5, \; r = 1 \, , \tag{24}$$

ecuația (22) se reduce la

$$Z^4 = T$$

iar ecuația (23) devine

$$T^2 - \frac{3}{2} T + 1 = 0$$

care admite rădăcinile

$$T = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{4}$$

de modul egal cu 1. La fiecare dintre ele corespund patru valori pentru Z, de modu legal cu 1.

Rezultă deci că curba (24) are opt puncte de inflexiune, două cîte două simetrice față de axa Ox.

II. Să considerăm cazul transformărilor conforme date de

$$z = Z + \sum_{p=1}^{n} \frac{a_p}{Z^p} \tag{25}$$

care intervin frecvent în aerodinamică.

În acest caz avem

$$\begin{aligned}
z'(Z) &= 1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{p a_p}{Z^{p+1}} \\
\overline{z}'\left(\frac{r^2}{\overline{Z}}\right) &= 1 - \sum_{q=1}^{n} \frac{q \overline{a}_q}{r^{2q+2}} Z^{q+1} \\
z''(Z) &= \sum_{p=1}^{n} \frac{p(p+1) a_p}{Z^{p+2}} \\
z''\left(\frac{r^2}{\overline{Z}}\right) &= \sum_{q=1}^{n} \frac{q(g+1) \overline{a}_q}{r^{2p+4}} Z^{p+2}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Înlocuind în ecuaţia (12) avem

$$(27)\qquad 2+\sum_{p=1}^{n}\frac{p(p-1)}{Z^{p+1}}a_p+\sum_{p=1}^{n}\frac{p(p-1)\bar{a}_p}{r^{2p+2}}Z^{p+1}-$$
$$-\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{pq(p+q)a_p\bar{a}_q}{r^{2q+2}}Z^{q-p}=0\,.$$

Ultimul termen al acestei ecuaţii poate fi scris sub altă formă, grupînd după puterile lui Z.

Avem

$$(28)\qquad \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{pq(p+q)\,a_p\bar{a}_q}{r^{2q+2}}Z^{q-p}=\sum_{t=0}^{n-1}A'_tZ^t+\sum_{t=1}^{n-1}B'_tZ^{-t}\,,$$

unde

$$(29)\qquad \begin{aligned} A'_t&=\sum_{p=1}^{n}\frac{p\,(p+t)\,(2p+t)}{r^{2p+2t+2}}\,a_p\,\bar{a}_{p+t}\,, &&(t=0,1,\ldots,n-1)\\ B'_t&=\sum_{p=1+t}^{n}\frac{p\,(p-t)\,(2p-t)}{r^{2p-2t-2}}\,a_p\,\bar{a}_{p-t}\,, &&(t=1,2,\ldots,n-1)\end{aligned}$$

În definitiv punînd

$$A_0=2-A'_0=2\left(1-\sum_{p=1}^{n}\frac{p^3}{r^{2p+2}}\,a_p\,\bar{a}_p\right)$$

$$(30)\qquad A_t=\begin{cases}-A'_t+\dfrac{(t-1)\,(t-2)}{r^{2t}}\,\bar{a}_{t-1}\,, & (t=1,2,\ldots,n-1)\\[2ex] \dfrac{(t-1)\,(t-2)}{r^{2t}}\,\bar{a}_{t-1}\,, & (t=n,\ n+1)\end{cases}$$

$$B_t=\begin{cases}-B'_t+(t-1)\,(t-2)\,a_{t-1}\,, & (t=1,2,\ldots,n-1)\\ (t-1)\,(t-2)\,a_{t-1}\,, & (t=n,\ n+1)\,,\end{cases}$$

ecuaţia (27) devine

$$(31)\qquad A_0+\sum_{t=1}^{n+1}A_tZ^t+\sum_{t=1}^{n+1}B_tZ^{-t}=0\,.$$

Se verifică iarăşi că avem

$$\bar{A}_t\,r^{2t}=B_t\,,\quad \bar{B}_t\,r^{-2t}=A_t$$

astfel că ecuaţia (31) se va mai scrie sub forma

$$(32)\qquad A_0+\sum_{t=1}^{n+1}A_tZ^t+\sum_{t=1}^{n+1}\bar{A}_t\frac{r^{2t}}{Z^t}=0\,.$$

Şi în acest caz dacă toţi coeficienţii a_p sînt reali, avem o ecuaţie reciprocă. Rezolvarea ecuaţiei (32) care este de gradul $2n+2$ se va reduce la rezolvarea unei ecuaţii de gradul $n+1$ cu ajutorul substituţiei (19).

Exemplu. Să considerăm transformarea [1], [2]

$$z = a\left(Z + \frac{m}{Z^n}\right), \quad a > 0, \tag{33}$$

în care m este o constantă astfel ca $0 < m < \frac{r^{n+1}}{n}$, iar n este un întreg mai mare ca 1. Cu ajutorul acestei transformări se pot obține curbe de tipul hipotrohoidelor.

Se observă că (33) se obține din (21) schimbînd pe n în $-n$, prin urmare ecuația care ne va da punctele de inflexiune va fi

$$Z^{n+1} + \frac{r^{2n+2}}{Z^{n+1}} = 2\,\frac{r^{2n+2} - m^2 n^3}{mn(n-1)}. \tag{34}$$

Notînd

$$Z^{n+1} = T, \tag{35}$$

avem de rezolvat ecuația de gradul al II-lea

$$T^2 + 2\,\frac{r^{2n+2} - m^2 n^3}{mn(n-1)}\,T + r^{2n+2} = 0. \tag{36}$$

Să presupunem $r = 1$ și să notăm $mn = k$, $(k > 0)$. Ecuația (36) devine

$$T^2 + 2\,\frac{1 - k^2 n}{k(n-1)}\,T + 1 = 0, \tag{37}$$

de unde

$$T = \frac{1}{k(n-1)}\left[k^2 n - 1 \pm \sqrt{(k^2 n^2 - 1)(k^2 - 1)}\right].$$

Trinomul de sub radical în k^2 se anulează pentru $k^2 = \frac{1}{n^2}$ și $k^2 = 1$. Cum $k > 0$, rezultă că T este imaginar pentru $\frac{1}{n} < k < 1$.

În acest caz $|T| = 1$, deci ecuația (34) admite $2n + 2$ soluții pentru care $|Z| = 1$, deci avem $2n + 2$ puncte de inflexiune.

Dacă $k < \frac{1}{n}$, rădăcinile ecuației (37) sînt reale și nu ne poate interesa decît dacă $T = \pm 1$. Se constată prin încercare directă că acest lucru nu are loc, deci nu avem puncte de inflexiune.

Primită la redacție la 2 decembrie 1966

Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. L. M. Milne-Thomson, *Plane Elastic Systems*. Springer Verlag, Berlin, 1960, p. 150–151.
2. N. I. Mushelișvili, *Cîteva probleme fundamentale ale teoriei matematice a elasticității*, vol. I, I.S.R.S., București, p. 242.

ASUPRA CONEXIUNILOR DIN SPAȚIUL FIBRAT TANGENT LA UN SPAȚIU FIBRAT PRINCIPAL

DE

VASILE OPROIU

(Iași)

Se arată că conexiunea $T(P)$ satisface unei scheme comutative și se dă o formulă pentru forma de curbură a acestei conexiuni.

Fiind dat un spațiu fibrat principal $P(M, \pi, G)$, unde M este o varietate diferențiabilă, π este proiecția iar G grupul structural, o conexiune în acest spațiu este dată printr-o distribuție numită orizontală în spațiul fibrat tangent $T(P)$. Spațiul fibrat $T(P)$ poate fi considerat ca un spațiu fibrat principal avînd varietatea bază $T(M)$, grupul structural $T(G)$ și proiecția π_*, unde π_* este diferențiala aplicației π. În (1) se arată construcția unei conexiuni $T(\Gamma)$, așa-numita conexiune tangentă în spațiul fibrat $T(P)$. Această conexiune satisface diagrama următoare:

$$\begin{tikzcd}
T^2(P) \arrow[r, "\alpha_P"] \arrow[d, "\mu_*"] & T^2(P) \arrow[d, "T(\mu)"'] \\
T(T(P)/G) \arrow[r, "\alpha_P^*"] & T^2(P)/T(G) \\
T^2(M) \arrow[r, "\alpha_M"] \arrow[u, "\Gamma_*"] & T^2(M) \arrow[u, "T(\Gamma)"]
\end{tikzcd}$$

unde α_P este automorfismul involutiv în $T^2(P)$, μ este proiecția naturală $\mu : T(P) \to T(P)/G$ iar Γ este conexiunea definită ca o secțiune în spațiul fibrat $T(P)/G$. Tot în (1) se arată că dacă $h : T(P) \to T(P)$ este aplicația care asociază fiecărui vector tangent la P partea sa orizontală, atunci avem pentru $T(\Gamma)$:

$$T(h) = \alpha_G \circ h_* \circ \alpha_P .$$

De asemenea forma de conexiune a lui $T(\Gamma)$ este:

$$T(\omega) = \alpha_G \circ \omega_* \circ \alpha_P .$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 531–535, BUCUREȘTI, 1967

PROPOZIȚIE. *Conexiunea* $T(\Gamma)$ *satisface următoarea diagramă comutativă :*

$$\begin{tikzcd}
T^2(P) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "T(\mu)"] & T(P) \arrow[d, "\mu"] \\
T^2(P)/T(G) \arrow[r, "\overline{p}_*"] & T(P)/G \\
T^2(M) \arrow[r, "p'_*"] \arrow[u, "T(\Gamma)"] & T(M) \arrow[u, "\Gamma"]
\end{tikzcd}$$

unde p_* *și* p'_* *sînt proiecțiile naturale în* $T(P)$ *și* $T(M)$ *iar* $\overline{p}_*$ *este aplicația indusă în mod natural de proiecția* $\overline{p} : T(T(P)/G) \to T(P)/G$ *adică :*

$$\overline{p} = \alpha_P^* \circ \overline{p}_* .$$

Demonstrație. Avem schema :

$$\begin{tikzcd}
T^2(P) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\mu_*"] & T(P) \arrow[d, "\mu"] \\
T(T(P)/G) \arrow[r, "\overline{p}"] & T(P)/G \\
T^2(M) \arrow[r, "p'_1"] \arrow[u, "\Gamma_*"] & T(M) \arrow[u, "\Gamma"]
\end{tikzcd}$$

care este comutativă în virtutea definiției diferențialei unei aplicații între varietăți diferențiabile. Descompunem această schemă astfel :

$$\begin{tikzcd}
T^2(P) \arrow[r, "\alpha_P"] \arrow[d, "\mu_*"] & T^2(P) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "T(\mu)"] & T(P) \arrow[d, "\mu"] \\
T(T(P)/G) \arrow[r, "\alpha_P^*"] & T^2(P)/T(G) \arrow[r, "\overline{p}_*"] & T(P)/G \\
T^2(M) \arrow[r, "\alpha_M"] \arrow[u, "\Gamma_*"] & T^2(M) \arrow[r, "p'_*"] \arrow[u, "T(\Gamma)"] & T(M) \arrow[u, "\Gamma"]
\end{tikzcd}$$

Pătratele din partea stîngă sînt comutative în virtutea definiției lui $T(\Gamma)$ și α_P. De aici avem :

$$\overline{p}_* \circ \alpha_P^* \circ \Gamma_* = \Gamma \circ p'_* \circ \alpha_M .$$

Aplicînd la dreapta α_M obținem :

$$\overline{p}_* \circ \alpha_P^* \circ \Gamma_* \circ \alpha_M = \Gamma \circ p'_* .$$

Deci

$$\overline{p}_* \circ T(\Gamma) = \Gamma \circ p'_* .$$

Analog se demonstrează comutativitatea celuilalt pătrat.

O interpretare pentru această diagramă este următoarea. Conexiunea $T(\Gamma)$ se proiectează prin p_* pe conexiunea Γ, adică spațiul orizontal al conexiunii $T(\Gamma)$ este dus prin p_* în spațiul orizontal al conexiunii Γ.

Din propoziţia de mai sus rezultă că putem construi şirul de conexiuni Γ, $T(\Gamma)$, $T^2(\Gamma)$, ... care satisfac diagrama :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, phantom] & T^3(P) \arrow[r, "p_*^2"] \arrow[d, "T^2(\mu)"] & T^2(P) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "T(\mu)"] & T(P) \arrow[d, "\mu"] \\
\cdots \arrow[r, phantom] & T^3(P)/T^2(G) \arrow[r, "\overline{p}_*^2"] & T^2(P)/T(G) \arrow[r, "\overline{p}_*"] & T(P)/G \\
\cdots \arrow[r, phantom] & T^3(M) \arrow[r, "p_*'^2"] \arrow[u, "T^2(\Gamma)"] & T^2(M) \arrow[r, "p_*'"] \arrow[u, "T(\Gamma)"] & T(M) \arrow[u, "\Gamma"]
\end{tikzcd}$$

În continuare vom da o formulă pentru forma de curbură a conexiunii $T(\Gamma)$. În mod obişnuit forma de curbură pentru o conexiune Γ este dată de formula :

$$\Omega(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = \mathrm{d}\omega(h\overline{u}_1, h\overline{u}_2), \qquad \overline{u}_1, \overline{u}_2 \in P_u .$$

Pentru conexiunea $T(\Gamma)$ vom avea :

$$T(\Omega)(\bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{u}}_2) = dT(\omega)(T(h)\bar{\bar{u}}_1, T(h)\bar{\bar{u}}_2), \qquad \bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{u}}_2 \in T(P)_{\overline{u}} .$$

Înlocuind pe $T(\omega)$ şi pe $T(h)$ prin expresiile lor obţinem :

$$T(\Omega)(\bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{u}}_2) = \mathrm{d}(\alpha_G \circ \omega_* \circ \alpha_P)(\alpha_P \circ h_* \circ \alpha_P \bar{\bar{u}}_1, \alpha_P \circ h_* \circ \alpha_P \bar{\bar{u}}_2) .$$

Se poate arăta uşor că d este intervertibilă cu α_G deoarece într-un sistem local de coordonate, d se referă la variabilele din $T(P)$ în timp ce α_G se referă la schimbarea ordinii în şirul de coordonate din $T(G)$. Deci :

$$T(\Omega)(\bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{u}}_2) = \alpha_G \circ \mathrm{d}(\omega_* \circ \alpha_P)(\alpha_P \circ h_* \circ \alpha_P \bar{\bar{u}}_1, \alpha_P \circ h_* \circ \alpha_P \bar{\bar{u}}_2) .$$

Vom arăta în lema ce urmează că $\mathrm{d}(\omega_* \circ \alpha_P) = (\mathrm{d}\omega)_* \circ \alpha_P$ şi în acelaşi timp vom clarifica ce se înţelege prin $(\mathrm{d}\omega)_*$. Presupunînd lema demonstrată avem :

$$\begin{aligned} T(\Omega)(\bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{u}}_2) &= \alpha_G \circ (\mathrm{d}\omega)_*(h_* \circ \alpha_P \bar{\bar{u}}_1, h_* \circ \alpha_P \bar{\bar{u}}_2) \\ &= \alpha_G \circ (\mathrm{d}\omega \circ h)_*(\alpha_P \bar{\bar{u}}_1, \alpha_P \bar{\bar{u}}_2) \\ &= \alpha_G \circ \Omega_*(\alpha_P \bar{\bar{u}}_1, \alpha_P \bar{\bar{u}}_2) . \end{aligned}$$

Deci :

$$T(\Omega) = \alpha_G \circ \Omega_* \circ \alpha_P .$$

LEMĂ. *Fiind dată o formă diferenţială* ω *cu valori reale definită pe o varietate diferenţiabilă* M *avem* :

$$\mathrm{d}(\omega_* \circ \alpha_M)(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2) = (\mathrm{d}\omega)_*(\alpha_M \bar{\bar{x}}_1, \alpha_M \bar{\bar{x}}_2) ,$$

unde $\omega_* : T^2(M) \to T(R)$ *este diferenţiala aplicaţiei* $\omega : T(M) \to R$ *iar* d *este diferenţiala exterioară.*

Deoarece ω şi α_M sînt definite global, putem verifica formula într-un sistem local de coordonate şi atunci ea va fi adevărată pe întreaga varietate. Dacă $\overline{x} = \dot{x}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, atunci

$$\omega(\overline{x}) = a_i \dot{x}^i .$$

Corespondența prin ω_* între $T^2(M)$ și $T(R)$ este dată astfel:

$$\omega_*(\bar{\bar{x}}) = \left('x^k \dot{x}^i \frac{\partial a_i}{\partial x^k} + a_i '\dot{x}^i\right)\frac{\partial}{\partial t}, \text{ unde } \bar{\bar{x}} = 'x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + '\dot{x}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}.$$

Atunci:

$$\omega_* \circ \alpha_M(\bar{\bar{x}}) = \left(\dot{x}^k\, 'x^i \frac{\partial a_i}{\partial x^k} + a_i\, '\dot{x}^i\right)\frac{\partial}{\partial t}.$$

Dacă $\bar{\bar{x}}_1$, $\bar{\bar{x}}_2$ sînt doi vectori tangenți în același $\bar{x}$, avem:

$$\mathrm{d}(\omega_* \circ \alpha_M)(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2) = \left[\frac{\partial^2 a_i}{\partial \dot{x}^p\, \partial x^k}\dot{x}^p ('x_1^k\, 'x_2^i - 'x_1^i\, 'x_2^k) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial a_i}{\partial x^p}('x_1^p\, '\dot{x}_2^i - 'x_2^p\, '\dot{x}_1^i) + \frac{\partial a_i}{\partial x^p}('\dot{x}_1^p\, 'x_2^i - '\dot{x}_2^p\, 'x_1^i)\right].$$

Rămîne acum să arătăm că și partea dreaptă a egalității are aceiași formă. Avem:

$$\mathrm{d}\omega(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial a_i}{\partial x^k}(\dot{x}_1^k \dot{x}_2^i - \dot{x}_2^k \dot{x}_1^i).$$

Forma $\mathrm{d}\omega$ este o aplicație o subvarietății din $T(M) \times T(M)$ formată din perechile de vectori tangenți în același punct la M (suma Whitney a spațiului fibrat $T(M)$ cu el însuși). În această varietate coordonatele vor fi $(x^i, \dot{x}_1^i, \dot{x}_2^i)$. Deci un vector tangent la această varietate va fi de forma

$$'x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + '\dot{x}_1^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1^i} + '\dot{x}_2^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2^i}.$$

Considerăm o pereche de vectori $\bar{\bar{x}}_1$, $\bar{\bar{x}}_2$ tangenți la $T(M)$ în $\bar{x}$. Coordonatele lor vor fi respectiv $(x^i, \dot{x}^i, 'x_1^i, '\dot{x}_2^i)$ și $(x^i, \dot{x}^i, 'x_2^i, '\dot{x}_2^i,)$.

Vectorii $\alpha_M \bar{x}_1$, $\alpha_M \bar{x}_2$ vor avea coordonatele: $(x^i, 'x_1^i, \dot{x}^i, '\dot{x}_1^i)$, $(x^i, 'x_2^i, \dot{x}^i, '\dot{x}_2^i)$. Putem acum evident să stabilim o corespondență biunivocă între aceste perechi de vectori $(\alpha_M \bar{\bar{x}}_1, \alpha_M \bar{\bar{x}}_2)$ și vectorii tangenți la subvarietatea considerată mai sus:

$$\left(\dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + '\dot{x}_1^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}, \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + '\dot{x}_2^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\right) \rightarrow \left(\dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + '\dot{x}_1^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1^i} + '\dot{x}_2^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2^i}\right).$$

Evident, corespondența este și liniară. Acum diferențiala formei $\mathrm{d}\omega$ se construiește în mod natural și are forma:

$$(\mathrm{d}\omega)_*(\alpha_M \bar{\bar{x}}_1, \alpha_M \bar{\bar{x}}_2) = \left[\dot{x}^k \frac{\partial a_i}{\partial x^k\, \partial x^p}('x_1^p\, 'x_2^i - 'x_2^p\, 'x_1^i) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial a_i}{\partial x^p}('\dot{x}_1^p\, 'x_2^i - '\dot{x}_2^p\, 'x_1^i) + \frac{\partial a_i}{\partial x^p}('x_1^p\, '\dot{x}_2^i - 'x_2^p\, '\dot{x}_1^i)\right]\frac{\partial}{\partial t}.$$

Se observă că cele două expresii coincid. Deci :

$$d(\omega_* \circ \alpha_M) = (d\omega)_* \circ \alpha_M .$$

Observaţie. Dacă Ω este o formă de ordin doi pe M, atunci Ω_* este definită pe suma Whitney a spaţiului fibrat $T(M)$ cu el însuşi.

Primită la redacţie la 3 octombrie 1966

Academia Republicii Socialiste România
Institutul de matematică
Filiala Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. S. KOBAYASHI, *Theory of connections*. Annali di mat. pura ed applicata, **43** (1957).
2. S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of the differential geometry*.
3. K. NOMIZU, *Lie groups and differential geometry*.
4. P. DOMBROWSKI, *On the geometry of the tangent bundle*. J. für die R. und Ang. Math., **210** (1962).

FUNCȚIA CARACTERISTICĂ A LUI HILBERT

DE

ALEXANDRU RADU

În această Notă se încearcă o expunere detaliată a proprietăților ce țin de polinomul Hilbert-Samuel asociat unui modul relativ la o anumită fibrare adică.

1°. FUNCȚII POLINOMIALE

O aplicație $\varphi : N \to Z$ 1) se numește funcție polinomială dacă există un polinom $\Phi \in Q[X]$ astfel ca $\varphi(n) = \Phi(n)$ pentru $n \geqslant n_0$, cu n_0 convenabil ales; adică pentru n suficient de mare funcția φ este realizată de un polinom Φ cu coeficienți raționali.

Evident, polinomul Φ este unic determinat și gradul său se numește gradul lui φ și se notează grad φ.

Dacă φ este o constantă nenulă, pentru n suficient de mare, atunci grad $\varphi = 0$.

Dacă φ este identic nulă pentru n suficient de mare, punem, prin definiție, grad $\varphi = -1$.

Cum polinoamele $\binom{X}{k} = \dfrac{X(X-1)\ldots(X-k+1)}{k!}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, cu $\binom{X}{0} = 1$ prin definiție, formează o bază peste Q a spațiului vectorial format din polinoamele din $Q[X]$ de grad $\leqslant n$, rezultă că dacă φ este o funcție polinomială de grad r, atunci, pentru n suficient de mare, $\varphi(n) = \sum\limits_{k=0}^{r} \alpha_k \binom{n}{k}$, $0 \leqslant k \leqslant r$, cu $\alpha_k \in Q$ unic determinați și $\binom{n}{k} \in Z$. Dată o funcție polinomială φ de grad r, definim funcția diferență $\Delta\varphi$ prin $\Delta\varphi(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n)$ care evident este o funcție polinomială de grad $r-1$, căci $\Delta\varphi(n) = \sum\limits_{k=1}^{r} \alpha_r \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right] = \sum\limits_{k=1}^{r} \alpha_k \binom{n}{k-1}$.

---

1) Notăm, ca de obicei, prin N și Z mulțimea numerelor naturale respectiv a întregilor raționali.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 537–547, BUCUREȘTI, 1967

Reciproc, dacă $\Delta\varphi$ este o funcţie polinomială, atunci φ este polinomială.

Într-adevăr, fie $\Delta\varphi(n) = \sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_k \binom{n}{k-1}$ pentru n suficient de mare şi considerăm funcţia polinomială ψ cu $\psi(n) = \sum\limits_{k=0}^{s} \alpha_k \binom{n}{k}$ pentru n suficient de mare. Evident, $\Delta\psi(n) = \Delta\varphi(n)$.

Deci pentru n suficient de mare, $\varphi(n) - \psi(n) = \beta_0 \in Z$, ceea ce implică că $\varphi(n) = \sum\limits_{k=0}^{s} \alpha'_k \binom{n}{k}$ cu $\alpha'_0 = \alpha_0 + \beta_0$ şi $\alpha'_k = \alpha_k$ pentru $0 < k \leqslant s$. c.c.t.d.

PROPOZIŢIA 1°. 1. *Dacă φ este o funcţie polinomială, atunci coeficienţii polinomului ce o realizează începînd de la un anumit rang aparţin chiar lui Z.*

Într-adevăr, fie $\varphi(n) = \sum\limits_{k=0}^{r} \alpha_k \binom{n}{k}$ pentru n suficient de mare, unde $r = \text{grad}\ \varphi$ şi $\alpha_k \in Q$, $0 \leqslant k \leqslant r$.

Practicăm inducţie după r.

Pentru $r = 0$, funcţia este o constantă $\neq 0$ de la un anumit rang, deci

$$\varphi(n) = \alpha_0 \quad \text{cu} \quad \alpha_0 \in Z \quad \text{căci} \quad \varphi : N \to Z.$$

În etapa a doua a inducţiei folosim funcţia diferenţă $\Delta\varphi$ care fiind de grad $r - 1$, are, conform ipotezei inductive, toţi coeficienţii $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ în Z. Însă $\alpha_0 = f(n) - \sum\limits_{k=1}^{r} \alpha_k \binom{n}{k}$ şi deci şi $\alpha_0 \in Z$. c.c.t.d.

Fie A un inel despre care presupunem că conţine un subinel artinian A_0 format din elemente de grad zero şi că A este generat peste A_0 de un număr finit $x_1, \ldots, x_r$ de elemente de grad unu, adică $A = A_0[x_1, \ldots, x_r]$. Evident, deoarece A_0 este şi noetherian, rezultă că A este noetherian căci A apare ca factorizarea inelului noetherian $A_0[X_1, \ldots, X_r]$ al polinoamelor cu coeficienţi în A_0 în r nedeterminate $X_1, \ldots, X_r$ prin idealul omogen al relaţiilor între $x_1, \ldots, x_r$ cu coeficienţi în A_0.

Fie $M = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} M_n$ un A-modul graduat finit generat. Evident, M este şi A_0-modul căci $A_0 \subset A$ şi, mai mult, M_n sînt A_0-module pentru orice $n \geqslant 0$, căci A_0 este format din elemente de grad zero. Vom arăta că, pentru orice $n \geqslant 0$, M_n sînt A_0-module finit generate. Într-adevăr, prin ipoteză M este A-modul finit generat, deci fie $y_1, \ldots, y_t$ generatorii săi pe care-i putem presupune omogeni de grad $d_1, \ldots, d_t$ respectiv. Dacă $y \in M_n$, atunci $y = \sum\limits_{j=1}^{t} m_j(x)\, y_j$, unde $m_j(x) = a_j\, x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{\alpha_r}$ cu $a_j \in A_0$ iar

$$(*)\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n - d_j \ (1 \leqslant j \leqslant t)$$

şi prin urmare generatorii lui M_n ca A_0-modul sînt toate monoamele $x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{\alpha_r}\, y_j$ cu $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n - d_j$, $1 \leqslant j \leqslant t$, care sînt în număr finit, căci nu există decît un număr finit de $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ care să satisfacă relaţia $(*)$ pentru n dat.

PROPOZIȚIA 1°. 2. *În condițiile de mai sus, M_n sînt A_0-module de lungime finită ($l(M_n) < \infty$ pentru orice $n \geqslant 0$) iar funcția $\varphi_M : N \rightarrow Z$ definită prin $\varphi_M(n) = l(M_n)$ este o funcție polinomială de grad $< r$.*

Prima parte rezultă din observația că A_0 fiind un inel artinian, este și noetherian, iar M_n fiind un A_0-modul finit generat, este un modul artinian și noetherian deci de lungime finită.

Pentru partea a doua practicăm inducție relativ la r.

Pentru $r = 0$, $A = A_0$, M este A_0-modul finit generat deci de lungime finită (același argument ca în prima parte!) și prin urmare pentru n suficient de mare, în mod necesar $M_n = 0$, căci altfel am avea șirul infinit

$$M_1 \subset M_1 \oplus M_2 \subset \ldots \subset M.$$

Dar dacă $M_n = 0$ pentru n suficient de mare, înseamnă că $l(M_n) = 0$ și deci φ_M este realizată, pentru n suficient de mare, de polinomul identic nul care prin definiție are gradul egal cu -1, deci < 0.

Putem deci presupune $r \geqslant 1$ și afirmația dovedită pentru orice A'-modul graduat finit generat, unde $A' = A_0\,[x_1, \ldots, x_{r-1}]$.

Pasul următor al inducției se face considerînd șirul exact

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \xrightarrow{\omega} M \rightarrow M'' \rightarrow 0,$$

unde ω este omotetia de raport x_r, $M' = \operatorname{Ker}\omega$, $M'' = \operatorname{Coker}\omega$.

Evident, ω este de grad 1 și prin urmare pentru orice $n \geqslant 0$ există șirul exact

$$0 \rightarrow M'_n \rightarrow M_n \xrightarrow{\omega_n} M_{n+1} \rightarrow M''_{n+1} \rightarrow 0$$

din care, folosind relația lui Euler-Poincaré [2], obținem

$$(**)\quad \Delta\varphi_M(n) = \varphi_{M''}(n+1) - \varphi_{M'}(n).$$

Cum M' și M'' sînt A-module graduate finit generate pentru care multiplicarea cu x_r este nulă, pot fi privite ca A'-module graduate finit generate și atunci, conform ipotezei inductive, $l(M'_n)$ și $l(M''_n)$ definesc funcțiile polinomiale $\varphi_{M'}$ și $\varphi_{M''}$ de grad $< r-1$. Din $(**)$ rezultă că $\Delta\varphi_M$ este o funcție polinomială de grad $< r - 1$ și prin urmare φ_M este o funcție polinomială de grad $< r$ și cu aceasta totul este demonstrat.

2°. IDEALE DE DEFINIȚIE ÎNTR-UN INEL

Fie A un inel semilocal noetherian [2]) înzestrat cu topologia $\underline{r}$-adică cu alte cuvinte topologia pentru care puterile lui $\underline{r}$ formează un sistem fundamental de vecinătăți ale lui zero (cu $\underline{r}$ am notat radicalul lui Jacobson, adică intersecția tuturor idealelor maximale care prin ipoteză sînt în număr finit).

---

[2]) Pentru unele considerații, A poate să fie oarecare.

DEFINIŢIA 2°.1. Un ideal $\underline{q}$ din A, se zice ideal de definiţie dacă :

1° $\underline{q}$ este deschis în topologia $\underline{r}$-adică, adică există $n > 0$ astfel încît $\underline{r}^n \subset \underline{q}$ (este suficient să cerem ca puteri ale generatorilor lui $\underline{r}$ să aparţină lui $\underline{q}$, căci prin ipoteză A este noetherian!).

2° $\underline{q} \subset \underline{r}$ adică, prin abuz de limbaj, puterile lui $\underline{q}$ tind către zero în topologia $\underline{r}$-adică.

Evident, în A există un ideal de definiţie, de exemplu $\underline{r}$.

Observaţia 2°.2. Dacă $\underline{q}$ este un ideal de definiţie şi $\underline{a}$ este un ideal deschis în topologia $\underline{r}$-adică, atunci $\underline{a} \cap \underline{q}$ este un ideal de definiţie. Evident, căci $\underline{a} \cap \underline{q} \subset \underline{q}$.

Observaţia 2°.3. Din observaţia 2°.2 rezultă că idealele de definiţie din A formează un sistem fundamental de vecinătăţi pentru zero căci fie V o vecinătate a lui (0) şi q un ideal de definiţie, deci există $n > 0$ cu $\underline{q}^n \subset V$ şi există $m > 0$ cu $\underline{r}^m \subset V$ şi atunci $\underline{r}^m \cap \underline{q}$ este un ideal de definiţie cuprins în V.

Observaţia 2°.4. Dacă $\underline{q}$ şi $\underline{q}'$ sînt două ideale de definiţie în A, atunci există $s > 0$ cu $\underline{q}^s \subset \underline{q}'$ şi în mod simetric există $t > 0$ cu $\underline{q}'^t \subset \underline{q}$ adică $\sqrt{\underline{q}} = \sqrt{\underline{q}'}$ sau în limbaj de topologii : topologia $\underline{q}$-adică coincide cu topologia $\underline{q}'$-adică şi în particular cu topologia $\underline{r}$-adică.

Observaţia 2°.5. Fie $\underline{q}$ un ideal de definiţie în A. Atunci un ideal $\underline{a}$ din A este conţinut într-un ideal de definiţie $\underline{q}'$ dacă şi numai dacă există un $n > 0$ cu $\underline{a}^n \subset \underline{q}$.

Prima implicaţie este evidentă conform lui 2°.4. Reciproc, dacă există $n > 0$ cu $\underline{a}^n \subset \underline{q}$, atunci pentru orice vecinătate V a lui (0) există $m > 0$ cu $\underline{q}^m \subset V$, deci $\underline{a}^{nm} \subset V$. Însă există $t > 0$ cu $\underline{r}^t \subset V$, iar $\underline{r}^t + \underline{a}$ este un ideal de definiţie ce conţine pe $\underline{a}$ căci, pe de o parte, $\underline{r}^t + \underline{a}$ este deschis conţinînd idealul deschis $\underline{r}$, iar pe de altă parte, puterile sale tind către zero căci $(\underline{r}^t + \underline{a})^{nm} \subset V$.

Observaţia 2°.6. Orice ideal prim deschis din A conţine toate idealele de definiţie.

PROPOZIŢIA 2°.7. (Lema lui Nakayama). *Fie $\underline{q}$ un ideal de definiţie în A. Atunci au loc următoarele afirmaţii echivalente* :

1°. $\underline{q} \subset \underline{r}$.

2°. *Pentru orice $x \in \underline{q}$, $1 + x$ este inversibil în A.*

3°. *Dacă M este un A-modul finit generat, $M = \underline{q}M$ (echivalentă cu $M \otimes_A A/\underline{q} = 0$) $\Leftrightarrow M = (0)$.*

3°'. *Pentru orice $N \subset M$ cu M/N finit generat, $M = N + \underline{q}M \Leftrightarrow M = N$.*

4°. *$a \in A$ este inversibil în $A \Leftrightarrow \hat{a} = a$* mod $\underline{q}$ *e inversibil în $A/\underline{q}$.*

1° $\Rightarrow$ 2°. Dacă $1 + x$ nu ar fi inversibil pentru un $x \in \underline{q}$, atunci ar exista un ideal maximal $\underline{m}$ care ar conţine $1 + x$, şi cum $x \in \underline{m}$, ar rezulta $1 \in \underline{m}$, absurd.

2° $\Rightarrow$ 3°. Fie $x_1, \ldots, x_p$ un sistem minimal de generatori pentru M. Din relaţia $M = \underline{q}M$ rezulta că există $a_1, \ldots, a_p \in \underline{q}$ cu $x_p = a_1x_1 + \ldots + a_p x_p$, de unde

$$(1 - a_p)\, x_p = a_1x_1 + \ldots + a_{p-1}\, x_{p-1}$$

sau

$$x_p = \frac{a_1}{1 - a_p}\, x_1 + \ldots + \frac{a_{p-1}}{1 - a_p}\, x_{p-1}$$

ceea ce este absurd.

$3° \Rightarrow 3°'$ căci $\underline{q}\; M/N = \underline{q}M + N/N = M/N$ implică $M/N = (0)$, adică $M = N$.

$3° \Rightarrow 1°$. Dacă ar exista un ideal maximal $\underline{m}$ cu $\underline{q} \not\subset \underline{m}$, atunci $\underline{m} + \underline{q} = A$, $\underline{q}\; A/\underline{m} = A/\underline{m}$ de unde $A/\underline{m} = (0)$, absurd căci $A/\underline{m}$ este corp.

$1° \Rightarrow 4°$. Dacă $a \in A$ este inversibil în A, evident $\hat{a}$ este inversibil în $A/\underline{q}$ fără ipoteza 1°. Reciproc, dacă $\hat{a}$ este inversibil lui $A/\underline{q}$, înseamnă că exista $\hat{x}$ cu $\hat{a}\hat{x} = 1$, de unde $ax - 1 \in \underline{q}$ adică ax este inversibil în A și prin urmare a este inversibil în A.

$4° \Rightarrow 2°$ căci dacă $x \in \underline{q}$, atunci $\widehat{1+x} = \hat{1} + \hat{x} = \hat{1}$ e inversibil în $A/\underline{q}$ și deci $1 + x$ e inversibil în A.

PROPOZIȚIA 2°.8. *Fie A un inel noetherian și $\underline{q}$ un ideal al său. Sînt echivalente următoarele afirmații :*

a) *A este semilocal și există $n > 0$ cu $\underline{r}^n \subset \underline{q} \subset \underline{r}$.*

b) *Orice ideal maximal cuprinde pe $\underline{q}$ și orice ideal prim ce cuprinde pe $\underline{q}$ este maximal.*

c) *$\underline{q} \subset \underline{r}$ și $A/\underline{q}$ este inel artinian.*

a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c. *Evident.*

c $\Rightarrow$ a căci inelul $A/\underline{q}$ fiind artinian, are un număr finit de ideale prime și orice ideal prim într-un astfel de inel este maximal. Însă idealele maximale din $A/\underline{q}$ se găsesc în corespondență biunivocă cu idealele maximale din A ce înfășoară pe $\underline{q}$ și deoarece $\underline{q} \subset \underline{r}$, rezultă că în A există tot atîtea ideale maximale cîte există în $A/\underline{q}$ și prima afirmație din a) e dovedită. Pe de altă parte, într-un inel artinian orice ideal este nilpotent, prin urmare există $n > 0$ cu $(\underline{r}/\underline{q})^n = 0$ ceea ce implică $\underline{r}^n \subset \underline{q}$ și afirmația a) este complet verificată.

3°. FUNCȚIA CARACTERISTICĂ A LUI HILBERT

Fie, ca mai sus, A un inel semilocal noetherian, $\underline{q}$ un ideal de definiție al său și $y_1, \ldots, y_s$ un sistem minimal de generatori pentru $\underline{q}$. Înzestrăm pe A cu filtrarea $\underline{q}$-adică și fie $G(A) = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \underline{q}^i/\underline{q}^{i+1}$ inelul graduat asociat acestei filtrări.

Fie M un A-modul finit generat înzestrat cu filtrarea $\underline{q}$-adică și $G(M) = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \underline{q}^i M/\underline{q}^{i+1} M$, $G(A)$-modulul graduat asociat acestei filtrări. Evident, $G(M)$ este și $A/\underline{q}$-modul.

Ușor se vede că $G(A) = A/\underline{q}\,[\underline{q}/\underline{q}^2]$ și $G(M) = G(A)[M/\underline{q}M]$.

Pentru aceasta este suficient[3] să arătăm că $y_1^{\alpha_1} \ldots y_s^{\alpha_s}$ mod $\underline{q}^{n+1}$, unde $\alpha_1 + \ldots + \alpha_s = n$, generează pe $\underline{q}^n/\underline{q}^{n+1}$ peste $A/\underline{q}$.

Practicăm inducție după n.

Pentru $n = 1$, evident y_i mod q^2, $1 \leqslant i \leqslant s$, generează $\underline{q}/\underline{q}^2$ peste $A/\underline{q}$.

Presupunînd afirmația adevărată pentru n, rezultă adevărată și pentru $n + 1$, ținînd seama de faptul că orice element $\hat{y} \in \underline{q}^{n+1}/\underline{q}^{n+2}$ se poate scrie sub forma $\hat{y} = \hat{z} . \hat{u}$ cu $\hat{z} \in \underline{q}^n/\underline{q}^{n+1}$ și $\hat{u} \in \underline{q}/\underline{q}^2$.

---

[3] Este suficient, căci conform înmulțirii în $G(A)$, $y_1^{\alpha_1} \ldots y_s^{\alpha_s}$ mod $\underline{q}^{n+1} = y_1^{\alpha_1}$ mod $\underline{q}^2 \ldots y_s^{\alpha_s}$ mod $\underline{q}^2 = (y_1 \text{ mod } \underline{q}^2)^{\alpha_1} \ldots y_s \text{ mod } \underline{q}^2)^{\alpha_s}$.

La fel se probează că $G(M) = G(A)\,[M/\underline{q}M]$, arătîndu-se (tot prin inducție !) mai întîi că monoamele $y_1^{\alpha_1}\dots y_s^{\alpha_s} z_j \bmod \underline{q}^{n+1}M$, cu $\alpha_1 + \dots + \alpha_s = n$ și $z_1, \dots, z_t$ generatorii lui M peste A, generează pe $\underline{q}^n M/\underline{q}^{n+1} M$ ca $G(A)$-modul și observînd după aceea, conform înmulțirii exterioare cu elemente din $G(A)$, că $y_1^{\alpha_1}\dots y_s^{\alpha_s} z_j \bmod \underline{q}^{n+1} M = y_1^{\alpha_1}\dots y_s^{\alpha_s} \bmod \underline{q}^{n+1}\cdot z_j \bmod \underline{q}M$.

În concluzie, $G(A) = A/\underline{q}\,[y_1 \bmod \underline{q}^2, \dots, y_s \bmod \underline{q}^2]$ este un inel graduat finit generat peste inelul artinian $A/\underline{q}$ iar $G(M) = G(A)\,[z_1 \bmod \underline{q}\,M, \dots, z_t \bmod \underline{q}\,M]$ este un $G(A)$-modul graduat finit generat.

Sîntem astfel în ipotezele propoziției 1°.2, deci $\underline{q}\,M/\underline{q}^{n+1} M$, $n \geqslant 0$, sînt module de lungime finită iar funcția $n \to l\,(\underline{q}^n M/\underline{q}^{n+1} M)$, este polinomială de grad $< s$.

Notăm că lungimea lui $\underline{q}^n M/\underline{q}^{n+1} M$ este aceeași fie că se consideră ca A-modul, fie ca $A/\underline{q}$-modul, ținînd cont de faptul că $\underline{q} \subset \mathrm{Ann}\,(\underline{q}^n M/\underline{q}^{n+1} M)$.

PROPOZIȚIA 3°.1. *$M/\underline{q}^n M$ este de lungime finită*[4] *și aplicația $n \to l(M/\underline{q}^n M)$ este polinomială de grad $\leqslant s$.*

Într-adevăr, din șirul de incluziuni $M \supset \underline{q}\,M \supset \dots \supset \underline{q}^n M$ rezultă

$$l\,(M/\underline{q}^n M) = \sum_{i=0}^{n-1} l\,(\underline{q}^i M/\underline{q}^{i+1} M)$$

de unde prima afirmație.

Din șirul exact

$$0 \to \underline{q}^n M/\underline{q}^{n+1} M \to M/\underline{q}^{n+1} M \to M/\underline{q}^n M \to 0$$

deducem

$$\Delta\, l\,(M/\underline{q}^n M) = l\,(M/\underline{q}^{n+1} M) - l\,(M/\underline{q}^n M) = l\,(\underline{q}^n M/\underline{q}^{n+1} M).$$

Deci $n \to \Delta\, l\,(M/\underline{q}^n M)$ este o funcție polinomială de grad $< s$ și prin urmare $n \to l\,(M/\underline{q}^n M)$ este o funcție polinomială de grad $\leqslant s$. c.c.t.d.

Polinomul $P_{\underline{q}}(M, n)$ cu coeficienți raționali pentru care $l\,(M/\underline{q}^n M) = P_{\underline{q}}(M, n)$ pentru n suficient de mare se numește polinomul Hilbert-Samuel asociat lui M relativ la filtrarea $\underline{q}$-adică, iar funcția polinomială definită de el se numește funcția caracteristică a lui Hilbert.

Observația 3°.2. Gradul polinomului $P_{\underline{q}}(M, n)$ nu depinde de idealul de definiție ales.

Într-adevăr, dacă $\underline{q}'$ este un alt ideal de definiție, atunci există un $s > 0$ cu $\underline{q}^s \subset \underline{q}'$ de unde $\underline{q}^{sn} M \subset \underline{q}'^n M$ și deci

$$l\,(M/\underline{q}'^n M) \leqslant l\,(M/\underline{q}^{sn} M) \quad \text{pentru orice } n \geqslant 0$$

sau, pentru n suficient de mare,

$$P_{\underline{q}'}(M, n) \leqslant P_{\underline{q}}(M, sn).$$

De aici rezultă că gradul (în n) al primului polinom este $\leqslant$ cu gradul celui de-al doilea polinom și invers, schimbînd rolurile lui $\underline{q}$ și $\underline{q}'$.

Notăm acest grad cu $d(M)$ sau pur și simplu cu d cînd alte module nu intervin.

---

[4] Fie ca A-modul fie ca $A/\underline{q}$-modul căci $\underline{q}^n M \supset \underline{q}^{n+1} M$.

Observația 3°. 3. $d(M) = 0$ dacă și numai dacă $M \neq (0)$ și de lungime finită.

Într-adevăr, dacă $d = 0$, în mod necesar $M \neq (0)$ căci altfel $d = -1$ ceea ce este absurd, iar pe de altă parte, pentru n suficient de mare, $l(M/\underline{q}^n M) = \text{const.} \neq 0$ și deci $l(\underline{q}^n M/\underline{q}^{n+1} M) = 0$ ceea ce implică $\underline{q}^n M/\underline{q}^{n+1} M = 0$ sau $\underline{q}^n M = \underline{q} \cdot \underline{q}^n M$ de unde $\underline{q}^n M = (0)$ conform lemei lui Nakayama. Însă $l(M) = l(M/(0)) = l(M/\underline{q}^q M) < \infty$ de unde prima implicație.

Reciproc, dacă $M \neq (0)$ și de lungime finită, înseamnă că există un $n > 0$ pentru care $\underline{q}^n M = \underline{q}^{n+1} M = \ldots$ și deci

$$\Delta\, l(M/\underline{q}^n M) = l(\underline{q}^n M/\underline{q}^{n+1} M) = 0.$$

Rezultă că $l(M/\underline{q}^n M) = \text{const.} \neq 0$ căci dacă $l(M/\underline{q}^n M) = 0$, atunci $M/\underline{q}^n M = 0$ sau $M = \underline{q}^n M$ și după lema lui Nakayama rezultă $M = (0)$ absurd. Dar dacă $l(M/\underline{q}^n M) = \text{const.} \neq 0$, atunci prin definiție $d = 0$, și prin urmare e dovedită și cea de-a doua implicație.

Observația 3°. 4. Dacă $M \neq (0)$, polinomul $P_{\underline{q}}(M, n)$ este de forma $a \dfrac{n^d}{d!} + \ldots$ cu $a > 0$ căci pentru n suficient de mare, semnul acestui polinom este dat de semnul coeficientului termenului dominant și ținînd seama că pentru n suficient de mare $l(M/\underline{q}^n M) > 0$ căci dacă $l(M/\underline{q}^n M) = 0$, atunci $M/\underline{q}^n M = (0)$ sau $M = \underline{q}^n M \subset \underline{q} M$, ceea ce, după lema lui Nakayama, ar rezulta $M = (0)$ absurd.

4°. FILTRĂRI $\underline{q}$-REGULATE

Toate filtrările ce vor apărea sînt presupuse descrescătoare, exhaustive și de tip $N \cup \{0\}$. Evident, în aceste ipoteze o filtrare este exhaustivă dacă și numai dacă componenta de indice zero coincide cu întreg inelul sau modulul filtrat considerat.

Definiția 4°. 1. Fie A un inel, $\underline{q}$ un ideal al său și M un A-modul. O filtrare $(M_n)_{n \geqslant 0}$ a lui M se numește $\underline{q}$-regulată dacă:

i) $\underline{q} M_n \subset M_{n+1}$, adică filtrarea $(M_n)_{n \geqslant 0}$ este compatibilă cu structura de A-modul a lui M cînd se înzestrează A cu filtrarea $\underline{q}$-adică.

ii) Există un număr natural n_0 cu proprietatea că $\underline{q} M_n = M_{n+1}$ pentru $n \geqslant n_0$, sau ceea ce este echivalent cu $\underline{q}^k M_n = M_{n+k}$ pentru orice $n \geqslant n_0$ și $k \geqslant 0$.

Exemple: a) Filtrarea $\underline{q}$-adică pe M este $\underline{q}$-regulată.

b) Filtrarea cît a unei filtrări $\underline{q}$-regulate este o filtrare $\underline{q}$-regulată.

Fie A un inel noetherian inzestrat cu filtrarea $\underline{q}$-adică și M un A-modul finit generat înzestrat cu filtrarea $(M_n)_{n \geqslant 0}$ dată de submodulele M_n ($A_0 = A$!).

Fie $A' = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \underline{q}^i$ și $M' = \bigoplus\limits_{j \geqslant 0} M_j$ grupurile graduate asociate respectiv acestor filtrări.

Aplicaţia canonică $\underline{q}^i \times M_j \to M_{i+j}$ se prelungeşte pînă la o aplicaţie biliniară $A' \times M' \to M'$, definindu-se astfel pe A' o structură de A-algebră graduată iar pe M' o structură de A'-modul graduat.

Mai mult, deoarece $A' = A\,[\underline{q}]$ şi prin ipoteză $\underline{q}$ este un ideal finit generat, rezultă că A' este o A-algebră finit generată, în particular A' este un inel noetherian.

PROPOZIŢIA 4°. 2. *Fie $(M_n)_{n\geqslant 0}$ o filtrare a A-modulului M compatibilă cu structura sa de A-modul atunci cînd A se înzestrează cu filtrarea $\underline{q}$-adică. Atunci această filtrare este $\underline{q}$-regulată dacă şi numai dacă M' este un A'-modul finit generat.*

Într-adevăr, dacă $(M_n)_{n\geqslant 0}$ este $\underline{q}$-regulată, există un indice n_0 aşa încît $M_{n+k} = \underline{q}^k M_n$ pentru $n \geqslant n_0$ şi $k \geqslant 0$ şi deci A'-modulul M' este generat de submodulul $M_0 \oplus \ldots \oplus M_{n_0}$ care este un A-modul finit generat, de unde rezultă prima implicaţie.

Reciproc, dacă M' este un A'-modul finit generat, fie $x_1, \ldots, x_r$ generatorii săi pe care-i putem presupune omogeni de grad $n_1, \ldots, n_r$ respectiv.

Luînd $n_0 = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant r} (n_i)$, pentru orice $n \geqslant n_0$, $M_{n+1} \subseteq \underline{q}\, M_n$ căci $x \in M_{n+1}$, deci de forma $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i\, x_i$ cu $a_i \in \underline{q}^{n+1-n_i} = \underline{q}\cdot\underline{q}^{n-n_i}$. Însă $\underline{q}^{n-n_i} M_{n_i} \subseteq M_n$ şi deci $x \in \underline{q} M_n$ de unde rezultă şi a doua implicaţie căci incluziunea $\underline{q} M_n \subseteq M_{n+1}$ e dată prin ipoteză.

COROLARUL 4°. 3. *Fie A un inel noetherian înzestrat cu filtrarea $\underline{q}$-adică şi M un A-modul finit generat înzestrat cu filtrarea $\underline{q}$-regulată $(M_n)_{n\geqslant 0}$.*

Dacă N este un submodul al lui M, atunci filtrarea $(N_n)_{n\geqslant 0}$ indusă pe N de filtrarea $(M_n)_{n\geqslant 0}$ este $\underline{q}$-regulată.

Într-adevăr, deoarece A este noetherian, rezultă că N este finit generat şi deoarece $N_n \subseteq M_n$ pentru orice n, rezultă că $N' \subseteq M'$. Însă prin ipoteză M' este A'-modul finit generat şi cum A' este noetherian, rezultă că N' este A'-modul finit generat şi în virtutea propoziţiei 4°.2 rezultă că filtrarea $(N_n)_{n\geqslant 0}$ este $\underline{q}$-regulată.

COROLARUL 4°. 4. (Lema lui Artin-Ress). *Fie A un inel noetherian înzestrat cu filtrarea $\underline{q}$-adică şi M un A-modul finit generat înzestrat cu filtrarea $\underline{q}$-adică (deci $\underline{q}$-regulată!).*

Dacă N este un submodul al lui M, atunci conform corolarului 4°.3 filtrarea indusă pe N de filtrarea $\underline{q}$-adică a lui M este $\underline{q}$-regulată adică există un n_0 încît pentru $n \geqslant n_0$ să avem

$$\underline{q}^k\,(\underline{q}^n M \cap N) = \underline{q}^{n+k} M \cap N \text{ pentru orice } k \geqslant 0.$$

Observaţia 4°.5. Filtrarea $\underline{q}$-adică a lui N coincide cu filtrarea indusă de filtrarea $\underline{q}$-adică a lui M.

Într-adevăr, $\underline{q}^n N \subset \underline{q}^n M \cap N$, adică întotdeauna filtrarea $\underline{q}$-adică a lui N este mai fină ca filtrarea indusă pe N de filtrarea $\underline{q}$-adică a lui M. Reciproc, conform lemei lui Artin-Riesz pentru orice $\underline{q}^k N$ există un n_0 astfel încît pentru $n \geqslant n_0$ să existe relaţia

$$\underline{q}^{n+k} M \cap N = \underline{q}^k\,(\underline{q}^n M \cap N) \subseteq \underline{q}^k M.$$

Observaţia 4°.6. Toate filtrările $(M_n)_{n \geqslant 0}$ $\underline{q}$-regulate pe M coincid cu filtrarea $\underline{q}$-adică după cum rezultă din şirul de incluziuni.

$$\underline{q}^{n+n_0} M \subseteq M_{n+n_0} = \underline{q}^n M_{n_0} \subseteq \underline{q}^n M \subseteq M_n$$

cu n_0 convenabil ales. (Se ţine seama de faptul că filtrarea e presupusă descrescătoare şi exhaustivă).

Observaţia 4°.7. (Lema lui Krull). Dacă $\underline{q}$ este un ideal de definiţie în inelul noetherian A, atunci filtrarea $\underline{q}$-adică este separată, adică $\bigcap\limits_{i \geqslant 0} \underline{q}^i = (0)$.

Într-adevăr, $\underline{a} = \bigcap\limits_{i \geqslant 0} \underline{q}^i$ este un ideal în A, deci finit generat. După lema lui Artin-Riesz există un n_0 aşa ca pentru $n \geqslant n_0$ să existe relaţia

$$\underline{a} \cap \underline{q}^n = \underline{q}^{n-n_0} (\underline{q}^{n_0} \cap \underline{a}).$$

Luînd $n = n_0 + 1$ găsim

$$\underline{a} \cap \underline{q}^{n_0+1} = \underline{q} \, (\underline{q}^{n_0} \cap \underline{a})$$

sau $\underline{a} = \underline{q} \cdot \underline{a}$ de unde rezultă, conform lemei lui Nakayama, $\underline{a} = (0)$ c.c.t.d.

PROPOZIŢIA 4°. 8. *Fie A un inel semilocal noetherian, M un A-modul finit generat înzestrat cu filtrarea $\underline{q}$-regulată $(M_n)_{n \geqslant 0}$. Atunci M/M_n este un A-modul de lungime finită pentru orice $n \geqslant 0$ iar funcţia $n \to l(M/M_n)$ este polinomială pentru care polinomul ce o realizează pentru n suficient de mare, are acelaşi grad şi coeficient dominant ca polinomul $P_{\underline{q}}(M, n)$.*

Din $\underline{q}^n M \leqslant \underline{q}^n M_0 \subset M_n$ rezultă $l(M/M_n) \leqslant l(M/\underline{q}^n M) < \infty$ şi prima afirmaţie este dovedită. Pe de altă parte, deoarece există un n_0 aşa ca $M_{n+k} = \underline{q}^k M_n$ pentru $n \geqslant n_0$ şi $k \geqslant 0$, rezultă că $G(M) = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} M_n/M_{+1}$ este generat peste $G(A) = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} \underline{q}^n/\underline{q}^{n+1} = A/\underline{q}\,[\underline{q}/\underline{q}^2]$ de sub- A-modulul finit generat $M/M_1 \oplus \ldots \oplus M_{n_0}/M_{n_0+1}$ deci $G(M)$ este un $G(A)$-modul finit generat şi conform propoziţiei 1°.2, funcţia $n \to l(M_n/M_{n+1})$ este polinomială. Însă din $M \supseteq M_n \supseteq M_{n+1}$ rezultă că $\Delta \, l(M/M_n)$ $(\equiv l(M_n/M_{n+1}))$ şi deci funcţia $n \to \Delta \, l(M/M_n)$ este polinomială, adică funcţia $n \to l(M/M_n)$ este polinomială şi prin urmare şi a doua afirmaţie este probată.

Mai departe, fie $Q(M, n)$ polinomul ce o realizează pentru n suficient de mare. Din faptul că există n_0 aşa ca $\underline{q} M_n = M_{n+1}$ pentru $n \geqslant n_0$, rezultă şirul de incluziuni

$$\underline{q}^{n+n_0} M \subseteq M_{n+n_0} = \underline{q}^n M_{n_0} \subseteq \underline{q}^n M \subseteq M_n$$

(vezi observaţia 4°.6) care implică şirul de incluziuni

$$M/M_n \subseteq M/\underline{q}^n M \subseteq M/M_{n+n_0} \subseteq M/\underline{q}^{n+n_0} M$$

din care rezultă, pentru n suficient de mare, şirul de inegalităţi

$$Q\,(M, n) \leqslant P_{\underline{q}}(M, n) \leqslant Q\,(M, n + n_0] \leqslant P_{\underline{q}}(M, n + n_0)$$

şi cu acesta ultima afirmaţie.

PROPOZIŢIA 4°. 9. *Fie* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *un şir exact de module finit generate, peste inelul noetherian A. Atunci* :

$$(*) \qquad P_q(M, n) = P_q(M', n) + P_q(M'', n) + R,$$

unde $R \in Q[x]$ cu gr $R <$ gr $P_q(M', n) \leqslant$ gr $P_q(M, n)$.

Considerînd pe M înzestrat cu filtrarea $\underline{q}$-adică $(\underline{q}^n M)_{n\geqslant 0}$, pe M'' cu filtrarea $\underline{q}$-adică $(\underline{q}^n M'')_{n\geqslant 0}$ care coincide cu filtrarea cît $(\underline{q}^n M + M'/M')$, şi pe M' cu filtrarea indusă $(M'_n)_{n\geqslant 0}$ $(M'_n = \underline{q}^n M \cap M'!)$ obţinem, pentru orice n, şirul exact

$$0 \to M'_n \to \underline{q}^n M \to \underline{q}^n M'' \to 0.$$

Aplicînd lema 3 × 3 diagramei

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M'_n \arrow[r] \arrow[d] & \underline{q}^n M \arrow[r] \arrow[d] & \underline{q}^n M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'/M'_n \arrow[r] \arrow[d] & M/\underline{q}^n M \arrow[r] \arrow[d] & M''/\underline{q}^n M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

rezultă că ultima linie este exactă şi deci

$$l(M/\underline{q}^n M) = l(M'/M'_n) + l(M''/\underline{q}^n M'').$$

Însă din corolarul 4°. 3 rezultă că filtrarea $(M'_n)_{n\geqslant 0}$ este $\underline{q}$-regulată şi deci pentru n suficient de mare obţinem

$$P_q(M, n) = Q(M', n) + P_q(M'', n),$$

unde conform propoziţiei 4°. 8, $Q(M', n)$ este un polinom cu acelaşi grad şi coeficient dominant ca polinomul $P_q(M', n)$.

Cu notaţia $R = Q(M', n) - P_q(M', n)$ rezultă gr $R <$ gr $P_q(M', n)$ şi egalitatea $(*)$ din propoziţie.

Evident gr $P_q(M', n) \leqslant$ gr $P_q(M, n)$ căci din $M'_n = \underline{q}^n M \cap M'$ rezultă $M'/M'_n \subseteq M/\underline{q}^n M$, de unde $l(M'/M'_n) \leqslant l(M/\underline{q}^n M)$ şi, pentru n suficient de mare,

$$Q(M', n) \leqslant P_q(M, n).$$

De aici rezultă gr $Q(M', n) \leqslant$ gr $P_q(M, n)$ de unde afirmaţia, căci

$$\text{gr } Q(M', n) = \text{gr } P_q(M', n).$$

COROLARUL 4°.10. *Pentru orice* $x \in A$, *fie* ${}_xM$ *submodulul lui* M *format din toate elementele anulate prin* x. *Atunci dacă* $\underline{q}$ *este un ideal de definiție, gradul polinomului*

$$P_{\underline{q}}(M, n) - P_{\underline{q}}(M/{}_xM, n) \text{ este } \leqslant d(M) - 1.$$

Într-adevăr, din șirurile exacte

$$0 \to {}_xM \to M \to {}_xM \to 0$$

$$0 \to {}_xM \to M \to M/{}_xM \to 0$$

rezultă

$$\text{gr}\,[P_{\underline{q}}(M, n) - P_{\underline{q}}({}_xM, n) - P_{\underline{q}}({}_xM, n)] \leqslant d(M) - 1$$

$$\text{gr}\,[P_{\underline{q}}(M, n) - P_{\underline{q}}({}_xM, n) - P_{\underline{q}}(M/{}_xM, n)] \leqslant d(M) - 1$$

de unde afirmația.

Primită la redacție la 17 august 1966

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique*. vol. IV.
2. A. LASCU, *Algebră locală*. Editura didactică și pedagogică, București, 1965.

ASUPRA UNUI MODEL ALGEBRIC AL CATEGORIILOR GRAMATICALE

DE

CONSTANTIN RAISCHI

În acest articol se continuă studiul structurilor definite pe un graf tranzitiv și reflexiv, studiu început de B. N. Mayoh în [8]. În special, se cercetează structura și proprietățile clanurilor, și se fac exemplificări.

1. INTRODUCERE

Conceptul de clan a fost introdus de S. Marcus în [3], [4], [5] (a se vedea și Cap. 5 din [6] și [7]), pentru a explica noțiunea de categorie gramaticală. B. H. Mayoh a extins conceptul de clan, pentru mulțimi oarecare.

Se consideră un graf $G = (V, R)$ definit de o relație R binară, tranzitivă și reflexivă, pe o mulțime de vîrfuri V, nevidă. Pentru două mulțimi A și B incluse în V se scrie : $A \to B$, dacă pentru orice a din A și orice b din B, avem aRb. Pentru orice mulțime A din V, se definește mulțimea $A = \{x \mid x \in V,\ A \to \{x\}\}$. O mulțime C din V se numește *clan*, dacă există o submulțime A a lui V, astfel încît : $C = A \cup A$. În acest caz, A se numește *generatorul* clanului C. Un generator A al unui clan C se numește *generator critic*, dacă orice alt generator al clanului C este sau inclus în A, sau include pe A. Un generator care nu este critic, se numește *generator necritic*. Se numește *familia* vîrfului x, mulțimea : $F(x) = \{y \mid x\, Ry$ *și* $yRx,\ y \in V\}$. În genere, o familie se notează cu F. O familie F este *neproductivă*, dacă $F = \hat{F}$. Dacă o familie F și o mulțime A sînt conținute într-un clan C, astfel încît : $A \to F \to C - A$ și $\hat{F} \subseteq C$, atunci se spune că mulțimea A este *F-critică*.

Nucleul unui clan C este cel mai mic generator critic al lui C. În [8], s-a stabilit că nucleul este sau vid, sau o familie.

Un clan C este *minimal*, dacă nu conține nici un alt clan nevid. În [8] s-a dat o condiție necesară și suficientă ca un clan să fie minimal. Două familii F_1 și F_2 sînt *incomparabile*, dacă relațiile $F_1 \to F_2$ și $F_2 \to F_1$ sînt false. Un clan este *reductibil*, dacă este reuniunea a două clanuri nevide și disjuncte. În caz contrar, clanul se numește *ireductibil*. În [8] s-au dat

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 549–563, BUCUREȘTI, 1967

condiții suficiente și condiții necesare și suficiente pentru ca un clan să fie reductibil.

Toate aceste noțiuni au fost introduse de B. H. Mayoh în [8], și vor fi folosite în cele ce urmează.

Vom mai întrebuința și următoarele noțiuni introduse de S. Marcus în [3]. O mulțime A se numește *finală*, dacă nu există nici un vîrf $x \notin A$, astfel încît $A \rightarrow \{x\}$. O mulțime A pentru care nu există nici un vîrf $x \notin A$, astfel încît $\{x\} \rightarrow A$, se numește *inițială*.

O mulțime se numește *normală*, dacă este o reuniune de familii. Mulțimea A se numește *involutivă*, dacă $A \supseteq \hat{A}$.

Proprietăți ale mulțimilor inițiale, mulțimilor involutive și mulțimilor normale sînt date în [3], [6] și [7].

2. O CARACTERIZARE A NUCLEELOR

Din modul în care a fost definit generatorul necritic, rezultă că un generator A al unui clan C este necritic, dacă și numai dacă există un alt generator B, nevid, astfel încît să avem relațiile : $B - A \neq 0 \neq A - B$.

Se observă că și generatorul B este necritic. În general, dacă un clan are generatori necritici, atunci ei sînt în număr de cel puțin doi.

Această observație va fi folosită în continuare.

Lema de mai jos este o extindere a teoremei 1 din [6] și are aceeași demonstrație.

LEMA 1. *Dacă două mulțimi A și B sînt generatori necritici ai clanului C, atunci există o familie F, unic determinată, cu proprietățile:*

$$A \triangle B \subseteq F \quad \text{și} \quad A \cup B \rightarrow F.$$

Propoziția care urmează este o extindere a corolarului 1 din [6]. Demonstrația ei nu diferă esențial de cea a corolarului 1 [6].

PROPOZIȚIA 1. *Un clan C nu poate fi generat de două mulțimi disjuncte care să nu fie conținute în aceeași familie.*

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că există doi generatori disjuncți ai clanului C, care nu sînt conținuți în aceeași familie. Îi notăm A și B. Rezultă că A și B sînt generatori necritici. În acest caz, în baza lemei 1, există o familie F astfel încît : $A \triangle B \subseteq F$.

Deoarece A și B sînt disjuncți, avem : $A \triangle B = A \cup B \subseteq F$, ceea ce contrazice ipoteza.

Din teorema 4 din [8] rezultă că nucleul nevid al unui clan se poate afla numai printre familiile clanului.

PROPOZIȚIA 2. *Nucleul unui clan C este unic.*

Demonstrație. Presupunem, prin absurd, că există două nuclee A și B, distincte, ale clanului C. Nu putem avea A și B disjuncte.

Deoarece A este generator critic, avem : $A \supset B$ sau $B \subset A$.

Deoarece B este generator critic, avem : $B \supset A$ sau $B \subset A$.

Rezultă că avem următoarele cazuri :

Cazul 1. $A \subset B$ și $B \subset A$; rezultă $A = B$.

Cazul 2. $A \subset B$; acest caz nu este posibil, deoarece B este cel mai mic generator critic al lui C.

Cazul 3. $B\subset A$; și acest caz este imposibil, deoarece A este cel mai mic generator critic al lui C.

Deci avem $A=B$ și propoziția este demonstrată.

Teorema 1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca un generator A al unui clan C să fie nucleu este ca generatorul A să fie familie.*

Demonstrație. Necesitatea condiției rezultă din teorema 4 din [8].

Condiția este suficientă. Fie A o familie, generator al clanului C. Vom arăta că A este generator critic. Pentru aceasta, considerăm un alt generator B, distinct de A, nevid, al lui C. A și B nu pot fi conținuți în aceeași familie, și deci, în baza propoziției 1, nu sînt disjuncți. Avem următoarele două cazuri :

Cazul 1. $A\not\supset B$. Vom arăta că în acest caz $A\subset B$. Presupunem, prin absurd, $A\not\subset B$. Deoarece $B-A\neq 0\neq A-B$, în baza lemei 1, există o familie F, astfel ca : $A\triangle B\subseteq F$.

Deoarece A este familie și $A\cap F\neq 0$, avem $A=F$.

Rezultă $B-A\subset A$. Această relație este posibilă, numai dacă $B-A=0$, adică $A\supset B$. Dar aceasta contrazice ipoteza $A\not\supset B$.

Cazul 2. $B\not\supset A$. Se arată la fel ca în cazul 1, că $A\supset B$.

Acum vom arăta că A este cel mai mic generator critic al clanului C.

Presupunem, prin absurd, că există un generator critic B, distinct de A, nevid, astfel încît $B\subset A$.

În acest caz există o mulțime $D=\{x\mid x\in A$ și $x\notin B\}$, $D\subset A$, care este generator al clanului C.

Deoarece $D\subset\hat{A}$, avem : $\hat{D}=\hat{A}$ și $D\cup\hat{D}=\hat{A}\cup D=C$.

Din modul în care a fost definit D, rezultă că $D\cap B=0$, adică $D-B\neq 0\neq B-D$.

Deci, B nu este generator critic, ceea ce contrazice ipoteza făcută asupra lui B.

Teorema este demonstrată.

Definiție. *Familia care este nucleu pentru clanul C, o vom numi familie-nucleu.*

Corolarul 1. *Dacă clanul C are familia-nucleu A, atunci avem :* $C=\hat{A}$.

Aceasta rezultă din faptul că $A\subset\hat{A}$.

Corolarul 2. *Dacă clanul C are un generator A, conținut într-o familie F, atunci clanul C are ca nucleu familia F.*

Aceasta rezultă din faptul că F este generator al clanului C.

Evident, doi generatori disjuncți ai unui clan sînt generatori necritici, și în baza propoziției 1, ei sînt incluși în aceeași familie. În baza corolarului 2, această familie este chiar familia-nucleu a clanului. Rezultă că într-un clan există cel mult o familie care să conțină generatori necritici disjuncți.

Corolarul 3. *Orice parte a familiei-nucleu, a unui clan C, este generator necritic al clanului.*

Aceasta rezultă din demonstrația teoremei 1.

Din cele spuse mai sus obținem :

Corolarul 4. *Condiția necesară și suficientă ca un clan C să aibă generatori necritici disjuncți este ca să existe o familie-nucleu.*

Vom exemplifica noţiunile de clan, generator necritic, nucleu.

Drept clanuri putem considera categoriile gramaticale elementare, generate de familii iniţiale, definite în [3]. Un astfel de clan este categoria gramaticală elementară generată de familia iniţială, S (*frumos*), formată din adjectivele calificative nearticulate din limba română, care se notează : $\mathcal{C}(S$ (*frumos*)). În acest clan familia-nucleu este S (*frumos*). Un exemplu de generator necritic al clanului $\mathcal{C}$ (S (*frumos*)) este mulţimea : $A = \{$*înalt*, *mic*$\}$.

Într-adevăr : $A \to \hat{S}$ (*frumos*) şi $A \subset S$ (*frumos*).

După cum s-a arătat în [3], avem : $\hat{A} = \hat{S}$ (*frumos*), deci $A \cup \hat{A} = \mathcal{C}$ (S(*frumos*)).

Exemplu de generatori necritici disjuncţi în clanul $\mathcal{C}$ (S (*frumos*)) : $A = \{$*înalt*, *mic*$\}$ şi $B = \{$*nou*$\}$. A şi B sînt generatori incluşi în familia S (*frumos*) şi $A \cap B = 0$.

Din proprietăţile familiilor de adjective calificative nearticulate din limba romînă arătate în [6], rezultă că familia S (*frumos*) este unica familie care generează clanul $\mathcal{C}$ (S (*frumos*)). Aceasta este în concordanţă cu propoziţia 2.

Un alt exemplu de clan este categoria gramaticală generată de o rădăcină definită în [1], pe care o notăm cu G. Rădăcina unui clan G este familie-nucleu. Din propoziţia 2 şi observaţia de mai sus rezultă că un clan G este generat de o singură rădăcină.

3. O CARACTERIZARE A GENERATORILOR NECRITICI

În acest paragraf vom caracteriza generatori necritici ai unui clan, cu ajutorul noţiunii de mulţime F-critică. Observăm, din definiţie, că o mulţime A inclusă în clanul C, F-critică, are proprietatea : $F \cup \hat{F} \subset C \subset A \cup \hat{A}$.

TEOREMA 2. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o mulţime A, inclusă într-un clan C, să fie generator necritic, este ca să existe o familie F, inclusă în clanul C, astfel încît A să fie F-critică şi intersecţia mulţimii A cu familia F să fie nevidă.*

Demonstraţie. Condiţia este necesară. Deoarece un clan cu generatori necritici are cel puţin doi generatori necritici, există un generator necritic B, inclus în clanul C, astfel ca $A \neq B$. În baza lemei 1 există o familie $F \subset C$, astfel încît : $A \cup B \to F$ şi $A \triangle B \subseteq F$.

Atunci avem : $A \to F$ şi $A \cap F \neq 0$. (1)

Deoarece A este generator al clanului C, avem : $A \to C-A$, unde $C-A \cup \hat{A}$ (2).

Din (1) şi (2) avem : $A \to F \to C-A$ şi $\hat{F} \subset \hat{A} \subset C$.

Rezultă că A este F-critică şi $A \cap F \neq 0$.

Condiţia este suficientă. Presupunem că există o familie F inclusă în clanul C, astfel ca A să fie F-critică şi $A \cap F \neq 0$. În aceste condiţii, conform teoremei 1 din [8], A este generator. Mulţimea A se mai poate scrie astfel : $A = (A-F)\cup(A\cap F)$. Vom arăta că mulțimea $A-F$ este F-critică.

Într-adevăr : $A-F\to F$. Deoarece $C-(A-F) = (C-A)\cup F$, avem : $F\to C-(A-F)$. Rezultă că mulțimea $A-F$ este F-critică și $(A-F)\cap F=0$. În aceste condiții se poate aplica teorema 2 din [8], din care rezultă că A este generator necritic.

Corolarul 5. *Orice generator necritic* A, *al unui clan* C, *este de forma* :

$$A = (A-F)\cup(A\cap F)$$

unde mulțimea $A-F$ *este* F*-critică și familia* F *este inclusă în clanul* C.

Aceasta rezultă din teorema 3 din [8] și demonstrația teoremei 2.

Corolarul 6. *Fie* A *o mulțime inclusă în clanul* C, *care este* F*-critică și intersectează pe* F. *In aceste condiții, mulțimea* A *este generator necritic al clanului* C.

Aceasta rezultă din suficiența condiției din teorema 2.

Acest corolar precizează concluzia teoremei 1 din [8].

Din teorema 2 rezultă că orice generator necritic al unui clan este un exemplu de mulțime F-critică.

Astfel, dacă considerăm clanul $\mathcal{G}(S(\mathit{frumos}))$, mulțimea $A = \{\mathit{frumos}, \mathit{mic}\}$ este F-critică, unde rolul familiei F îl are familia $S(\mathit{frumos})$.

În acest exemplu avem : $A-F = 0$ și $A\cap F = A$. Deoarece mulțimea vidă este F-critică, întotdeauna avem : $A = (A-F)\cup(A\cap F)$. Mulțimea A este generator necritic, deoarece $A\subset S(\mathit{frumos})$.

Un alt exemplu de generator necritic al clanului $\mathcal{G}(S(\mathit{frumos}))$ este mulțimea : $A=S(\mathit{frumos})\cup S(\mathit{precoce})\cup S(\mathit{dibaci})\cup S(\mathit{subțire})\cup S(\mathit{june})\cup \cup\{\mathit{maro}\}$. Mulțimea A este F-critică, unde F este familia $S(\mathit{maro})$. Într-adevăr : $A\to S(\mathit{maro})$, $S(\mathit{maro})\to\mathcal{G}(S(\mathit{frumos}))-A = S(\mathit{maro})$ și $\hat{S}(\mathit{maro}) = S(\mathit{maro})$. Mulțimea A se poate scrie :

$A = [S(\mathit{frumos})\cup S(\mathit{precoce})\cup S(\mathit{dibaci})\cup S(\mathit{subțire})\cup S(\mathit{june})]\cup \cup\{\mathit{maro}\}$ adică : $A = (A-F)\cup(A\cap F)$, unde mulțimea $A-F$ este F-critică.

4. PROPRIETĂȚI ALE CLANURILOR

În acest paragraf se caracterizează clanul cu ajutorul noțiunilor de mulțime finală și mulțime involutivă, și se studiază proprietăți generale ale clanurilor.

Mai întîi vom stabili echivalența dintre mulțimile finale și mulțimile involutive.

Propoziția 3. *Orice mulțime finală este mulțime involutivă.*

Demonstrație. Fie A o mulțime finală. Din definiția mulțimii finale, rezultă : dacă $A\to B$, atunci $B\subset A$. Deoarece $A\to\hat{A}$ rezultă $\hat{A}\subset A$. Deci mulțimea A este involutivă.

Propoziția 4. *Orice mulțime involutivă este mulțime finală.*

Demonstrație. Fie A o mulțime involutivă. Din definiția mulțimii involutive rezultă : $\hat{A}\subseteq A$. Adică, orice mulțime B, nevidă, pentru care avem $A\to B$, este inclusă în A.

Aceasta arată că A este mulțime finală.

TEOREMA 3. *Condiția necesară și suficientă pentru ca o mulțime C, inclusă în V, să fie clan, este ca mulțimea C să fie mulțime involutivă.*

Demonstrație. Condiția este necesară. Fie C un clan. Din definiția clanului, există un generator A al clanului, astfel încît : $A \cup \hat{A} = C$.

Fie B o mulțime nevidă, astfel încît : $C \rightarrow B$.

În baza tranzitivității relației $\rightarrow$, rezultă $A \rightarrow B$. Deci $B \subset \hat{A} \subset C$.

Rezultă că mulțimea C este finală. Din echivalența mulțimilor finale cu mulțimile involutive, rezultă că mulțimea C este mulțime involutivă.

Condiția este suficientă. Fie C o mulțime involutivă. În acest caz avem : $\hat{C} \subseteq C$. Rezultă că $C \cup \hat{C} = C$, adică C este clan și are ca generator tot pe C.

Observație. În teorema 3 putem pune în loc de mulțime involutivă, mulțime finală, datorită echivalenței celor două noțiuni.

O ilustrare lingvistică a teoremei 3.

Fie mulțimea : $C = \mathcal{G}(S(\textit{frumos})) \cup \mathcal{G}(S(\textit{frumoasă}))$.

Mulțimea C este o mulțime involutivă. Într-adevăr : $\hat{C} = S(\textit{maro}) \subset C$.

În baza teoremei 3, mulțimea C este un clan. Acest clan este o categorie gramaticală, care, din punct de vedere semantic, reprezintă totalitatea adjectivelor calificative nearticulate, la forma de nominativ, singular, gradul pozitiv, din limba română, după cum s-a arătat în [6].

În baza teoremei 3 rezultă că orice categorie gramaticală este o mulțime involutivă.

COROLAR. *Clanul generat de un clan C, coincide cu clanul C.*

Dacă luăm drept clan C categoria gramaticală $\mathcal{G}(A)$, atunci, în baza corolarului de mai sus, rezultă : $\mathcal{G}(\mathcal{G}(A)) = \mathcal{G}(A)$. Acest rezultat a fost obținut și în teorema 13 [6].

Dacă luăm drept clan C categoria gramaticală $G(A)$, generată de rădăcina A în sens generalizat, și aplicăm corolarul de mai sus, obținem următorul rezultat : categoria gramaticală generată de categoria gramaticală $G(A)$, coincide cu $G(A)$. Această afirmație are sens, deoarece în [2] s-a demonstrat că $G(A)$ este o rădăcină în sens generalizat.

Denumirea de clan este utilizată în teoria măsurii. Din această cauză vom înlocui, în continuare, denumirea de clan cu denumirea de *mulțime involutivă*. Această înlocuire este naturală, datorită teoremei 3.

LEMA 2. *Dacă mulțimea A este involutivă, iar mulțimea X este oarecare, atunci mulțimea $A \cup X$ este o mulțime involutivă.*

Demonstrație. Considerăm mulțimea $\widehat{A \cup X}$. Avem $A \rightarrow \widehat{A \cup X}$.

Deoarece mulțimea A este involutivă, rezultă : $\widehat{A \cup X} \subset A \subset A \cup X$.

Acest rezultat a fost obținut, pe altă cale, și în lema din [8].

PROPOZIȚIA 5. *Reuniunea a două mulțimi involutive este o mulțime involutivă.*

Demonstrația rezultă imediat, aplicînd lema 2.

Exemple în care se aplică propoziția 5.

Reuniunea a două categorii gramaticale elementare este o mulţime involutivă. În [6] s-a arătat că această reuniune este chiar o categorie gramaticală normală.

Reuniunea a două categorii gramaticale generate de rădăcini în sens generalizat este o mulţime involutivă. În baza teoremei 1 din [1], această mulţime involutivă este o rădăcină în sens generalizat. Deoarece categoria gramaticală, generată de această rădăcină în sens generalizat, coincide chiar cu rădăcina, rezultă că mulţimea involutivă de mai sus este o categorie gramaticală, generată de o rădăcină în sens generalizat.

Astfel s-a demonstrat următoarea propoziţie :

PROPOZIŢIA 6. *Reuniunea a două categorii gramaticale, generate de rădăcini în sens generalizat, este o categorie gramaticală generată de o rădăcină în sens generalizat.*

Introducem noţiunea de *proprietate filtrantă* a unei mulţimi.

DEFINIŢIE. *O proprietate P a unei mulţimi A se numeşte filtrantă, dacă îndeplineşte condiţia : pentru orice mulţime X, reuniunea $A \cup X$ are proprietatea P.*

PROPOZIŢIA 7. *Dacă o mulţime A posedă proprietatea P filtrantă, atunci avem :*

1. Reuniunea dintre mulţimea A şi o mulţime B, care posedă proprietatea P, posedă proprietatea P.

2. Mulţimea involutivă, generată de mulţimea A, notată cu $C(A)$, posedă proprietatea P.

3. Mulţimea involutivă, generată de mulţimea involutivă generată de mulţimea A, notată cu $C(C(A))$ posedă proprietatea P.

4. Reuniunea dintre mulţimea involutivă generată de mulţimea A, notată cu $C(A)$, şi mulţimea involutivă generată de mulţimea B, care posedă proprietatea P, notată cu $C(B)$, posedă proprietatea P.

Demonstraţie. 1. Deoarece proprietatea P este filtrantă, rezultă că $A \cup X$ posedă proprietatea P, pentru orice mulţime X. Luăm drept mulţime X, mulţimea B, şi afirmaţia este demonstrată.

2. $C(A) = A \cup \hat{A}$; considerăm drept mulţime X, mulţimea $\hat{A}$, şi afirmaţia este demonstrată.

3. $C(C(A))$ posedă proprietatea P, deoarece $C(A)$ posedă proprietatea P.

4. Deoarece $C(A)$ şi $C(B)$ posedă proprietatea P, aplicînd punctul 1, rezultă că $C(A) \cup C(B)$ posedă proprietatea P.

Exemple de proprietăţi filtrante.

Proprietatea unei mulţimi de a fi iniţială este o proprietate filtrantă, după cum s-a demonstrat în [6].

S-a demonstrat mai sus că proprietatea unei mulţimi de a fi involutivă este o proprietate filtrantă.

În [2] s-a demonstrat că proprietatea unei mulţimi de a fi rădăcină în sens generalizat este o proprietate filtrantă.

Dacă în propoziţia 7 considerăm drept proprietatea P, una din proprietăţile filtrante de mai sus, obţinem afirmaţii date în [6], [1], [2].

De exemplu : a) reuniunea a două mulţimi iniţiale este o mulţime iniţială.

b) categoria gramaticală generată de o mulţime iniţială este o mulţime iniţială.

c) categoria gramaticală generată de o rădăcină în sens generalizat este o rădăcină în sens generalizat.

d) reuniunea a două rădăcini în sens generalizat este o rădăcină în sens generalizat.

e) reuniunea a două categorii gramaticale generate de rădăcini în sens generalizat este o categorie gramaticală generată de o rădăcină în sens generalizat.

PROPOZIȚIA 8. *Dacă mulțimile C_1 și C_q nu sînt involutive, atunci intersecția mulțimii C_1 cu mulțimea C_2 este sau vidă, sau nu este o mulțime involutivă.*

Demonstrație. Presupunem $C_1 \cap C_2 \neq 0$. Deoarece C_1 nu este mulțime involutivă, există un vîrf x_1, care nu aparține mulțimii C_1 și astfel încît : $C_1 \rightarrow \{x_1\}$.

Deoarece $C_1 \cap C_2 \subset C_1$, rezultă : $C_1 \cap C_2 \rightarrow \{x_1\}$ și $x_1 \notin C_1 \cap C_2$. (1)

Existența vîrfului x_1 cu proprietatea (1), arată că $C_1 \cap C_2$ nu este mulțime involutivă.

CONSECINȚĂ. *Dacă C_1 este o mulțime involutivă iar mulțimea C_2 nu este involutivă, atunci intersecția mulțimii C_1 cu mulțimea C_2 nu este involutivă, atunci intersecția mulțimii C_1 cu mulțimea C_2 este sau vidă, sau nu este mulțime involutivă.*

PROPOZIȚIA 9. *Dacă A și B sînt două mulțimi cu proprietatea : $\hat{A} = \hat{B} = P$, atunci avem :*

1. $C(A) \cup C(B) = C(A \cup B)$.

2. $P = C(A) \cap C(B)$,

unde $C(A \cup B)$ este mulțimea involutivă generată de mulțimea $A \cup B$.

Punctul 1 este o generalizare a teoremei 4 din [2] și se demonstrează la fel.

Punctul 2 este o generalizare a teoremei 5 din [2] și are aceeași demonstrație.

PROPOZIȚIA 10. *Dacă mulțimea A este generatorul mulțimii involutive $C(A)$ iar mulțimea B este generatorul mulțimii involutive $C(B)$, atunci :*

$$C(A \cup B) = [C(A) \cap C(B)] \cup (A \cup B).$$

Această propoziție este o generalizare a teoremei 10 din [6], dată pentru mulțimi inițiale și are aceeași demonstrație.

Orice mulțime involutivă C are ca nucleu mulțimea vidă. Într-adevăr, mulțimea vidă poate fi socotită ca o familie care generează mulțimea involutivă C.

PROPOZIȚIA 11. *O mulțime involutivă C are ca nucleu tot pe C, dacă și numai dacă mulțimea C este o familie neproductivă.*

Demonstrație. Condiția este necesară. Deoarece mulțimea involutivă C este nucleu, ea este familie. Deoarece $\hat{C} = C$, rezultă că C este o familie neproductivă.

Condiția este suficientă. Fie C o familie neproductivă. Deoarece $\hat{C} = C$, ea este involutivă. Deoarece $C \cup \hat{C} = C$, rezultă că C este generator și deci este nucleu.

Un exemplu de familie neproductivă este familia S (*maro*), formată din adjective calificative nearticulate din limba română.

Într-adevăr :

$\hat{S}(maro) = s(maro)$, deci $S(maro)$ este o mulțime involutivă, care are nucleul $S(maro)$.

Propoziția 12. *Fie C o mulțime involutivă. Dacă $\hat{C}$ este nevidă, atunci $\hat{C}$ este o familie neproductivă.*

Demonstrație. Deoarece mulțimea C este involutivă, avem $\hat{C} \subset C$.

Din tranzitivitatea relației $\rightarrow$, rezultă că $\hat{C} \rightarrow \hat{C}$.

Deoarece $\hat{C}$ nu poate fi decît o reuniune de familii, rezultă că $\hat{C}$ este familie.

Deoarece $(\widehat{\hat{C}}) = C$, rezultă că C este o familie neproductivă.

Propoziția este demonstrată.

Din teorema 9 din [8] rezultă că o mulțime involutivă C, minimală, este sau o familie neproductivă, sau este formată din cîte un vîrf din fiecare familie $F_1, F_2, \ldots, F_i \ldots$ incomparabile două cîte două, care îndeplinesc condiția : pentru orice i, există x_i astfel încît $x_i \notin C$ și $C - F_i \rightarrow \{x_i\}$.

Următoarea propoziție dă o condiție necesară ca o mulțime involutivă C, care nu este familie, să fie minimală.

Propoziția 13. *Dacă o mulțime involutivă C, care nu este familie, este minimală, atunci $\hat{C}$ este vidă.*

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că $\hat{C}$ nu este vidă.

În baza propoziției 12, $\hat{C}$ este o mulțime involutivă conținută în C. Dar aceasta contrazice faptul că C este o mulțime involutivă minimală.

Cu ajutorul propoziției 13, se poate demonstra că în mulțimea adjectivelor nearticulate din limba romînă există o singură mulțime involutivă minimală, familia neproductivă S (*maro*).

Din definiția mulțimii involutive ireductibile, rezultă că orice mulțime involutivă minimală este ireductibilă.

5. MULȚIMI INVOLUTIVE CU FAMILIE-NUCLEU

Propoziția 14. *O mulțime involutivă cu familie-nucleu este o reuniune de familii.*

Demonstrația rezultă imediat din corolarul 1 al teoremei 1.

Această propoziție arată că orice mulțime involutivă cu familie-nucleu este o mulțime normală. Totuși, nu orice mulțime involutivă, care este mulțime normală, are familie-nucleu. Ca ilustrare avem următorul exemplu. Considerăm mulțimea involutivă : $H = \mathcal{G}(S(frumos)) \cup \cup (S(frumoasă))$, care este reuniunea a două categorii gramaticale elementare. Deoarece orice categorie gramaticală elementară este o mulțime involutivă cu familie-nucleu, în baza propoziției 14, rezultă că H este o mulțime normală. Cu toate acestea, H nu are familie-nucleu, după cum se va arăta în continuare.

De asemenea, există mulțimi involutive care nu sînt mulțimi normale. Ca ilustrare avem următorul exemplu, din limba romînă. Considerăm mulțimea involutivă generată de mulțimea : $A = \{\textit{june}, \textit{frumos}\}$, pe care o notăm $C(A)$:

$$C(A) = \{\textit{frumos}\} \cup \mathcal{S}(\textit{june}) \cup \mathcal{S}(\textit{precoce}) \cup \mathcal{S}(\textit{vechi}) \cup \mathcal{S}(\textit{maro}).$$

Evident, $C(A)$ nu este o mulțime normală.

Deoarece intersecția a două mulțimi normale este sau vidă, sau o mulțime normală, rezultă că intersecția a două mulțimi involutive cu familie-nucleu este sau vidă, sau o mulțime normală.

Despre o mulțime involutivă, care are familie-nucleu, putem spune că este generată de familia-nucleu. Invers, orice mulțime involutivă generată de o familie este o mulțime involutivă, care are ca familie-nucleu, familia care o generează.

În continuare, se cercetează proprietățile generatorilor critici și necritici într-o mulțime involutivă cu familie-nucleu.

Într-o mulțime involutivă cu familie-nucleu, orice generator critic este o mulțime normală. Aceasta rezultă din teorema 4 din [8].

Vom introduce noțiunea de *ordin* al unui generator critic, într-o mulțime involutivă cu familie-nucleu.

DEFINIȚIE. *Intr-o mulțime involutivă cu familie-nucleu, numim ordinul unui generator critic, numărul de familii distincte, diferite de familia-nucleu, incluse în generatorul critic.*

Convenim să considerăm familia-nucleu ca generator critic de ordinul zero. Rezultă că ordinul unui generator critic, într-o mulțime involutivă, este un număr natural, sau zero. Dacă avem o mulțime involutivă C cu familia-nucleu A, atunci un generator critic de ordinul k este de forma :

$A \cup (\bigcup_{i=1}^{k} F_i)$, unde F_i $(i = 1,2,\ldots, k)$ sînt familii și $F_i \neq F_j$ pentru $i \neq j$.

Într-o mulțime involutivă cu familie-nucleu, generatorul critic de ordinul k, pentru orice k, poate să existe, sau să nu existe.

O ilustrare a ordinului unui generator critic este următorul exemplu din limba romînă. Fie mulțimea involutivă $\mathcal{G}(\mathcal{S}(\textit{frumos}))$, care are ca familie-nucleu, familia $\mathcal{S}(\textit{frumos})$. Mulțimea :

$$\mathcal{S}(\textit{frumos}) \cup \mathcal{S}(\textit{vechi}) \cup \mathcal{S}(\textit{precoce}) \cup \mathcal{S}(\textit{dibaci}) \cup \mathcal{S}(\textit{subțire}) \cup \mathcal{S}(\textit{june})$$

este un generator critic de ordinul cinci al acestei mulțimi involutive.

În această mulțime involutivă nu există generatori critici de ordin nenul, mai mic ca cinci. Singurul generator critic de ordin mai mare ca cinci este mulțimea involutivă însăși.

PROPOZIȚIA 15. *Dacă există generatorul critic de ordinul k, al unei mulțimi involutive cu familia-nucleu A, atunci el este unic, pentru orice k.*

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că există doi generatori critici, distincți, de ordinul K, B_1 *și* B_2.

Acești generatori sînt de forma : $B_1 = A \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right) B_2 = A \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k} F_j\right)$,

unde $F_i \neq F_j$, pentru orice i și j. Deoarece B_1 și B_2 sînt generatori critici, avem :

Cazul 1. $B_1 \subseteq B_2$; aceasta înseamnă : $\bigcup_{i=1}^{k} F_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} F_j$, relație care este adevărată numai dacă $\bigcup_{i=1}^{k} F_i = \bigcup_{j=1}^{k} F_j$, deoarece fiecare reuniune conține același număr de familii. Rezultă că $B_1 = B_2$.

Cazul 2. $B_2 \subseteq B_1$; se raționează la fel ca în cazul 1.

Propoziția este demonstrată.

Un generator critic de ordinul i este inclus într-un generator critic de ordinul $i + 1$, pentru orice i natural sau zero. Această afirmație rezultă imediat, ținînd seama de structura generatorilor critici.

PROPOZIȚIA 16. *Intr-o mulțime involutivă cu familie-nucleu, orice generator critic de ordinul* i *este inclus în generatorul critic de ordinul* j, *pentru* i *mai mic decît* j.

Demonstrație. Notăm cu A_k generatorul critic de ordinul k. Între A_i și A_j avem următorul șir de incluziuni : $A_i \subset A_{i+1} \subset A_{i+2} \subset \ldots \subset A_{j-1} \subset A_j$, de unde rezultă $A_i \subset A_j$.

PROPOZIȚIA 17. *Intr-o mulțime involutivă cu familie-nucleu, pentru erice generator critic* A_i *și orice generator critic* A_j, *unde* i *este mai mic ca* j, *avem* :

$$A_i \to A_j - A_i .$$

Demonstrație. Din $A_j - A_i \subset \hat{A}_i$ rezultă $A_i \to A_j - A_i$.

TEOREMA 4. *Fie* C *o mulțime involutivă cu familia-nucleu* A. *Considerăm doi generatori critici* B_k *și* B_{k+1}, *de ordinul* k, *respectiv* $k + 1$. *Notăm* $F = B_{k+1} - B_k$. *Orice generator necritic, inclus în* B_{k+1} *este de forma* :

$$D = B_k \cup B ,$$

unde B *este o submulțime a lui* F.

Demonstrație. Fie $D = B_k \cup B$, unde $B \subset F$. Evident, F este o familie. În baza teoremei 2, pentru a arăta că D este generator necritic, este suficient să arătăm că B_k este F- critică.

Deoarece $F \cap B_k = 0$ și $F \subset \hat{B}_k$, rezultă că $B_k \to F$.

Deoarece $C - B_k = (C - B_{k+1}) \cup F$ și $F \to C - B_{k+1}$, rezultă $F \to C - B_k$.

Din $A \to F \to \hat{F}$, rezultă $\hat{F} \subset C$.

Rezultă că B_k este F-critică.

Invers, fie D un generator necritic inclus în B_{k+1}. Arătăm că $D = B_k \cup B$, unde $B \subset F$. Deoarece B_k este generator critic, rezultă $B_k \subset D$.

Notăm $B = D - B_k$. Evident, $B \subset F$. Rezultă : $D = B_k \cup B$, unde $B \subset F$.

Ca ilustrare a acestei teoreme, să considerăm următorul exemplu din limba romînă. Fie $\mathcal{G}(\mathcal{S}(\textit{frumos}))$ mulțimea involutivă cu familia-nucleu $\mathcal{S}(\textit{frumos})$. Drept B_k considerăm mulțimea :

$$\mathcal{S}(\textit{frumos}) \cup \mathcal{S}(\textit{vechi}) \cup \mathcal{S}(\textit{precoce}) \cup \mathcal{S}(\textit{dibaci}) \cup \mathcal{S}(\textit{subțire}) \cup \mathcal{S}(\textit{june}).$$

Fie $B_{k+1} = \mathcal{G}(\mathcal{S}(\textit{frumos}))$. Un generator necritic al mulțimii involutive considerate inclus în B_{k+1} este mulțimea :

$A = \mathcal{S}(\textit{frumos}) \cup \mathcal{S}(\textit{vechi}) \cup \mathcal{S}(\textit{precoce}) \cup \mathcal{S}(\textit{dibaci}) \cup \mathcal{S}(\textit{subțire}) \cup$
$\cup \mathcal{S}(\textit{june}) \cup \{\textit{cumsecade}\}$

Mulțimea A este de forma :

$$A = B_k \cup \{\textit{cumsecade}\},$$

unde $\{\textit{cumsecade}\} \subset \mathcal{S}(\textit{maro}) = \mathcal{G}(\mathcal{S}(\textit{frumos})) - B_k$.

Observație. Fie C o mulțime involutivă cu familie-nucleu. Presupunem că C conține doi generatori critici neconsecutivi, B_k și B_{k+m}. Notăm $F = B_{k+m} - B_k$. F este o reuniune de familii : $F = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$, unde $F_i \neq F_j$ pentru $i \neq j$.

Orice generator necritic inclus în B_{k+m} este de forma :

$$D = B_k \cup A \cup \{F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_{k-1}}, F_{i_{k+1}}, \ldots, F_{i_m}\}$$

unde :

$$A \cap \{F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_{k-1}}, F_{i_{k+1}}, \ldots, F_{i_m}\} = 0 \text{ și } A \subset F_{i_k},$$

F_{i_k} fiind familia cu următoarea proprietate : $F_{i_j} \to F_{i_k}$, pentru orice $i_j \neq i_k$.

Rezultă imediat că familia F_{i_k} cu această proprietate este unică. Dacă nu există nici o familie F_{i_k}, cu această proprietate, inclusă în F, atunci nu există generatori necritici incluși în B_k. O ilustrare a acestei afirmații o constituie exemplul de mai sus. Notăm, în acel exemplu, $F = B_k - S$ (*frumos*). F este o reuniune de familii. Se verifică ușor că în F nu există nici o familie F_{i_k} cu proprietatea : $F_{i_j} \to F_{i_k}$ pentru orice $i_j \neq i_k$.

Deci, nu există nici un generator necritic inclus în B_k, diferit de generatorii necritici incluși în familia-nucleu S (*frumos*).

Trebuie să observăm că teorema 4 se referă la generatorii necritici, care nu sînt incluși în B_k.

Deoarece B_k este inclus în orice generator necritic B, inclus în B_k și care nu este inclus în B_k, rezultă că orice generator necritic, inclus în B_k, este inclus în B.

DEFINIȚIE. *Într-o mulțime involutivă cu familie-nucleu, ordinul unui generator necritic B este k, dacă B este inclus în generatorul critic de ordinul k, dar nu este inclus în generatorul critic de ordinul $k-1$.*

PROPOZIȚIA 18. *Fie C o mulțime involutivă cu familie-nucleu. Considerăm un generator critic B_k, de ordinul k. Dacă există un generator necritic D, de ordinul k, atunci mai există cel puțin încă un generator necritic, diferit de D, de ordinul k.*

Demonstrație. Presupunem că există un singur generator necritic D, de ordinul k. În baza observațiilor de mai sus, rezultă că pentru orice generator X al mulțimii involutive C, sau D este inclus în X, sau X este inclus în D. Rezultă, în acest caz, că D este generator critic. Dar aceasta contrazice ipoteza.

LEMA 3. *Un generator al unei mulțimi involutive cu familia-nucleu F este generator critic, dacă și numai dacă este o reuniune de familii și conține familia-nucleu F.*

Demonstrație. Necesitatea condiției rezultă din teorema 4 din [8].

Condiția este suficientă. Fie B un generator, care este o reuniune de familii și conține pe F. Fie D un alt generator al mulțimii involutive. Dacă D este inclus în F, nu avem ce demonstra. Presupunem că D nu este inclus în F. Atunci avem :

Cazul 1. D este generator necritic de ordinul $k+1$. Atunci D este de forma : $D = B_k \cup A$, unde B_k este generatorul critic de ordinul k, iar $A \subset B_{k+1} - B_k$. Deoarece $D \cap B \neq 0$, rezultă :

a) sau $B \subset B_k$; atunci $B \subset D$.

b) sau $B \subset B_{k+1}$; atunci rezultă : 1° sau $B = B_k$, de unde $B \subset D$; 2° sau $B = B_{k+1}$, de unde $B \supset D$.

Dacă nu există generatorul critic de ordinul $k + 1$ și există generatorul critic de ordinul $k + m$, cu $m > 1$, atunci se raționează analog.

Cazul 2. D este generator critic. Atunci, sau $B \supset D$ sau $D \supset B$.

PROPOZIȚIA 19. *O mulțime involutivă C, cu familia-nucleu A, are un generator critic, dacă și numai dacă $\hat{A}$ conține cel puțin o reuniune de familii, pe care o notăm D, astfel încît:*

$$D \to \hat{A} - (A \cup D).$$

Demonstrație. Presupunem că există o reuniune de familii D, conținută în $\hat{A}$, astfel ca: $D \to \hat{A} - (A \cup D)$. Notăm: $B = D \cup A$. Arătăm că B este generator critic. Într-adevăr: $\hat{B} = (\widehat{D \cup A}) = \hat{D} \cap \hat{A} = \hat{A} - B$ și $B \cup \hat{B} = \hat{A} = C$. Deoarece B este o reuniune de familii și conține familia-nucleu A, în baza lemei 3, rezultă că B este generator critic.

Invers, presupunem că există un generator critic B al lui C. Notăm $D = B - A$. D este o reuniune de familii. Deoarece $D \subset B$ și $\hat{B} = C - B$, rezultă $D \to \hat{A} - (A \cup D)$.

Relația $\hat{B} = C - B$ este adevărată. Într-adevăr, să presupunem contrariul, adică B intersectat cu $\hat{B}$ să fie o mulțime E, nevidă. Atunci, avem: $E \to E$. Rezultă că $E \subset X$, unde X este o familie. Deci

$$D = \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right) \cup X.$$

Deoarece X este inclusă în $\hat{B}$, rezultă $D \to X$.

Deoarece X este inclusă în B, rezultă $X \to \hat{B}$.

În baza tranzitivității relației $\to$, rezultă: $\bigcup_{i=1}^{k} F_i \to X \to \hat{B}$ și $\left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right) \cup \hat{B} = C$. Adică, $A \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right)$ este un generator critic al mulțimii involutive C.

Aplicînd de un număr finit de ori lui $A \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right)$ raționamentul aplicat lui B, ajungem la concluzia că $B = A$, ceea ce este imposibil.

Propoziția este demonstrată.

CONSECINȚĂ. *Fie B un generator critic al mulțimii involutive C, cu familie-nucleu, distinct de familia-nucleu. Atunci intersecția dintre B și $\hat{B}$ este vidă.*

Aceasta rezultă din demonstrația propoziției 19.

TEOREMA 5. *Fie C_1 mulțimea involutivă generată de familia F_1 și C_2 mulțimea involutivă generată de familia F_2. Notăm cu C reuniunea celor două mulțimi involutive. In aceste condiții avem:*

1. *Dacă $F_1 \to F_2$ sau $F_2 \to F_1$, atunci mulțimea involutivă C este generată de familia F_1, respectiv de familia F_2.*

2. *Dacă familiile F_1 și F_2 sînt incomparabile, atunci mulțimea involutivă C nu poate fi generată de nici o familie.*

Demonstrație. 1. Presupunem $F_1 \to F_2$. Deoarece $F_2 \subset \hat{F}_1$ și $\hat{F}_2 = C_2$, rezultă că $F_1 \cup \hat{F}_1 = C_1 \cup C_2 = C$. Deci C are ca generator familia F_1. La fel se raționează în cazul $F_2 \to F_1$.

2. Fie F_1 *și* F_2 două familii incomparabile. Presupunem, prin reducere la absurd, că există o familie F, distinctă de F_1 și F_2, care generează pe C. Deoarece $F_1 \subset \hat{F}$ și $F_2 \subset \hat{F}$, rezultă

$$F \to F_1 \text{ și } F \to F_2. \tag{1}$$

Dacă $C_1 \cap C_2 = 0$, atunci avem următoarele două cazuri:

Cazul 1. $F \subset C_1$; deoarece $F \subset \hat{F}_1$, rezultă $F_1 \to F$. Din (1) rezultă că $F_1 = F$ și am ajuns la o contradicție.

Cazul 2. $F \subset C_2$; ca în cazul 1, se ajunge la o contradicție.

Nu se poate să avem $F = A \cup B$, unde $A \subset C_1$ și $B \subset C_2$, deoarece $C_1 \cap C_2 = 0$. Dacă $C_1 \cap C_2 \neq 0$, atunci obținem situații care se reduc la cazul 1, sau la cazul 2.

Teorema este demonstrată.

Această teoremă face posibilă rezolvarea următoarei probleme:

Reuniunea de categorii gramaticale elementare, care este o categorie gramaticală normală, admite sau nu admite familie-nucleu?

Mai întîi să facem următoarea observație.

OBSERVAȚIE. Două mulțimi inițiale A_1 și A_2 sînt incomparabile, adică:

$$A_1 \nrightarrow A_2 \text{ și } A_2 \nrightarrow A_1.$$

Aceasta rezultă din definiția mulțimii inițiale.

Deoarece o categorie gramaticală elementară este generată de o familie inițială și, ținînd seama de observația de mai sus, problema pusă se încadrează în punctul 2 al teoremei 5. Deci, reuniunea a două categorii gramaticale elementare nu admite familie-nucleu.

Exemplu din limba romînă. Considerăm următoarele categorii gramaticale elementare: $\mathcal{G}(S(\textit{frumos}))$ și $\mathcal{G}(S(\textit{frumoși}))$. Reuniunea lor este o categorie gramaticală normală, care, în baza teoremei 5, nu admite familie-nucleu.

În continuare cercetăm problema: *în ce condiții o mulțime involutivă generată de o familie este reductibilă.*

În baza teoremei 10 din [8] și a corolarului din [8] se poate da următorul răspuns.

Dacă o mulțime involutivă generată de o familie conține două sau mai multe familii neproductive, atunci ea este reductibililă în baza corolarului din [8].

Dacă o mulțime involutivă C, generată de o familie, conține o singură familie neproductivă F, atunci se consideră mulțimea $L = \{x \mid x \in C, \{x\} \nrightarrow F\}$. Dacă mulțimea L este vidă, atunci mulțimea involutivă C este ireductibilă. În acest caz se situează următoarele mulțimi involutive:

$$\mathcal{G}(S(\textit{frumos})),\quad \mathcal{G}(s(\textit{frumoasă})),\quad \mathcal{G}(S(\textit{frumoși})),\quad \mathcal{G}(S(\textit{frumoase})).$$

Fiecare din aceste mulţimi involutive conţine familia neproductivă $S(maro)$. Mulţimea L este vidă pentru fiecare din aceste mulţimi involutive.

Dacă mulţimea L este nevidă, atunci se aplică punctul b sau c al teoremei 10 din [8].

Primită la redacţie la 1 iulie 1966

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti
Str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. C. V. CRĂCIUN, *O generalizare a noţiunii de categorie gramaticală în sensul lui Dobrusin*. St. cerc. mat., **XVI**, 9 (1964).
2. C. V. CRĂCIUN, *Asupra noţiunii de rădăcină din teoria algebrică a gramaticii*. St. cerc. mat., **XVII**, 2 (1965).
3. SOLOMON MARCUS, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire I*. Revue de mathématiques pures et appliquées, **7**, 1, 91–107 (1962).
4. SOLOMON MARCUS, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire II*. Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, **8**, *4*, 139–145 (1962).
5. SOLOMON MARCUS, *Об одной логической модели элементарной грамматической категории* III. Revue de mathématiques pures et appliquées, **7**, *4*, 683–691 (1962).
6. SOLOMON MARCUS, *Lingvistică matematică. Modele matematice în lingvistică*. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
7. SOLOMON MARCUS, *Introduction mathématique à la Linguistique structurale*. Gauthier-Villars, Paris – Mouton – La Haye, 1966.
8. B. H. MAYOH, *Simple structures defined on a transitive and reflexive graph*. Revue de mathématiques pures et appliquées, **XI**, *1* (1966).

CERCETĂRI ASUPRA SERIILOR TRIGONOMETRICE. VI. ASUPRA SUMABILITĂȚII SERIEI FOURIER ASOCIATĂ UNEI FUNCȚII NEINTEGRABILE

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$, astfel încît funcția

$$x^n f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Seria Fourier asociata funcției neintegrabile $f(x)$ este de forma

$$S^*(x) + \lambda_1 S_1(x) + \lambda_2 S_2(x) + \ldots + \lambda_n S_n(x).$$

Se dă forma integrală a coeficienților lui $S^*(x)$ și se arată că seriile trigonometrice $S_k(x)$ sînt sumabile (C, n) către zero pe $(-\pi, \pi) - \{0\}$.

CAPITOLUL I

$x^{2n} f(x)$ INTEGRABILĂ PE $[-\pi, \pi]$

1.1. Fie $f(x)$ o funcție periodică de perioadă 2π, definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, astfel încît funcția

$$x^{2n} f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M} \tag{1.1}$$

să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

Fie $T(x)$ polinomul trigonometric [1] ¹)

$$T(x) = -1 + 2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} \cos kx, \tag{1.2}$$

sau

$$T(x) = -\frac{(n!)^2}{(2n)!}\left[C_{2n}^{n} + 2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{2n}^{n-k} \cos kx\right] \tag{1.2'}$$

polinom care are rădăcina $x = 0$ de ordinul $2n$.

---

¹) Pag. 138.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 565–581, BUCUREȘTI, 1967

Să punem

$$T(x)f(x) \simeq T(x)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}(a_p \cos px + b_p \sin px)\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots + \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx + \ldots;$$

seria

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}(a_p \cos px + b_p \sin px) \tag{1.4}$$

se numeşte seria Fourier asociată funcţiei neintegrabile $f(x)$ [1][2]). Deoarece

$$T(x) = -\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sin^{2n}\frac{x}{2}, \tag{1.5}$$

funcţia $T(x)f(x)$ este integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, deci

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(t)f(t)\cos kt\,dt, \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(t)f(t)\sin kt\,dt. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Identificînd în (1.3) obţinem sistemul infinit în a_k, b_k,

$$A\cdot\frac{\alpha_0}{2} = C_{2n}^{n}\frac{a_0}{2} - C_{2n}^{n+1}a_1 + \ldots + (-1)^n C_{2n}^{2n}a_n,$$

$$A\cdot\alpha_p = (-1)^p 2C_{2n}^{n+p}\frac{a_0}{2} + (-1)^{p+1}(C_{2n}^{n+p-1} + C_{2n}^{n+p+1})a_1 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n(C_{2n}^{2p} + C_{2n}^{2n})a_{n-p} + (-1)^{n+1}C_{2n}^{2p-1}a_{n-p+1} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n+p}C_{2n}^{p}a_n + \ldots + (-1)^{n+2p}C_{2n}^{0}a_{n+p}$$

şi

$$A\cdot\beta_p = (-1)^{p+1}(C_{2n}^{n+p-1} - C_{2n}^{n+p+1})b_1 + (-1)^{p+2}(C_{2n}^{n+p+2} - C_{2n}^{n+p-2})b_2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n(C_{2n}^{2p} - C_{2n}^{2n})b_{n-p} + (-1)^{n+1}C_{2n}^{2p-1}b_{n-p+1} + \ldots + (-1)^{n+2p}C_{2n}^{0}b_{n+p}$$

unde $p = 1, 2, 3, \ldots$ şi $A = -\frac{(2n)!}{n!\,n!}$

cu soluţia

$$a_{n+s} = (-1)^n A\left(C_{2n-1}^{0}\alpha_s + C_{2n}^{1}\alpha_{s-1} + \ldots + C_{2n+s-2}^{s-1}\alpha_1 + C_{2n+s-1}^{s}\frac{\alpha_0}{2}\right) +$$

$$+ \frac{a_0}{2}(-1)^{n+1}\left[C_{2n}^{n}C_{2n+s-1}^{s} - (C_{2n}^{n-1} + C_{2n}^{n+1})C_{2n+s-2}^{s-1} + \ldots\right.$$

---

[2]) Pag. 130.

$$+(-1)^s(C_{2n}^{n-s}+C_{2n}^{n+s})C_{2n-1}^0]+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n+k+1}a_k\,[C_{2n}^{n-k}C_{2n+s-1}^s-(C_{2n}^{n-k-1}+$$

$$+C_{2n}^{n-k+1})C_{2n+s-2}^{s-1}+\ldots+(-1)^s(C_{2n}^{n-k-s}+C_{2n}^{n-k+s})C_{2n-1}^0],$$

$$s=0,1,2,\ldots \tag{1.7}$$

şi

$$b_{n+s}=(-1)^nA\,(C_{2n-1}^0\beta_s+C_{2n}^1\beta_{s-1}+\ldots+C_{2n+s-2}^{s-1}\beta_1)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}b_k\,[C_{2n+s-2}^{s-1}(C_{2n}^{n-k+1}-C_{2n}^{n-k-1})-C_{2n+s-3}^{s-2}(C_{2n}^{n-k+2}- \tag{1.8}$$

$$-C_{2n}^{n-k-2})+\ldots+(-1)^{s-1}C_{2n-1}^0(C_{2n}^{n-k+s}-C_{2n}^{n-k-s})],\qquad s=1,2,3,\ldots$$

unde numerele $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt arbitrare.

Pentru obţinerea acestui rezultat se foloseşte egalitatea

$$C_{2n-1}^0C_{2n}^k-C_{2n}^1C_{2n}^{k-1}+\ldots+(-1)^kC_{2n+k-1}^kC_{2n}^0=0 \tag{1.8'}$$

obţinută egalînd coeficienţii lui x^k în identitatea

$$(1-x)^{2n}\left(1+\frac{2n}{1!}x+\frac{2n(2n+1)}{2!}x^2+\ldots\right)\equiv 1,\qquad |x|<1.$$

1.2. Utilizînd (1.6) avem

$$\frac{(-1)^n}{A}a^*_{n+s}=C_{2n-1}^0\alpha_s+C_{2n}^1\alpha_{s-1}+\ldots+C_{2n+s-2}^{s-1}\alpha_1+C_{2n+s-1}^s\frac{\alpha_0}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{h=0}^{s}C_{2n+h-1}^h\cos(s-h)t\right)T(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

dar [1]3)

$$\sum_{h=0}^{s}C_{2n+h-1}^h\cos(s-h)t=\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha-1}\frac{1}{2^{2\alpha+1}}(C_{s+2n-\alpha}^{s+\alpha}+C_{s+2n-\alpha-1}^{s+\alpha-1})\frac{1}{\sin^{2\alpha}\dfrac{t}{2}}$$

$$+\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\,\frac{\cos(s+n)t}{\sin^{2n}\dfrac{t}{2}}=\frac{1}{2^{2n+1}}\,\frac{1}{\sin^{2n}\dfrac{t}{2}}\cdot\mathfrak{A}_{n,s}(t),$$

unde $\mathfrak{A}_{n,s}(t)$ este polinomul trigonometric

$$\mathfrak{A}_{n,s}(t)=\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}2^{2n-2\alpha}[C_{s+2n-\alpha}^{s+\alpha}+C_{s+2n-\alpha-1}^{s+\alpha-1}]\sin^{2n-2\alpha}\frac{t}{2}+ \tag{1.9}$$

$$+(-1)^n2\cos(s+n)t$$

şi cu $T(x)$ dat de (1.5), rezultă că

$$a^*_{n+s}=\frac{1}{\pi}A^*\int_{-\pi}^{\pi}\mathfrak{A}_{n,s}(t)f(t)\,\mathrm{d}t,\qquad s=0,1,2,\ldots \tag{1.10}$$

---

3) Pag. 140.

cu

$$A^* = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}. \tag{1.11}$$

Tot astfel avem

$$\frac{(-1)^n}{A} b^*_{n+s} = C^0_{2n-1} \beta_s + C^1_{2n} \beta_{s-1} + \ldots + C^{s-1}_{2n+s-2} \beta_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{h=1}^{s} C^h_{2n+h-1} \sin (s-h) t \right) T(t) f(t) \, \mathrm{d}t$$

dar [1] 4),

$$\sum_{h=1}^{s} C^h_{2n+h-1} \sin (s-h) t = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{(-1)^\alpha}{2^{2\alpha+1}} C^{s+\alpha}_{s+2n-\alpha-1} \frac{\operatorname{ctg} \frac{t}{2}}{\sin^{2\alpha} \frac{t}{2}} +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{\sin (s+n) t}{\sin^{2n} \frac{t}{2}} = \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{1}{\sin^{2n} \frac{t}{2}} \mathfrak{B}_{n,s} (t)$$

unde $\mathfrak{B}_{n,s}(t)$ este polinomul trigonometric

$$\mathfrak{B}_{n,s}(t) = 2\cos \frac{t}{2} \sum_{\alpha=0}^{n-1} (-1)^\alpha \, 2^{2n-2\alpha} C^{s+\alpha}_{s+2n-\alpha-1} \sin^{2n-2\alpha-1} \frac{t}{2} + \tag{1.12}$$

$$+ (-1)^n \, 2\sin (s+n) t$$

deci

$$b^*_{n+s} = \frac{1}{\pi} A^* \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{B}_{n,s}(t) f(t) \, \mathrm{d}t, \qquad s = 1,2,3,\ldots, \tag{1.13}$$

putem enunța

TEOREMA 1.2.1. *Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[-\pi, \pi]$ în afara unei mulțimi $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$, astfel încît funcția*

$$x^{2n} f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

Seria Fourier asociată funcției $f(x)$ este dată de

$$S^*(x) + \lambda_0 S_0(x) + \lambda_1 S_1(x) + \ldots + \lambda_{n-1} S_{n-1}(x) +$$

$$+ \mu_1 \widetilde{S}_1(x) + \mu_2 \widetilde{S}_2(x) + \ldots + \mu_n \widetilde{S}_n(x), \tag{1.14}$$

unde $S^*(x)$ este seria trigonometrică

$$\frac{a_0^*}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_p^* \cos px + b_p^* \sin px)$$

---

4) Pag. 140.

cu a_p^*, b_p^* *dați de* (1.10), (1.13) *și unde* $S_k(x), k = 0,1, \ldots, n-1$, $\widetilde{S}_h(x)$, $h = 1, \ldots, n$, *sînt* $2n$ *serii trigonometrice independente de* $f(x)$, *definite de* (1.7) *și* (1.8), λ_i, μ_j *fiind* $2n$ *numere arbitrare.*

1.3. Seria $S_k(x)$ este dată de

$$\cos kx + \nu_0 \cos nx + \nu_1 \cos (n+1)x + \ldots. + \nu_s \cos (n+s)x + \ldots. \tag{1.15}$$

unde ν_s este polinomul $P_{n,k}(n+s)$

$$P_{n,k}(n+s) = (-1)^{n+k+1}\Big[C_{2n}^{n-k} C_{2n+s-1}^{s} + \sum_{h=1}^{s} (-1)^h \left(C_{2n}^{n-k-h} + C_{2n}^{n-k+h}\right) C_{2n+s-h-1}^{s-h}\Big]. \tag{1.16}$$

LEMA 1.3.1. *Polinomul* $P_{n,k}(n+s)$ *este de gradul* $2n-2$ *în* $n+s$.

Demonstrație. Polinomul poate fi scris astfel

$$P_{n,k}(n+s) = (-1)^{n+k+1}\Big[C_{2n}^{n-k} C_{2n+s-1}^{2n-1} + \sum_{h=1}^{s} (-1)^h \left(C_{2n}^{n-k-h} + C_{2n}^{n-k+h}\right) C_{2n+s-h-1}^{2n-1}\Big], \tag{1.17}$$

sau

$$\begin{aligned} P_{n,k}(s+n) = {} & - C_{2n}^{0} C_{n+s+k-1}^{2n-1} + C_{2n}^{1} C_{n+s+k}^{2n-1} + \ldots \\ & \ldots + (-1)^{n+k} C_{2n}^{n-k-1} C_{2n+s-2}^{2n-1} + (-1)^{n-k+1} C_{2n}^{n-k} C_{2n+s-1}^{2n-1} + \\ & + (-1)^{n-k+2} C_{2n}^{n-k+1} C_{2n+s-2}^{2n-1} + \ldots + (-1)^{2n+1} C_{2n}^{2n} C_{n+s-k-1}^{2n-1} \end{aligned} \tag{1.17'}$$

și unde

$$C_{2n+s-h}^{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)!}(s+n+n-h)(s+n+n-h-1)\ldots \ldots(s+n-h-n+2)$$

care este de gradul $2n-1$ în $n+s$, însă coeficientul lui $(n+s)^{2n-1}$ în $P_{n,k}$ este

$$-C_{2n}^{0} + C_{2n}^{1} - \ldots + C_{2n}^{2n-1} - C_{2n}^{2n}$$

care este zero. Lema este demonstrată.

LEMA 1.3.2. *Ecuația* $P_{n,k}(s+n) = 0$ *admite zerourile* $s = -1$, $s = -2$, $s = -k+1$, $s = -k-1, \ldots, s = -n$ *și avem* $P_{n,k}(k) = +1$.

Demonstrație. Înlocuind, de exemplu, $s = -n$ în (1.17′), trebuie să avem

$$C_{2n}^{2n} C_{2n+k}^{2n-1} - C_{2n}^{2n-1} C_{2n+k-1}^{2n-1} + \ldots + (-1)^{k+1} C_{2n}^{2n-k-1} C_{2n-1}^{2n-1} = 0$$

care este chiar relația (1.8′), unde punem $k+1$ în loc de k.

Pentru $s+n = k$, deci $s = k-n$, avem în (1.17′):

$$P_{n,k}(k) = C_{2n}^{2n} C_{2n-1}^{2n-1} = +1.$$

Lema este demonstrată.

LEMA 1.3.3. *Polinomul* $P_{n,k}(s+n)$ *este par.*

Demonstraţie. Conform lemei 1.3.2, polinomul are zerourile 0, $+1$, $+2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1$ şi pentru $s+n=k$ ia valoarea $+1$. Verificăm uşor că àdmite de asemenea zerourile, $-1, -2, \ldots, -k+1, -k-1, \ldots, -n+1$ şi pentru $s+n=-k$ ia valoarea $+1$, deci $P_{n,k}(s+ + n)$ conţine numai puterile pare ale lui $s+n$.

Aceste leme arată că coeficientul lui a_k este de forma

$$(1.18)\qquad \gamma_0\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos mx+\ldots\right)+$$
$$+\gamma_2(1^2\cdot\cos x+2^2\cdot\cos 2x+\ldots.+m^2\cdot\cos mx+\ldots)+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\gamma_{2n-2}\,(1^{2n-2}\cdot\cos x+2^{2n-2}\cdot\cos 2x+\ldots+m^{2n-2}\cdot\cos mx+\ldots)$$

dar seria

$$(1.19)\qquad \frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos mx+\ldots$$

este sumabilă $(C, 1)$ către zero pe $[-\pi, \pi]-\{0\}$ prin urmare seriile

$$(1.20)\qquad 1^{2k}\cdot\cos x+2^{2k}\cos 2x+\ldots+m^{2k}\cos m\,x+\ldots$$

fiind serii formate cu derivatele de ordinul $2k$ ale termenilor din (1.19) sînt sumabile $(C, 2k+1)$ către zero pe $[-\pi, \pi]-\{0\}$.

TEOREMA 1.3.1. *Seriile* $S_k(x)$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, *sînt sumabile* $(C, 2n-1)$ *către zero pe* $[-\pi, \pi]-\{0\}$.

1.4. Pentru $n=1$, coeficientul lui $\frac{a_0}{2}$ este

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos mx+\ldots$$

Pentru $n=2$, coeficienţii lui a_0, a_1 sînt respectiv

$$\frac{1}{2}+(1-1^2)\cos x+(1-2^2)\cos 2x+\ldots+(1-m^2)\cos mx+\ldots$$

şi

$$1^2\cos x+2^2\cos 2x+\ldots+m^2\cos mx+\ldots$$

Pentru $n=3$ coeficienţii lui a_0, a_1, a_2 sînt

$$\frac{1}{2}+\sum_1^\infty\left(1-\frac{5}{4}m^2+\frac{1}{4}m^4\right)\cos mx,$$

$$\sum_1^\infty\left(\frac{4}{3}m^2-\frac{1}{3}m^4\right)\cos mx,$$

şi

$$\sum_1^\infty\frac{1}{12}(-m^2+m^4)\cos mx.$$

1.4. Seria $\widetilde{S}_k(x)$ este dată de

$$\sin kx + \eta_1 \sin(n+1)x + \eta_2 \sin(n+2)x + \ldots + \eta_s \sin(n+s)x + \ldots$$

unde η_s este polinomul $Q_{n,k}(n+s)$:

$$Q_{n,k}(n+s) = (-1)^{n+k} \sum_{h=1}^{s} (-1)^{h-1} C_{2n+s-2}^{s-h} \left(C_{2n}^{n-k+h} - C_{2n}^{n-k-h}\right) \tag{1.21}$$

Lema 1.4.1. *Polinomul $Q_{n,k}(n+s)$ este de gradul $2n-1$ în $n+s$.*

Demonstrație. Fiecare termen care intervine în 1.21 este de gradul $2n-1$, iar coeficientul lui $(n+s)^{2n-1}$ este

$$\sum_{h=1}^{s} (-1)^{h-1} \left(C_{2n}^{n-k+h} - C_{2n}^{n-k-h}\right) \neq 0.$$

Lema 1.4.2. *Ecuația $Q_{n,k}(n+s) = 0$ admite zerourile $s+n=0$, $s+n=1, \ldots, s+n=k-1$, $s+n=k+1, \ldots, s+n=n-1$, $s+n=n$ și $Q_{n,k}(k)=+1$.*

Demonstrație. Pentru $s+n=0$, de exemplu, valoarea lui $Q_{n,s}$ este

$$C_{2n}^{2n} C_{2n+k-1}^{2n-1} - C_{2n}^{2n-1} C_{2n+k-2}^{2n-1} + \ldots + (-1)^k C_{2n}^{2n-k} C_{2n-1}^{2n-1}$$

care este nulă. Pentru $s+n=k$ valoarea lui $Q_{n,s}$ este

$$Q_{n,s}(k) = C_{2n}^{2n} C_{2n-1}^{2n-1} = +1.$$

Observăm că

$$Q_{n,s}(-k) = -C_{2n}^{0} C_{2n-1}^{2n-1} = -1$$

și că polinomul $Q_{n,s}$ admite de asemenea rădăcinile $s+n=-1$, $s+n=-2, \ldots, s+n=-k+1$, $s+n=-k-1, \ldots, s+n=-n$, deci

Lema 1.4.3. *Polinomul $Q_{n,s}(s+n)$ este impar în $s+n$.*

Aceste leme arată că coeficientul lui a_k este de forma

$$\gamma_1(1 \cdot \sin x + 2 \sin 2x + \ldots + m \sin mx + \ldots) +$$
$$+ \gamma_3(1^3 \sin x + 2^3 \sin 2x + \ldots + m^3 \sin mx + \ldots) +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \gamma_{2n-1}(1^{2n-1} \sin x + 2^{2n-1} \sin 2x + \ldots + m^{2n-1} \sin mx + \ldots)$$

iar seria

$$1^k \sin x + 2^k \sin 2x + \ldots + m^k \sin kx + \ldots,\quad k = 1, 3, 5, \ldots$$

este sumabilă $(C, k+1)$ către zero pe $[-\pi, \pi]$ pentru $k = 1, 3, \ldots, 2n-1$, fiind seria formată cu derivatele de ordinul k ale termenilor seriei 1.19, care este sumabilă $(C, 1)$ pe $[-\pi, \pi] - \{0\}$. Am demonstrat următoarea teoremă :

Teorema 1.4.1. *Seriile $\widetilde{S}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, sînt sumabile $(C, 2n)$ către zero pe $[-\pi, \pi]$.*

1.5.1. Pentru $n = 1$, coeficientul lui b_1 este

$$1 \cdot \sin x + 2 \cdot \sin 2x + \ldots + m . \sin mx + \ldots$$

Pentru $n = 2$, coeficienții lui b_1 și b_2 sînt respectiv

$$-\frac{1}{3}\sum_1^\infty (m^3 - 4m)\sin m\, x,$$

și

$$\frac{1}{6}\sum_1^\infty (m^3 - m)\sin mx.$$

Pentru $n = 3$ coeficienții lui b_1, b_2 și b_3 sînt

$$\frac{1}{24}\sum_1^\infty (m^5 - 13m^3 + 36m)\sin mx,$$

$$-\frac{1}{30}\sum_1^\infty (m^5 - 10\mathrm{m}^3 + 9m)\sin mx,$$

și

$$-\frac{1}{120}\sum_1^\infty (m^5 - 5m^3 + 4m)\sin mx.$$

CAPITOLUL II

$x^{2^n-1}\, f(x)$ INTEGRABILĂ PE $[-\pi, \pi]$

2.1. Fie $f(x)$ o funcție periodică de perioadă 2π, definită pe $[-\pi, \pi]$, în afara unei mulțimi $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, astfel încît funcția

$$x^{2^n-1}f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

Fie $T_n^*(x)$ polinomul trigonometric [1] [1]

$$T_n^*(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(n+1)!\,(n-1)!}{(n+k)!\,(n-k)!}\, k \sin kx\,;$$

avem

$$\frac{2(2n-1)}{n(n+1)}\, T_n^*(x) = \sin x\, T_{n-1}(x) \tag{2.1}$$

cu $T_{n-1}(x)$ dat de (1.2). Deducem din această relație că funcția

$$T_n^*(x)\cdot f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

este integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

Să punem

$$T^*(x) f(x) \simeq T^*(x)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos p\, x + b_p \sin px)\right] = \tag{2.2}$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots + \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx + \ldots$$

---

[1] Pag. 132.

seria

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)$$

este seria Fourier asociată funcției neintegrabile $f(x)$.

În virtutea relației (2.1) avem

$$T_n^*(x) = \frac{2}{B} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (C_{2n-2}^{n-k} - C_{2n-2}^{n-k-2}) \sin kx,$$

cu

$$B = -\frac{2(2n)!}{n!\,(n+1)!}.$$

Identificînd în (2.2) obținem sistemul infinit

$$B\frac{\alpha_0}{2} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} b_k (C_{2n-2}^{n-k} - C_{2n-2}^{n-k-2})$$

$$\begin{aligned} B\alpha_p = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p+k-1} b_k (C_{2n-2}^{n-p-k} - C_{2n-2}^{n-p-k-2} - C_{2n-2}^{n-p-k+2} + C_{2n-2}^{n-p-k}) + \\ + (-1)^{2p-1} b_p (C_{2n-2}^{n-2p} - C_{2n-2}^{n-2p-2}) + \\ + \sum_{h=1}^{n-p} (-1)^{2p+h-1} b_{p+h} (C_{2n-2}^{n-h} - C_{2n-2}^{n-h-2} + C_{2n-2}^{n-2p-h} - C_{2n-2}^{n-2p-h-2}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

și

$$\begin{aligned} B\beta_p = (-1)^{p+1} a_0 (C_{2n-2}^{n-p} - C_{2n-2}^{n-p-2}) + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p+k+1} a_k (C_{2n-2}^{n-p-k} - \\ - C_{2n-2}^{n-p-k-2} + C_{2n-2}^{n-p+k} - C_{2n-2}^{n-p+k-2}) + (-1)^{2p+1} a_p (C_{2n-2}^{n-2p} - C_{2n-2}^{n-2p-2}) + \\ + \sum_{k=1}^{n-p+1} (-1)^{2p+k+1} a_{p+k} (-C_{2n-2}^{n-k} + C_{2n-2}^{n-k-2} + C_{2n-2}^{n-2p-k} - C_{2n-2}^{n-2p-k-2}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$p = 1, 2, 3, \ldots,$ unde

$$\begin{aligned} \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n^*(t) f(t) \cos kt \, dt, \\ \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T^*(t) f(t) \sin kt \, dt, \end{aligned} \tag{2.4'}$$

cu soluția

$$\begin{aligned} b_{n+p} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n+p+k-1} b_k \left(\sum_{h=1}^{p} (-1)^h C_{2n-3+h}^{h} (C_{2n-2}^{n+p-k-h} - C_{2n-2}^{n-p-k+h-2}) \right) + \\ + (-1)^{n+1} B \left(\alpha_p + C_{2n-2}^{1} \alpha_{p-1} + \ldots + C_{2n+p-4}^{p-1} \alpha_1 + C_{2n+p-3}^{p} \frac{\alpha_0}{2} \right) + \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$+(-1)^{n+1} B\left(\alpha_{p-2} + C^1_{2n-2}\,\alpha_{p-3} + \ldots + C^{p-3}_{2n+p-6}\,\alpha_1 + C^{p-2}_{2n+p-5}\frac{\alpha_0}{2}\right) +$$

. . . .

$$+\begin{cases} (-1)^{n+1}B\left(\alpha_1 + C^1_{2n-2}\dfrac{\alpha_0}{2}\right), & \text{dacă } p \text{ este impar,} \\ (-1)^{n+1}B\dfrac{\alpha_0}{2}. & \text{dacă } p \text{ este par,} \end{cases}$$

$p = 0, 1, 2, \ldots,$ și

$$a_{n+p} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\sum_{s=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{n+k+p+1} C^{2s}_{2n-3+2s}\left(C^{n-k+p-2s}_{2n-2} - 2C^{n-k-1}_{2n-2} + C^{n-k-p+2s-2}_{2n-2}\right) +\right.$$

$$\left. + \sum_{s=0}^{\frac{p-3}{2}} (-1)^{n+k+p} C^{2s+1}_{2n-3+2s+1}\left(C^{n-k+p-2s-1}_{2n-2} - C^{n-k}_{2n-2} - C^{n-k-2}_{2n-2} + C^{n-k-p+2s-1}_{2n-2}\right)\right] +$$

$$+(-1)^n B\left(\beta_p + C^1_{2n-2}\,\beta_{p-1} + \ldots + C^{p-1}_{p+2n-4}\,\beta_1\right) + \tag{2.6}$$

$$+(-1)^n B\left(\beta_{p-2} + C^1_{2n-2}\,\beta_{p-3} + \ldots + C^{p-3}_{p+2n-6}\,\beta_1\right) +$$

. . . .

$$+(-1)^n B\,\beta_1, \text{ pentru } n \text{ impar,} \qquad (p = 1, 3, 5, \ldots)$$

și

$$a_{n+p} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\sum_{s=0}^{\frac{p-2}{2}} (-1)^{n+k+p+1} C^{2s}_{2n-3+2s}\left(C^{n-k+p-2s}_{2n-2} - C^{n-k}_{2n-2} - C^{n-k-2}_{2n-2} +\right.\right.$$

$$\left. + C^{n-k-p-2+2s}_{2n-2}\right) + \sum_{s=0}^{\frac{p-2}{2}} (-1)^{n+k+p} C^{2s+1}_{2n-2s-2}\left(C^{n-k+p-2s-1}_{2n-2} - \right. \tag{2.7}$$

$$\left.\left. - 2C^{n-k-1}_{2n-2} + C^{n-k-p+2s-1}_{2n-2}\right)\right] + (-1)^n B\left(\beta_p + C^1_{2n-2}\beta_{p-1} + \ldots + C^{p-1}_{p+2n-4}\beta_1\right) +$$

$$+(-1)^n B\left(\beta_{p-2} + C^1_{2n-2}\beta_{p-3} + \ldots + C^{p-3}_{p+2n-6}\,\beta_1\right) +$$

. . . .

$$+(-1)^n B\left(\beta_2 + C^1_{2n-2}\,\beta_1\right) \text{ dacă } p \text{ este par, } (p = 0, 2, 4, \ldots);$$

în aceste formule înlocuim pe a_0 prin $\frac{1}{2}a_0$.

2.2. Utilizînd (2.4′) și (2.5) avem

$$\frac{(-1)^{n+1}}{B} b^*_{n+2s} = \alpha_{2s} + C^1_{2n-2}\,\alpha_{2s-1} + \ldots + C^{2s}_{2n+2s-3}\frac{\alpha_0}{2} +$$

$$+ \alpha_{2s-2} + C^1_{2n-2}\,\alpha_{2s-3} + \ldots + C^{2s-2}_{2n+2s-5}\frac{\alpha_0}{2} + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\alpha_0}{2}$$

deci

$$\frac{(-1)^{n+1}}{B} b^*_{n+2s} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=0}^{2s}\sum_{r=0}^{\left[\frac{2s-k}{2}\right]} C^k_{2n+k-3}\cos(2s-k-2r)t\right] T^*(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t,$$

(2.8)

$$\frac{(-1)^{n+1}}{B} b^*_{n+2s+1} = \alpha_{2s+1} + C^1_{2n-2}\,\alpha_{2s} + \ldots + C^{2s+1}_{2n+2s-2}\frac{\alpha_0}{2} +$$

$$+ \alpha_{2s-1} + C^1_{2n-2}\alpha_{2s-2} + \ldots + C^{2s-1}_{2n+2s-4}\frac{\alpha_0}{2} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \alpha_1 + C^1_{2n-2}\frac{\alpha_0}{2},$$

deci

$$\frac{(-1)^{n+1}}{B} b^*_{n+2s+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=0}^{2s+1}\sum_{r=0}^{\left[\frac{2s+1-k}{2}\right]} C^k_{2n+k-3}\cos(2s+\right.$$

$$\left. + 1 - k - 2r)\,t\right] T^*(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

dar [1][2]

$$\sum_{k=0}^{2s}\sum_{r=0}^{\left[\frac{2s-k}{2}\right]} C^k_{2n+k-3}\cos(2s+1-k-2r)t =$$

$$= 1 + \sum_{\alpha=1}^{n-1}(-1)^{\alpha-1}\frac{1}{2^{2\alpha+1}}\left(C^{\alpha+1}_{2n-\alpha-1} + C^{\alpha+2}_{2n-\alpha} + \ldots + C^{2s+\alpha}_{2n+2s-\alpha-2}\right)\frac{1}{\sin^{2\alpha-2}\dfrac{t}{2}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}\,\frac{1}{\sin^{2n-2}\dfrac{t}{2}}\left(\cos(n+1)t + \cos(n+3)t + \ldots + \cos(n+2s-1)t\right)$$

---

[2] Pag. 140.

și înlocuind pe $T^*(t)$ prin

$$T_n^*(t) = A^{**} \sin t \sin^{2n-2}\frac{t}{2}, \qquad A^{**} = -\frac{n!(n+1)!}{(2n)!}$$

deducem că

$$b^*_{n+2s} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\, 2^{2n-2}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathscr{B}_{n,\,2s}(t) f(t)\, \mathrm{d}t, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.9}$$

unde $B_{n,\,2s}$ este polinomul trigonometric

$$\mathscr{B}_{n,\,2s}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n-1} (-1)^{\alpha-1} 2^{2n-2\alpha} \left(C_{2n+2s-\alpha-1}^{2s+\alpha+1} - C_{2n-\alpha-1}^{\alpha+1}\right) \times \tag{2.10}$$

$$\times \sin^{2n-2\alpha}\frac{t}{2} \sin t + (-1)^{n-1}[\sin(n+2s)t - \sin nt] + 2^{2n-2}\sin t \sin^{2n-2}\frac{t}{2}$$

în același mod obținem

$$\sum_{k=0}^{2s+1} \sum_{r=0}^{\frac{[2s+1-k]}{2}} C_{2n+k-3}^{k} \cos(2s-k-2r+1)t =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n-1} (-1)^{\alpha-1} \frac{1}{2^{2\alpha+1}} \left(C_{2n-\alpha-2}^{\alpha} + C_{2n-\alpha-1}^{\alpha+1} + \ldots + C_{2n+2s-\alpha-1}^{2s+\alpha+1}\right) \frac{1}{\sin^{2\alpha}\frac{t}{2}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} [\cos nt + \cos(n+2)t + \ldots + \cos(n+2s)t]$$

și înlocuind pe $T^*(t)$ prin expresia sa, avem

$$b^*_{n+2s+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi . 2^{2n-2}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathscr{B}_{n,\,2s+1}(t) f(t)\, \mathrm{d}t, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.11}$$

unde $\mathscr{B}_{n,\,2s+1}$ este polinomul trigonometric

$$\mathscr{B}_{n,\,2s+1}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n-1} 2^{2n-2\alpha} \left(C_{2n+2s-\alpha}^{2s+\alpha+2} - C_{2n-\alpha-2}^{\alpha}\right) \times \tag{2.12}$$

$$\times \sin^{2n-2\alpha-2}\frac{t}{2} \sin t + (-1)^{n-1}[\sin(n+2s+1)t - \sin(n-1)t].$$

2.3. Utilizînd (2.4′), (2.6) şi (2.7) avem

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{B}\, a^*_{n+2s} = {} & \beta_{2s} + C^1_{2n-1}\,\beta_{2s-1} + \ldots + C^{2s-1}_{2n+2s-4}\beta_1 + \\ & + \beta_{2s-2} + C^1_{2n-1}\,\beta_{2s-3} + \ldots + C^{2s-3}_{2n+2s-6}\,\beta_1 + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \beta_2 + C^1_{2n-2}\,\beta_1\end{aligned}$$

deci

$$\frac{(-1)^n}{B}\, a^*_{n+2s} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{h=0}^{2s}\ \sum_{r=0}^{\frac{[2s-h]}{2}} C^h_{2n+h-3}\sin(2s-h-2r)\,t\right] T^*_n(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

şi

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{B}\, a^*_{n+2s+1} = {} & \beta_{2s+1} + C^1_{2n-2}\,\beta_{2s} + \ldots + C^{2s}_{2n+2s-3}\,\beta_1 + \\ & + \beta_{2s-1} + C^1_{2n-2}\,\beta_{2s-3} + \ldots + C^{2s-2}_{2n+2s-5}\,\beta_1 + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \beta_1\end{aligned}$$

deci

$$\frac{(-1)^n}{B}\, a^*_{n+2s+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{h=0}^{2s+1}\ \sum_{r=0}^{\left[\frac{2s+1-h}{2}\right]} C^h_{2n+h-3}\sin(2s+1-h-2r)t\right] \times$$
$$\times\, T^*_n(t)\; f(t)\;\mathrm{d}t$$

dar

$$T^*(t) = A^{**}\sin t\sin^{2n-2}\frac{t}{2}, \qquad A^{**} = -\frac{n\,!\,(n+1)\,!}{(2n)\,!}$$

de unde obţinem

$$a^*_{n+2s} = \frac{(-1)^n}{\pi\, 2^{2n-1}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathfrak{A}_{n,\,2s}(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{2.13}$$

$$a^*_{n+2s+1} = \frac{(-1)^n}{\pi\, 2^{2n-1}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathfrak{A}_{n,\,2s+1}(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{2.14}$$

$\mathfrak{A}_{n,\,2s}$, $\mathfrak{A}_{n,\,2s+1}$ fiind polinoamele trigonometrice [1]3)

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{n,\,2s}(t) = {} & \sum_{\alpha=0}^{n-1}(-1)^\alpha\left(\sum_{h=1}^{s} C^{2n-2\alpha-3}_{2n+2h-\alpha-3}\right)2^{2n-2\alpha}\cos^2\frac{t}{2}\sin^{2n-2\alpha-2}\frac{t}{2} + \\ & + (-1)^n[\cos(n+2s)t - \cos nt], \qquad s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\end{aligned} \tag{2.15}$$

---

3) Pag. 140.

și

$$(2.16)\qquad \mathfrak{A}_{n,\,2s+1}(t)=\sum_{\alpha=0}^{n-1}(-1)^{\alpha}\Big(\sum_{h=0}^{s}C_{2n+2h-\alpha-2}^{2n-2\alpha-3}\Big)\,2^{2n-2\alpha}\cos^2\frac{t}{2}\,\sin^{2n-2\alpha-2}\frac{t}{2}+$$

$$+(-1)^n\left[\cos(n+2s+1)\,t-\cos(n-1)\,t\right],\qquad s=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

TEOREMA 2.3.1. *Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[-\pi,\,\pi]$ în afara unei mulțimi $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi,\,\pi]$, astfel încît funcția*

$$x^{2n-1}f(x),\qquad x\in[-\pi,\pi]-\mathfrak{M}$$

să fie integrabila pe $[-\pi,\,\pi]$.

Seria Fourier asociată funcției $f(x)$ este dată de

$$S^*(x)+\lambda_0S_0(x)+\lambda_1S_1(x)+\ldots+\lambda_n\,S_n\,(x)+$$

$$+\,\mu_1\,\widetilde{S}_1(x)+\mu_2\,\widetilde{S}_2(x)+\,\ldots\,+\mu_{n-1}\,\widetilde{S}_{n-1}(x),$$

unde $S^*(x)$ este seria trigonometrică

$$\frac{a_0^*}{2}+(a_p^*\cos px+b_p^*\sin px)$$

cu a_p^*, b_p^* *dați de* (2.9), (2.11), (2.13) *și* (2.14) *și unde* $S_k(x)$, $k=0,1,\ldots$ $\ldots,n$, $\widetilde{S}_h(x)$, $h=1,2,\ldots,n-1$, *sînt* $2n$ *serii trigonometrice independente de* $f(x)$, *definite de* (2.5), (2.6) și (2.7), λ_i, μ_j *fiind* $2n$ *numere arbitrare.*

2.4. Seria $\widetilde{S}_k(x)$ este

$$\sin kx+\gamma_0\sin nx+\gamma_1\sin(n+1)\,x+\,\ldots\,+\gamma_s\sin(n+s)\,x+\,\ldots$$

unde γ_s este polinomul $\widetilde{P}_{n,k}(n+s)$:

$$\widetilde{P}_{n,\,k}(n+s)=(-1)^{n+s+k-1}\sum_{h=0}^{s}(-1)^h\,C_{2n+h-3}^{h}\,(C_{2n-2}^{n+s-k-h}-C_{2n-2}^{n+h-k-s-2}).$$

LEMA 2.4.1. *Polinomul $\widetilde{P}_{n,\,k}(n+s)$ este de gradul $2n-3$ în $n+s$.*

Demonstrație. Pentru $s+n>1$ polinomul se poate scrie

$$\widetilde{P}_{n,\,k}(s+n)=(-1)^{n+k-1}(C_{2n+s-3}^{2n-3}\,C_{2n-2}^{n-k}-C_{2n+s-4}^{2n-3}\,C_{2n-2}^{n-k+1}+\,\ldots\,+$$

$$+(-1)^{n+k}\,C_{n+s-k-1}^{2n-3}\,(C_{2n-2}^{2n-2})+(-1)^{n+k}(C_{2n+s-3}^{2n-3}\,C_{2n-2}^{n-k-2}-C_{2n+s-4}^{2n-3}\,C_{2n-2}^{n-k-3}+$$

$$+\,\ldots\,+(-1)^{n-k}\,C_{n+s+k-1}^{2n-3}\,C_{2n-2}^{0})$$

de unde se vede că gradul lui $\widetilde{P}$ este $2n-3$ și coeficienții lui $(n+s)^{\delta}$ sînt independenți de s.

LEMA 2.4.2. *Ecuația $\widetilde{P}_{n,k}(n+s)=0$ admite rădăcinile $s+n=0$, $s+n=1$, $\ldots$, $s+n=k-1$, $s+n=k+1$, $\ldots$, $s+n=n-1$ și avem $\widetilde{P}_{n,k}(k)=+1$.*

Demonstrație. Pentru $s+n=0$, de exemplu, avem

$$\widetilde{P}_{n,k}(0)=C_{2n-2}^{0}C_{2n+k-3}^{k}-C_{2n-2}^{1}\,C_{2n+k-4}^{k-1}+\,\ldots\,+(-1)^k\,C_{2n-2}^{k}\,C_{2n-3}^{0}$$

şi conform relaţiei (1.8′), $\widetilde{P}_{n,k}(0) = 0$. Pentru $n + s = k$ avem

$$\widetilde{P}_{n,k}(k) = \frac{(2n-3)!}{(2n-3)!} = +1.$$

LEMA 2.4.3. *Polinomul $\widetilde{P}_{n,k}(n+s)$ este impar.*

Demonstraţie. Verificăm uşor că polinomul are de asemenea zerourile, $s + n = -1$, $s + n = -2, \ldots, s + n = -k + 1$, $s + n = -k - 1, \ldots$, $s + n = -n + 1$ şi că $\widetilde{P}_{n,k}(-k) = -1$, deci $\widetilde{P}_{n,k}$ este impar.

Aceste leme arată că coeficientul lui b_k este de forma

$$\gamma_1 (\sin x + 2\sin 2x + \ldots + m \sin mx + \ldots) +$$
$$+ \gamma_3 (1^3 \sin x + 2^3 \sin 2x + \ldots + m^3 \sin mx + \ldots) +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \gamma_{2n-3} (1^{2n-3} \sin x + 2^{2n-3} \sin 2x + \ldots + m^{2n-3} \sin mx + \ldots)$$

deci avem următoarea teoremă:

TEOREMA 2.4.1. *Seriile $\widetilde{S}_k(x)$, $k = 1, \ldots, n - 1$ sînt sumabile $(C, 2n - 1)$ către zero pe $[-\pi, \pi]$.*

2.5. Pentru $n = 2$ coeficientul lui b_1 este

$$\sin x + 2 \sin 2x + \ldots + m \sin mx + \ldots$$

Pentru $n = 3$ coeficienţii lui b_1 şi b_2 sînt

$$\frac{1}{3} \sum_{m=1}^{\infty} (4m - m^3) \sin mx,$$

$$\frac{1}{6} \sum_{m=1}^{\infty} (m^3 - m) \sin mx.$$

2.6. Seria $S_k(x)$ este

$$\cos kx + \gamma_1 \cos(n+1)x + \gamma_2 \cos(n+2)x + \ldots + \gamma_p \cos(n+p)x + \ldots,$$

unde γ_p este polinomul

$$Q_{n,k}(n+p) = (-1)^{n+k} \sum_{h=0}^{p-1} (-1)^h \left(C_{2n-2}^{n-k+h+1} - C_{2n-2}^{n-k-h-1} - \right.$$
$$\left. - C_{2n-2}^{n-k+h-1} + C_{2n-2}^{n-k-h-3}\right) \cdot \left(C_{2n+p-h-4}^{2n-3} + \right.$$
$$\left. + C_{2n+p-h-6}^{2n-3} + \ldots + \begin{cases} C_{2n-2}^{2n-3}, & \text{pentru } p - h, \text{ par} \\ C_{2n-3}^{2n-3}, & \text{pentru } p - h, \text{ impar} \end{cases} \right)$$

pentru $k = 0$, expresia lui $Q_{n,0}$ se înmulţeşte cu $\frac{1}{2}$.

Putem demonstra fără greutate următoarele leme:

LEMA 2.6.1. *Polinomul $Q_{n,k}$ este de gradul $2n - 2$, cel mult, în $n + p$.*

LEMA 2.6.2. *Polinomul $Q_{n,k}$ este par în $n + p$ şi coeficienţii lui $(n + p)^{\delta}$ nu depind de p.*

LEMA 2.6.3. *Ecuaţia* $Q_{n,k}(n+p)=0$, *pentru* $n+p$ *impar, admite zerourile* $n+p=-1$, $n+p=+1$, $n+p=-3$, $n+p=+3,\ldots$, $\ldots n+p=n$, $n+p=-n$ *sau* $n+p=n-1$, $n+p=-n+1$ *după cum* n *este impar sau par. Dacă* k *este impar*, $Q_{n,k}(k)=+1$.

LEMA 2.6.4. *Ecuaţia* $Q_{n,k}(n+p)=0$, *pentru* $n+p$ *par, admite zerourile*, $n+p=-2$, $n+p=+2,\ldots, n+p=n$, $n+p=-n$ *sau* $n+p=n-1$, $n+p=-n+1$, *după cum* n *este par sau impar. Dacă* k *este par*, $Q_{n,k}(k)=+1$.

Aceste leme arată că coeficientul lui a_k este de forma

$$\eta_0\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2mx+\ldots\right)+$$
$$+\nu_0(\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2m+1)x+\ldots)+$$
$$+\eta_2(2^2\cos 2x+4^2\cos 4x+\ldots+(2m)^2\cos 2mx+\ldots)+$$
$$+\nu_2(1^2\cos x+3^2\cos 3x+\ldots+(2m+1)^2\cos(2m+1)x+\ldots)+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\eta_{2n-2}(2^{2^n-2}\cos 2x+4^{2^n-2}\cos 4x+\ldots+(2m)^{2^n-2}\cos 2mx+\ldots)+$$
$$+\nu_{2n-2}(1^{2^n-2}\cos x+3^{2^n-2}\cos 3x+\ldots+(2m+1)^{2^n-2}\cos(2m+1)x+\ldots).$$

Dar seriile

$$\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2mx+\ldots,$$
$$\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2m+1)x+\ldots$$

sînt sumabile $(C, 1)$ către zero pe $(-\pi, \pi)-\{0\}$, deci seriile

$$2^{2k}\cos 2x+4^{2k}\cos 4x+\ldots+(2m)^{2k}\cos 2mx+\ldots$$
$$1^{2k}\cos x+3^{2k}\cos 3x+\ldots+(2m+1)^{2k}\cos(2m+1)x+\ldots$$

sînt sumabile $(C, 2k+1)$ către zero pe $(-\pi, \pi)-\{0\}$. Putem deci enunţa teorema următoare

TEOREMA 2.6.1. *Seriile* $S_k(x)$, $k=0,1,\ldots,n$, *sînt sumabile* $(C, 2n-1)$ *către zero pe* $(-\pi, \pi)-\{0\}$.

2.7. Pentru $n=1$, coeficienţii lui a_0, a_1 sînt [2]*)

$$\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2mx+\ldots$$

şi

$$\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2m+1)x+\ldots$$

---

*) Pag. 1266.

Pentru $n = 2$, coeficienţii lui a_0, a_1, a_2 sînt

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}[(2m+2)^2 - 4]\cos(2m+2)x -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}[(2m+1)^2 - 1]\cos(2m+1)x,$$

şi $\sum\limits_{0}^{\infty}\cos(2m+1)x$

$$\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+2)^2\cos(2m+2)x + \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}[(2m+1)^2 - 1]\cos(2m+1)x.$$

Primită la redacţie la 10 noiembrie 1966

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
str. M. Eminescu nr. 47 Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Marcel N. Roşculeţ, *Recherches sur les séries trigonométriques*. IV. *Sur la série de Fourier attachée à une fonction non intégrable*. Revue Roumaine de math. pures et appl., **XI**, *2* (1966).

2. Marcel N. Roşculeţ, *Cercetări asupra seriilor trigonometrice*. V. *Sumabilitatea seriei Fourier asociată unei funcţii neintegrabile*. St. cerc. mat., **18**, *9* (1966).

PUTERILE FUNCȚIEI LUI MÖEBIUS

DE

TOMA N. STANCIU

(Galați)

Se dă o nouă demonstrație unei formule a lui C. Popovici [3].

(Galați)

Notăm cu :

A inel comutativ și cu element unitate nenul;

$N(N^*)$ mulțimea tuturor numerelor naturale (strict pozitive);

Z mulțimea tuturor numerelor întregi;

Pentru $m, n \in N, \left(\frac{m}{n}\right) = \begin{cases} \frac{m!}{n!\,(m-n)!}, & \text{dacă } m \geqslant n \\ 0, & \text{,, } m < n \end{cases}$.

1. *A-algebra D_A și câteva cunoștințe.* Următoarele legi de compoziție : $(f, g) \in A^{N^*} \times A^{N^*} \to f + g \in A^{N^*}$ obișnuită, $(a, f) \in A \times A^{N^*} \to af \in A^{N^*}$ obișnuită și $(f, g) \in A^{N^*} \times A^{N^*} \to f * g \in A^{N^*}$ definită, pentru orice $t \in N^*$, prin egalitatea $(f * g)\,(t) = \sum\limits_{d \in N^*,\, d/t} f\left(\frac{t}{d}\right) g(d) \in A$ ($d/t = d$ divide t), definesc pe A^{N^*} o structură de A-algebră comutativă și cu element unitate, care se va nota cu D_A. Elementul unitate este funcția

$t \in N^* \to \begin{cases} 1 \in A, & \text{dacă } t = 1 \\ 0 \in \mathrm{A}, & \text{,, } t \neq 1 \end{cases}$. Funcția $U : t \in N^* \to 1 \in A$ este inversabilă și inversa sa este funcția μ a lui Möebius. U și μ sînt multiplicative. Dacă $f, g \in A^{N^*}$ sînt multiplicative, atunci și $f * g$ este multiplicativă. Proprietățile anunțate se demonstrează ușor, iar demonstrațiile se găsesc în [1] și [2].

2. *Scopul notei.* În [3], pentru fiecare $r \in Z$, $r \geqslant -1$, se definește funcția $\mu_r \in Z^Z$; μ_r este pară și $\mu_r\ (0) = 0$. Teorema din [3] este echivalentă cu egalitatea $\mu_r|_{N^*} = \mu^{r+1}$, unde μ și ridicarea la putere sînt în D_Z. Noi vom calcula puterile *întregi* ale lui μ din D_A și, implicit, vom redemonstra această egalitate.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 583–584, BUCUREȘTI, 1967

3. *Două formule pentru puterile întregi ale lui U din D_A.* (În ceea ce urmează $m\,1$, unde $m \in Z$ și $1 \in A$, se va nota cu m).
Fie $p_k \in N^*$ ($k = 1, 2, \ldots, j$; $j \geqslant 1$) primi și astfel încît $p_k \neq p_l$, dacă $k \neq l$. Fie și α_k, $i \in N$ ($k = 1, 2, \ldots, j$; $j \geqslant 1$). Atunci :

a) $$\mu^i\left(\prod_{k=1}^{j} p_k^{\alpha_k}\right) = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{j} \alpha_k} \prod_{k=1}^{j} \binom{i}{\alpha_k}.$$

b) $$U^i\left(\prod_{k=1}^{j} p_k^{\alpha_k}\right) = \prod_{k=1}^{j} \binom{\alpha_k + i - 1}{i - 1}, \text{ dacă } i \geqslant 1.$$

Demonstrație. Deoarece μ^i și U^i sînt multiplicative, este suficient să le demonstrăm pentru $j = 1$. Pentru demonstrație efectuăm inducție după i. a) este adevărată pentru 0 și 1 ; b) este adevărată pentru 1. Le presupunem adevărate pentru i și demonstrăm că sînt adevărate și pentru $i + 1$:

$$\mu^{i+1}(p^\alpha) = \sum_{\beta \in N,\, \beta \leqslant \alpha} \mu(p^{\alpha-\beta})\, \mu^i(p^\beta) = (-1)^\alpha \sum_{\beta \in N,\, \beta \leqslant \alpha,\, \alpha-\beta \leqslant 1} \binom{1}{\alpha - \beta}\binom{i}{\beta} =$$

$$(-1)^\alpha\left(\binom{i}{\alpha} + \begin{cases} 0, \text{ dacă } \alpha = 0 \\ \dbinom{i}{\alpha - 1}, \text{ dacă } \alpha \geqslant 1 \end{cases}\right) = (-1)^\alpha \binom{i+1}{\alpha} \text{ și}$$

$$U^{i+1}(p^\alpha) = \sum_{\beta \in N,\, \beta \leqslant \alpha} U(p^{\alpha-\beta})\, U^i(p^\beta) = \sum_{\beta \in N,\, \beta \leqslant \alpha} \binom{\beta + i - 1}{i - 1} =$$

$\underline{=} \binom{i + \alpha}{i}$; egalitatea subliniată se demonstrează ușor.

Pentru a termina, este suficient să observăm că din a) se obține imediat definiția din [3]. În sfîrșit, b) se întîlnește, sub altă formă, și în [4].

Primită la redacție la 1 noiembrie 1966

Institutul politehnic din Galați

BIBLIOGRAFIE

1. N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques, Algèbre linéaire*, ch. II, 1947, pag. 114–115.
2. I. Creangă ș.a., *Introducere în teoria numerelor*. București, 1965, pag. 73–80.
3. C. P. Popovici, *O generalizare a funcției lui Möebius*. St. cerc. mat., **15**, *3* (1963).
4. I. M. Vinogradov, *Bazele teoriei numerelor*. București, pag. 32, ex. 11.

GRUPURILE DE OLONOMIE ALE SPAȚIILOR A_4

DE

MARIUS I. STOKA

În această lucrare se determină grupurile de olonomie omogene ale spațiilor cu conexiune afină cu patru dimensiuni.

Fie A_n cu spațiu cu conexiune afină raportat la un sistem de congruențe $ds^a = \lambda^a_i\, dx^i$. Dacă notăm cu γ^a_{bc} componentele conexiunii afine ale spațiului A_n în raport cu sistemul de congruențe (λ), atunci componentele conexiunii infinitezimale sînt $ds^a_b = \gamma^a_{bc}\, ds^c$.

Notînd cu V^i componentele unui vector contravariant din spațiul A_n, ecuațiile transportului paralel ale vectorului sînt

$$\frac{dv^a}{dt} = \frac{ds^a_b}{dt} v^b, \tag{1}$$

unde $v^a = \lambda^a_i V^i$ sînt componentele vectorului față de sistemul de congruențe. Integrînd acest sistem, se obține grupul de olonomie omogen al spațiului A_n.

Într-o lucrare anterioară [1] am determinat grupurile de olonomie omogene ale spațiului A_3. În această lucrare vom determina grupurile de olonomie omogene ale spațiului A_4.

Dacă $n = 4$, sistemul (1) se scrie

$$\tag{1'} \begin{cases} \dfrac{dv^1}{dt} = \dfrac{ds^1_1}{dt} v^1 + \dfrac{ds^1_2}{dt} v^2 + \dfrac{ds^1_3}{dt} v^3 + \dfrac{ds^1_4}{dt} v^4 \\[2ex] \dfrac{dv^2}{dt} = \dfrac{ds^2_1}{dt} v^1 + \dfrac{ds^2_2}{dt} v^2 + \dfrac{ds^2_3}{dt} v^3 + \dfrac{ds^2_4}{dt} v^4, \\[2ex] \dfrac{dv^3}{dt} = \dfrac{ds^3_1}{dt} v^1 + \dfrac{ds^3_2}{dt} v^2 + \dfrac{ds^3_3}{dt} v^3 + \dfrac{ds^3_4}{dt} v^4, \\[2ex] \dfrac{dv^4}{dt} = \dfrac{ds^4_1}{dt} v^1 + \dfrac{ds^4_2}{dt} v^2 + \dfrac{ds^4_3}{dt} v^3 + \dfrac{ds^4_4}{dt} v^4. \end{cases}$$

Vom considera în primul rînd cazul $ds^1_2 = ds^1_3 = ds^1_4 = 0$.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, Nr. 4, P. 585–607, BUCUREȘTI, 1967

Cu aceste valori, prima ecuație (1′) ne dă

$$v^1 = c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}.$$

Înlocuind această valoare în celelalte ecuații (1′), obținem

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,v^2 + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,v^3 + \frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,v^4 + c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\,\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t},\\
(2)\qquad &\frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\,v^3 + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\,v^3 + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,v^4 + c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\,\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t},\\
&\frac{\mathrm{d}v^4}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,v^4 + \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,v^3 + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\,v^4 + c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\,\frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

Dacă $\mathrm{d}s_3^2 = \mathrm{d}s_4^2 = 0$, prima ecuație (2) are soluția

$$v^2 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2}\left[c^1\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\,\mathrm{d}s_1^2 + c^2\right],$$

iar celelalte două ecuații (2) se scriu

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\,v^3 + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\,v^4 + c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\,\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t} + \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2}\left[c^1\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\,\mathrm{d}s_1^2 + c^2\right]\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t},\\
\frac{\mathrm{d}v^4}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\,v^3 + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\,v^4 + c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\,\frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t} + \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2}\left[c^1\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\,\mathrm{d}s_1^2 + c^2\right]\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

Dacă $\mathrm{d}s_4^3 = 0$, acest sistem are soluția

$$\begin{aligned}
v^3 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3}\Bigg(c^1\Bigg[\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)}\Bigg(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\,\mathrm{d}s_1^2\Bigg)\mathrm{d}s_2^3 + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_3^3)}\,\mathrm{d}s_1^3\Bigg] +\\
+ c^2\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)}\,\mathrm{d}s_2^3 + c^3\Bigg),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^4 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\Bigg\{c^1\Bigg[\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_4^4)}\Bigg(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)}\Bigg(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\,\mathrm{d}s_1^2\Bigg)\mathrm{d}s_2^3 +\\
+ \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_3^3)}\,\mathrm{d}s_1^3\Bigg)\mathrm{d}s_3^4 + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_4^4)}\Bigg(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\,\mathrm{d}s_1^2\Bigg)\mathrm{d}s_2^4 +\\
+ \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_4^4)}\,\mathrm{d}s_1^4\Bigg] + c^2\Bigg[\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_4^4)}\Bigg(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)}\,\mathrm{d}s_2^3\Bigg)\mathrm{d}s_3^4 +\\
+ \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_4^4)}\,\mathrm{d}s_2^4\Bigg] + c^3\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_3^3 - \mathrm{d}s_4^4)}\,\mathrm{d}s_3^4 + c^4\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Rezultă că, în acest caz, grupul de olonomie omogen al spațiului A_4 este

$$
(3)\qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha v^1 \\ v'^2 = \beta_1\beta_2\, v^1 + \beta_1 v^2 \\ v'^3 = \gamma_1\gamma_2 v^1 + \gamma_1\gamma_3\, v^2 + \gamma_1\, v^3, \\ v'^4 = \delta_1\,\delta_2 v^1 = \delta_1\delta_3 v^2 + \delta_1\,\delta_4 v^3 + \delta_1\, v^4, \end{cases}
$$

unde am notat

$$
\alpha = e^{\int_C ds_1^1}, \ \beta_1 = e^{\int_C ds_2^2}, \ \beta_2 = \int_C e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)}\, ds_1^2, \ \gamma_1 = e^{\int_C ds_3^3},
$$

$$
\gamma_2 = \int_C e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_2^3)} \left[\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)}\, ds_1^2\right] ds_2^3 + \int_C e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_3^3)}\, ds_1^3,
$$

$$
\gamma_3 = \int_C e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_3^3)}\, ds_2^3, \ \ \delta_1 = e^{\int_C ds_4^4},
$$

$$
\delta_2 = \int_C e^{\int_0^t (ds_3^3 - ds_4^4)} \left[\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_3^3)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 = ds_2^2)}\, ds_1^2\right) ds_2^3 + \right.
$$

$$
\left. + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_3^3)}\, ds_1^3\right] ds_3^4 + \int_C e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_4^4)} \left[\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)}\, ds_1^2\right] ds_2^4 +
$$

$$
+ \int_C e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_4^4)}\, ds_1^4,
$$

$$
\delta_3 = \int_C e^{\int_0^t (ds_3^3 - ds_4^4)} \left[\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_3^3)}\, ds_2^3\right] ds_3^4 + \int_C e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_4^4)}\, ds_2^4,
$$

$$
\delta_4 = \int_C e^{\int_0^t (ds_3^3 - ds_4^4)}\, ds_3^4,
$$

C fiind o curbă închisă oarecare

Deci, dacă $ds_2^1 = ds_3^1 = ds_4^1 = ds_3^2 = ds_4^2 = ds_4^3 = 0$, spațiul A_4 are ca grup de olonomie omogen, grupul (3) sau un subgrup al acestuia.

Un rezultat analog se obține dacă $ds_4^3 \neq 0$, $ds_3^4 = 0$.

Grupul (3) lasă invariante varietățile liniare $v^1 = 0$, $v^1 = v^2 = 0$, și $v^1 = v^2 = v^3 = 0$.

Avînd în vedere că $ds_b^a = \Gamma_{bc}^a\, ds^c$, Γ_{bc}^a fiind componentele conexiunii în sistemul de coordonate, din relațiile $ds_2^1 = ds_3^1 = ds_4^1 = ds_3^2 = ds_4^2 = ds_4^3 = 0$, rezultă

$$
\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{3i}^2 = \Gamma_{4i}^2 = \Gamma_{4i}^3, \quad (i = 1, \ldots, 4).
$$

Deci,

Spațiile A_4 pentru care $\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^1_{4i} = \Gamma^2_{3i} = \Gamma^2_{4i} = \Gamma^3_{4i} = 0$, $(i = 1, \ldots, 4)$, au ca grup omogen de olonomie grupul (3) sau un subgrup al lui.

Să presupunem acum că $\mathrm{d}s^3_4 \neq 0$, $\mathrm{d}s^4_3 \neq 0$. În acest caz din prima ecuație (2′) deducem

$$v^4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t}\,v^3 - c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s^1_1}\,\dfrac{\mathrm{d}s^3_1}{\mathrm{d}t} - \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s^2_2}\left[c^1\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s^1_1 - \mathrm{d}s^2_2)}\,\mathrm{d}s^2_1 + c^2\right]\dfrac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t}}.$$

Înlocuind această valoare în a doua ecuație (2′), obținem

$$\frac{\mathrm{d}^2 v^3}{\mathrm{d}t^2} - p_1\,\frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t} - p_2 v^3 = \Bigg[p_3\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s^1_1} + \tag{4}$$

$$+ p_4\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s^2_2}\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s^1_1 - \mathrm{d}s^2_2)}\,\mathrm{d}s^2_1\Bigg]\,c^1 + p_5\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s^2_2}\,c^2,$$

unde am notat

$$p_1 = \frac{\mathrm{d}\,(s^3_3 + s^4_4)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t},$$

$$p_2 = \frac{\mathrm{d}^2 s^3_3}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s^4_3}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s^4_4}{\mathrm{d}t},$$

$$p_3 = \frac{\mathrm{d}^2 s^3_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s^3_1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\,(s^1_1 - s^4_4)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^3_1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^2_1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s^4_1}{\mathrm{d}t},$$

$$p_4 = \frac{\mathrm{d}^2 s^3_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s^4_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\,(s^2_2 - s^4_4)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t},$$

$$p_5 = \frac{\mathrm{d}^2 s^3_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\,(s^2_2 - s^4_4)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}s^4_2}{\mathrm{d}t},$$

Soluția generală a ecuației (4) este

$$v = c^1\left[\lambda_0\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s^1_1} + \mu_0\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s^2_2}\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s^1_1 - \mathrm{d}s^2_2)}\,\mathrm{d}s^2_1\right] + c^2\,\nu_0\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s^2_2} + c^3\Phi_1 + c^4\Phi_2,$$

unde Φ_1 și Φ_2 sînt două soluții independente ale ecuației

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2} - p_1\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - p_2\Phi = 0,$$

λ_0 și μ_0 reprezintă o soluție particulară a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t^2}+\left(2\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}-p_1\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}+2\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2}-p_1\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}-p_2\right]\lambda+$$

$$+\left[\frac{\mathrm{d}(s_1^1+s_2^2)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}-p_1\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right]\mu=p_3,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mu}{\mathrm{d}t^2}+\left(2\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}-p_1\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\mathrm{d}^2s_2^2}{\mathrm{d}t^2}-p_1\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}-p_2\right]\mu=p_4,$$

iar ν_0 este o soluție particulară a ecuației

$$\frac{\mathrm{d}^2\nu}{\mathrm{d}t^2}+\left(2\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}-p_1\right)\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\mathrm{d}^2s_2^2}{\mathrm{d}t^2}-p_1\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}-p_2\right]\nu=p_5.$$

Cu această valoare a lui v^3 obținem

$$v^4=c^1\frac{e^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\left[\frac{\mathrm{d}\lambda_0}{\mathrm{d}t}+\lambda_0\frac{\mathrm{d}(s_1^1-s_3^3)}{\mathrm{d}t}+\mu_0\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right]e^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2}\int_0^t e^{\int_0^t(\mathrm{d}s_1^1-\mathrm{d}s_2^2)}\,\mathrm{d}s_1^2\left[\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}t}+\right.}{\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}$$

$$\frac{\left.+\mu_0\frac{\mathrm{d}(s_2^2-s_3^3)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\right]}{\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}+$$

$$+c^2e^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2}\frac{\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}t}+\nu_0\frac{\mathrm{d}(s_2^2-s_3^3)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}+c^3\frac{\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}-\Phi_1\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}+c^4\frac{\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}-\Phi_2\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}.$$

Presupunînd că funcțiile Φ_1, Φ_2, λ_0, μ_0, ν_0 satisfac condițiile

$$\lambda_0(0)=\nu_0(0)=\Phi_2(0)=0,\ \Phi_1(0)=1,\left(\frac{\mathrm{d}\lambda_0}{\mathrm{d}t}\right)_0+\mu_0(0)\left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right)_0=0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}t}\right)_0=\left(\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\right)_0,\ \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0=\left(\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right)_0,\quad \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0=\left(\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

şi notînd

$$\alpha = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_1^1}, \ \beta_1 = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_2^2}, \ \beta_2 = \int_C \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)} \mathrm{d}s_1^2,$$

$$\gamma_1 = \lambda_0\alpha + \mu_0\,\beta_1\,\beta_2, \gamma_2 = \nu_0, \gamma_3 = \Phi_1, \gamma_4 = \Phi_2,$$

$$\delta_1 = \frac{\alpha\left[\frac{\mathrm{d}\lambda_0}{\mathrm{d}t} + \lambda_0\frac{\mathrm{d}(s_1^1 - s_3^3)}{\mathrm{d}t} + \mu_0\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right] + \beta_1\beta_2\left[\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}t} + \mu_0\frac{\mathrm{d}(s_2^2 - s_3^3)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\right]}{\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}},$$

$$\delta_2 = \frac{\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}t} + \nu_0\frac{\mathrm{d}(s_2^2 - s_3^3)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}, \ \delta_3 = \frac{\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \Phi_1\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}, \ \delta_4 = \frac{\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \Phi_2\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}},$$

unde punctul $P(t)$ parcurge o curbă închisă oarecare C, atunci grupul de olonomie omogen al spaţiului A_4 este

$$(5) \qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha v^1, \\ v'^2 = \beta_1\beta_2 v^1 + \beta_1 v^2, \\ v'^3 = \gamma_1 v^1 + \beta_1\gamma_2 v^2 + \gamma_3 v^3 + \gamma_4 v^4, \\ v'^4 = \delta_1 v^1 + \beta_1\delta_2 v^2 + \delta_3 v^3 + \delta_4 v^4. \end{cases}$$

Deci, dacă $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_3^2 = \mathrm{d}s_4^2 = 0$, $\mathrm{d}s_4^3 \neq 0$, $\mathrm{d}s_3^4 \neq 0$, spaţiul A_4 are ca grup omogen de olonomie grupul (5) sau un subgrup al lui.

Grupul (5) are varietăţile invariante $v^1 = 0$ şi $v^1 = v^2 = 0$.

În sistemul de coordonate, condiţiile de mai sus se scriu

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{3i}^2 = \Gamma_{4i}^2 = 0, \qquad (i = 1, \ldots, 3)$$

$$\sum_{i=1}^{4} (\Gamma_{4i}^3)^2 \neq 0, \ \sum_{l=1}^{4} (\Gamma_{3i}^4)^2 \neq 0.$$

Rezultate analoage se obţin dacă $\mathrm{d}s_2^3 = \mathrm{d}s_4^3 = 0$ sau $\mathrm{d}s_2^4 = \mathrm{d}s_3^4 = 0$.

Să ne ocupăm acum de cazul în care

$$(6) \qquad (\mathrm{d}s_3^2)^2 + (\mathrm{d}s_4^2)^2 \neq 0, (\mathrm{d}s_2^3)^2 + (\mathrm{d}s_4^3)^2 \neq 0, \ (\mathrm{d}s_2^4)^2 + (\mathrm{d}s_3^4)^2 \neq 0.$$

Vom presupune întîi că $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$, $\mathrm{d}s_4^2 = 0$. Din prima ecuaţie (2) deducem

$$(7) \qquad v^3 = \frac{\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,v^2 - c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}.$$

Înlocuind această expresie în a doua ecuaţie (2), obţinem ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - p_2 v^2 = \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} v^4 + c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} p_3, \tag{8}$$

unde am notat

$$p_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(s_2^2 + s_3^3)}{\mathrm{d}t},$$

$$p_2 = \frac{\mathrm{d}^2 s_2^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t},$$

$$p_3 = \frac{\mathrm{d}^2 s_1^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(s_1^1 - s_3^3)}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}.$$

Dacă $\mathrm{d}s_4^3 = 0$, din (6) deducem $\mathrm{d}s_2^3 \neq 0$ şi ecuaţia (8) are soluţia

$$v^2 = c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} \Phi_0 + c^2 \Phi_1 + c^3 \Phi_2, \tag{9}$$

unde Φ_1 şi Φ_2 sînt două soluţii independente ale ecuaţiei

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - p_2 \Phi = 0,$$

iar Φ_0 o soluţie particulară a ecuaţiei

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}t^2} + \left(2 \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - p_1\right) \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + \left[\frac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 - p_1 - p_2\right] \Phi = p_3.$$

Înlocuind expresia (9) în (7) obţinem

$$v^3 = c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} \frac{\frac{\mathrm{d}(s_1^1 - s_2^2)}{\mathrm{d}t} \Phi_0 + \frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + c^2 \frac{\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \Phi_1 \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + c^3 \frac{\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \Phi_2 \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}.$$

Ţinînd seama de valorile lui v^2 şi v^3 în ultima ecuaţie (2), rezultă

$$\frac{\mathrm{d}v^4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t} v^4 = c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} q_1 + c^2 q_2 + c^3 q_3,$$

unde

$$q_1 = \frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t} \Phi_0 + \frac{\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\mathrm{d}(s_1^1 - s_2^2)}{\mathrm{d}t} \Phi_0 + \frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right]}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$q_2 = \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\Phi_1 + \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \Phi_1\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$q_3 = \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}\,\Phi_2 + \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \Phi_2\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}.$$

Deci

$$v^4 = c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_4^4)}\,q_1\,\mathrm{d}t + c^2\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\,q_2\,\mathrm{d}t +$$

$$+ c^3\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\,q_3\,\mathrm{d}t + c^4\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}.$$

Presupunînd că funcțiile Φ_0, Φ_1, Φ_2 satisfac condițiile

$$\Phi_0(0) = \Phi_2(0) = 0,\ \Phi_1(0) = 1,\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right)_0,\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0,\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

și notînd

$$\alpha = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_1^1},\ \beta_1 = \Phi_0,\ \beta_2 = \Phi_1,\ \beta_3 = \Phi_2,$$

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}(s_1^1 - s_2^2)}{\mathrm{d}t}\,\Phi_0 + \dfrac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$\gamma_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \Phi_1\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},\ \gamma_3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \Phi_2\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$\delta_1 = \int_C \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_4^4)}\,q_1\,\mathrm{d}t,\ \delta_2 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\,q_2\,\mathrm{d}t,\ \delta_3 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_4^4}\,q_3\,\mathrm{d}t,\ \delta_4 = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_4^4},$$

unde punctul $P(t)$ parcurge o curbură închisă oarecare C, atunci grupul de olonomie omogen al spaţiului A_4 este

$$\left\{\begin{aligned} v'^1 &= \alpha\, v^1, \\ v'^2 &= \alpha\beta_1\, v^1 + \beta_2\, v^2 + \beta_3\, v^3, \\ v'^3 &= \alpha\gamma_1\, v^1 + \gamma_2\, v^2 + \gamma_3\, v^3, \\ v'^4 &= \delta_1\delta_4\, v^1 + \delta_2\delta_4\, v^2 + \delta_3\delta_4\, v^3 + \delta_4\, v^4. \end{aligned}\right.$$

Deci dacă $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_4^2 = \mathrm{d}s_4^3 = 0$, $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$, $\mathrm{d}s_2^3 \neq 0$, $(\mathrm{d}s_2^4)^2 + (\mathrm{d}s_3^4)^2 \neq 0$, spaţiul A_4 are ca grup omogen de olonomie grupul (10) sau un subgrup al lui.

Grupul (10) are varietăţile invariante $v^1 = 0$ şi $v^1 = v^2 = v^3 = 0$.

În sistemul de coordonate condiţiile de mai sus se scriu

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{4i}^2 = \Gamma_{4i}^3 = 0, \qquad (i = 1, \ldots, 4),$$

$$\sum_{i=1}^{4} (\Gamma_{3i}^2)^2 \neq 0,\ \sum_{i=1}^{4} (\Gamma_{2i}^3)^2 \neq 0,\ \sum_{i=1}^{4} [(\Gamma_{2i}^4)^2 + (\Gamma_{3i}^4)^2] \neq 0.$$

Să presupunem acum că $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_4^1 = \mathrm{d}s_4^2 = 0$, $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$, $\mathrm{d}s_4^3 \neq 0$, $(\mathrm{d}s_2^4)^2 + (\mathrm{d}s_3^4)^2 \neq 0$. În acest caz, din (8) deducem

$$v^4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - p_2 v^2 - c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} \cdot p_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\, \dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}. \tag{11}$$

Înlocuind expresiile (7) şi (11) în ultima ecuaţie (2), obţinem

$$\frac{\mathrm{d}^3 v^2}{\mathrm{d}t^3} - q_1 \frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - q_2 \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - q_3 v^2 = c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\, q_4, \tag{12}$$

unde

$$q_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)^2 \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\,(s_2^2 + s_3^3 + s_4^4)}{\mathrm{d}t},$$

$$q_2 = \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} - p_1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right) + p_2 + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}$$

$$q_3 = \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t} - p_2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t},$$

$$q_4 = \frac{\mathrm{d}p_3}{\mathrm{d}t} - p_3 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(s_1^1 + s_4^4)}{\mathrm{d}t}\right] + \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\right).$$

Dacă notăm cu Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 trei soluţii independente ale ecuaţiei

$$\frac{\mathrm{d}^3 \Psi}{\mathrm{d}t^3} - q_1 \frac{\mathrm{d}^2 \Psi}{\mathrm{d}t^2} - q_2 \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} - q_3 \Psi = 0$$

şi cu Ψ_0 o soluție particulară a ecuației

$$\frac{\mathrm{d}^3\Psi}{\mathrm{d}t^3} + \left(3\,\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - q_1\right)\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}t^2} + \left[3\,\frac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2} + 3\left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2q_1\,\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - q_2\right]\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} +$$

$$+ \left[\frac{\mathrm{d}^3s_1^1}{\mathrm{d}t^3} + 3\,\frac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^3 - q_1\,\frac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2} - q_1\left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 - q_2\,\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - q_3\right]\Psi = q_4,$$

soluția generală a ecuației (12) este

$$v^2 = c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\,\Psi_0 + c^2\,\Psi_1 + c^3\,\Psi_2 + c^4\,\Psi_3\,.$$

Înlocuind această valoare în (7) și (11) deducem

$$v^3 = c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_0}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\,(s_1^1 - s_2^2)}{\mathrm{d}t}\,\Psi_0 - \dfrac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + c^2\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Psi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^3\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Psi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + c^4\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_3}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\,\Psi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$v^4 = c^1\,\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} \times$$

$$\times\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi_0}{\mathrm{d}t^2} + \left(2\,\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - p_1\right)\dfrac{\mathrm{d}\Psi_0}{\mathrm{d}t} + \left[\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \left(\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 - p_1\,\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - p_2\right]\Psi_0 - p_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^2\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi_1}{\mathrm{d}t^2} - p_1\,\dfrac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} - p_2\,\Psi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}} + c^3\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}t^2} - p_1\,\dfrac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t} - p_2\,\Psi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^4\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi_3}{\mathrm{d}t^2} - p_1\,\dfrac{\mathrm{d}\Psi_3}{\mathrm{d}t} - p_2\,\Psi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}}.$$

Presupunînd că funcţiile Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 satisfac condiţiile

$$\Psi_0(0) = \Psi_2(0) = \Psi_3(0) = 0,\ \Psi_1(0) = 1,\ \left(\frac{\mathrm{d}\Psi_0}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}\Psi_3}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 0, \left(\frac{\mathrm{d}^2\Psi_0}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(p_1 - 2\,\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0\left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (p_3)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\Psi_1}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = (p_1)_0\left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + (p_2)_0, \left(\frac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = (p_1)_0\left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}^2\Psi_3}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

şi notînd

$$\alpha = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_1^1},\ \beta_1 = \Psi_0,\ \beta_2 = \Psi_1,\ \beta_3 = \Psi_2,\ \beta_4 = \Psi_3,$$

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_0}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}(s_1^1 - s_2^2)}{\mathrm{d}t}\Psi_0 - \dfrac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},\quad \gamma_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} - \Psi_1\dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}$$

$$\gamma_3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Psi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},\quad \gamma_4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_3}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Psi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}$$

$$\delta_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi_0}{\mathrm{d}t^2} + \left(2\,\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - p_1\right)\dfrac{\mathrm{d}\Psi_0}{\mathrm{d}t} + \left[\dfrac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} + \left(\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 - p_1\,\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} - p_2\right]\Psi_0 - p_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\ \dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}},$$

$$\delta_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi_1}{\mathrm{d}t^2} - p_1\,\dfrac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} - p_2\Psi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\ \dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}},\quad \delta_3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}t^2} - p_1\,\dfrac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t} - p_2\Psi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\ \dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}},$$

$$\delta_4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi_3}{\mathrm{d}t^2} - p_1\,\dfrac{\mathrm{d}\Psi_3}{\mathrm{d}t} - p_2\Psi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\ \dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}},$$

unde punctul $P(t)$ parcurge o curbă închisă oarecare C, atunci grupul de olonomie omogen al sapţiului A_4 este

$$(13)\qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha v^1, \\ v'^2 = \alpha\beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_3 v^3 + \beta_4 v^4, \\ v'^3 = \alpha\gamma_1 v^1 + \gamma_2 v^2 + \gamma_3 v^3 + \gamma_4 v^4, \\ v'^4 = \alpha\delta_1 v^1 + \delta_2 v^2 + \delta_3 v^3 + \delta_4 v^4. \end{cases}$$

Deci, dacă $\mathrm{d}s^1_2 = \mathrm{d}s^1_3 = \mathrm{d}s^1_4 = \mathrm{d}s^2_4 = 0$, $\mathrm{d}s^2_3 \neq 0$, $\mathrm{d}s^3_4 \neq 0$ $(\mathrm{d}s^4_2)^2 + (\mathrm{d}s^4_3)^2 \neq 0$, spaţiul A_4 are ca grup omogen de olonomie grupul (13) sau un subgrup al lui.

Grupul (13) are ca varietate invariantă varietatea $v^1 = 0$.

În sistemul de coordonate, condiţiile de mai sus se scriu

$$\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^1_{4i} = \Gamma^2_{4i} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

$$\sum_{i=1}^{4} (\Gamma^2_{3i})^2 \neq 0, \ \sum_{i=1}^{4} (\Gamma^3_{4i})^2 \neq 0, \ \sum_{i=1}^{4} [(\Gamma^4_{2i})^2 + (\Gamma^4_{3i})^2] \neq 0.$$

Rezultate analoage se obţin dacă $\mathrm{d}s^1_2 = \mathrm{d}s^1_3 = \mathrm{d}s^1_4 = 0$ şi dacă una din formele $\mathrm{d}s^2_3$, $\mathrm{d}s^3_2$, $\mathrm{d}s^3_4$, $\mathrm{d}s^4_2$, $\mathrm{d}s^4_3$ este nulă.

Să considerăm acum cazul în care $\mathrm{d}s^1_2 = \mathrm{d}s^1_2 = \mathrm{d}s^1_4 = 0$, $\mathrm{d}s^h_k \neq 0$, $(h \neq k = 2, 3, 4)$.

Din prima ecuaţie (2) deducem

$$v^3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t}v^2 - \dfrac{\mathrm{d}s^2_4}{\mathrm{d}t}v^4 - c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s^1_1} \dfrac{\mathrm{d}s^2_1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}}.$$

Înlocuind această valoare în a doua ecuaţie (2) şi ţinînd seama de a treia ecuaţie, rezultă

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2s^2_3}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s^2_4}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s^4_3}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}} \right)\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \Bigg[\frac{\mathrm{d}^2s^2_2}{\mathrm{d}t^2} + \\ &\qquad + \frac{\mathrm{d}s^2_4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^4_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t} - \\ &- \frac{\dfrac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2s^2_3}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}s^2_4}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s^4_3}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}} \Bigg] v^2 - c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s^1_1} \Bigg[\frac{\mathrm{d}s^1_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^2_1}{\mathrm{d}t} + \\ &\qquad + \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^3_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^2_4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^4_1}{\mathrm{d}t} + \end{aligned}$$

$$+\frac{\mathrm{d}^2s_1^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2s_3^2}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}\Bigg]=\Bigg[\frac{\mathrm{d}^2s_4^2}{\mathrm{d}t^2}+$$

$$+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}-$$

$$-\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2s_3^2}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}\Bigg]v^4.$$

Dacă

$$\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2s_4^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2s_3^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right),$$

regăsim grupul (10) iar dacă

$$\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2s_4^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right)\neq\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2s_3^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right),$$

regăsim grupul (13).

Deci, dacă $\mathrm{d}s_2^1=\mathrm{d}s_3^1=\mathrm{d}s_4^1=0$, $\mathrm{d}s_k^h\neq 0$, $(h\neq k,=2,3,4)$, spațiul A_4 are ca grup de olonomie omogen grupul (10) sau (13) sau un subgrup al lor.

În sistemul de coordonate aceste condiții se scriu

$$\Gamma_{2i}^1=\Gamma_{3i}^1=\Gamma_{4i}^1=0,\ (i=1,\ldots,4),\ \sum_{i=1}^{4}(\Gamma_{ki}^h)^2\neq 0,\ (h\neq k=2,3,4).$$

Rezultate analoage se obțin dacă $\mathrm{d}s_1^2=\mathrm{d}s_3^2=\mathrm{d}s_4^2=0$, sau $\mathrm{d}s_1^3=\mathrm{d}s_2^3=\mathrm{d}s_4^3=0$, sau $\mathrm{d}s_1^4=\mathrm{d}s_2^4=\mathrm{d}s_3^4=0$.

Să ne ocupăm acum de cazul în care

$$(14)\qquad \begin{aligned}&(\mathrm{d}s_2^1)^2+(\mathrm{d}s_3^1)^2+(\mathrm{d}s_4^1)^2\neq 0,\quad (\mathrm{d}s_1^2)^2+(\mathrm{d}s_3^2)^2+(\mathrm{d}s_4^2)^2\neq 0,\\&(\mathrm{d}s_1^3)^2+(\mathrm{d}s_2^3)^2+(\mathrm{d}s_4^3)^2\neq 0,\quad (\mathrm{d}s_1^4)^2+(\mathrm{d}s_2^4)^2+(\mathrm{d}s_3^4)^2\neq 0.\end{aligned}$$

Să presupunem întîi că $\mathrm{d}s_2^1=\mathrm{d}s_3^1=0$. Atunci din prima relație (14) deducem $\mathrm{d}s_4^1\neq 0$ și prima ecuație (1′) ne dă

$$(15)\qquad v^4=\frac{\dfrac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}v^1}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}}$$

Înlocuind această valoare în celelalte ecuații (1′) obținem

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\right)v^1+\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}v^2+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}v^3,\\
&\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right)v^1+\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}v^2+\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}v^3,\\
&\frac{\mathrm{d}^2v^1}{\mathrm{d}t^2}-\left[\frac{\mathrm{d}(s_1^1+s_4^4)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}+\right.\\
&\left.+\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right)v^1+\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}v^2+\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}v^3.
\end{aligned}
$$

Dacă $\mathrm{d}s_2^4=\mathrm{d}s_3^4=0$, din ultima relație (14) rezultă $\mathrm{d}s_1^4\neq 0$. Cu aceste valori, ultima ecuație (16) are soluția

$$
(17)\qquad v^1=c^1\,\Phi_1+c^4\,\Phi_2,
$$

unde Φ_1 și Φ_2 sînt două soluții independente ale ecuației

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2}-\left[\frac{\mathrm{d}(s_1^1+s_4^4)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}-\\
&-\left(\frac{\mathrm{d}^2s_1^1}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right)\Phi=0.
\end{aligned}
$$

Cu această valoare, din (15) deducem

$$
v^4=c^1\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\Phi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}}+c^4\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\Phi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}}.
$$

De asemenea, înlocuind expresia (17) în primele două ecuații (16) acestea devin

$$
(16')\quad
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}v^2+\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}v^3+c^1\left[\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}+\right.\\
&\left.+\left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_1\right]+c^4\left[\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_2\right],\\
&\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}v^2+\frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}v^3+c^1\left[\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}+\right.\\
&\left.+\left(\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_1\right]+c^4\left[\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_2\right].
\end{aligned}
$$

Dacă $\mathrm{d}s_3^2 = \mathrm{d}s_2^3 = 0$, de aici rezultă

$$v^2 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2}\left[c^1\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_2^2} p_1\,\mathrm{d}t + c^4\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_2^2} p_2\,\mathrm{d}t + c^2\right],$$

$$v^3 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3}\left[c^1\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} q_1\,\mathrm{d}t + c^4\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} q_2\,\mathrm{d}t + c^3\right],$$

unde

$$p_j = \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\Phi_j}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_4^2}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_j}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}}\,;\ (j = 1,\ 2)$$

$$q_j = \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\Phi_j}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_4^3}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_j}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}}.$$

Presupunînd că funcţiile Φ_1 şi Φ_2 satisfac condiţiile

$$\Phi_1(0) = 1,\quad \Phi_2(0) = 0,\ \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

şi notînd

$$\alpha = \Phi_1,\ \alpha_4 = \Phi_2,\ \delta_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\Phi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}},\ \delta_4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\Phi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}},$$

$$\beta_1 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_2^2} p_1\,\mathrm{d}t,\ \beta_2 = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_2^2},\ \beta_4 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_2^2} p_2\,\mathrm{d}t,$$

$$\gamma_1 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} q_1\,\mathrm{d}t,\ \gamma_3 = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_3^3},\ \gamma_4 = \int_C \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}s_3^3} q_2\,\mathrm{d}t,$$

unde punctul $P(t)$ parcurge o curbă închisă oarecare C, atunci grupul de olonomie omogen al spaţiului A_4 este

$$\tag{18} \begin{cases} v'^1 = \alpha_1 v^1 + \alpha_4 v^4, \\ v'^2 = \beta_1\beta_2 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_2\beta_4 v^4, \\ v'^3 = \gamma_1\gamma_3 v^1 + \gamma_3 v^2 + \gamma_3\gamma_4 v^4, \\ v'^4 = \delta_1 v^1 + \delta_4 v^4. \end{cases}$$

Deci, dacă $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_3^2 = \mathrm{d}s_2^3 = \mathrm{d}s_2^4 = \mathrm{d}s_3^4 = 0$, $\mathrm{d}s_4^1 \neq 0$, $\mathrm{d}s_1^4 \neq 0$, $(\mathrm{d}s_1^2)^2 + (\mathrm{d}s_4^2)^2 \neq 0$, $(\mathrm{d}s_1^3)^2 + (\mathrm{d}s_4^3)^2 \neq 0$, spaţiul A_4 are ca grup omogen de olonomie grupul (18) sau un subgrup al lui.

Grupul (18) are ca varietate invariantă varietatea $v^1 = v^4 = 0$. În sistemul de coordonate condițiile de mai sus se scriu

$$\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^2_{3i} = \Gamma^3_{2i} = \Gamma^4_{2i} = \Gamma^4_{3i} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, 4),$$

$$\sum_{i=1}^{4} (\Gamma^1_{4i})^2 \neq 0, \ \sum_{i=1}^{4} (\Gamma^4_{1i})^2 \neq 0, \ \sum_{i=1}^{4} [(\Gamma^2_{1i})^2 + (\Gamma^2_{4i})^2] \neq 0, \sum_{i=1}^{4} [(\Gamma^3_{1i})^2 + (\Gamma^3_{4i})^2] \neq 0.$$

Dacă $(\mathrm{d}s^2_3)^2 + (\mathrm{d}s^3_2)^2 \neq 0$, putem presupune că $\mathrm{d}s^2_3 \neq 0$ și din prima ecuație (16′) rezultă

$$v^3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t} v^2 - (c^1 p_1 + c^4 p_2)}{\dfrac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}}. \tag{19}$$

Cu această valoare, a doua ecuație (16′) ne dă

$$\frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(s^2_2 + s^3_3)}{\mathrm{d}t}\right] \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \left(\frac{\mathrm{d}^2 s^2_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t}\right) v^2 = c^1 \left[\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} - p_1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t}\right) + \right. \tag{20}$$

$$\left. + q_1 \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}\right] + c^4 \left[\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t} - p_2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t}\right) + q_2 \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}\right].$$

Notînd cu Ψ_1 și Ψ_2 două soluții independente ale ecuației

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Psi}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(s^2_2 + s^3_3)}{\mathrm{d}t}\right] \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} - \left(\frac{\mathrm{d}^2 s^2_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t}\right) \Psi = 0$$

și cu Ψ_{0j} $(j = 1, 2)$ o soluție particulară a ecuației

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Psi}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(s^2_2 + s^3_3)}{\mathrm{d}t}\right] \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} - \left(\frac{\mathrm{d}^2 s^2_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t}\right) \Psi = \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} - p_j \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t}\right) + q_j \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t},$$

soluția generală a ecuației (20) este

$$v^2 = c^1 \Psi_{01} + c^2 \Psi_1 + c^3 \Psi_2 + c^4 \Psi_{02}.$$

Cu această valoare, relaţia (19) se scrie

$$v^3 = c^1 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_{01}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Psi_{01} - p_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + c^2 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Psi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + c^3 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Psi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^4 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_{02}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Psi_{02} - p}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}.$$

Presupunînd că funcţiile Φ_1, Φ_2, Ψ_{01}, Ψ_{02}, Ψ_1, Ψ_2 satisfac condiţiile

$$\Phi_1(0) = \Psi_1(0) = 1,\ \Phi_2(0) = \Psi_{01}(0) = \Psi_{02}(0) =$$

$$\Psi_2(0) = 0, \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}\Psi_{01}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = (p_1)_0, \left(\frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}\Psi_{02}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = (p_2)_0 + \left(\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

şi notînd

$$\alpha_1 = \Phi_1,\ \alpha_4 = \Phi_2,\ \delta_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\Phi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}},\quad \delta_4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\Phi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}},$$

$$\beta_1 = \Psi_{01},\ \beta_2 = \Psi_1,\ \beta_3 = \Psi_2,\ \beta_4 = \Psi_{02},\ \gamma_1 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_{01}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Psi_{01} - p_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$\gamma_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Psi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},\quad \gamma_3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_3}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Psi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},\quad \gamma_4 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Psi_{02}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Psi_{02} - p_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

unde punctul $P(t)$ parcurge o curbă închisă oarecare C, atunci grupul de olonomie omogen al spațiului A_4 este

$$\text{(21)}\qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha_1 v^1 + \alpha_4 v^4, \\ v'^2 = \beta_i v^i, \\ v'^3 = \gamma_i v^i, \\ v'^4 = \delta_1 v^1 + \delta_4 v^4. \end{cases} \qquad (i = 1,2,3,4)$$

Deci, dacă $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_2^4 = \mathrm{d}s_3^4 = 0$, $\mathrm{d}s_4^1 \neq 0$, $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$, $\mathrm{d}s_1^4 \neq 0$, $(\mathrm{d}s_1^3)^2 + (\mathrm{d}s_2^3)^2 + (\mathrm{d}s_4^3)^2 \neq 0$, spațiul A_4 are ca grup omogen de olonomie grupul (21) sau un subgrup al lui.

Grupul (21) are ca varietate invariantă varietatea $v^1 = v^4 = 0$. În sistemul de coordonate, condițiile de mai sus se scriu

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{2i}^4 = \Gamma_{3i}^4 = 0,\ (i = 1, \ldots, 4),\ \sum_{i=1}^{4} (\Gamma_{4i}^1)^2 \neq 0,\ \sum_{i=1}^{4} (\Gamma_{3i}^2)^2 \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{4} (\Gamma_{1i}^4)^2 \neq 0,\ \sum_{i=1}^{4} [(\Gamma_{1i}^3)^2 + (\Gamma_{2i}^3)^2 + (\Gamma_{4i}^3)^2] \neq 0.$$

Un rezultat analog se obține în cazul $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_2^4 = \mathrm{d}s_3^4 = 0$, $\mathrm{d}s_4^1 \neq 0$, $\mathrm{d}s_2^3 \neq 0$, $\mathrm{d}s_1^4 \neq 0$, $(\mathrm{d}s_1^2)^2 + (\mathrm{d}s_3^2)^2 + (\mathrm{d}s_4^2)^2 \neq 0$.

Să presupunem acum că $(\mathrm{d}s_2^4)^2 + (\mathrm{d}s_3^4)^2 \neq 0$. În acest caz putem considera că $\mathrm{d}s_2^4 \neq 0$ și din ultima ecuație (16) deducem

$$\text{(22)}\qquad v^2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 v^1}{\mathrm{d}t^2} - \left[\dfrac{\mathrm{d}(s_1^1 + s_4^4)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\right]\dfrac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} - \left[\dfrac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t} + \right.\right.}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}}$$

$$\frac{\left.\left. + \dfrac{\mathrm{d}s_4^4}{\mathrm{d}t}\right) + \dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}\right] v^1 - \dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\, v^3}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}}.$$

Înlocuind această valoare în prima ecuație (16) și ținînd seama de a doua ecuație (16), obținem

$$\text{(23)}\qquad \frac{\mathrm{d}^3 v^1}{\mathrm{d}t^3} - p_1 \frac{\mathrm{d}^2 v^1}{\mathrm{d}t^2} - p_2 \frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} - p_3 v^1 = p_4 v^3,$$

unde

$$p_1 = \frac{\mathrm{d}(s_1^1 + s_2^2 + s_4^4)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 \frac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t} + \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}}.$$

$$p_2 = \frac{d^2(2s^1_1 + s^4_4)}{dt^2} + \frac{d^2}{dt^2}\ln\frac{ds^1_4}{dt} - \frac{ds^1_1}{dt}\left(\frac{d}{dt}\ln\frac{ds^1_4}{dt} + \frac{ds^4_4}{dt}\right) + \frac{ds^1_4}{dt}\frac{ds^4_1}{dt} +$$

$$+ \frac{ds^3_4}{dt}\frac{ds^4_3}{dt} - \left[\frac{d(s^1_1 + s^4_4)}{dt} + \frac{d}{dt}\ln\frac{ds^1_1}{dt}\right]\left[\frac{ds^2_2}{dt} + \frac{d}{dt}\ln\left(\frac{ds^1_4}{dt}\frac{ds^4_2}{dt}\right) + \frac{\frac{ds^4_3}{dt}\frac{ds^3_2}{dt}}{\frac{ds^4_2}{dt}}\right],$$

$$p_3 = \frac{d^3s^1_1}{dt^3} - \frac{d^2s^1_1}{dt^2}\left(\frac{d}{dt}\ln\frac{ds^1_4}{dt} + \frac{ds^4_4}{dt}\right) - \frac{ds^1_1}{dt}\left(\frac{d^2}{dt^2}\ln\frac{ds^1_4}{dt} + \frac{d^2s^4_4}{dt^2}\right) +$$

$$+ \frac{d}{dt}\left(\frac{ds^1_4}{dt}\frac{ds^4_2}{dt}\right) + \frac{ds^4_3}{dt}\left(\frac{ds^3_1}{dt}\frac{ds^1_4}{dt} - \frac{ds^1_1}{dt}\frac{ds^3_4}{dt}\right) + \frac{ds^4_2}{dt}\left(\frac{ds^2_1}{dt}\frac{ds^1_4}{dt} - \frac{ds^1_1}{dt}\frac{ds^2_4}{dt}\right) -$$

$$-\left[\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{ds^1_4}{dt}\frac{ds^4_2}{dt}\right) + \frac{\frac{ds^4_3}{dt}\frac{ds^3_2}{dt}}{\frac{ds^4_2}{dt}} + \frac{ds^2_2}{dt}\right]\left[\frac{d^2s^1_1}{dt^2} = \frac{ds^1_1}{dt}\left(\frac{d}{dt}\ln\frac{ds^1_4}{dt} + \frac{ds^4_4}{dt}\right) + \frac{ds^1_4}{dt}\frac{ds^4_1}{dt}\right],$$

$$p_4 = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds^1_4}{dt}\frac{ds^4_3}{dt}\right) + \frac{ds^1_4}{dt}\frac{ds^4_2}{dt}\frac{ds^2_3}{dt} - \frac{ds^1_4}{dt}\frac{ds^4_3}{dt}\left[\frac{d(s^2_2 - s^3_3)}{dt} + \frac{d}{dt}\ln\left(\frac{ds^1_4}{dt}\frac{ds^4_2}{dt}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{ds^4_3}{dt}\frac{ds^3_2}{dt}}{\frac{ds^4_2}{dt}}\right].$$

Dacă $p_4 = 0$, ecuația (23) are soluția

$$v^1 = c^1\,\Phi_1 + c^2\,\Phi_2 + c^3\,\Phi_3\,, \tag{24}$$

unde Φ_h $(h = 1, 2, 3)$ sînt trei soluții independente ale ecuației

$$\frac{d^3\Phi}{dt^3} - p_1\frac{d^2\Phi}{dt^2} - p_2\frac{d\Phi}{dt} - p_3\Phi = 0\,.$$

Cu această valoare, (22) ne dă

$$v^2 = \frac{c^h\,\frac{d^2\Phi_h}{dt^2} - \left[\frac{d(s^1_1 + s^4_4)}{dt} + \frac{d}{dt}\ln\frac{ds^1_4}{dt}\right]c^h\,\frac{d\Phi_h}{dt} - \left[\frac{d^2s^1_1}{dt^2} - \frac{ds^1_1}{dt}\,\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{ds^1_4}{dt} + \right.\right.}{\frac{ds^1_4}{dt}\frac{ds^4_2}{dt}}$$

$$\frac{\left.\left. + s^4_4\right) + \frac{ds^1_4}{dt}\frac{ds^4_1}{dt}\right]c^h\,\Phi_h}{\frac{ds^1_4}{dt}\frac{ds^4_2}{dt}} - \frac{\frac{ds^4_3}{dt}}{\frac{ds^4_2}{dt}}\,v^3\,. \tag{22'}$$

Înlocuind în a doua ecuație (16) expresiile (24) și (22′), obținem

$$\frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t} - \frac{\frac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^4_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^4_3}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s^4_2}{\mathrm{d}t}}\, v^3 = \frac{\frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^4_2}{\mathrm{d}t}}\left\{ c^h \frac{\mathrm{d}^2\Phi_h}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{\mathrm{d}(s^1_1 + s^4_4)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t}\right] c^h \frac{\mathrm{d}\Phi_h}{\mathrm{d}t} - \left[\frac{\mathrm{d}^2 s^1_1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s^1_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t} + s^4_4\right) + \frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^4_1}{\mathrm{d}t}\right] c^h \Phi_h \right\} + \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t}}\left[\frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t} c^h \frac{\mathrm{d}\Phi_h}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}s^3_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^1_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t}\right) c^h \Phi_h\right].$$

De aici rezultă

$$v^3 = \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\mathrm{d}s^3_3\, \mathrm{d}s^4_2 - \mathrm{d}s^3_2\, \mathrm{d}s^4_3}{\mathrm{d}s^4_2}} \left(c^h \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\mathrm{d}s^3_2\, \mathrm{d}s^4_3 - \mathrm{d}s^3_3\, \mathrm{d}s^4_2}{\mathrm{d}s^4_2}}\, q_h\, \mathrm{d}t + c^4\right),$$

unde

$$q_h = \frac{\frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^4_2}{\mathrm{d}t}}\left\{\frac{\mathrm{d}^2\Phi_h}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t} + s^1_1 + s^4_4\right)\frac{\mathrm{d}\Phi_h}{\mathrm{d}t} - \left[\frac{\mathrm{d}^2 s^1_1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s^1_1}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t} + s^4_4\right) + \frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^4_1}{\mathrm{d}t}\right]\Phi_h\right\} + \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t}}\left[\frac{\mathrm{d}s^4_3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\Phi_h}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}s^3_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^1_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^3_4}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_h\right].$$

Cu aceasta, (22′) ne dă

$$v = c^h r_h - c^4 \frac{\frac{\mathrm{d}s^4_3}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s^4_2}{\mathrm{d}t}}\, \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\mathrm{d}s^3_3\, \mathrm{d}s^4_2 - \mathrm{d}s^3_2\, \mathrm{d}s^4_3}{\mathrm{d}s^4_2}},$$

unde

$$r_h = \frac{\frac{\mathrm{d}^2\Phi_h}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t} + s^1_1 + s^4_4\right)\frac{\mathrm{d}\Phi_h}{\mathrm{d}t} - \left[\frac{\mathrm{d}^2 s^1_1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s^1_1}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t} + s^4_4\right) + \frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^4_1}{\mathrm{d}t}\right]\Phi_h}{\frac{\mathrm{d}s^1_4}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s^4_2}{\mathrm{d}t}} - \frac{\frac{\mathrm{d}s^4_3}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s^4_2}{\mathrm{d}t}}\, \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\mathrm{d}s^3_3\, \mathrm{d}s^4_2 - \mathrm{d}s^3_2\, \mathrm{d}s^4_3}{\mathrm{d}s^4_2}} \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{\mathrm{d}s^3_2\, \mathrm{d}s^4_3 - \mathrm{d}s^3_3\, \mathrm{d}s^4_2}{\mathrm{d}s^4_2}}\, q_h\, \mathrm{d}t.$$

În sfîrşit, relaţia (15) devine

$$v^4 = c^h \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_h}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\Phi_h}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}}.$$

Presupunînd că funcţiile Φ_1, Φ_2, Φ_3 satisfac condiţiile

$$\Phi_1(0) = 1,\ \Phi_2(0) = \Phi_3(0) = 0,\ \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0,\ \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left[\frac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}\right]_0,\ \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_2}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_3}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t} + s_1^1 + s_4^4\right)\right]_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

şi luînd în loc de vectorii v^i vectori

$$w^1 = v^1,\quad w^2 = v^2 + \frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}}v^3,\ w^3 = v^4,\ w^4 = v^3,$$

grupul de olonomie omogen al spaţiului A_4 este

$$(25)\qquad \begin{cases} w'^1 = \alpha_1 w^1 + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3,\\ w'^2 = \beta_1 w^1 + \beta_2 w^2 + \beta_3 w^3\\ w'^3 = \gamma_1 w^1 + \gamma_2 w^2 + \gamma_3 w^3,\\ w'^4 = \delta_1\delta_4 w^1 + \delta_2\delta_4 w^2 + \delta_3\delta_4 w^3 + \delta_4 w^4, \end{cases}$$

unde am notat

$$\alpha_h = \Phi_h,\ \beta_h =$$

$$= \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_h}{\mathrm{d}t^2} - \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t} + s_1^1 + s_4^4\right)\right]\dfrac{\mathrm{d}\Phi_h}{\mathrm{d}t} - \left[\dfrac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t} + s_4^4\right) + \dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}\right]\Phi_h}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\,.\,\dfrac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}},$$

$$\gamma_h = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_h}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\Phi_h}{\dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}},\ \delta_h = \int_C e^{\int_0^t \frac{\mathrm{d}s_2^3\,\mathrm{d}s_3^4 - \mathrm{d}s_3^3\,\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}s_2^4}} q_n\,\mathrm{d}t,\ \delta_4 = e^{\int_C \frac{\mathrm{d}s_3^3\,\mathrm{d}s_2^4 - \mathrm{d}s_2^3\,\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}s_2^4}},$$

unde punctul $P\,(t)$ parcurge o curbă închisă oarecare C.

Deci, dacă $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = 0$, $\mathrm{d}s_4^1 \neq 0$, $\mathrm{d}s_2^4 \neq 0$, $(\mathrm{d}s_1^2)^2 + (\mathrm{d}s_3^2)^2 + (\mathrm{d}s_4^2)^2 \neq 0$, $(\mathrm{d}s_1^3)^2 + (\mathrm{d}s_2^3)^2 + (\mathrm{d}s_4^3)^2 \neq 0$, $p_4 = 0$, spațiul A_4 are ca grup omogen de olonomie grupul (25) sau un subgrup al lui.

Grupul (25) are ca varietate invariantă varietatea $w^1 = w^2 = w^3 = 0$.

Să presupunem acum că $p_4 \neq 0$. Atunci din (23) rezultă

$$v^3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^3 v^1}{\mathrm{d}t^3} - p_1 \dfrac{\mathrm{d}^2 v^1}{\mathrm{d}t^2} - p_2 \dfrac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} - p_3 v^1}{p_4}. \tag{26}$$

Cu aceasta valoarea (22) ne dă

$$\begin{aligned} v^2 = &-\frac{\dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t}}{p_4 \dfrac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}} \frac{\mathrm{d}^3 v^1}{\mathrm{d}t^3} + \frac{p_1 \dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} + p_4}{p_4 \dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}} \frac{\mathrm{d}^2 v^1}{\mathrm{d}t^2} + \\ &+ \frac{p_2 \dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} - p_4 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(s_1^1 + s_4^4 + \ln \dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\right)}{p_4 \dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}} \frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} + \\ &+ \frac{p_3 \dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_3^4}{\mathrm{d}t} - p_4 \left[\dfrac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(s_4^4 + \ln \dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t}\right) + \dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_1^4}{\mathrm{d}t}\right]}{p_4 \dfrac{\mathrm{d}s_4^1}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}s_2^4}{\mathrm{d}t}} v^1. \end{aligned} \tag{27}$$

Înlocuind în a doua ecuație (16) pe v^3 și v^2 dați de (26) respectiv (27), obținem

$$\frac{\mathrm{d}^4 v^1}{\mathrm{d}t^4} + q_1 \frac{\mathrm{d}^3 v^1}{\mathrm{d}t^3} + q_2 \frac{\mathrm{d}^2 v^1}{\mathrm{d}t^2} + q_3 \frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} + q_4 v^1 = 0.$$

Deci, notînd cu Ψ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ patru soluții independente ale ecuației

$$\frac{\mathrm{d}^4 \Psi}{\mathrm{d}t^4} + q_1 \frac{\mathrm{d}^3 \Psi}{\mathrm{d}t^3} + q_2 \frac{\mathrm{d}^2 \Psi}{\mathrm{d}t^2} + q_3 \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} + q_4 \Psi = 0,$$

avem

$$v^1 = c^i \Psi_i.$$

Ținînd seama de această relație și de (15), (26), (27), rezultă că dacă $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = 0$, $\mathrm{d}s_4^1 \neq 0$, $\mathrm{d}s_2^4 \neq 0$, $(\mathrm{d}s_1^2)^2 + (\mathrm{d}s_3^2)^2 + (\mathrm{d}s_4^2)^2 \neq 0$, $(\mathrm{d}s_1^3)^2 + (\mathrm{d}s_2^3)^2 + (\mathrm{d}s_4^3)^2 \neq 0$, $p_4 \neq 0$, spațiul A_4 are ca grup de olonomie omogen grupul

$$v'^i = \alpha_j^i v^j \qquad (i, j = 1, \ldots, 4) \tag{28}$$

sau un subgrup al lui.

Rezultate analoage se obțin dacă două dintre formele ds^1_2, ds^1_3, ds^1_4 sau ds^2_1, ds^2_3, ds^2_4 sau ds^3_1, ds^3_2, ds^3_4 sau ds^4_1, ds^4_2, ds^4_3 sînt nule. Dacă numai una din aceste forme este nulă sau dacă toate formele ds^h_k $(h \neq k = 1, \ldots, 4)$ sînt nenule, obținem grupul (28).

Primită la redacție la 1 august 1966

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. M. Stoka, *Les groupes d'holonomie des espaces A_3*. Bull. de la Soc. de Math. de la Roumanie (1966).

ASUPRA PERECHILOR DE SPAȚII RIEMANN CU TENSORII DE CURBURĂ PROPORȚIONALI

DE

N. N. TEODORESCU și GH. N. RIZESCU

Se determină perechile de spații Riemann cu metrica pozitiv definită și tensor de curbură ireductibil, care au tensorii de curbură proporționali. Se arată că sînt două cazuri. În unul din cazuri metricile spațiilor se aduc la forma canonică.

În lucrarea [1] C. Teleman demonstrează că dacă două spații Riemann V_n și $\bar{V}_n$ au tensorii de curbură egali și dacă matricile $X_{kl} = \| R^i_{jkl} \|$ formează un sistem ireductibil de transformări liniare, atunci spațiile au și aceeași metrică, abstracție făcînd de un factor constant.

Într-o lucrare anterioară [4], noi am considerat cazul mai general cînd tensorii de curbură ai spațiilor V_n și $\bar{V}_n$ ($n > 3$) sînt proporționali, arătînd că teorema lui Teleman rămîne valabilă și în acest caz, excepție făcînd anumite spații conform euclidiene.

În această lucrare, vom arăta că pentru $n > 3$, singurele perechi de spații Riemann cu tensor de curbură ireductibil și metrică pozitiv definită, care au tensorii de curbură proporționali, sînt spații cu tensorul lui Ricci de forma :

$$R_{ij} - \nu a_{ij} = \mu \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} \frac{\partial \sigma}{\partial x^j} \tag{1}$$

sau sînt spații cu metrici ce pot fi aduse la forma :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2\psi} \left[(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots . + (\mathrm{d}x^n)^2 \right]$$

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \frac{a^2 \mathrm{e}^{2\psi} \left[(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2 \right]}{\left[1 + \mathrm{e}^{\psi} \left\{ A[(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2] + B(x^1 + \ldots + x^n) + C \right\} \right]^2}, \tag{2}$$

unde a, A, B, C sînt constante, iar ψ este o soluție oarecare a ecuației :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x^2} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial x^n} \right)^2 = \alpha, \tag{2'}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 609–617 BUCUREȘTI, 1967

unde am notat :

$$U = \lg \frac{\sqrt{1 + F e^{\psi}} - 1}{\sqrt{1 + F e^{\psi}} + 1}$$

$$(2'') \qquad F = A\,[(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2] + B(x^1 + \ldots + x^n) + C$$

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x^n}\right)^2}{F^2} - \frac{4A}{F}$$

★

Fie $\overline{V}_n$ și V_n cele două spații Riemann avînd metricile $d\overline{s}^2 = \overline{a}_{ij}\, dx^i dx^j$ și $ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j$. Presupunem că tensorii de curbură $\overline{R}^i_{jkl}$ și R^i_{jkl} sînt proporționali, adică :

$$(3) \qquad \overline{R}^i_{jkl} = \rho R^i_{jkl}.$$

În [4] s-a arătat că :

$$(3') \qquad \overline{a}_{ij} = e^{2\delta} a_{ij}$$

și

$$\rho = 1$$

sau

$$(3'') \qquad W^i_{jkl} = 0,$$

unde W^i_{jkl} este tensorul de curbură conform al lui Weyl. În cazul $\rho = 1$, teorema lui Teleman ne spune că metricile spațiilor $\overline{V}_n$ și V_n diferă printr-un factor constant, iar în cazul cînd $W^i_{jkl} = 0$, o teoremă a lui Schouten [6] ne spune că spațiul V_n este conform euclidian. În [4] s-a mai arătat că ρ nu poate fi o constantă diferită de 1.

Din considerațiile noastre excludem cazul banal cînd V_n este euclidian, $\overline{V}_n$ arbitrar, iar $\rho = 0$.

Dacă metricile spațiilor conform euclidiene au fost aduse la formele $d\overline{s}^2 = e^{2\overline{\psi}}\,[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2]$ și $ds^2 = e^{2\psi}\,[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2]$, condiția necesară și suficientă ca să existe relația (3) este [4] :

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \overline{\psi}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\delta_{jk}\overline{\Psi}^2 = \rho\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial \psi}{\partial x^j}\frac{\partial \psi}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\delta_{jk}\Psi^2\right]$$

$$\Delta\overline{\psi} + \frac{n-2}{2}\overline{\Psi}^2 = \rho\left[\Delta\psi + \frac{n-2}{2}\Psi^2\right],$$

unde am notat

$$\Psi^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^n}\right)^2$$

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^2)^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^n)^2}.$$

★

Notînd cu T^i_{jk} diferenţa simbolurilor lui Cristoffel $\overline{\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|}$ şi $\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|$, avem :

$$\overline{\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|} = \left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right| + T^i_{jk}. \tag{4'}$$

În relaţia (3) luînd derivata covariantă în raport cu metrica lui $\overline{V}_n$ respectiv V_n, obţinem :

$$\overline{R}^i_{jkl;\bar{r}} = \rho R^i_{jkl;\,r} + \rho_r R^i_{jkl} + \rho R^s_{jkl}\, T^i_{sr} - \rho R^i_{skl}\, T^s_{jr} - \rho R^i_{jsl}\, T^s_{rk} - \rho R^i_{jks}\, T^s_{lr}.$$

Prin permutarea indicilor k, l şi r, vom obţine alte două relaţii analoge.

Adunînd aceste relaţii şi ţinînd seama de identităţile lui Bianchi :

$$R^i_{jkl;\,r} + R^i_{jlr;\,k} + R^i_{jrk;\,l} = 0$$

şi de simetria strîmbă în ultimii doi indici ai tensorului R^i_{jkl}, se obţine relaţia :

$$\begin{aligned} R^i_{jkl}\,\rho_r + R^i_{jlr}\,\rho_k + R^i_{jrk}\,\rho_l + \rho R^s_{jkl}\, T^i_{sr} + \rho R^s_{jlr}\, T^i_{sk} + \\ + \rho R^s_{jrk}\, T^i_{sl} - \rho R^i_{skl}\, T^s_{jr} - \rho R^i_{slr}\, T^s_{jk} - \rho R^i_{srk}\, T^s_{jl} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Ţinînd seama de (3′) relaţia (4′) ne dă :

$$T^i_{jk} = \sigma^i_j\,\sigma_k + \delta^i_k\,\sigma_j - a_{jk}\,\sigma^i, \tag{5'}$$

unde am notat

$$\sigma_i = \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} \quad \text{şi} \quad \sigma^i = a^{is}\,\sigma_s.$$

Înlocuind în (5) valorile lui T^i_{jk} şi ţinînd seama de relaţiile :

$$R^i_{rkl} + R^i_{klr} + R^i_{lrk} = 0$$

obţinem :

$$\begin{aligned} R^i_{jkl}\,\rho_r + R^i_{jlr}\,\rho_k + R^i_{jrk}\,\rho_l + \delta^i_r\,\rho R^s_{jkl}\,\sigma_s + \delta^i_k\,\rho R^s_{jlr}\,\sigma_s + \delta^i_l\,\rho R^s_{jrk}\,\sigma_s + \\ + a_{jk}\,\rho R^i_{slr}\,\sigma^s + a_{jl}\,\rho R^i_{srk}\,\sigma^s + a_{jr}\,\rho R^i_{skl}\,\sigma^s = 0 \end{aligned}$$

Înmulţind cu a^{jl} şi sumînd obţinem :

$$R^i_k\,\rho_r - R^i_r\,\rho_k + R^i_{srk}\,\rho^s + \delta^i_r\,\rho R^s_k\,\sigma_s - \delta^i_k\,\rho R^s_r\,\sigma_s + (n-3)\,\rho R^i_{srk}\,\sigma^s = 0. \tag{6}$$

Punînd în (6) $i = r$ şi sumînd obţinem $2R^s_k\,\rho_s - R\,\rho_k + 2\,(n-2)\,\rho R^s_k\,\sigma_s = 0$, de unde pentru $n > 2$ găsim :

$$\rho R^s_k\,\sigma_s = \frac{1}{2\,(n-2)}\,(R\,\rho_k - 2R^s_k\,\rho_s). \tag{6'}$$

Dar V_n fiind conform euclidian, tensorul lui Weyl este nul și avem:

$$(6'') \qquad R^i_{jkl} = \frac{1}{n-2}\left(\delta^i_k R_{jl} - \delta^i_l R_{jk} - a_{jk} R^i_l + \right.$$

$$\left. + a_{jl} R^i_k\right) - \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(\delta^i_k a_{jl} - \delta^i_l a_{jk}\right).$$

Înlocuind (6′) și (6″) în (6) obținem:

$$\frac{n-3}{n-2}\rho_r R^s_k - \frac{n-3}{n-2}\rho_k R_r + \frac{(n-3)\,\delta^i_r}{2(n-1)(n-2)} R\rho_k -$$

$$- \frac{\delta^i_k (n-3)}{2(n-1)(n-2)} R\rho_r + (n-3)\,\rho R^i_{srk}\sigma^s = 0$$

de unde pentru $n > 3$ avem:

$$(6''') \qquad \rho R^i_{srk}\sigma^s = \frac{R^i_r \rho_k}{n-2} - \frac{R^i_k \rho_r}{n-2} + \frac{\delta^i_k R\rho_r}{2(n-1)(n-2)} - \frac{\delta^i_r R\rho_k}{2(n-1)(n-2)}.$$

Înmulțind (6‴) cu σ_i și sumînd și ținînd seama că $R^m_{srk}\sigma^s\sigma_m = R_{msrk}\sigma^m\sigma^s = 0$ obținem:

$$R^s_r \sigma_s \rho_k - R^s_k \sigma_s \rho_r + \frac{R\rho_r\sigma_k}{2(n-1)} - \frac{R\rho_k\sigma_r}{2(n-1)} = 0$$

relație care se mai poate scrie:

$$\frac{\rho R^s_k \sigma_s - \dfrac{\rho R\sigma_k}{2(n-1)}}{\rho_k} = \frac{\rho R^s_r \sigma_s - \dfrac{\rho R\sigma_r}{2(n-1)}}{\rho_r}$$

de unde obținem

$$(7) \qquad \rho R^s_k \sigma_s - \frac{\rho R\sigma_k}{2(n-1)} = \varphi\rho_k.$$

Înlocuind în (6‴) valoarea lui R^i_{jrk} dată de (6″) obținem:

$$\delta^i_r \rho R^s_k \sigma_s - \delta^i_k \rho R^s_r \sigma_s - \rho R^i_k \sigma_r + \rho R^i_r \sigma_k - \frac{R\rho}{n-1}\left(\delta^i_r \sigma_k - \delta^i_k \sigma_r\right) =$$

$$= R^i_r \rho_k - R^i_k \rho_r + \frac{\delta^i_k R\rho_r}{2(n-1)} - \frac{\delta^i_r R\rho_k}{2(n-1)}.$$

Înmulțind cu a_{ij} și sumînd obținem:

$$(7') \qquad \rho a_{jr} R^s_k \sigma_s - \rho a_{jk} R^s_r \sigma_s - \rho R_{jk}\sigma_r + \rho R_{jr}\sigma_k - \frac{R\rho}{n-1}\left(a_{jr}\sigma_k - a_{jk}\sigma_r\right) =$$

$$= R_{jr}\rho_k - R_{jk}\rho_r + \frac{a_{jk} R\rho_r}{2(n-1)} - \frac{a_{jr} R\rho_k}{2(n-1)}.$$

Înlocuind (7) în (7′) obținem :

$$(8)\qquad a_{jr}\left[\varphi\rho_k - \frac{R\rho\sigma_k}{2(n-1)} + \frac{R\rho_k}{2(n-1)}\right] - a_{jk}\left[\varphi\rho_r - \frac{R\rho\sigma_r}{2(n-1)} + \frac{R\rho_r}{2(n-1)}\right] = R_{jr}(\rho_k - \rho\sigma_k) - R_{jk}(\rho_r - \rho\sigma_r).$$

Înmulțind (8) cu σ^r și sumînd și ținînd seama de (7) obținem :

$$(8')\qquad (\rho_m\sigma^m - \rho\sigma_m\sigma^m)R_{jk} - \frac{2(n-1)\varphi\rho_m\sigma^m + R(\rho_m\sigma^m - \rho\sigma_m\sigma^m)}{2(n-1)}a_{jk} = \varphi\left(\frac{1}{\rho}\rho_j\rho_k - \rho_j\sigma_k - \rho_k\sigma_j\right).$$

★

Vom considera prima dată cazul cînd este îndeplinită relația :

$$(9)\qquad \rho_k - \rho\sigma_k \neq 0$$

Să considerăm acum cazul :

$$(9')\qquad \varphi = 0.$$

În aceste condiții relația (8) se scrie :

$$\frac{R_{jk} - \dfrac{a_{jk}R}{2(n-1)}}{\rho_k - \rho\sigma_k} = \frac{R_{jr} - \dfrac{a_{jr}R}{2(n-1)}}{\rho_r - \rho\sigma_r}.$$

De aici rezultă :

$$R_{jk} - \frac{a_{jk}R}{2(n-1)} = \beta_j(\rho_k - \rho\sigma_k).$$

Ținînd seama însă de simetria primului membru al ecuației în j și k rezultă că trebuie să avem :

$$R_{jk} - \frac{R}{2(n-1)}a_{jk} = \beta(\rho_j - \rho\sigma_j)(\rho_k - \rho\sigma_k)$$

relație care se poate pune sub forma (1) în felul următor :

$$R_{jk} - \frac{R}{2(n-1)}a_{jk} = \rho^2\beta\frac{\partial(\lg\rho - \sigma)}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial(\lg\rho - \sigma)}{\partial x^k}.$$

Să considerăm acum cazul cînd avem :

$$(9'')\qquad \varphi \neq 0.$$

În aceste condiții să arătăm că $\rho_m\sigma^m - \rho\sigma_m\sigma^m \neq 0$. Într-adevăr, dacă am avea $\rho_m\sigma^m - \rho\sigma_m\sigma^m = 0$, relația (8′) s-ar scrie :

$$\varphi\rho\sigma_m\sigma^m a_{jk} = \varphi\left(\frac{1}{\rho}\rho_j\rho_k - \rho_j\sigma_k - \rho_k\sigma_j\right)$$

adică $a_{jk} = \lambda\left(\frac{1}{\rho}\,\rho_j\rho_k - \rho_j\sigma_k - \rho_k\sigma_j\right)$, cu $\lambda \neq 0$ de unde obținem :

$$a_{jk}\rho_l - a_{jl}\rho_k = \lambda\rho_j(\rho_k\sigma_l - \rho_l\sigma_k). \tag{9'''}$$

Înmulțind (9''') cu ρ^j și sumînd rezultă $\lambda\rho_m\rho^m(\rho_k\sigma_l - \rho_l\sigma_k) = 0$. Ținînd însă seama că $\lambda \neq 0$ iar $\rho_m\rho^m \neq 0$ deoarece metrica lui V_n este pozitiv definită, rezultă din (9'''), $a_{jk}\,\rho_l - a_{jl}\,\rho_k = 0$, relație imposibilă deoarece ρ nu poate fi o constantă [4].

Rezultă deci $\rho_m\sigma^m - \rho\sigma_m\sigma^m \neq 0$ deci relația (8') ne dă :

$$R_{jk} - \nu a_{jk} = \gamma\left(\frac{1}{\rho}\,\rho_j\rho_k - \rho_j\sigma_k - \rho_k\sigma_j\right), \tag{10}$$

unde am notat

$$\nu = \frac{\varphi\,\rho_m\sigma^m}{\rho_m\sigma^m - \rho\sigma_m\sigma^m} + \frac{R}{2(n-1)}$$

$$\gamma = \frac{\varphi}{\rho_m\sigma^m - \rho\sigma_m\sigma^m}.$$

Înlocuind (10) în (8) se obține relația :

$$a_{jr}(\rho_m\sigma^m\sigma_k - \sigma_m\sigma^m\rho_k) - a_{jk}(\rho_m\sigma^m\sigma_r - \sigma_m\sigma^m\rho_r) = (\rho_r\sigma_k - \rho_k\sigma_r)\,\sigma_j$$

pe care înmulțind-o cu a^{jr} și sumînd, obținem :

$$(n-2)\,(\rho_m\sigma^m\sigma_k - \sigma_m\sigma^m\rho_k) = 0$$

de unde rezultă $\rho_k = \frac{\rho_m\sigma^m}{\sigma_m\sigma^m}\,\sigma_k$, și deci din (10) obținem ecuația de tip (1),

$$R_{jk} - \nu a_{jk} = \mu\,\frac{\partial\sigma}{\partial x^j}\,\frac{\partial\sigma}{\partial x^k}. \tag{11}$$

În cazul particular cînd $\mu = 0$, rezultă că V_n este cu curbură constantă, deoarece singurul caz de spațiu Einstein conform euclidian, este spațiul cu curbură constantă [6].

În cazul particular cînd $\nu = \frac{R}{2}$, atunci a_{jk} verifică ecuația de tip Einstein

$$R_{jk} - \frac{1}{2}\,Ra_{jk} = \mu\,\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}\,\frac{\partial\sigma}{\partial x^j}. \tag{11'}$$

★

Rămîne să studiem cazul cînd $\rho_r - \rho\sigma_r = 0$. Rezultă deci $\rho = \frac{1}{a} e^{\sigma}$, unde a este o constantă. Ținînd seama că $\sigma = \overline{\psi} - \psi$, ecuațiile (4) se scriu:

$$\text{(12)} \qquad e^{-\psi}\left[\frac{\partial^2\psi}{\sigma x^j \sigma x^k} - \frac{\partial\psi}{\sigma x^j}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\delta_{jk}\Psi'^2\right] = a e^{-\overline{\psi}}\left[\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial x^j \partial x^k} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^j}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\delta_{jk}\overline{\Psi}'^2\right].$$

Derivînd (12) în raport cu x^l, schimbînd apoi k cu l și scăzînd se obțin relațiile:

$$\frac{1}{2}\sigma_{jk} e^{-\psi}\left[\frac{\partial\Psi'^2}{\partial x^l} - \Psi'^2\frac{\partial\psi}{\partial x^l}\right] - \frac{1}{2}\delta_{jl} e^{-\psi}\left[\frac{\partial\Psi'^2}{\partial x^k} - \Psi'^2\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\delta_{jk} a e^{-\overline{\psi}}\left[\frac{\partial\overline{\Psi}'^2}{\partial x^l} - \overline{\Psi}'^2\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^l}\right] - \frac{1}{2}\delta_{jl} a e^{-\overline{\psi}}\left[\frac{\partial\overline{\Psi}'^2}{\partial x^k} - \overline{\Psi}'^2\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^k}\right].$$

Punînd $j = l$ și sumînd, se obține:

$$e^{-\psi}\left[\frac{\partial\Psi'^2}{\partial x^k} - \Psi'^2\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\right] = a e^{-\overline{\psi}}\left[\frac{\partial\overline{\Psi}'^2}{\partial x^k} - \overline{\Psi}'^2\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^k}\right]$$

de unde obținem prin integrare:

$$\text{(13)} \qquad e^{-\psi}\Psi'^2 = a e^{-\overline{\psi}}\,\overline{\Psi}'^2 - 4A,$$

unde A este o constantă.

Ținînd seama de (13), ecuațiile (12) se scriu sub forma:

$$\text{(14)} \quad e^{-\psi}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\right] - 2A\,\delta_{jk} = a e^{-\overline{\Psi}}\left[\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^j}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^k}\right]$$

sau sub forma:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}(e^{-\psi}) - 2A\,\delta_{jk} = -\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}(a e^{-\overline{\psi}})$$

de unde obținem

$$\text{(14')} \qquad e^{-\psi} + Ar^2 + BR + C = a e^{-\overline{\psi}},$$

unde B, C sînt constante și

$$r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots. + (x^n)^2$$

$$R = x^1 + x^2 + \ldots. + x^n.$$

(În general obținem prin integrare $R = a_1 x^1 + \ldots. + a_n x^n$, însă printr-o transformare ortogonală de variabile obținem (14')).

Eliminînd $\overline{\psi}$ între ecuaţiile (14′) şi (13) se obţine ecuaţia:

$$(15)\qquad (Ar^2 + BR + C)\,\mathrm{e}^{-\psi}\,\Psi'^2 + 2\left[2Ax^s \frac{\partial\psi}{\partial x^s} + \right.$$

$$\left. + B\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x^n}\right)\right]\mathrm{e}^{-\psi} + 4A\mathrm{e}^{-\psi} + 4AC - nB^2 = 0.$$

Punînd $F = Ar^2 + BR + C$ şi $U = \lg \dfrac{\sqrt{1 + F\mathrm{e}^{\psi}} - 1}{\sqrt{1 + F\mathrm{e}^{\psi}} + 1}$, ecuaţia (15) se scrie sub forma:

$$(16)\qquad \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial x^n}\right)^2 = \alpha,$$

unde am notat:

$$\alpha = \frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x^n}\right)^2}{F^2} - \frac{4A}{F}.$$

Ţinînd seama de (14′) rezultă că metricile spaţiilor V_n şi $\overline{V}_n$ sînt date de formulele (2). Mai rămîne de arătat că orice soluţie a ecuaţiei (15) ne conduce la spaţii cu tensori de curbură proporţionali. Într-adevăr, fie ψ_0 o soluţie a ecuaţiei (15).

Punînd

$$(16')\qquad a\mathrm{e}^{-\overline{\psi}_0} = \mathrm{e}^{-\psi_0} + Ar^2 + BR + C$$

şi derivînd în raport cu x^j obţinem:

$$(16'')\qquad -a\mathrm{e}^{-\overline{\psi}_0}\,\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial x^j} = -\,\mathrm{e}^{-\psi_0}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial x^j} + 2Ax^j + B.$$

Ridicînd (16″) la pătrat şi sumînd după j şi ţinînd seama de (15) şi (16′) se obţine:

$$(17)\qquad a\mathrm{e}^{-\overline{\psi}_0}\,\overline{\Psi}'^2_0 - 4A = \mathrm{e}^{-\psi_0}\,\Psi'^2_0.$$

Din relaţiile (16′) şi (17) rezultă imediat:

$$\mathrm{e}^{-\psi_0}\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^j\partial x^k} - \frac{\partial\psi_0}{\partial x^j}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\,\delta_{jk}\Psi'^2_0\right) = a\mathrm{e}^{-\overline{\Psi}_0}\left(\frac{\partial^2\overline{\psi}_0}{\partial x^j\partial x^k} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial x^j}\,\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\,\delta_{jk}\overline{\Psi}'^2_0\right)$$

ceea ce exprimă faptul că tensorii de curbură ai spaţiilor $\overline{V}_n$ şi V_n avînd metricile $\mathrm{d}\overline{s}^2 = \mathrm{e}^{2\overline{\psi}_0}\,[(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2]$ şi $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2\psi_0}[(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2]$ sînt proporţionali prin factorul $\rho = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{e}^{\overline{\psi}_0 - \psi_0}$.

★

Rămîne să arătăm printr-un exemplu că există efectiv spaţii cu tensori de curbură proporţionali care să aibă forma (1) (adică spaţii pentru care $\mu \neq 0$, deoarece dacă $\mu = 0$ avem exemplul spaţiului cu curbură constantă dat de noi în [4]).

Vom arăta că spaţiile de metrici :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2f(a_1x^1 + \ldots + a_nx^n)} [(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2] \tag{18}$$

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \mathrm{e}^{2\int_0^{a_1x^1 + \ldots + a_nx^n} \frac{f'(t)\mathrm{d}t}{1+f'(t)}} [(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2]$$

sînt spaţii cu tensorii de curbură proporţionali de forma (1).

Într-adevăr, punînd $\bar{\psi} = \int_0^{a_1x^1 + \ldots + a_nx^n} \frac{f'(t)\mathrm{d}t}{1+f'(t)}$ şi $\psi = f[a_1x^1 + \ldots + a_nx^n]$ se obţine :

$$\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^j} + \frac{1}{2}\delta_{ij}\bar{\Psi}^2 = \frac{1}{(1+f')^2}[(f''-f'^2)a_ia_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}f'^2(a_1^2 + \ldots + a_n^2)]$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^j} + \frac{1}{2}\delta_{ij}\Psi^2 = (f''-f'^2)a_ia_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}f'^2\cdot(a_1^2 + \ldots + a_n^2)$$

deci tensorii de curbură ai celor două spaţii sînt proporţionali.

Punînd $\sigma = \int_0^{a_1x^1 + \ldots + a_nx^n} \frac{f'(t)\mathrm{d}t}{1+f'(t)} - f(a_1x^1 + \ldots + a_nx^n)$ observăm că $a_i = \lambda\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}$ şi ţinînd seama că $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j} + \frac{1}{2}\delta_{ij}\Psi^2$ se exprimă liniar în funcţie de R_{ij} şi de tensorul metric $\mathrm{e}^{2\psi}\delta_{ij}$ rezultă că spaţiile (18) sînt de forma (1). Nu mai este necesar să dăm exemple din spaţiile de forma (2), deoarece ecuaţia (16) avînd soluţie dacă $\alpha > 0$, metrica lor este determinată de formulele (2).

Primită la redacţie la 1 august 1966

Liceul „C. A. Rosetti”
Liceul „Dimitrie Cantemir”

BIBLIOGRAFIE

1. К. Тедемаh, *Об одной теореме Бореля-Лихнеровича*. Rev. math. pures et appl., **III** (1958).
2. N. N. Teodorescu, *Asupra unor spaţii Finsler*. St. cerc-mat., **13**, *3* (1962).
3. N. N. Teodorescu şi Gh. N. Rizescu, *O demonstraţie a unei teoreme privind tensorul de curbă*. St. cerc. mat., **18**, *4* (1966).
4. N. N. Teodorescu şi Gh. N. Rizescu, *Asupra unei teoreme privind tensorul cu curbură*. St. cerc. mat., **18** 9 (1966).
5. G. Vrănceanu, *Sur la décomposabilité et les groupes d'holonomie des espaces A_{ni}*. Publicationes mathematicae, Debrecen, **7** (1960).
6. G. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*. vol. I, II, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1962.

FAMILII DE VARIETĂŢI CU UNU, DOI ŞI TREI PARAMETRI MĂSURABILE DIN SPAŢIUL EUCLIDIAN E_3

DE

RODICA TRANDAFIR

În această lucrare se determină familiile de curbe şi suprafeţe cu unu, doi şi trei parametri măsurabile din spaţiul euclidian E_3

Fie E_3 spaţiul euclidian de coordonate x^1, x^2, x^3 şi G_6 grupul de mişcări al acestui spaţiu definit de operatorii

$$(1)\qquad \begin{aligned} &X_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i},\ (i = 1, 2, 3),\ X_4 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1},\\ &X_5 f = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_6 f = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \end{aligned}$$

şi avînd structura

$$\begin{aligned} &(X_i X_j) = (X_1 X_5) = (X_2 X_6) = (X_3 X_4) = 0, \qquad (i \neq j = 1, 2, 3),\\ &(X_1 X_4) = -(X_3 X_5) = X_2,\ (X_2 X_4) = -(X_3 X_6) = -X_1,\\ &(X_1 X_6) = -(X_2 X_5) = -X_3, (X_4 X_5) = -X_6,\ (X_5 X_6) = -X_4, (X_6 X_4) = -X_5. \end{aligned}$$

Se ştie că în spaţiul euclidian E_3 există diverse familii de varietăţi măsurabile, ca de exemplu mulţimea dreptelor, mulţimea planelor etc [2]. În cele ce urmează vom determina formele canonice la care pot fi reduse familiile de curbe şi suprafeţe cu unu, doi şi trei parametri, măsurabile din acest spaţiu.

I

Fie $\mathfrak{F}_1$ o familie cu un parametru de suprafeţe de ecuaţie

$$F(x^1, x^2, x^3, \alpha) = 0$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 619–634, BUCUREŞTI, 1967

și $G_r \subseteq G_6$ grupul maxim de invarianță al acestei familii. Grupul $H_r(\alpha)$ atașat grupului G_r față de familia $\mathcal{F}_1$ este un grup într-o variabilă. Pentru ca familia $\mathcal{F}_1$ să fie măsurabilă, este necesar și suficient ca grupul $H_r(\alpha)$ să fie o translație, adică

$$\alpha' = \alpha + a.$$

De aici rezultă că grupul $G_r(x)$ este un subgrup cu un parametru al grupului G_6, adică are una din formele [4]

$$G_1^1 \equiv [X_1],\ G_1^2 \equiv [X_4],\ G_1^3 \equiv [X_3 + X_4].$$

Dacă grupul G_r este definit de operatorii $X_h f = \xi_h^i(x)\, \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, iar grupul $H_r(\alpha)$ este definit de operatorii $A_h f = \eta_h^\nu(\alpha)\, \dfrac{\partial f}{\partial x^\nu}$, atunci ecuația familiei de suprafețe este

$$F(x,\ \alpha) = 0,$$

unde funcția F este soluția sistemului de ecuații cu derivate parțiale [3]

$$\xi_h^i(x) \frac{\partial F(x,\ \alpha)}{\partial x^i} + \eta_h^\nu(\alpha)\, \frac{\partial F(x,\ \alpha)}{\partial \alpha^\nu} = 0. \tag{2}$$

În cazul în care grupul maxim de invarianță al familiei este grupul G_1^1, sistemul (2) devine

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$$

avînd soluția

$$F = F(x^1 - \alpha,\ x^2,\ x^3).$$

Deci ecuația familiei este

$$F(x^1 - \alpha,\ x^2,\ x^3) = 0. \tag{3}$$

Dacă grupul maxim de invarianță este $G^2{}_1$, sistemul (2) se scrie

$$-\, x^2 \frac{\partial F}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$$

cu soluția

$$F = F\,[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos\alpha + x^2 \sin\alpha,\ x^3].$$

Ecuația familiei este

$$F\,[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos\alpha + x^2 \sin\alpha,\ x^3] = 0. \tag{3'}$$

În sfîrșit, dacă grupul maxim de invarianță al familiei $\mathcal{F}_1$ este G_1^3, sistemul (2) este

$$-\, x^2 \frac{\partial F}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x^3} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$$

avînd soluţia

$$F = F\,[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos x^3 + x^2 \sin x^3,\ x^3 - \alpha],$$

deci ecuaţia familiei este

$$F\,[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos x^3 + x^2 \sin x^3, x^3 - \alpha] = 0. \tag{3''}$$

În toate aceste cazuri măsura unei mulţimi $\mathcal{A}$ de suprafeţe este

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} d\alpha \tag{4}$$

Rezultă :

TEOREMA 1. *Familiile de suprafeţe cu un parametru măsurabile din spaţiul E_3 pot fi reduse la formele (3), (3′), (3″) avînd măsura (4).*

În cazul familiilor de curbe obţinem în mod analog :

TEOREMA 2. *Familiile de curbe cu un parametru măsurabile din spaţiul E_3 pot fi reduse la formele*

$$\begin{cases} F^1(x^1 - \alpha,\ x^2,\ x^3) = 0 \\ F^2(x^1 - \alpha,\ x^2,\ x^3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F^1\,[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos \alpha + x^2 \sin \alpha,\ x^3] = 0 \\ F^2\,[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos \alpha + x^2 \sin \alpha,\ x^3] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F^1\,[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos x^3 + x^2 \sin x^3,\ x^3 - \alpha] = 0 \\ F^2\,[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos x^3 + x^2 \sin x^3,\ x^3 - \alpha] = 0. \end{cases}$$

II

Să considerăm acum o familie $\mathcal{F}_2$ cu doi parametri de suprafeţe de ecuaţie

$$F(x^1, x^2, x^3, \alpha^1, \alpha^2) = 0.$$

Grupul $H_r(\alpha)$ ataşat grupului maxim de invarianţă al familiei $\mathcal{F}_2$, $G_r \leqslant G_6$, este un grup în două variabile. Pentru ca familia $\mathcal{F}_2$ să fie măsurabilă, este necesar şi suficient ca grupul H_r să fie măsurabil, deci, în particular, tranzitiv. Rezultă că $2 \leqslant r \leqslant 6$.

Dacă $r = 2$, grupul maxim de invarianţă al familiei este un subgrup cu doi parametri al grupului ortogonal G_6, deci are una din formele [4]

$$G_2^1 \equiv [X_1, X_2], \quad G_2^2 = [X_3, X_4].$$

Grupul $H_2(\alpha)$ este deci un grup abelian simplu tranzitiv. B. Kérékyató a demonstrat că un astfel de grup poate fi redus la forma [1]

$$H_2 \equiv \left[A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}\right].$$

Dacă grupul maxim de invarianță al familiei este grupul G_2^1, atunci sistemul (2) este

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0 \end{cases}$$

cu soluția

$$F = F\,(x^1 - \alpha^1, x^2 - \alpha^2, x^3),$$

deci familia are ecuația

$$F(x^1 - \alpha^1, x^2 - \alpha^2, x^3) = 0. \tag{5}$$

În cazul în care grupul maxim de invarianță este G_2, sistemul (2) devine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^3} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0 \\[2ex] -x^2\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0 \end{cases}$$

avînd soluția

$$F = F\,[(x^1)^2 + (x^2)^2, x^3 - \alpha^1, x^1 \cos\alpha^2 + x^2 \sin\alpha^2].$$

Familia de suprafețe are ecuația

$$F\,[(x^1)^2 + (x^2)^2, x^3 - \alpha^1, x^1 \cos\alpha^2 + x^2 \sin\alpha^2] = 0. \tag{5'}$$

Familiile (5) și (5′) au măsura

$$\mu(\mathcal{A}) = \iint_{\mathcal{A}_\alpha} \mathrm{d}\alpha^1 \mathrm{d}\alpha^2.$$

Dacă $r = 3$, grupul maxim de invarianță al familiei este un subgrup cu trei parametri al grupului G_6 și deci are una din formele [4]

$$G_3^1 \equiv [X_1, X_2, X_3],\quad G_3^2 \equiv [X_1, X_2, X_4],\quad G_3^3 \equiv [X_1, X_5, X_6].$$

Ținînd seama că nu există nici un grup în două variabile izomorf cu grupul G_3^1, [5], rezultă că grupul G_3^1 nu poate fi grup maxim de invarianță pentru familia $\mathcal{F}_2$.

Să presupunem acum că grupul maxim de invarianță al familiei este G_3^2. În acest caz grupul $H_3(\alpha)$ fiind un grup în două variabile izomorf cu acesta, este definit de operatorii [5]

$$[\mathrm{I}]\, A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\quad A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^2},\quad A_3 f = \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} - \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}$$

$$[\mathrm{II}]\, A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\quad A_2 f = \operatorname{tg}\alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\quad A_3 f = \alpha^1 \operatorname{tg}\alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}.$$

În cazul [I] sistemul (2) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0 \\ -x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} - \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0 \end{cases}$$

avînd soluţia

$$F = F[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2, x^3].$$

Deci familia de suprafeţe are ecuaţia

$$F[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2, x^3] = 0, \tag{6}$$

şi reprezintă o familie de suprafeţe de rotaţie în jurul unei axe paralelă cu axa Ox^3.

În cazul [II] sistemul (2) devine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \operatorname{tg} \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0 \\ -x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1 \operatorname{tg} \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0 \end{cases}$$

cu soluţia

$$F = F(x^1 \cos \alpha^2 + x^2 \sin \alpha^2 - \alpha^1 \cos \alpha^2, x^3).$$

Deci, familia de varietăţi este

$$F(x^1 \cos \alpha^2 + x^2 \sin \alpha^2 - \alpha^1 \cos \alpha^2, x^3) = 0. \tag{6'}$$

Dacă grupul maxim de invarianţă al familiei este grupul G_3^3, atunci grupul $H_3(\alpha)$ este un grup în două variabile izomorfe cu acesta şi deci poate fi redus la forma [5]

$$[\mathrm{I}]\ A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \quad A_2 f = -\operatorname{tg} \alpha^2 \cos \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \sin \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}$$

$$A_3 f = -\operatorname{tg} \alpha^2 \sin \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} - \cos \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}.$$

Sistemul (2) devine

$$\left\{\begin{array}{l} -x^2\dfrac{\partial F}{\partial x^1}+x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0 \\[2ex] -x^3\dfrac{\partial F}{\partial x^2}+x^2\dfrac{\partial F}{\partial x^3}-\operatorname{tg}\alpha^2\cos\alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1}+\sin\alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0 \\[2ex] x^3\dfrac{\partial F}{\partial x^1}-x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^3}-\operatorname{tg}\alpha^2\sin\alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1}-\cos\alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0 \end{array}\right.$$

cu soluția

$$F=F\,[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2,\ x^1\cos\alpha^1\cos\alpha^2+x^2\sin\alpha^1\cos\alpha^2+x^3\sin\alpha^2]$$

iar familia de suprafețe are ecuația

$$F[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2,\ x^1\cos\alpha^1\cos\alpha^2+x^2\sin\alpha^1\cos\alpha^2+x^3\sin\alpha^2]=0$$

Dintre aceste familii fac parte familiile de plane care trec prin origine, de ecuație

$$x^1\cos\alpha^1\cos\alpha^2+x^2\sin\alpha^1\cos\alpha^2+x^3\sin\alpha^2=0.$$

Dacă $r=4$ grupul maxim de invarianță al familiei este un subgrup cu patru parametri al grupului G_6, deci este [4]

$$G_4\equiv[X_1,X_2,X_3,X_4].$$

Grupul $H_4(\alpha)$ fiind un grup în două variabile izomorf cu grupul G_4, este definit de operatorii [5]

$$[\mathrm{I}]\quad A_1f=\cos\alpha^1\frac{\partial f}{\partial\alpha^2},\quad A_2f=\sin\alpha^1\frac{\partial f}{\partial\alpha^2},\quad A_3f=\frac{\partial t}{\partial\alpha^2},\quad A_4f=\frac{\partial f}{\partial\alpha^1}.$$

Sistemul (2) se scrie

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x^1}+\cos\alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x^2}+\sin\alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x^3}+\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0 \\[2ex] -x^2\dfrac{\partial F}{\partial x^1}+x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0 \end{array}\right.$$

cu soluția

$$F=F(x^1\cos\alpha^1+x^2\sin\alpha^1+x^3-\alpha^2).$$

Familia de suprafeţe are ecuaţia

$$F(x^1 \cos \alpha^1 + x^2 \sin \alpha^1 + x^3 - \alpha^2) = 0$$

adică

$$x^1 \cos \alpha^1 + x^2 \sin \alpha^1 + x^3 - \alpha^2 = k, \qquad (k = \text{const.}) \tag{7}$$

care reprezintă o familie cu doi parametri de plane.

Ţinînd seama că grupul ortogonal G_6 nu are nici un subgrup cu cinci parametri [4], rezultă că familia $\mathcal{F}_2$ nu poate avea ca grup maxim de invarianţă un grup cu cinci parametri.

Dacă $r = 6$, rezultă că grupul maxim de invarianţă al familiei este grupul G_6. Grupul $H_6(\alpha)$ este un grup în două variabile izomorf cu grupul G_6. În lucrarea [5] s-a arătat că nu există nici un astfel de grup. Deci grupul G_6 nu poate fi grup maxim de invarianţă pentru familia $\mathcal{F}_2$.

Rezultă

TEOREMA 3. *Familiile de suprafeţe cu doi parametri măsurabili din spaţiul E_3 pot fi reduse la formele* (5), (5′), (6), (6′), (6″) *şi* (7).

Analog obţinem:

TEOREMA 4. *Familiile de curbe cu doi parametri măsurabile din spaţiul E_3 pot fi reduse la formele*

$$\begin{cases} F^1(x^1 - \alpha^1, x^2 - \alpha^2, x^3) = 0, \\ F^2(x^1 - \alpha^1, x^2 - \alpha^2, x^3) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F^1[(x^1)^2 + (x^2)^2, x^3 - \alpha^1, x^1 \cos \alpha^2 + x^2 \sin \alpha^2] = 0, \\ F^2[(x^1)^2 + (x^2)^2, x^3 - \alpha^1, x^1 \cos \alpha^2 + x^2 \sin \alpha^2] = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F^1[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2, x^3] = 0, \\ F^2[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2, x^3] = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F^1(x^1 \cos \alpha^2 + x^2 \sin \alpha^2 - \alpha^1 \cos \alpha^2, x^3) = 0, \\ F^2(x^2 \cos \alpha^2 + x^2 \sin \alpha^2 - \alpha^1 \cos \alpha^2, x^3) = 0. \end{cases}$$

III

Să considerăm acum o familie $\mathcal{F}_3$ cu trei parametri de suprafeţe de ecuaţie

$$F(x^1, x^2, x^3, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = 0,$$

şi $G_r \subseteq G_6$ grupul maxim de invarianţă al familiei, iar $H_r(\alpha)$ grupul ataşat. Acest grup fiind un grup în trei variabile, o condiţie necesară de măsurabilitate a familiei $\mathcal{F}_3$ este $r \geqslant 3$.

Dacă $r = 3$, grupul maxim de invarianţă al familiei este unul din grupurile G_3^1, G_3^2, G_3^3.

Presupunînd că G_3^1 este grupul maxim de invarianţă, rezultă că grupul $H_3(\alpha)$ este un grup abelian tranzitiv cu trei variabile, deci este definit de operatorii

$$A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \; A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}, \; A_3 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^3}.$$

Sistemul (2) este

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^3} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \end{cases}$$

cu soluția

$$F = F(x^1 - \alpha^1, x^2 - \alpha^2, x^3 - \alpha^3),$$

deci familia de suprafețe are ecuația

$$F(x^1 - \alpha^1, x^2 - \alpha^2, x^3 - \alpha^3) = 0. \tag{8}$$

Dacă grupul maxim de invariantă este G_3^2, atunci grupul $M_3(\alpha$ poate avea una din formele [5]

$$[\mathrm{I}]\ A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^2},\ A_3 f = \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} - \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}$$

$$[\mathrm{II}]\ A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} - \frac{\alpha^2}{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2} \frac{\partial f}{\partial \alpha^3},\ A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + \frac{\alpha^1}{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2} \frac{\partial f}{\partial \alpha^3},$$

$$A_3 f = \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} - \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}.$$

În cazul [I] sistemul (2) este

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0 \\ -x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} - \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0 \end{cases}$$

cu soluția

$$F = F[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2, x^3, \alpha^3].$$

Familia are ecuația

$$F[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2, x^3, \alpha^3]. \tag{8'}$$

În cazul [II] sistemul (2) devine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} - \dfrac{\alpha^2}{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\alpha^1}{(\alpha^2)^2 + (\alpha^2)^2} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \\ -x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} - \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} = 0, \end{cases}$$

cu soluția

$$F = F\big[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2,$$

$$\frac{(\alpha^1 \cos \alpha^3 + \alpha^2 \sin \alpha^3)\, x^1 + (\alpha^2 \cos \alpha^3 - \alpha^1 \sin \alpha^3)\, x^2}{\sqrt{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2}} - \sqrt{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2} \cos \alpha^3,\ x^3\big],$$

deci familia este

$$F[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2,\ u,\ x^3] = 0, \tag{8''}$$

unde

$$u = \frac{(\alpha^1 \cos \alpha^3 + \alpha^2 \sin \alpha^3)\, x^1 + (\alpha^2 \cos \alpha^3 - \alpha^2 \sin \alpha^3)\, x^2}{\sqrt{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2}} - \sqrt{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2} \cos \alpha^3.$$

Dacă grupul maxim de invarianță al familiei $\mathcal{F}_3$ este G_3^3, atunci grupul $H_3(\alpha)$ este definit de operatorii [5]

$$A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\quad A_2 f = -\sin \alpha^1 \operatorname{ctg} \alpha^3 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} - \frac{\sin \alpha^1}{\sin \alpha^3} \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + \cos \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^3}$$

$$A_3 f = \cos \alpha^1 \operatorname{ctg} \alpha^3 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \frac{\cos \alpha^1}{\sin \alpha^3} \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + \sin \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^3} \cdot$$

Cu aceste valori sistemul (2) se scrie :

$$\begin{cases} -x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0 \\ -x^3 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^3} - \sin \alpha^1 \operatorname{ctg} \alpha^3 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} - \dfrac{\sin \alpha^1}{\sin \alpha^3} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \cos \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \\ -x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^3} + x^3 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \cos \alpha^1 \operatorname{ctg} \alpha^3 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\cos \alpha^1}{\sin \alpha^3} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \sin \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \end{cases}$$

cu soluția

$$F = F(u, v, w)$$

unde

$$u = (x^1) + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

$$v = x^1 \sin \alpha^1 \sin \alpha^3 - x^2 \cos \alpha^1 \sin \alpha^3 + x^3 \cos \alpha^3$$

$$w = x^1 (\sin \alpha^1 \sin \alpha^2 \cos \alpha^3 - \cos \alpha^1 \cos \alpha^2) - x^2 (\cos \alpha^1 \sin \alpha^2 \cos \alpha^3 +$$

$$+ \sin \alpha^1 \cos \alpha^2) - x^3 \sin \alpha^2 \sin \alpha^3.$$

Deci familia de suprafeţe are ecuaţia

$$F(u, v, w) = 0. \tag{8'''}$$

Să considerăm acum $r = 4$, deci grupul maxim de invarianţă al familiei este grupul G_4 definit de operatorii X_1, X_2, X_3, X_4. În acest caz grupul $H_4(\alpha)$ poate avea una din formele [5].

$$[\mathrm{I}]\ A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_2 f = \operatorname{tg}\alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_3 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^3},\ A_4 f = \alpha^1 \operatorname{tg}\alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}$$

$$[\mathrm{II}]\ A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^2},\ A_3 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^3},\ A_4 f = \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} - \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}$$

$$[\mathrm{III}]\ A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_3 f = \cos\alpha^3 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \sin\alpha^3 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2},$$

$$A_4 f = \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} - \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial f}{\partial \alpha^3}$$

$$[\mathrm{IV}]\ A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} - \frac{\alpha^2}{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2} \frac{\partial f}{\partial \alpha^3},\ A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + \frac{\alpha^1}{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2} \frac{\partial f}{\partial \alpha^3},$$

$$A_3 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^3},\ A_4 f = \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} - \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}.$$

În cazul [I] sistemul (2) se scrie

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0 \\ & \frac{\partial F}{\partial x^2} + \operatorname{tg}\alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0 \\ & \frac{\partial F}{\partial x^3} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \\ & x^1 \frac{\partial F}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \operatorname{tg}\alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0 \end{aligned}\right.$$

avînd soluţia

$$F = F[(x^1 - \alpha^1)\cos\alpha^2 + x^2 \sin\alpha^2,\ x^3 - \alpha^3]$$

iar familia de suprafeţe are ecuaţia

$$F[(x^1 - \alpha^1)\cos\alpha^2 + x^2 \sin\alpha^2,\ x^3 - \alpha^3] = 0.$$

În cazul [II] sistemul (2) este

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3) \\ & x^1 \frac{\partial F}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} - \alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0 \end{aligned}\right.$$

cu soluţia

$$F = F\,[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2,\ x^3 - \alpha^3].$$

Familia de suprafeţe are deci ecuaţia

$$F[(x^1 - \alpha^1)^2 = (x^2 - \alpha^2)^2,\ x^3 - \alpha^3] = 0,$$

fiind un caz particular al familiei (8).

Dacă grupul $H_4(\alpha)$ are forma [III], sistemul (2) se scrie

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0\\ &\frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0\\ &\frac{\partial F}{\partial x^3} + \cos\alpha^3\,\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \sin\alpha^3\,\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0\\ &x^1\,\frac{\partial F}{\partial x^2} - x^2\,\frac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1\,\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} - \alpha^2\,\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0\end{aligned}\right.$$

avînd soluţia

$$\begin{aligned} F = F\,[(x^1 - \alpha^1)\sin\alpha^3 - (x^2 - \alpha^2)\cos\alpha^3\,(x^1 - \alpha^1)\cos\alpha^3 + \\ + (x^2 - \alpha^2)\sin\alpha^3 + x^3].\end{aligned}$$

Deci familia de suprafeţe este

$$\begin{aligned} (9)\qquad & F\,[x^1 - \alpha^1)\sin\alpha^3 - (x^2 - \alpha^2)\cos\alpha^3,\ (x^1 - \alpha^1)\cos\alpha^3 + \\ & + (x^2 - \alpha^2)\sin\alpha^3 + x^3] = 0.\end{aligned}$$

În cazul [IV] sistemul (2) devine

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} - \frac{\alpha^2}{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2}\,\frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0\\ &\frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \frac{\alpha^1}{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2}\,\frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0\\ &\frac{\partial F}{\partial x^3} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0\\ &x^1\,\frac{\partial F}{\partial x^2} - x^2\,\frac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1\,\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} - \alpha^2\,\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0\end{aligned}\right.$$

cu soluţia

$$F = F\Bigg[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2,$$

$$\frac{[\alpha^2 x^1 - \alpha^1 x^2)\cos(x^3 - \alpha^3) + [\alpha^1 x^1 + \alpha^2 x^2 - (\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2]\sin(x^3 - \alpha^3)}{\sqrt{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2}}\Bigg]$$

deci familia de suprafețe are ecuația

$$F\left[(x^1-\alpha^1)^2+(x^2-\alpha^2)^2,\right.$$

$$\left.\frac{(\alpha^2x^1-\alpha^1x^2)\cos(x^3-\alpha^2)+[\alpha^1x^1+\alpha^2x^2-(\alpha^1)^2-(\alpha^2)^2]\sin(x^3-\alpha^3)}{\sqrt{(\alpha^1)^2+(\alpha^2)^2}}\right]$$

care este cuprinsă în familia (8″),

Ținînd seama că grupul G_6 nu are nici un subgrup cu cinci parametri, rezultă că r nu poate fi egal cu 5.

Dacă $r = 6$, rezultă că grupul maxim de invarianță al familiei este grupul G_6 și deci grupul $H_6(\alpha)$ are una din formele [5]

$$[\mathrm{I}]\ A_1f=\frac{\partial f}{\partial\alpha^1},\ A_2f=\frac{\partial f}{\partial\alpha^2},\ A_3f=\frac{\partial f}{\partial\alpha^3},\ A_4f=\alpha^1\frac{\partial f}{\partial\alpha^2}-\alpha^2\frac{\partial f}{\partial\alpha^1}$$

$$A_5f=\alpha^2\frac{\partial f}{\partial\alpha^3}-\alpha^3\frac{\partial f}{\partial\alpha^2},\ A_6f=\alpha^3\frac{\partial f}{\partial\alpha^1}-\alpha^1\frac{\partial f}{\partial\alpha^3}.$$

$$[\mathrm{II}]\ A_1f=\frac{\partial f}{\partial\alpha^1},\ A_2f=\operatorname{tg}\alpha^2\frac{\partial f}{\partial\alpha^1},\ A_3f=\frac{\alpha^3}{\cos\alpha^2}\frac{\partial f}{\partial\alpha^1},\ A_4f=$$

$$=\alpha^1\operatorname{tg}\alpha^2\frac{\partial f}{\partial\alpha^1}+\frac{\partial f}{\partial\alpha^2},$$

$$A_5f=-\alpha^3\cos\alpha^2\frac{\partial f}{\partial\alpha^2}+[1+(\alpha^3)^2]\sin\alpha^2\frac{\partial f}{\partial\alpha^3},\ A_6f=$$

$$=-\frac{\alpha^1\alpha^3}{\cos\alpha^2}\frac{\partial f}{\partial\alpha^1}-\alpha^3\sin\alpha^2\frac{\partial f}{\partial\alpha^2}-[1+(\alpha^3)^2]\cos\alpha^2\frac{\partial f}{\partial\alpha^3}.$$

$$[\mathrm{III}]\ A_1f=\sin\alpha^1\sin\alpha^3\frac{\partial f}{\partial\alpha^2},\ A_2f=-\cos\alpha^1\sin\alpha^3\frac{\partial f}{\partial\alpha^2},\ A_3f=$$

$$=\cos\alpha^3\frac{\partial f}{\partial\alpha^2},\ A_4f=\frac{\partial f}{\partial\alpha^1},$$

$$A_5f=-\sin\alpha^1\operatorname{ctg}\alpha^3\frac{\partial f}{\partial\alpha^1}-\frac{\sin\alpha^1}{\sin\alpha^3}\frac{\partial f}{\partial\alpha^2}+\cos\alpha^1\frac{\partial f}{\partial\alpha^3},$$

$$A_6f=\cos\alpha^1\operatorname{ctg}\alpha^3\frac{\partial f}{\partial\alpha^1}+\frac{\cos\alpha^1}{\sin\alpha^3}\frac{\partial f}{\partial\alpha^2}+\sin\alpha^1\frac{\partial f}{\partial\alpha^3}.$$

$$[\mathrm{IV}]\ A_1f=\sin\alpha^1\sin\alpha^3\frac{\partial f}{\partial\alpha^2},\quad A_2f=-\cos\alpha^1\sin\alpha^3\frac{\partial f}{\partial\alpha^2},$$

$$A_3f=\cos\alpha^3\frac{\partial f}{\partial\alpha^2},\quad A_4f=\frac{\partial f}{\partial\alpha^1},$$

$$A_5f=-\sin\alpha^1\operatorname{ctg}\alpha^3\frac{\partial f}{\partial\alpha^1}+\cos\alpha^1\frac{\partial f}{\partial\alpha^3},$$

$$A_6f=\cos\alpha^1\operatorname{ctg}\alpha^3\frac{\partial f}{\partial\alpha^1}+\sin\alpha^1\frac{\partial f}{\partial\alpha^3}.$$

Pentru grupul [I] sistemul (2) este

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x^i}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^i}=0 \qquad (i=1,\,2,\,3)\\
&x^1\frac{\partial F}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial F}{\partial x^1}+\alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}-\alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0\\
&x^2\frac{\partial F}{\partial x^3}-x^3\frac{\partial F}{\partial x^2}+\alpha^2\frac{\partial F}{\partial x^3}-\alpha^3\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0\\
&x^3\frac{\partial F}{\partial x^1}-x^1\frac{\partial F}{\partial x^3}+\alpha^3\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}-\alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^3}=0
\end{aligned}\right.$$

avînd soluția

$$F=F[(x^1-\alpha^1)^2+(x^2-\alpha^2)^2+(x^3-\alpha^3)^2].$$

Familia de suprafețe are deci ecuația

$$F[(x^1-\alpha^1)^2+(x^2-\alpha^2)^2+(x^3-\alpha^3)^2]=0,$$

adică este familia de sfere cu rază constantă

$$(x^1-\alpha^1)^2+(x^2-\alpha^2)^2+(x^3-\alpha^3)^2=k,$$

fiind cuprinsă în familia (8).

Dacă grupul $H_6(\alpha)$ este grupul [II], sistemul (2) se scrie

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x^1}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0\\
&\frac{\partial F}{\partial x^2}+\operatorname{tg}\alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0\\
&\frac{\partial F}{\partial x^3}+\frac{\alpha^3}{\cos\alpha^2}\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0\\
&x^1\frac{\partial F}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial F}{\partial x^1}+\alpha^1\operatorname{tg}\alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0\\
&x^2\frac{\partial F}{\partial x^3}-x^3\frac{\partial F}{\partial x^2}-\alpha^3\cos\alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}+[1+(\alpha^3)^2]\sin\alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^3}=0\\
&x^3\frac{\partial F}{\partial x^1}-x^1\frac{\partial F}{\partial x^3}-\frac{\alpha^1\alpha^3}{\cos\alpha^2}\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}-\alpha^3\sin\alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}-\\
&\qquad-[1+(\alpha^3)^2]\cos\alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^3}=0
\end{aligned}\right.$$

cu soluția

$$F=F\left[\frac{(x^1-\alpha^1)\cos\alpha^2+x^2\sin\alpha^2+\alpha^3x^3}{\sqrt{1+(\alpha^3)^2}}\right].$$

Familia de suprafețe are ecuația

$$F\left[\frac{(x^1-\alpha^1)\cos\alpha^2+x^2\sin\alpha^2+\alpha^3x^3}{\sqrt{1+(\alpha^3)^2}}\right]=0$$

adică este familia de plane

$$\frac{(x^1-\alpha^1)\cos\alpha^2+x^2\sin\alpha^2+\alpha^3x^3}{\sqrt{1+(\alpha^3)^2}}=K. \tag{10}$$

În cazul [III] sistemul (2) devine

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x^1}+\sin\alpha^1\sin\alpha^3\frac{\partial F}{\partial\alpha^2}=0\\
&\frac{\partial F}{\partial x^2}-\cos\alpha^1\sin\alpha^3\frac{\partial F}{\partial\alpha^2}=0\\
&\frac{\partial F}{\partial x^3}+\cos\alpha^3\frac{\partial F}{\partial\alpha^2}=0
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&x^1\frac{\partial F}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial F}{\partial x^1}+\frac{\partial F}{\partial\alpha^1}=0\\
&x^2\frac{\partial F}{\partial x^3}-x^3\frac{\partial F}{\partial x^2}-\sin\alpha^1\operatorname{ctg}\alpha^3\frac{\partial F}{\partial\alpha^1}-\frac{\sin\alpha^1}{\sin\alpha^3}\frac{\partial F}{\partial\alpha^2}+\cos\alpha^1\frac{\partial F}{\partial\alpha^3}=0\\
&x^3\frac{\partial F}{\partial x^1}-x^1\frac{\partial F}{\partial x^3}+\cos\alpha^1\operatorname{ctg}\alpha^3\frac{\partial F}{\partial\alpha^1}+\frac{\cos\alpha^1}{\sin\alpha^3}\frac{\partial F}{\partial\alpha^2}+\sin\alpha^1\frac{\partial F}{\partial\alpha^3}=0
\end{aligned}\right.$$

avînd soluția

$$F=\text{const}.$$

Deci nu există nici o familie de suprafețe care să aibă ca grup maxim de invarianță grupul G_6 și ca grup atașat acestuia grupul $H_6(\alpha)$ de tipul [III].

Pentru grupul H_6 (α) de tipul [IV] sistemul (2) este

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x^1}+\sin\alpha^1\sin\alpha^3\frac{\partial F}{\partial\alpha^2}=0\\
&\frac{\partial F}{\partial x^2}-\cos\alpha^1\sin\alpha^3\frac{\partial F}{\partial\alpha^2}=0\\
&\frac{\partial F}{\partial x^3}+\cos\alpha^3\frac{\partial F}{\partial\alpha^2}=0
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&x^1\frac{\partial F}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial F}{\partial x^1}+\frac{\partial F}{\partial\alpha^1}=0\\
&x^2\frac{\partial F}{\partial x^3}-x^3\frac{\partial F}{\partial x^2}-\sin\alpha^1\operatorname{ctg}\alpha^3\frac{\partial F}{\partial\alpha^1}+\cos\alpha^1\frac{\partial F}{\partial\alpha^3}=0\\
&x^3\frac{\partial F}{\partial x^1}-x^1\frac{\partial F}{\partial x^3}+\cos\alpha^1\operatorname{ctg}\alpha^3\frac{\partial F}{\partial\alpha^1}+\sin\alpha^1\frac{\partial F}{\partial\alpha^3}=0
\end{aligned}\right.$$

cu soluţia

$$F = F(x^1 \sin \alpha^1 \sin \alpha^3 - x^2 \cos \alpha^1 \sin \alpha^3 + x^3 \cos \alpha^3 - \alpha^2).$$

Familia de suprafeţe are ecuaţia

$$F(x^1 \sin \alpha^1 \sin \alpha^3 - x^2 \cos \alpha^1 \sin \alpha^3 + x^3 \cos \alpha^3 - \alpha^2) = 0$$

adică familia de plane

$$x^1 \sin \alpha^1 \sin \alpha^3 - x^2 \cos \alpha^1 \sin \alpha^3 + x^3 \cos \alpha^3 - \alpha^2 = K, \tag{10'}$$

care conţine familia(10).

Avem deci :

TEOREMA 5. *Familiile de suprafeţe cu trei parametri măsurabile din spaţiul E_3 pot fi reduse la formele* (8), (8′), (8″), (8‴), (9) şi (10).

În acelaşi mod pentru familiile de curbe obţinem :

TEOREMA 6. *Familiile de curbe cu trei parametri măsurabile din spaţiul E_3 pot fi reduse la formele*

$$\begin{cases} F^1(x^1 - \alpha^1,\ x^2 - \alpha^2,\ x^3 - \alpha^3) = 0, \\ F^2(x^1 - \alpha^1,\ x^2 - \alpha^2,\ x^3 - \alpha^3) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F^1[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2,\ x^3,\ \alpha^3] = 0, \\ F^2[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2,\ x^3,\ \alpha^3] = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F^1[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2,\ u,\ x^3] = 0, \\ F^2[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2,\ u,\ x^3] = 0, \end{cases}$$

unde

$$u = \frac{(\alpha^1 \cos \alpha^3 + \alpha^2 \sin \alpha^3)\, x^1 + (\alpha^2 \cos \alpha^3 - \alpha^1 \sin \alpha^3) x^2}{\sqrt{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2}} - \\ - \sqrt{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2} \cos \alpha^3,$$

$$\begin{cases} F^1(u,\ v,\ w) = 0, \\ F^2(u,\ v,\ w) = 0, \end{cases}$$

unde

$$u = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2,$$

$$v = x^1 \sin \alpha^1 \sin \alpha^3 - x^2 \cos \alpha^1 \sin \alpha^3 + x^3 \cos \alpha^3,$$

$$w = x^1 (\sin \alpha^1 \sin \alpha^2 \cos \alpha^3 - \cos \alpha^1 \cos \alpha^2) - \\ - x^2(\cos \alpha^1 \sin \alpha^2 \cos \alpha^3 + \sin \alpha^1 \cos \alpha^2) - x^3 \sin \alpha^2 \sin \alpha^3,$$

şi

$$\begin{cases} F^1[(x^1 - \alpha^1) \sin \alpha^3 - (x^2 - \alpha^2) \cos \alpha^3,\ (x^1 - \alpha^1) \cos \alpha^3 + \\ \quad + (x^2 - \alpha^2) \sin \alpha^3 + x^3] = 0, \\ F^2[(x^1 - \alpha^1) \sin \alpha^3 - (x^2 - \alpha^2) \cos \alpha^3,\ (x^1 - \alpha^1) \cos \alpha^3 + \\ \quad + (x^2 - \alpha^2) \sin \alpha^3 + x^3] = 0. \end{cases}$$

Primită la redacţie la 1 august 1966

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. B. Kérékyató, *Geometrische Theorie der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen*. Abh. Math. Seminar, Hamburg, 8, 107—114 (1931).
2. L. A. Santaló, *Introduction to Integral Geometry*. Actualités Scientifiques et Industrielles. No. 1198, Hermann, Paris 1953.
3. M. Stoka, *Famiglie di varietà misurabili in uno spazio E_n*. Rend. di Circolo Mat. di Palermo, *2* (1959).
4. M. Stoka, *Asupra subgrupurilor grupului transformărilor ortogonale din spaţiul E_3*. St. cerc. mat. XVI, *2* (1957).
5. M. Stoka, *Asupra grupurilor izomorfe cu grupul transformărilor ortogonale din spaţiul E_3 şi cu subgrupurile lui*. St. cerc. mat., XVI, *3* (1967).

ASUPRA ECUAȚIEI DE DISPERSIE A UNEI PLASME RADIATIVE CU CONDUCTIVITATE ELECTRICĂ FINITĂ

DE

MIRCEA VASIU
(Cluj)

În această lucrare se stabilește ecuația de dispersie a unei plasme radiative, infinite și omogene, compresibile, nevîscoase, cu conductivitate electrică finită. Plasma este supusă acțiunii propriului său cîmp gravitațional și acțiunii unui cîmp magnetic uniform-axial. Ecuația de dispersie obținută generalizează ecuația de dispersie stabilită de G. Ferrero.

1. INTRODUCERE

În lucrarea de față ne vom ocupa de stabilirea ecuației de dispersie, cu ajutorul metodei oscilațiilor normale, metodă bine cunoscută în literatura de specialitate, a unei plasme radiative, infinite și omogene, compresibile, nevîscoase, cu conductivitate electrică finită. Plasma se presupune supusă atît acțiunii propriului său cîmp gravitațional, cît și acțiunii unui cîmp magnetic uniform-axial. În interiorul plasmei considerăm că au loc procese de conductibilitate termică și radiative. Pentru simplificarea problemei neglijăm mișcarea de rotație a mediului și de asemenea, nu luăm în considerare curentul de deplasare electrică din interiorul plasmei.

În elaborarea acestei lucrări ne-am orientat după cercetările noastre anterioare [1], [2], după lucrările lui C. Agostinelli [3] și G. Ferrero [4]. În lucrare vom generaliza rezultatele obținute de Ferrero în sensul că ne vom ocupa de un model similar de plasmă, cu deosebirea că noi o considerăm ca avînd o conductivitate electrică finită.

Ne alegem un sistem de referință cartezian $Oxyz$. În starea de echilibru a plasmei, cîmpul magnetic $\vec{H}_0$ are două componente și anume după axa Ox și respectiv după axa $Oy : \vec{H}_0(H_{0x}, H_{0y}, 0)$, iar viteza mediului

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 635–643, BUCUREȘTI, 1967

o presupunem nulă ($\vec{v}_0 = 0$). Presiunea p_0 a plasmei şi respectiv presiunea de radiaţie p_r, în starea de echilibru, sînt date de ecuaţiile

$$p_0 = R\rho_0 T_0 = C_p \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho_0 T_0 ; \gamma = \frac{C_p}{C_v}, \tag{1}$$

$$p_{r0} = \frac{1}{3} a T_0^4 \tag{2}$$

unde R este constanta gazelor, ρ_0 densitatea molară a plasmei, T_0 temperatura absolută, γ coeficientul adiabatic, C_p căldura specifică molară la presiune constantă, C_v căldura specifică molară la volum constant, a constanta lui Stefan.

2. STAREA DE PERTURBAŢIE A PLASMEI

Admitem că peste starea de echilibru a plasmei se suprapun mici perturbaţii

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{v}' = \vec{v}' ; \vec{v}_0 = 0 \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 + \vec{H}' \\ \rho &= \rho_0 + \rho' \\ p &= p_0 + p' \\ p_r &= p_{0r} + p_r' \\ U &= U_0 + U' \\ T &= T_0 + T' \end{aligned} \tag{3}$$

unde $\vec{v}_0$, $\vec{H}_0$, ρ_0, p_0, p_{0r}, U_0, T_0 sînt respectiv : viteza plasmei, cîmpul magnetic, densitatea plasmei, presiunea plasmei, presiunea de radiaţie, potenţialul gravitaţional, temperatura absolută, pentru starea de echilibru (neperturbată), iar $\vec{v}'$, $\vec{H}'$, ρ', p', p_r', U', T' sînt perturbaţiile mărimilor respective. Perturbaţiile le considerăm suficient de mici pentru a neglija din calcule pătratele şi produsele lor.

Luînd în considerare sistemul de ecuaţii magnetohidrodinamice cunoscute [1], [4], înlocuind expresiile (3) în acest sistem de ecuaţii diferenţiale, obţinem ecuaţiile magnetohidrodinamice liniarizate pentru cazul studiat de noi

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \nabla (p' + p_r') + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{H}') \times \vec{H}_0 + \rho_0 \nabla U' \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = - \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \vec{H}'}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}_0) + \nu_m \Delta \vec{H}' ; \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \vec{H}' = 0 \tag{7}$$

$$\Delta U' = -4\pi G \rho' \tag{8}$$

$$p' = \frac{p_0}{T_0} T' + \frac{p_0}{\rho_0} \rho' \tag{9}$$

$$p'_r = \frac{4}{3} a T_0^3 T' \tag{10}$$

$$\begin{aligned}(\rho_0 C_p + 4a T_0^3) \frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{a T_0^4}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} - \rho_0 \frac{\partial U'}{\partial t} - \frac{\partial p'}{\partial t} = \\ = -\frac{1}{3} a T_0^4 \nabla \cdot \vec{v} + \frac{c}{\chi \rho_0} \Delta p'_r + K \Delta T',\end{aligned} \tag{11}$$

unde ν_m este coeficientul de vîscozitate magnetică; σ coeficientul de conductivitate electrică a mediului (în cazul nostru $\sigma \neq +\infty$); c viteza luminii în vid; G, constanta gravitațională; χ, coeficientul de opacitate a plasmei, presupus constant; ∇ operatorul „nabla"; Δ operatorul lui Laplace.

Trebuie să observăm că în ecuația (11) am neglijat termenul care este dependent de coeficientul de generare ε a energiei (vezi și lucrarea [4]).

Perturbațiile le considerăm de forma unor unde plane monocromatice ce se propagă de-a lungul axei Ox

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= \vec{a}'_0 \, e^{i(\omega t + kx)} \\ \varphi' &= \varphi'_0 \, e^{i(\omega t + kx)},\end{aligned} \tag{12}$$

unde $\vec{a}'$ este: fie $\vec{H}'$, fie $\vec{v}'$; $\vec{a}'_0$ este amplitudinea perturbațiilor respective, φ' este: fie ρ', fie p, fie p'_r, fie U', fie T', iar φ'_0 este amplitudinea perturbațiilor respective; ω pulsația undei plane: $k = 2\pi/\lambda$ numărul de undă.

Ținînd seama de expresiile (12), de relațiile cunoscute din literatura de specialitate [5],

$$\begin{aligned}(\nabla \times \vec{H}') \times \vec{H}_0 &= (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \vec{H}' - \nabla (\vec{H}_0 \cdot \vec{H}') \\ \nabla \times (\vec{v} \times H_0) &= (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{H}_0 \nabla \cdot \vec{v},\end{aligned} \tag{13}$$

unde am luat în considerare ecuația (7), ecuațiile diferențiale (4), (5), (6), (8) și (11) devin

$$\omega v_x = -\frac{k}{\rho_0} (p' + p'_r) - \frac{k}{4\pi\rho_0} H_{0y} H'_y + kU' \tag{14}$$

$$\omega v_y = \frac{k}{4\pi\rho_0} H_{0x} H'_y \tag{15}$$

$$\omega v_z = \frac{k}{4\pi\rho_0} H_{0x} H'_z \tag{16}$$

$$\omega \rho' = -k \rho_0 v_x \tag{17}$$

$$\frac{\partial H'_x}{\partial t} = [\nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}_0)]_x + \nu_m \Delta_x H'_x = 0; \quad \frac{\partial H'_x}{\partial x} = 0 \tag{18}$$

(pentru scrierea ecuației (18) s-a luat în considerare ecuația (7))

$$\omega H'_y = i\nu_m k^2 H'_y + k v_y H_{0x} - k v_x H_{0y} \tag{19}$$

$$\omega H'_z = i\nu_m k^2 H'_z + k v_z H_{0x} \tag{20}$$

$$k^2 U' = 4\pi G \rho' \tag{21}$$

$$(\rho_0 C_p + 4a T_0^3)\, i\omega T' - i\omega \frac{aT_0^4}{\rho_0}\rho' - i\omega\rho_0 U' - i\omega p' = -\frac{i\, ka\, T_0^4}{3} v_x - \frac{ck^2}{\chi\rho_0} p'_r - Kk^2 T'. \tag{22}$$

3. UNDE MAGNETORADIATIVE PLANE

În cele ce urmează ne vom limita la studiul propagării undelor magnetoradiative în planul Oxy. Din ecuațiile (17) și (21) obținem

$$v_x = -\frac{\omega}{k\rho_0}\rho' \tag{23}$$

$$U' = \frac{4\pi G}{k^2}\rho'. \tag{24}$$

Ținînd seama de (9), (10), (23), (24), ecuația (14) se poate scrie sub forma, după ce în prealabil a fost înmulțită cu mărimea $-k\rho_0$:

$$\left(\omega^2 - \frac{k^2 p_0}{\rho_0} + 4\pi G\rho_0\right)\rho' - \frac{k^2}{4\pi} H_{0y} H'_y = k^2\left(\frac{p_0}{T_0} + \frac{4}{3} a T_0^3\right) T'. \tag{25}$$

Ecuația (19), avînd în vedere (15) și (23), devine

$$H'_y = \frac{\omega^2 H_{0y}}{\rho_0}\left(\frac{1}{\omega^2 - i\nu_m k^2\omega - \dfrac{k^2}{4\pi\rho_0}H_{0x}^2}\right)\rho'. \tag{26}$$

Înlocuind (26) în (25) obținem ecuația

$$\left(\omega^2 - \frac{k^2 p_0}{\rho_0} + 4\pi G\rho_0 - \frac{k^2 H_{0y}^2}{4\pi\rho_0}\,\frac{\omega^2}{\omega^2 - i\nu_m k^2\omega - \dfrac{k^2 H_{0x}^2}{4\pi\rho_0}}\right)\rho' = k^2\left(\frac{p_0}{T_0} + \frac{4}{3} aT_0^3\right) T'. \tag{27}$$

Introducînd notațiile

$$V_{Ax}^2 = \frac{H_{0x}^2}{4\pi\rho_0}; \quad V_{Ay}^2 = \frac{H_{0y}^2}{4\pi\rho_0}; \quad \Omega_R^2 = \nu_m k^2, \tag{28}$$

unde V_{Ax}, V_{Ay} sînt vitezele Alfvén corespunzătoare undelor magnetohidrodinamice ce se propagă de-a lungul axei Ox, respectiv Oy, ecuația (27) se poate scrie sub forma următoare

$$\text{(29)}\qquad \Bigl(\omega^2 - \frac{k^2 p_0}{\rho_0} + 4\pi G\rho_0 - \frac{k^2 V_{Ay}^2\,\omega^2}{\omega^2 - i\,\Omega_R^2\,\omega - k^2 V_{Ax}^2}\Bigr)\,\rho' -$$

$$- k^2\Bigl(\frac{p_0}{T_0} + \frac{4}{3}\,aT_0^3\Bigr)\,T' = 0\,.$$

Din ecuaţia (22), ţinînd seama de (9), (10), (23), (24), se determină mărimea ρ', pe care înlocuind-o în (29), rezultă ecuaţia

$$\text{(30)}\qquad \Bigl\{- k^2\Bigl[\frac{p_0}{\rho_0}\,(\omega^2 - i\,\Omega_R^2\,\omega - k^2 V_{Ax}^2) + \omega^2 V_{Ay}^2\Bigr] +$$

$$+ (\omega^2 + 4\pi G\rho_0)\,(\omega^2 - i\,\Omega_R^2\,\omega - k^2 V_{Ax}^2)\Bigr\}\Bigl\{i\omega\Bigl(\rho_0 C_p + 4a\,T_0^3 - \frac{p_0}{T_0}\Bigr) +$$

$$+ k^2\Bigl(\frac{4\,a\,c\,T_0^3}{3\,\chi\rho_0} + K\Bigr)\Bigr\} - i\omega\,(\omega^2 - i\,\Omega_R^2\,\omega - k^2 V_{Ax}^2)\Bigl(\frac{p_0}{T_0} +$$

$$+ \frac{4}{3}\,a\,T_0^3\Bigr)\Bigl[4\pi\rho_0 G + \Bigl(\frac{p_0}{\rho_0} + \frac{4aT_0^4}{3\rho_0}\Bigr)k^2\Bigr] = 0\,.$$

Aceasta generalizează ecuaţia obţinută de G. Ferrero [4]. Într-adevăr, dacă presupunem plasma cu conductivitate electrică infinită ($\sigma = +\infty$, $\nu_m = 0$, deci $\Omega_R = 0$) se regăseşte ecuaţia stabilită de Ferrero.

4. CAZ PARTICULAR: PLASMA PERFECT OPACĂ ŞI CU CONDUCTIBILITATE TERMICĂ NULĂ

Presupunem plasma ca fiind perfect opacă ($\chi = +\infty$) şi avînd coeficientul de conductibilitate termică nul ($K = 0$). Cu aceste aproximaţii, ecuaţia (30) devine

$$\text{(31)}\qquad \Bigl\{- k^2\Bigl[\frac{p_0}{\rho_0}\,(\omega^2 - i\,\Omega_R^2\,\omega - k^2 V_{Ax}^2) + \omega^2 V_{Ay}^2\Bigr] +$$

$$+ (\omega^2 + 4\pi G\,\rho_0)\,(\omega^2 - i\,\Omega_R^2\,\omega - k^2 V_{Ax}^1)\Bigr\}\Bigl(\rho_0 C_p + 4a\,T_0^3 - \frac{p_0}{T_0}\Bigr) -$$

$$- (\omega^2 - i\,\Omega_R^2\omega - k^2 V_{Ax}^2)\Bigl(\frac{p_0}{T_0} + \frac{4}{3}\,a\,T_0^3\Bigr)\Bigl[\Bigl(\frac{p_0}{\rho_0} + \frac{4aT_0^3}{3\,\rho_0}\Bigr)k^2 + 4\pi G\rho_0\Bigr] = 0.$$

Deoarece ecuaţia (1) se mai poate scrie şi sub forma

$$\text{(32)}\qquad p_0 = (C_p - C_v)\,\rho_0\,T_0$$

expresia $C_p\,\rho_0 - p_0\,/\,T_0$ devine

$$\text{(33)}\qquad C_p\rho_0 - \frac{p_0}{T_0} = \frac{p_0}{T_0}\,\frac{1}{\gamma - 1}\,.$$

Înlocuind (33) în (31) obținem ecuația

$$
\begin{aligned}
(34)\qquad & (-\omega^2 + i\,\Omega_R^2\,\omega + k^2\,V_{Ax}^2)\biggl\{\frac{p_0}{\rho_0}\biggl[\biggl(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{4aT_0^4}{p_0}\biggr) + \\
& + \biggl(+1\,\frac{4aT_0^4}{3p_0}\biggr)^2\biggr]k^2 - (\omega^2 + 4\,\pi\,G\,\rho_0)\biggl(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{4\,a\,T_0^4}{p_0}\biggr) + \\
& + 4\pi\,G\,\rho_0\biggl(1 + \frac{4\,a\,T_0^4}{3\,p_0}\biggr)\biggr\} - k^2\,V_{Ay}^2\,\omega^2\biggl(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{4\,a\,T_0^4}{p_0}\biggr) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Aceasta se mai poate scrie sub forma următoare

$$
\begin{aligned}
(35)\qquad & (-\omega^2 + i\,\Omega_R^2\omega + k^2V_{Ax}^2)\biggl\{\frac{p_0}{\rho_0}\biggl[\gamma + \frac{20}{3}(\gamma-1)\,\frac{a\,T_0^4}{p_0} + \\
& + \frac{16}{9}(\gamma-1)\,\frac{a^2\,T_0^8}{p_0^2}\biggr]k^2 - \omega^2\biggl[1 + 4\,(\gamma-1)\,\frac{a\,T_0^4}{p_0}\biggr] - \\
& - 4\pi\,G\,\rho_0\biggl[(2-\gamma) + \frac{8}{3}(\gamma-1)\,\frac{a\,T_0^4}{p_0}\biggr]\biggr\} - k^2V_{Ay}^2\omega^2\biggl[1 + \frac{4\,(\gamma-1)\,a\,T_0^4}{p_0}\biggr] = 0\,.
\end{aligned}
$$

Dacă introducem notațiile

$$
(36)\qquad V_a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\,;\quad V_t^2 = \frac{a\,T_0^4}{\rho_0}\,,
$$

unde V_a este viteza sunetului în cazul proceselor adiabate, iar V_t^2 viteza radiației termice, ecuația (35) devine

$$
\begin{aligned}
(37)\qquad & \omega^4\biggl[1 + 4\,\gamma(\gamma-1)\biggl(\frac{V_t}{V_a}\biggr)^2\biggr] - i\,\omega^3\,\Omega_R^2\biggl[1 + 4\gamma\,(\gamma-1)\,\biggl(\frac{V_t}{V_a}\biggr)^2\biggr] - \\
& - \omega^2\biggl\{V_a^2\biggl[1 + \frac{20}{3}(\gamma-1)\biggl(\frac{V_t}{V_a}\biggr)^2 + \frac{16}{9}\,\gamma(\gamma-1)\biggl(\frac{V_t}{V_a}\biggr)^4\biggr]k^2 - \\
& - 4\pi\,\rho_0\,G\biggl[(2-\gamma) + \frac{8}{3}\,\gamma\,(\gamma-1)\,\biggl(\frac{V_t}{V_a}\biggr)^2\biggr] + k^2\,(V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2)\,\biggl[1 + \\
& + 4\gamma\,(\gamma-1)\biggl(\frac{V_t}{V_a}\biggr)^2\biggr]\biggr\} + i\,\Omega_R^2\,\omega\biggl\{V_a^2\biggl[1 + \frac{20}{3}\,(\gamma-1)\biggl(\frac{V_t}{V_a}\biggr) + \frac{16}{9}\,\gamma\,(\gamma - \\
& - 1)\biggl(\frac{V_t}{V_a}\biggr)^4\biggr]k^2 - 4\,\pi\,\rho_0\,G\biggl[(2-\gamma) + \frac{8}{3}\,\gamma\,(\gamma-1)\biggl(\frac{V_t}{V_a}\biggr)^2\biggr]\biggr\} + \\
& + k^2\,V_{Ax}^2\biggl\{V_a^2\biggl[1 + \frac{20}{3}\,(\gamma-1)\biggl(\frac{V_t}{V_a}\biggr)^2 + \frac{16}{9}\,\gamma\,(\gamma-1)\,\biggl(\frac{V_t}{V_a}\biggr)^4\biggr|\,k^2 - \\
& - 4\pi\,\rho_0\,G\biggl[(2-\gamma) + \frac{8}{3}\,\gamma\,(\gamma-1)\,\biggl(\frac{V_t}{V_a}\biggr)^2\biggr]\biggr\} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Introducînd variabila imaginară ζ de forma

$$\zeta = i\omega \tag{38}$$

și notațiile

$$A = 1 + 4\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2$$

$$B = \Omega_R^2 \cdot A$$

$$\begin{aligned} C = {} & V_a^2\left[1 + \frac{20}{3}(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2 + \frac{16}{9}\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^4\right]k^2 - \\ & - 4\pi G\rho_0\left[(2 - \gamma) + \frac{8}{3}\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2\right] + k^2(V_{Ax}^2 + \\ & + V_{Ay}^2)\left[1 + 4\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} D = {} & \left\{V_a^2\left[1 + \frac{20}{3}(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2 + \frac{16}{9}\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^4\right]k^2 - \right. \\ & \left. - 4\pi G\rho_0\left[(2 - \gamma) + \frac{8}{3}\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2\right]\right\}\Omega_R^2 \end{aligned}$$

$$E = \Omega_A^2\, D\,\frac{1}{\Omega_R^2}$$

$$\Omega_A^2 = k^2 V_{Ax}^2$$

ecuația (37) se poate scrie

$$A\zeta^4 + B\zeta^3 + C\zeta^2 + D\zeta + E = 0\,. \tag{40}$$

Introducînd noile notații

$$B' = \frac{B}{A}\,;\ C' = \frac{C}{A}\,;\ D' = \frac{D}{A}\,;\ E' = \frac{E}{A} \tag{41}$$

ecuația (40) devine

$$f(\zeta) = \zeta^4 + B'\zeta^3 + C'\zeta^2 + D'\zeta + E' = 0\,. \tag{42}$$

5. DISCUȚII

Dacă $\Omega_A^2 > 0$, A > și $E < 0$ astfel încît $f(\zeta) = f(0) < 0$ pentru $\zeta = 0$ și lim $f(\zeta) \to +\infty$, există cel puțin o rădăcină reală și pozitivă a ecuației (42). În acest caz avem satisfăcută inegalitatea

$$\left\{\frac{\pi V_a^2\left[1 + \frac{20}{3}(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2 + \frac{16}{9}\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^4\right]}{\rho_0 G\left[(2 - \gamma) + \frac{8}{3}\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2\right]}\right\}^{1/2} < \lambda. \tag{43}$$

Aceasta, dacă introducem notația

$$\lambda_c = \left\{ \frac{\pi V_a^2 \left[1 + \frac{20}{3}(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2 + \frac{16}{9}\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^4\right]}{\rho_0 G\left[(2 - \gamma) + \frac{8}{3}\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2\right]} \right\}^{1/2} \tag{44}$$

unde λ_c este lungimea de undă critică ($\lambda_c > 0$), se poate scrie

$$\lambda_c < \lambda\,. \tag{45}$$

Dacă luăm în considerare criteriul de instabilitate gravitațională al lui Jeans [6], [7], inegalitatea (45) exprimă condiția de instabilitate magnetogravitațională a mediului considerat.

Dacă admitem că fluidul ionizat are o conductivitate electrică infinită ($\sigma = +\infty$; $\nu_m = 0$; $\Omega_r = 0$) ecuația (42) se reduce la ecuația

$$A\omega^4 + B_1\omega^2 + C_1 = 0\,, \tag{46}$$

unde

$$\begin{aligned} B_1 = &-\left\{V_a^2\left[1 + \frac{20}{3}(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2 + \frac{16}{9}\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^4\right]k^2 - \right. \\ &- 4\pi\rho_0 G\left[(2 - \gamma) + \frac{8}{3}\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2\right] + (V_{Ax}^2 + \\ &\left. + V_{Ay}^2)\,k^2\left[1 + 4\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2\right]\right\} \\ C_1 = &\;\Omega_A^2\left\{V_a^2\left[1 + \frac{20}{3}(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2 + \frac{16}{9}\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^4\right]k^2 - \right. \\ &\left. - 4\pi\rho_0 G\left[(2 - \gamma) + \frac{8}{3}\gamma(\gamma - 1)\left(\frac{V_t}{V_a}\right)^2\right]\right\}. \end{aligned} \tag{47}$$

Ecuația (46) este tocmai ecuația stabilită de către Ferrero [4]. Criteriul de instabilitate magnetogravitațională a fluidului ionizat, în cazul stabilit de Ferrero, este următorul

$$\lambda_c < \lambda\,, \tag{48}$$

unde mărimea λ_c este dată de expresia (44).

Concluzie. Atît în cazul unui fluid ionizat, omogen, radiativ, perfect opac, cu conductibilitate termică nulă și cu conductivitate electrică finită, cît și în cazul unui fluid ionizat, cu aceleași proprietăți, dar cu conductivitate electrică infinită, criteriul de instabilitate magnetogravitațională rămîne același.

Problema analizată în această lucrare prezintă importanță pentru astrofizică (în studiile teoretice referitoare la instabilitatea protogalaxiei) și, în general, pentru cercetările de magnetohidrodinamică.

Primită la redacție la 10 octombrie 1966

Facultatea de fizică a Universității „Babeș-Bolyai"
Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. M. Vasiu, Anal. St. Univ. „Al. I. CUZA", Iași, Sec. I, **IX**, 155 (1963).
2. M. Vasiu, St. cerc. științ. Iași, ser. șt.-teh. **I**, 45 (1963).
3. C. Agostinelli, Ann. di Matemat. Ser. 4, **L**, 249 (1960).
4. G. Ferrero, Rend. Sci. Mat. Fis. Chim. Istit. Lombardo, **98**, 525 (1964).
5. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Cap. V, Oxford, 1961.
6. J. Jeans, *Astronomy and Cosmogony*. Cambridge, 1929.
7. A. Pacholczyk, J. Stodolkiewicz, Acta Astron. Pol., **10**, 1 (1960).

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

MATHEMATICAL ANALYSIS. Functions, Limits, Series, Continued Fractions. (*Analiză matematică. Funcții, Limite, Serii, Fracții continue*). Edited by L. A. Lyusternik and F. R. Yampol'skii. Pergamon Press, 1965.

Această carte este o traducere în limba engleză a volumului cu acelaşi titlu scris în limba rusă şi publicat în 1961 la Moscova în Fizmatgiz.

Traducerea urmează planul general al ediției în limba rusă. Cartea se adresează matematicienilor, fizicienilor, inginerilor, studenților și aspiranților și expune unele noțiuni de bază ale analizei matematice. Are 404 pagini, grupate în șase capitole.

În capitolul I, intitulat *Dreapta reală și funcțiile definite pe ea,* se face o introducere în analiza matematică. Sînt expuse principalele noțiuni referitoare la numerele reale, dreapta reală, trecerea la limită şi funcţiile de o variabilă. Capitolul II, *Spații n-dimensionale și funcțiile definite pe ele,* expune conceptele de bază relative la spaţiile cu n-dimensiuni. Capitolul III, *Serii,* conține teoria clasică a seriilor precum și metodele practice de calcul a sumei lor. În capitolul IV, *Serii ortogonale și sisteme ortogonale,* se expun problemele generale din descompunerea funcţiilor în serii ortogonale şi biortogonale. Sînt prezentate apoi sistemele generale ortogonale de polinoame și sistemele clasice de polinoame ale lui Legendre, Cebîșev, Hermite etc. Capitolul V se intitulează *Fracții continue.* După trecerea în revistă a proprietăților fracțiilor continue, se menționează particularitățile convergenței lor și se dă dezvoltarea cîtorva funcții în fracții continue. Ultimul capitol *Cîteva sisteme de numere și funcții* conține un număr important de constante și funcții care se întîlnesc foarte des în aplicațiile practice ale matematicii.

Se prezintă : sume speciale de numere, numerele și polinoamele lui Bernoulli, ale lui Euler, cîteva funcţii discontinue şi funcţii speciale elementare (integrale eliptice, integralele lui Fresnel, funcţiile gamma şi beta ale lui Euler, etc.).

Cartea se încheie cu o bogată și interesantă bibliografie, dată pentru fiecare capitol în parte. Exemplele, ce însoțesc pe parcurs definițiile, sînt interesante, alese cu grije. Definițiile sînt riguroase, date într-un limbaj modern.

Prin conținutul ei cît și prin modul de prezentare al materialului, cartea este utilă celor cărora se adresează.

Constantin V. Crăciun

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

◆

1967 MAJ 20

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSCHI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 352 p., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aleatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 1966, 669 p., 38 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 4, P. 477—646, BUCUREŞTI, 1967

I. P. „Informaţia" – c. 5077 43831 **Lei 12.—**

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

5

TOMUL 19

1967

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei
Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacție

În țară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agențiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuța poştală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

F 762

TOM. 19, Nr. 5
1967

STUDII ȘI CERCETĂRI
MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

SUMAR

Pag.

CORNEL CÎȘLARU, Configurațiile reuniunii a două limbaje . . . 649

G. DINCĂ, Influența temperaturii asupra propagării undelor în fire extensibile (problema cuplată) 659

MIHAI DRAGOMIRESCU, Algoritmul Theil-Van de Panne pentru programarea convexă 681

MIHAI DRAGOMIRESCU, Asupra condițiilor Kuhn-Tucker din programarea neliniară 691

ANDREI DUMA, Morfisme între categorii autonome 697

VIOREL DUMITRAȘ, Determinarea spațiilor A_n cu „p" forme Pfaff invariante cu grup maxim de mișcări 701

DUMITRU ENE, Asupra pseudocorectării erorilor 707

G. GODINI, Observații cu privire la subseriile unei serii dintr-un spațiu Banach 711

MARIA PETER-MIHOC, Asupra nomogramelor de gen zero cu două scări regulate și una proiectivă 715

CONSTANTIN RAISCHI, Asupra unui model algebric al categoriilor gramaticale. II 723

MARCEL N. ROȘCULEȚ și PAUL COCÂRLAN, Contribuții la studiul ecuațiilor cu derivate parțiale de tip parabolic. VII. Polinoame calorice și transformări Paul Appell 739

P. STAVRE, Asupra unor clase de curbe 747

P. STAVRE, Curbe (S) pe varietăți V_n^{n-1} sau V^{n-1} din spații riemanniene V_n 753

I. SUCIU, Teoria spațiilor H^p în cazul algebrelor de funcții 757

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5 P. 647–802 BUCUREȘTI, 1967

CONFIGURAȚIILE REUNIUNII A DOUĂ LIMBAJE

DE

CORNEL CÎȘLARU

În cele ce urmează ne propunem să studiem legătura care există între configurațiile a două limbaje, pe de o parte, și configurațiile reuniunii acestor două limbaje, pe de altă parte.

1. DEFINIȚII ȘI NOTAȚII

Vom aminti cîteva definiții și notații din teoria algebrică a gramaticii (vezi [2], [3], [5], [4]).

Se numește vocabular, o mulțime finită $V = \{x\}$ de elemente x numite cuvinte. Sistemele ordonate de cuvinte în care se admit repetiții se numesc fraze și se notează cu $A = x_1 \, x_2 \ldots x_n$, unde $x_i \in V$.

Se dă o mulțime de fraze $F = \{A\}$; frazele aparținînd acestei mulțimi se numesc fraze marcate.

Se dă un sistem de submulțimi disjuncte ale mulțimii V numite vecinătăți ale elementelor care intră în ele; vecinătatea elementului x se notează cu $P(x)$.

Se numește limbaj și se notează $L = \{V, P, F\}$, mulțimea de cuvinte V cu sistemul de vecinătăți P și cu mulțimea frazelor marcate F.

Fie X o mulțime de elemente și fie Γ o lege care asociază fiecărui element x din X o anumită submulțime a lui X, $\Gamma(x)$. Cuplul (X, Γ) se numește graf.

Geometric un graf se reprezintă printr-o mulțime de puncte și o mulțime de arce orientate, care leagă punctul $x \in X$ de punctele din $\Gamma(x)$.

Dacă două puncte $x, y \in X$ se pot uni printr-un șir de arce, spunem că am definit un drum de la un punct la celălalt.

O componentă conexă a unui graf este o submulțime a lui X, astfel încît oricare ar fi două puncte din submulțime, există un drum care le unește.

Vom numi partiție a mulțimii V reprezentarea ei sub forma unei reuniuni de mulțimi disjuncte două cîte două. Vom nota cu B partiția

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P. 649–658, BUCUREȘTI, 1967

$V = \bigcup_{i=1}^{N} B_i$ a mulțimii V; vom nota cu $B(x)$ acel termen al partiției B care-l conține pe x.

Sistemul de vecinătăți P definește o partiție a lui V.

Fie $B^{(1)}$ și $B^{(2)}$ două partiții ale lui V.

Spunem că partiția $B^{(1)}$ este mai puțin fină decît $B^{(2)}$ sau că $B^{(1)}$ este o mărire a partiției $B^{(2)}$ dacă $B^{(1)}(x) \supseteq B^{(2)}(x)$ oricare ar fi $x \in V$ și există un $x \in V$ astfel încît $B^{(1)}(x) \supset B^{(2)}(x)$.

Vom numi B-structură a frazei A imaginea acestei fraze în aplicația : $x \rightarrow B\,(x)$.

O B-structură se numește marcată dacă există cel puțin o frază marcată care se aplică pe B-structura dată.

Două elemente ale unei partiții B, B_i și B_j, se numesc B-echivalente și scriem $B_i \underset{B}{\sim} B_j$ dacă, oricare ar fi frazele A_1 și A_2, B-structurile $B(A_1)B_iB(A_2)$ și $B(A_1)B_jB(A_2)$ sînt simultan marcate sau nemarcate.

Fie $B^{(1)}$ o mărire a lui $B^{(2)}$. Spunem că $B^{(1)}$ este o mărire regulată a lui $B^{(2)}$ dacă din

$$B^{(2)}\,(y) \subset B^{(1)}\,(x) \text{ rezultă } B^2\,(y) \underset{B^{(2)}}{\sim} B^{(2)}\,(x).$$

Partiția B pentru care $B(x) = \{x\}$, oricare ar fi $x \in V$, se numește partiția unitate.

Fie B o partiție ; construim o partiție B' în felul următor :

$$B'(x) = \bigcup_{B_i \underset{B}{\sim} B(x)} B_i \qquad \text{pentru toți } x \in V,$$

deci în membrul al doilea se ia reuniunea tuturor termenilor B-echivalenți cu $B\,(x)$.

Partiția B' se numește partiția derivată a partiției B. Fie B o partiție arbitrară a lui V.

Numim B-configurație de primul rang acea B-structură (notată $\widetilde{B}_1$) care are cel puțin două elemente și pentru care există un element al partiției, fie el B_{α_1} (numit rezultanta configurației) astfel încît B-structurile $B(A_1)\widetilde{B}_1B(A_2)$ și $B(A_1)\,B_{\alpha_1}\,B(A_2)$ să fie simultan marcate sau nemarcate, oricare ar fi frazele A_1 și A_2.

Numim B-structură de primul rang, o B-structură care nu conține B-configurații de primul rang.

Se numește B-configurație de rang k, acea B-structură (notată $\widetilde{B}_k$) care are cel puțin doi termeni și pentru care există un element al partiției ; fie el B_{α_k} (numit rezultanta configurației), astfel încît B-structurile de rang $k-1$, $B_{k-1}\,(A_1)\,\widetilde{B}_k\,B_{k-1}\,(A_2)$ și $B_{k-1}\,(A_1)\,B_{\alpha_k}B_{k-1}\,(A_2)$, sînt simultan marcate sau nemarcate, oricare ar fi frazele A_1 și A_2.

Se numește B-structură de rang k o B-structură care nu conține B-configurații de rang $1, 2, \ldots, k$.

Rangul minim al unei B-configurații se numește ordinul B-configurației, iar rangul maxim al unei B-structuri se numește ordinul B-structurii.

Pentru alte variante ale noțiunii de configurație a se vedea [1], [6].

O B-configurație este parazită, dacă nu există nici o B-structură marcată care să o conțină ([5], capitolul V).

2. DEFINIREA REUNIUNII A DOUĂ LIMBAJE

Fiind date două limbaje $L_1 = \{V_1, P_1, F_1\}$ şi $L_2 = \{V_2, P_2, F_2\}$ înţelegem prin reuniunea lor (S. Marcus, comunicare orală) un limbaj $L = \{V, P, F\}$ definit astfel:

1) $V = V_1 \cup V_2$.

2) $y \in P(x)$ dacă există un şir finit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel ca $x_1 = y$; $x_n = x$ şi $x_i \in P_1(x_{i+1}) \cup P_2(x_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

3) $F = F_1 \cup F_2$.

Condiţia 2) care defineşte partiţia P poate fi înlocuită prin condiţia următoare:

2′) Definim următorul graf: vîrfurile sînt elementele celor două partiţii, o muchie uneşte vîrful $P_1(x)$ cu vîrful $P_2(y)$ dacă $P_1(x) \cap P_2(y) \neq \emptyset$. Componentele conexe ale grafului sînt elementele partiţiei P.

PROPOZIŢIA 1. *Condiţia* 2) *şi condiţia* 2′) *sînt echivalente.*

Într-adevăr, dacă $y \in P(x)$, aceasta înseamnă că există un şir finit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu $x_1 = y$; $x_n = x$ şi

(1) $x_i \in P_1(x_{i+1}) \cup P_2(x_{i+1})$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n-1$[1].

Vom arăta că y şi x aparţin aceleiaşi componente conexe.

Din (1) rezultă

$$y = x_1 \in P_1(x_2) \cup P_2(x_2). \tag{2}$$

Alegem

$$y = x_1 \in P_1(x_2). \tag{3}$$

De asemenea, tot din (1) rezultă:

$$x_2 \in P_1(x_3) \cup P_2(x_3). \tag{4}$$

Dacă $x_2 \in P_1(x_3)$, rezultă că $P_1(x_2) \cap P_1(x_3) \neq \emptyset$, datorită relaţiilor (3) şi (4); iar dacă $x_2 \in P_2(x_3)$, aceleaşi relaţii dau $P_1(x_2) \cap P_2(x_3) \neq \emptyset$.

Cu alte cuvinte, $P_1(x_2)$ şi $P_1(x_3)$ aparţin aceleiaşi componente conexe dacă $x_2 \in P_1(x_3)$, sau $P_1(x_2)$ şi $P_2(x_3)$ aparţin aceleiaşi componente conexe dacă $x_2 \in P_2(x_3)$. Presupunem

$$x_2 \in P_1(x_3). \tag{5}$$

Din (1) rezultă

$$x_3 \in P_1(x_4) \cup P_2(x_4)$$

şi procedeul se repetă.

Presupunem că

$$x_{n-2} \in P_1(x_{n-1}); \tag{6}$$

din (1) rezultă

$$x_{n-1} \in P_1(x_n) \cup P_2(x_n) \tag{7}$$

dacă $x_{n-1} \in P_1(x_n)$, din (6) şi (7) rezultă că $P_1(x_{n-1}) \cap P_1(x_n) \neq \emptyset$; dacă

---

[1] Numerotarea relaţiilor se face pentru fiecare demonstraţie separat.

$x_{n-1} \in P_2(x_n)$, atunci din (6) şi (7) rezultă că $P_1(x_{n-1}) \cap P_2(x_n) \neq \emptyset$, deci componenta conexă conţine pe $P_1(x_n)$ sau $P_2(x_n)$ şi deci şi pe x_n. S-a definit astfel o componentă conexă care conţine pe x şi pe y.

Invers, dacă x şi y aparţin aceleiaşi componente conexe, înseamnă că există un drum care le uneşte. Fie deci şirul

$$P_i(y) = P_i(x_1), P_i(x_2), P_i(x_3), \dots, P_i(x_n) = P_i(x), \text{ unde } i = 1, 2$$

şi

$$P_i(x_k) \cap P_i(x_{k+1}) \neq \emptyset \text{ pentru } k = 1, 2, \dots, n-1. \tag{8}$$

Din relaţia (8) rezultă că există $y_k \in P_i(x_k) \cap P_i(x_{k+1})$.

Şirul finit căutat va fi $y = x_1, y_1, y_2, \dots, y_n, x_n = x$ cu $y_i \in P_1(y_{i+1}) \cup P_2(y_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

PROPOZIŢIA 1 are următoarele consecinţe:

PROPOZIŢIA 2. *Dacă $P_1 = E$, $P_2 = E$, atunci $P = E$ (unde E este partiţia unitate).*

Propoziţia 3. *Partiţia P este cea mai mică mărire a lui P_1 şi P_2.*

Într-adevăr, fie P^* cea mai mică mărire a lui P_1 şi P_2. Avem

$$P_1(x) \subset P^*(x) \subset P(x) \text{ pentru orice } x \in V_1 \tag{1}$$

$$P_2(x) \subset P^*(x) \subset P(x) \text{ pentru orice } x \in V_2 \tag{2}$$

Fie $y \in P(x)$; să arătăm că $y \in P^*(x)$. Deoarece $y \in P(x)$, conform definiţiei lui P, există un şir finit $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ astfel încît $x_1 = y$; $x_n = x$ şi

$$x_i \in P_1(x_{i+1}) \cup P_2(x_{i+1}) \text{ unde } i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{3}$$

Dînd diferite valori lui i, din (3) rezultă:

$$\begin{cases} y = x_1 \in P_1(x_2) \cup P_2(x_2) \subset P^*(x_2) \\ x_2 \in P_1(x_3) \cup P_2(x_3) \subset P^*(x_3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} \in P_1(x_n) \cup P_2(x_n) \subset P^*(x_n) \end{cases} \tag{4}$$

Relaţiile (4) dau $y \in P^*(x_2)$; $x_2 \in P^*(x_2) \cap P^*(x_3)$; dar P este o partiţie, deci $P^*(x_2) = P^*(x_3)$.

Din acelaşi motiv, $x_3 \in P^*(x_3) \cap P^*(x_4)$, deci $P^*(x_3) = P^*(x_4)$ etc. Am obţinut astfel relaţiile $y \in P^*(x_2) = P^*(x_3) = P^*(x_4) = \dots = P^*(x_n) = P^*(x)$ şi teorema este demonstrată.

3. DEFINIREA UNEI PARTIŢII CARE ESTE O MĂRIRE REGULATĂ A LUI P_1 ŞI P_2

Fie P_1 o partiţie. Notăm cu $\mathcal{L}(P_1)$ mulţimea partiţiilor care constituie măriri regulate ale lui P_1. Mulţimea $\mathcal{L}(P_1)$ este nevidă, deoarece conţine partiţia derivată a lui P_1.

Revenind la problema noastră, avem următoarele posibilităţi : *Cazul I.* Dacă

$$P'_1(x) \supset P(x) \text{ pentru orice } x \in V_1 \tag{1}$$

$$P'_2(x) \supset P(x) \text{ pentru orice } x \in V_2 \tag{2}$$

unde P'_i (cu $i = 1, 2$) este partiţia derivată a lui P_i, atunci există o partiţie care este o mărire regulată a lui P_1 şi P_2 şi o mărire a lui P.

Fie P_1^* o mărire regulată a lui P_1 şi mărire a lui P ; o astfel de partiţie există deoarece avem relaţia (1) şi, în particular, putem lua $P_1^* = P'_1$. Analog, din (2) rezultă existenţa partiţiei P_2^*, mărire a lui P şi mărire regulată a lui P_2.

Introducem următoarea partiţie :

$$P^*(x) = \begin{cases} P_1^*(x) & \text{dacă } x \in V - V_2 \\ P_1^*(x) \cap P_2^*(x) & \text{dacă } x \in V_1 \cap V_2 \\ P_2^*(x) & \text{dacă } x \in V - V_1 . \end{cases} \tag{3}$$

Se arată uşor că P^* este o partiţie şi o mărire a lui P. Să arătăm că este o mărire regulată pentru P_1. Fie

$$P^*(x) \supset P_1(y). \tag{4}$$

Dacă $x \in V - V_2$, din (3) rezultă că

$$P^*(x) = P_1^*(x)$$

iar relaţia (4) devine

$$P_1^*(x) \supset P_1(y) \tag{4'}$$

dar P_1^* este o mărire regulată a lui P_1, deci din (4') rezultă că

$$P_1(x) \underset{P_1}{\sim} P_1(y). \tag{5}$$

Dacă $x \in V_1 \cap V_2$, din (3) rezultă

$$P^*(x) = P_1^*(x) \cap P_2^*(x),$$

iar relaţia (4) devine :

$$P_1^*(x) \cap P_2^*(x) \supset P_1(y) , \tag{4''}$$

şi, mai departe, $P_1^*(x) \supset P_1(y)$, adică relaţia (4'). În definitiv, relaţia (5) este adevărată pentru orice $x \in V_1$, deci P^* este o mărire regulată a lui P_1. La fel se arată că P^* este o mărire regulată pentru P_2.

Cazul II. Dacă $P'_1(x) \not\supset P(x)$ pentru cel puţin un $x \in V_1$ şi dacă $P'_2(x) \supset P(x)$ pentru orice $x \in V_2$, atunci există o partiţie mărire regulată a lui P_2, mărire a lui P, dar nu şi mărire regulată pentru P_1.

Partiţia P_2^* care intervine în cazul I îndeplineşte condiţiile cerute. Faptul că P_2^* nu este o mărire regulată a lui P_2 se arată prin reducere la absurd.

Cazul III. Dacă $P'_1(x) \not\supset P(x)$ pentru cel puţin un $x \in V_1$ şi $P'_2(x) \not\supset P(x)$ pentru cel puţin un $x \in V_2$, atunci există o partiţie P, mărire a lui P_1 şi P_2, dar nu şi mărire regulată a lui P_1 sau P_2.

Într-adevăr, fie $\widetilde{P}$ o mărire a lui P și mărire regulată a lui P_1 și P_2. Din faptul că $\widetilde{P}$ este mărire regulată a lui P_1 și din definiția lui P_1' rezultă că

$$P_1'(x) \supset \widetilde{P}(x) \text{ pentru orice } x \in V_1,$$

rezultat în contradicție cu ipotezele adoptate. În mod analog, $\widetilde{P}$ nu poate fi mărire regulată pentru P_2.

4. CONFIGURAȚIILE REUNIUNII CELOR DOUĂ LIMBAJE

Am obținut următorul rezultat: Fiind date două limbaje L_1 și L_2, avînd vocabulare și partiții diferite, există o mărire a celor două partiții, dar nu există totdeauna o mărire regulată a lor.

În condițiile cazului I există o mărire regulată P^* a lui P_1 și P_2. Față de această partiție și de reuniunea $V = V_1 \cup V_2$ a vocabularelor, L_1 și L_2 devin

$$L_1^* = \{V,\ P^*, F_1\}, \qquad L_2^* = \{V, P^* F_2\}$$

cu proprietatea că, [2], P_1-configurațiile lui L_1 sînt P^*-configurații pentru L_1^* cu același rang; P_2-configurațiile lui L_2 sînt P^*-configurații pentru L_2^* cu același rang.

În cazurile II și III nu mai putem afirma nimic despre configurațiile celor două limbaje obținute adoptînd mărirea P a lui P_1 și P_2.

În [2] se arată că dacă mărirea P nu este regulată, pot apărea noi configurații, sau cele existente să dispară (vezi și [5]).

În cele ce urmează, vom considera două limbaje definite pe același vocabular și cu aceeași partiție.

Fie $L_1 = \{V,\ P,\ F_1\}$ și $L_2 = \{V,\ P,\ F_2\}$. Dacă notăm $F = F_1 \cup F_2$ și $F_3 = F_1 \cap F_2$ obținem limbajele $L = \{V,\ P,\ F\}$ și $L_3 = \{V,\ P,\ F_3\}$. Are loc:

PROPOZIȚIA 4. *Fie* $\mathfrak{A}$ *o* P*-configurație de rang* k *a lui* L_1 *cu element rezultant* $\mathfrak{A}_1$ *care nu este o* P*-configurație pentru* L_3. *Nccesar și suficient pentru ca* $\mathfrak{A}$ *să fie o* P*-configurație de rang* k *față de* L *sînt următoarele două condiții:*

a) $\mathfrak{A} \not\subset x$, *pentru orice* $x \in F_2 - F_3$,

b) $\mathfrak{A}_1 \notin x$, *pentru orice* $x \in F_2 - F_3$.

Demonstrația o vom da pentru $k = 1$. Pentru $k = n$ demonstrația e analogă.

Condițiile sînt necesare. Să arătăm că fiind date două fraze arbitrare A_1 și A_2, P-structurile $P(A_1)\,\mathfrak{A}\,P(A_2)$ și $P(A_1)\,\mathfrak{A}_1\,P(A_2)$ sînt simultan marcate sau nemarcate față de L. Să notăm cu $\mathfrak{S}_0$ mulțimea structurilor marcate ale lui L, cu $\mathfrak{S}_0^1$ mulțimea structurilor marcate față de L_1.

Dacă

$$P(A_1)\mathfrak{A}P(A_2) \in \mathfrak{S}_0 \tag{1}$$

cum această P-structură conține pe $\mathfrak{A}$, din a) rezultă că

$$P(A_1)\,\mathfrak{A}\,P(A_2) \in \mathfrak{S}_0^1 \tag{2}$$

dar $\mathfrak{R}$ e P-configurație față de L_1, deci

(3) $$P(A_1)\,\mathfrak{R}_1 P(A_2) \in \mathfrak{S}_0^1 \subset \mathfrak{S}_0 .$$

Dacă

(4) $$P(A_1)\,\mathfrak{R}\,P\,(A_2) \notin \mathfrak{S}_0$$

și dacă

(5) $$P(A_1)\,\mathfrak{R}_1\,P(A_2) \in \mathfrak{S}_0$$

această P-structură conține pe $\mathfrak{R}_1$ și din b) rezultă că

(6) $$P(A_1)\,\mathfrak{R}_1\,P(A_2) \in \mathfrak{S}_0^1 .$$

Însă, deoarece $\mathfrak{R}$ este P-configurație față de L_1, avem :

(7) $$P(A_1)\,\mathfrak{R}\,P(A_2) \in \mathfrak{S}_0^1 \subset \mathfrak{S}_0 .$$

Relațiile (4) și (7) arată că presupunerea (5) nu este adevărată și că avem

(8) $$P(A_1)\,\mathfrak{R}_1\,P(A_2) \notin \mathfrak{S}_0 .$$

Relațiile (1), (3), (4) și (8) demonstrează necesitatea condițiilor.

Condițiile sînt suficiente. Vom demonstra că dacă $\mathfrak{R}$ este o P-configurație față de L și condițiile a) și b) nu sînt îndeplinite, atunci $\mathfrak{R}$ este o P-configurație față de L_3.

Notăm cu $\mathfrak{S}_0^3$ mulțimea P-structurilor marcate ale lui L_3. Avem evident

$$\mathfrak{S}_0 = S_0^1 \cup \mathfrak{S}_0^3 \text{ cu}$$

(9) $$S_0^1 \cap \mathfrak{S}_0^3 = \emptyset$$

Dacă

(10) $$P(A_1)\,\mathfrak{R}\,P(A_2) \in \mathfrak{S}_0^3 \subset \mathfrak{S} ,$$

pentru orice pereche de fraze, atunci, deoarece față de L, $\mathfrak{R}$ este o P-configurație, avem :

(11) $$P(A_1)\,\mathfrak{R}_1\,P(A_2) \in \mathfrak{S}_0 .$$

Să presupunem că

(12) $$P(A_1)\,\mathfrak{R}_1\,P(A_2) \notin \mathfrak{S}_0^3 ;$$

din relația (9) rezultă :

(13) $$P(A_1)\,\mathfrak{R}_1\,P(A_2) \in \mathfrak{S}_0^1$$

iar din faptul că $\mathfrak{R}$ este o P-configurație față de L, rezultă că

(14) $$P(A_1)\,\mathfrak{R}\,P(A_2) \in \mathfrak{S}_0^1 .$$

Relațiile (9), (10) și (14) arată că presupunerea (12) nu este adevărată și, deci, avem :

(15) $$P(A_1)\,\mathfrak{R}_1\,P(A_2) \in \mathfrak{S}_0^3 .$$

Dacă

$$P(A_1)\mathfrak{A}\,P(A_2)\notin \mathfrak{S}_0^3 \tag{16}$$

şi presupunem că

$$P(A_1)\,\mathfrak{A}_1\,P(A_2)\in \mathfrak{S}_0^3, \tag{17}$$

atunci, din relaţiile (9) deducem

$$P(A_1)\,\mathfrak{A}_1\,P(A_2)\notin \mathfrak{S}_0^1 \tag{18}$$

iar din faptul că $\mathfrak{A}$ este P-configuraţie faţă de L_1, rezultă şi relaţia

$$P(A_1)\,\mathfrak{A}\,P(A_2)\notin \mathfrak{S}_0^1. \tag{19}$$

Relaţiile (9), (16) şi (19) dau

$$P(A_1)\,\mathfrak{A}\,P(A_2)\notin \mathfrak{S}_0. \tag{20}$$

Dar $\mathfrak{A}$ este P-configuraţie şi faţă de L, deci avem :

$$P(A_1)\,\mathfrak{A}_1\,P(A_2)\notin \mathfrak{S}_0. \tag{21}$$

Relaţia (17) intră în contradicţie cu (21), ceea ce arată că presupunerea (17) nu este adevărată ; aşadar

$$P(A_1)\mathfrak{A}_1P(A_2)\notin \mathfrak{S}_0^3. \tag{22}$$

Relaţiile (10), (15), (16) şi (22) demonstrează faptul că $\mathfrak{A}$ este o P-configuraţie faţă de L_3.

Condiţiile a) şi b) nefiind îndeplinite, înseamnă că $\mathfrak{A}$ este o P-configuraţie proprie faţă de L_3 ; dacă a) şi b) sînt îndeplinite, $\mathfrak{A}$ este o P-configuraţie parazită.

În general, dacă condiţiile a) şi b) nu sînt îndeplinite, atunci putem arăta pe exemple că există limbaje L_1 şi L_2 care nu au configuraţii, în timp ce reuniunea lor are configuraţii sau L_1 şi L_2 au configuraţii, iar reuniunea nu.

În concluzie, fiind date două limbaje $L_1 = \{V_1, P_1, F_1\}$ şi $L_2 = \{V_2, P_2, F_2\}$, se poate construi limbajul reuniune $L = \{V, P, F\}$. Dacă $P(x) \subset P_1'(x)$ pentru orice $x \in V_1$ şi $P(x) \subset P_2'(x)$ pentru orice $x \in V_2$ adică ne aflăm în cazul I unde s-a arătat existenţa unei partiţii P^* mărire regulată a partiţiilor P_1 şi P_2. În acest caz, P_1-configuraţiile lui L_1 sînt P^*-configuraţii de acelaşi rang pentru L.

În cazul în care nu există o mărire regulată a lui P_1 şi P_2, se cercetează dacă configuraţiile limbajelor L_1 şi L_2 rămîn P-configuraţii după mărirea P.

După mărire (regulată sau nu), cele două limbaje au acelaşi vocabular şi aceeaşi partiţie şi se cercetează dacă sînt îndeplinite condiţiile din propoziţia 4.

5. EXEMPLE

Exemplul 1. Definim cele două limbaje astfel : $V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $V_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$, $P_1 : a = \{x_1, x_4\}$; $b = \{x_2\}$, $c = \{x_3\}$, $d = \{x_5\}$, $P_2 : A = \{x_1 , x_3\}$, $B = \{x_2\}$, $C = \{x_4\}$, $D = \{x_6\}$; $F_1 = \{x_1\underbrace{x_2 \ldots x_2}_{\text{de } n_1 \text{ ori}} ; x_4, x_3 \underbrace{x_2 \ldots x_2}_{\text{de } n_2 \text{ ori}}, x_3, x_5x_5\}$. $F_2 = \{x_1x_4x_5, x_4x_3, x_1x_2x_4, x_4x_2x_3, x_6\}$.

Avem următoarele P_1-structuri marcate:

$$\mathbb{S}_0^1 = \{a\underbrace{bb\ldots b}_{\text{de } n_1 \text{ ori}},\ a,\ c\underbrace{bb\ldots b}_{\text{de } n_2 \text{ ori}},\ c,\ dd\}.$$

Mulțimea $\mathbb{S}_0^2$ a P_2-structurilor marcate este $\mathbb{S}_0^2 = \{AC, CA, ABC, CBA, D\}$. Partiția $P : \alpha = \{x_1, x_3, x_4\}$; $\beta = \{x_2\}$; $\gamma = \{x_5\}$; $\delta = \{x_6\}$. Partițiile derivate pentru L_1 și L_2 sînt $P'_1(x_1) = \{x_1, x_3, x_4\} = a \cup c$, $P'_1(x_2) = \{x_2\} = b$, deci $P'_1(x) \supset P(x)$ oricare ar fi $x \in V_1$. $P'_2(x_1) = \{x_1, x_3, x_4\} = A \cup C$, $P'_2(x_2) = B$ și deci $P'_2(x) \supset P(x)$ pentru $x \in V_2$.

Sîntem în cazul I, în care există o partiție mărire regulată a lui P_1 și P_2, $P' = P$.

Limbajul L_1 admite P_1-configurațiile de rangul I: $ab \rightarrow a$, $cb \rightarrow c$, $bb \rightarrow b$ și P_1-configurația de rangul II, $dd \rightarrow c$. (Prin $x \rightarrow y$ înțelegem că configurația x are rezultanta y).

Limbajul L_2 admite ca P_2-configurații de rangul I: $AC \rightarrow D$, $ABC \rightarrow D$, $CA \rightarrow D$, $CBA \rightarrow D$. Cum partiția P^* este o mărire regulată a lui P_1 și P_2, configurațiile se păstrează, structurile marcate din L_1 devin $\alpha\underbrace{\beta\beta\ldots\beta}_{\text{de } n_1 \text{ ori}}$, α, $\gamma\gamma$ cu P^*-configurațiile de rangul I: $\beta\beta \rightarrow \beta$ și $\alpha\beta \rightarrow \alpha$ și P^*-configurația de rangul II, $\gamma\gamma \rightarrow \alpha$. Structurile marcate din L_2 devin $\alpha\alpha$, $\alpha\beta\alpha$, δ cu P^*-configurațiile de rangul I $\alpha\alpha \rightarrow \delta$ și $\alpha\beta\alpha \rightarrow \delta$.

Exemplul 2. Fie V_1, V_2, P_1, P_2 definite ca în exemplul 1. Să punem: $F_1 = \{x_1\underbrace{x_2\ldots x_2}_{\text{de } n_1 \text{ ori}}, x_4, x_3\underbrace{x_4\ldots x_4}_{\text{de } n_2 \text{ ori}}, x_3, x_5\, x_5\}$ și $F_2 = \{x_1x_4, x_1x_2x_3, x_4x_2x_3, x_6\}$. Avem următoarele P_1-structuri marcate $a\underbrace{bb\ldots b}_{\text{de } n_1 \text{ ori}}$, a, $\underbrace{ca\ldots a}_{\text{de } n_2 \text{ ori}}$, c, dd și următoarele P_2-structuri marcate: AC, ABA, CBA, D. Mai departe, avem:

$$
\begin{aligned}
&P'_1(x_1) = \{x_1, x_4\} = a, P'_1(x_2) = \{x_2\} = b, P'_1(x_3) = \{x_3\} = c, P'_1(x_5) = \\
&= d \text{ și } P'_1(x_1) \not\supset P(x_1).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Mai departe,

$$P'_2(x_1) = \{x_1, x_3\} = A,\ P'_2(x_2) = \{x_2\} = B,\ P'_2(x_4) = \{x_4\} = C$$

$$P'_2(x_6) = \{x_6\} = D$$

și deci

$$P'_2(x_1) \not\supset P(x_1). \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă că ne aflăm în cazul III în care nu există o mărire regulată a lui P_1 și P_2.

Exemplul 3. Vom defini V_1, V_2, P_1P_2, F_1 ca în exemplul 1, iar F_2 ca în exemplul 2.

Deoarece $P'_1(x) = P(x)$ pentru orice $x \in V_1$ și $P'_2(x_1) \not\supset P(x_1)$ ne aflăm în cazul II, în care există o partiție mărire a lui P_1 și P_2 și care este regulată numai pentru P_1.

Exemplul 4. Fie

$$V = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$P : a = \{x_1\},\ b = \{x_2\},\ c = \{x_3\},$$

$$F_1 = \{x_1\underbrace{x_2 \ldots x_2}_{\text{de } n_1 \text{ ori}}, x_2x_3\}\ ;\ F_2 = \{x_1, x_2, x_3\} \text{ iar}$$

$$F = \{x_1, x_2, x_3, x_1\underbrace{x_2 \ldots x_2}_{\text{de } n_1 \text{ ori}}, x_2x_3\}.$$

P-structurile marcate sînt următoarele :

$$\mathcal{S}_0^1 = \{a\underbrace{b \ldots b}_{\text{de } n_1 \text{ ori}}, bc\}\ \ \mathcal{S}_0^2 = \{a, b, c\} \text{ şi } \mathcal{S}_0 = \{a, b, c, a\underbrace{b \ldots b}_{\text{de } n_1 \text{ ori}}, bc\}$$

L_1 nu are nici o P-configuraţie, de asemenea L_2.

L admite P-configuraţiile de rangul I : $ab \to a$, $bc \to a$.

Exemplul 5. Fie V şi P definite ca în exemplul 4.
$F_1 = \{x_1, x_1\underbrace{x_2 \ldots x_2}_{\text{de } n \text{ ori}}, x_3\}$, $F_2 = \{x_1x_3, x_1x_2\}$; $F = \{x_1, x_1\underbrace{x_2 \ldots x_2}_{n \text{ ori}}, x_1x_3\}$.
P-structurile marcate sînt : $\mathcal{S}_0^1 = \{a, a\underbrace{b \ldots b}_{\text{de } n \text{ ori}}, c\}$, $\mathcal{S}_0^2 = \{ac, ab\}$, $\mathcal{S}_0 = \{a, a\underbrace{b \ldots b}_{\text{de } n \text{ ori}}, c, ac\}$. L_1 are P-configuraţia de rang I $ab \to a$, pe cînd L_2 şi L nu au nici o P-configuraţie.

Exemplul 6. Fie V, P, F_1 definite ca la exemplul 5. $F_2 = \{x_1, x_1x_2, x_2x_2x_3\}$ şi $F = \{x_1, x_1\underbrace{x_2 \ldots x_2}_{\text{de } n \text{ ori}}, x_3, x_2x_3x_3\}$. P-structurile marcate sînt $\mathcal{S}_0^2 = \{a, ab, bcc\}$, $\mathcal{S}_0 = \{a, a\underbrace{b \ldots b}_{\text{de } n \text{ ori}}, c, bcc\}$. Sînt îndeplinite condiţiile propoziţiei 4. Cum $ab \to a$ este P-configuraţie faţă de L_1, atunci este o P-configuraţie şi faţă de L.

Primită la redacţie la 10 noiembrie 1966.

Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. A. V. Gladki, Problemy kibernetiki, **10**, 251–260 (1963).
2. O. C. Кулагина, *Од одном способе спределения грамматических понятий на базе теории множеств.* Проблемы кибернетики, **I**, 203–214 (1958).
3. S. Marcus, *Lingvistică matematică. Modele matematice în lingvistică.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
4. S. Marcus, *Gramatici şi automate finite.* Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1964.
5. S. Marcus, *Algebraic Linguistics. Analytical Models.* Academic Press, S.U.A., New York, 1967.
6. M. Novotni, *Über endlich charakterisierbare Sprachen.* Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyné, Brno, **468** (1965).

INFLUENȚA TEMPERATURII ASUPRA PROPAGĂRII UNDELOR ÎN FIRE EXTENSIBILE (PROBLEMA CUPLATĂ)

DE

G. DINCĂ

Se studiază mişcarea tridimensională a unui fir extensibil intr-un mediu rezistent, luînd în considerație influența temperaturii (schimbul de căldură cu exteriorul). Sistemul clasic de ecuații al problemei este completat cu ecuațiile exprimînd primul principiu al termodinamicii şi respectiv legătura între curentul caloric şi temperatură. Această legătură este considerată atît sub forma clasică (legea lui Fourier), cît şi sub forma recent propusă de Kaliski [22]. Se demonstrează că sistemul completat este de un tip intermediar, simultan hiperbolic-parabolic, cînd se utilizează legea lui Fourier şi este total hiperbolic atunci cînd în locul acestei legi este utilizată legea propusă de Kaliski. În ambele cazuri sînt obținute vitezele fronturilor de undă propagabile, relațiile diferențiale satisfăcute de-a lungul acestor fronturi precum şi relațiile de salt satisfăcute la traversarea lor. Sînt semnalate dificultățile ce apar în formularea condițiilor la limită în vederea unei integrări numerice bazată pe relațiile diferențiale satisfăcute pe caracteristici.

1. INTRODUCERE

Problemele de dinamica firelor extensibile în diferite condiții inițiale şi la limită şi pentru diverse tipuri de legi constitutive au fost considerate de mulți autori : H. A. Rakhmatulin [1], [2], [3], [4], E. V. Ryabova [5], T. C. Smith şi alții [6], [7] etc. O bibliografie amănunțită în această direcție se găseşte în lucrarea lui N. Cristescu [8].

În lucrarea de față este abordată problema mişcării spațiale a unui fir extensibil luîndu-se în considerare influența temperaturii, pentru o lege constitutivă întreagă. Cazul în care această influență nu este considerată a fost studiat de N. Cristescu [9], [10], A. L. Pavlenko [11], J. B. Keller [12].

În acest din urmă caz sistemul de ecuații al problemei este total hiperbolic [9], în sensul că posedă patru familii de curbe caracteristice

ST. CERC. MAT., TOM 19, NR. 5, P. 659-680, BUCUREŞTI, 1967

distincte de pantă variabilă, depinzînd de deformaţie (pentru o lege constitutivă sub formă întreagă) sau de tensiune şi deformaţie, dacă în legea constitutivă se ţine seama de influenţa vitezei de deformare. Utilizînd relaţiile diferenţiale satisfăcute pe caracteristici [13], sistemul de ecuaţii al problemei poate fi integrat numeric în condiţii iniţiale şi la limită şi pentru legi constitutive concrete [14], [15], [16], [17], [18], [19].

În cazul cînd este luată în considerare şi influenţa temperaturii în studiul deformării firelor, în afara ecuaţiilor de mişcare, a legii constitutive, a relaţiei ce defineşte deformaţia, sistemul de ecuaţii al problemei va conţine o ecuaţie ce va exprima primul principiu al termodinamicii precum şi ecuaţia exprimînd legătura între curentul caloric şi temperatură, legătură dată de legea lui Fourier. În acest mod problema a fost abordată de Manacorda [20].

Această problemă este reluată în lucrarea de faţă pe linia rezultatelor obţinute de N. Cristescu (lucrările citate). Rezultatul esenţial din punct de vedere matematic este acela că sistemul de ecuaţii al problemei nu mai păstrează caracterul total hiperbolic, fiind de un tip intermediar, simultan hiperbolic-parabolic. În ultimul timp, asemenea sisteme au apărut în multe probleme dinamice de teoria plasticităţii (vezi de ex. [8]). Terminologia nefiind consacrată, conţinutul denumirii va fi precizat în cele ce urmează. Sistemul posedă cinci familii de linii caracteristice. Dintre acestea, patru sînt corespondentele naturale ale familiilor de caracteristici găsite de N. Cristescu [9] şi păstrează caracterul hiperbolic al acestora din urmă. A cincea familie, definită de relaţia diferenţială $\mathrm{d}t = 0$, este cea care determină caracterul intermediar al sistemului de ecuaţii pentru problema considerată, caracteristicile $\mathrm{d}t = 0$ avînd atît caracter hiperbolic cît şi parabolic în acelaşi timp. Cu ajutorul relaţiilor de salt satisfăcute la traversarea fronturilor liniilor caracteristice se reuşeşte să se distingă între undele propagabile, în ceea ce priveşte efectul lor mecanic şi termic. Caracterul intermediar al sistemului se datoreşte ataşării la ecuaţiile de mişcare şi a ecuaţiei ce exprimă primul principiu al termodinamicii, a legii lui Fourier. Utilizînd în locul acestei legi o lege propusă recent de S. Kaliski [22], în ultima parte a lucrării se arată că sistemul de ecuaţii al problemei conservă caracterul total hiperbolic din cazul cînd influenţa temperaturii nu este luată în considerare, posedînd şase familii de linii caracteristice distincte. Sînt obţinute de asemenea relaţiile diferenţiale satisfăcute pe liniile caracteristice cu ajutorul cărora schema de integrare numerică elaborată de N. Cristescu [14], [15], [16], [17], [18], [19], poate fi uşor adaptată.

2. PUNEREA PROBLEMEI. ECUAŢIILE DE MIŞCARE

Vom presupune că la momentul iniţial temperatura este aceeaşi în orice punct al firului şi vom nota-o cu θ_0. Fie θ_e temperatura mediului exterior, iar θ temperatura actuală funcţie de punct şi de timp. Poziţia punctelor firului va fi stabilită cu ajutorul coordonatei curbilinii s considerată în lungul firului, faţă de o origine arbitrară. Această coordonată caracterizează poziţia punctelor firului deformat la momentul actual t.

Tensiunea, în sensul mecanicii firelor, variabilă de-a lungul firului și în timp, va fi notată cu $\vec{T}$. După cum se știe, în cazul firului extensibil perfect flexibil, ea este orientată în orice punct după direcția tangentei la fir în acel punct.

Fie ds o porțiune infinitezimală a firului. Există posibilitatea ca în afara tensiunii, asupra acestei porțiuni să acționeze forțe exterioare precum și o forță de rezistență a mediului în care are loc mișcarea. Atît forțele exterioare cît și forța de rezistență vor fi considerate proporționale cu lungimea ds a porțiunii considerate. Forța de rezistență a mediului va fi considerată în fiecare punct de forma $-\mathcal{R}(v)\,\vec{v}$, $\mathcal{R}$ fiind o funcție pozitivă de modulul vitezei punctului considerat $\left(v^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right)$.

Ecuațiile de mișcare ale porțiunii ds, în proiecție pe axele de coordonate, sînt:

$$\text{2.1)}\qquad \rho\,\mathrm{d}s\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(T\,\frac{\partial x}{\partial s}\right)\mathrm{d}s + X\mathrm{d}s - \mathcal{R}\,\frac{\partial x}{\partial t}\,\mathrm{d}s \qquad (x,\ y,\ z)$$ 1)

și încă două similare pentru y și z.

În (2.1) ρds este masa elementului considerat, deci ρ este densitatea (masa unității de lungime), evident funcție de s și de t.

S-a ținut de asemenea cont de faptul că proiecțiile lui $\vec{T}$ pe axe sînt $T\frac{\partial x}{\partial s}$, $T\frac{\partial y}{\partial s}$, $T\frac{\partial z}{\partial s}$ iar proiecțiile forțelor exterioare și a forței de rezistență sînt Xds, Yds, Zds și respectiv $-\mathcal{R}\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}s$, $-\mathcal{R}\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}s$, $-\mathcal{R}\frac{\partial z}{\partial t}\mathrm{d}s$. Deoarece s este coordonata curbilinie actuală vom transcrie ecuațiile (2.1) utilizînd coordonata lagrangeeană s_0, corespunzătoare stării inițiale, nedeformate.

Funcțiile necunoscute x, y, z vor fi considerate ca depinzînd de s_0 prin intermediul lui s și de t : $x = x\,(s(s_0),\ t)$ etc. Așadar pentru un t fixat pot fi utilizate relațiile

$$\text{(2.2)}\qquad \frac{\partial x}{\partial s_0} = \frac{\partial x}{\partial s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_0} \qquad (x,\ y,\ z),$$

Deformația va fi definită prin

$$\text{(2.3)}\qquad \varepsilon = \frac{\mathrm{d}s - \mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}s_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s_0}\right)^2} - 1$$

de care dacă se ține seama în (2.2) se obține

$$\text{(2.4)}\qquad \frac{\partial x}{\partial s_0} = (1 + \varepsilon)\,\frac{\partial x}{\partial s} \qquad (x,\ y,\ z)$$

---

1) Notația $(x,\ y,\ z)$ pusă în dreapta unei relații înseamnă că se mai pot scrie încă două relații similare, schimbînd pe x cu y și respectiv cu z.

iar din legea conservării masei

$$\rho \, \mathrm{d}s = \rho_0 \, \mathrm{d}s_0$$

rezultă

$$\rho_0 = \rho (1 + \varepsilon). \tag{2.5}$$

Utilizînd (2.5) şi (2.4) ecuaţiile de mişcare (2.1) se scriu sub forma

$$\frac{\partial}{\partial s_0}\left(\frac{T}{1+\varepsilon}\,\frac{\partial x}{\partial s_0}\right) - \rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + (1+\varepsilon) X^* = 0 \quad (x,\ y,\ z) \tag{2.6}$$

unde

$$X^* = X - \mathfrak{R}\,\frac{\partial x}{\partial t} \quad (x,\ y,\ z). \tag{2.7}$$

La ecuaţiile (2.6) se va adăuga ecuaţia exprimînd primul principiu al termodinamicii. Notînd cu $\mathcal{E}$ energia internă presupusă funcţie de ε şi de $\vartheta = \theta - \theta_0$, din ecuaţiile de mişcare (2.6) rezultă

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 \frac{v^2}{2} + \mathcal{E}\right) = \frac{\partial}{\partial s_0}\left\{\frac{T}{1+\varepsilon}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\,\frac{\partial x}{\partial s_0} + \frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial s_0} + \frac{\partial z}{\partial t}\,\frac{\partial z}{\partial s_0}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - T\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (1+\varepsilon)\left(X^* \frac{\partial x}{\partial t} + Y^* \frac{\partial y}{\partial t} + Z^* \frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

Aşadar primul principiu al termodinamicii se va scrie sub forma [21]:

$$-\frac{\partial J_q}{\partial s_0} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - T\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + h, \tag{2.8}$$

unde prin J_q s-a notat curentul caloric, iar h este un termen disipativ. Legătura dintre J_q şi ϑ va fi dată de legea lui Fourier

$$J_q = -\frac{\lambda}{1+\varepsilon}\,\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}, \tag{2.9}$$

λ putînd fi eventual considerat ca funcţie de ϑ.

La sistemul format din ecuaţiile (2.6), (2.8), (2.9) va fi ataşată legea constitutivă.

3. LEGEA CONSTITUTIVĂ ÎNTREAGĂ

În cele ce urmează se va admite o lege constitutivă întreagă de forma

$$T = T(\varepsilon,\ \vartheta) \tag{3.1}$$

despre funcţia din membrul al doilea presupunîndu-se că posedă toate proprietăţile de care va fi nevoie pentru a putea efectua raţionamentele ce urmează.

Dacă se ţine seama de (3.1), sistemul (2.6) împreună cu (2.3) derivată în raport cu s_0, (2.8) şi (2.9) devine :

$$\begin{gathered}
\frac{T}{1+\varepsilon}\,\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}-\rho_0\frac{\partial x_t}{\partial t}+x_{s_0}\frac{(1+\varepsilon)\dfrac{\partial T}{\partial \varepsilon}-T}{(1+\varepsilon)^2}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}+\frac{x_{s_0}}{1+\varepsilon}\,\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\,\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}+\\
+(1+\varepsilon)\,X^*=0 \qquad (x,\ y,\ z)\\
x_{s_0}\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}+y_{s_0}\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}+z_{s_0}\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}-(1+\varepsilon)\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}=0. \qquad (3.2)\\
\frac{\partial J_q}{\partial s_0}+\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon}-T\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\,\frac{\partial \vartheta}{\partial t}+h=0\\
\frac{\lambda}{1+\varepsilon}\,\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}+J_q=0,
\end{gathered}$$

unde pentru simplificarea scrierii s-a notat $x_{s_0}=\dfrac{\partial x}{\partial s_0}$, $y_{s_0}=\dfrac{\partial y}{\partial s_0}$ etc. În ipotezele formulate la paragraful întîi, sistemul (3.2) descrie mişcarea tridimensională a unui fir extensibil, perfect flexibil, pentru o lege constitutivă întreagă. Este un sistem cvasiliniar cu şase funcţii necunoscute (x, y, z, ε, ϑ, J_q) şi două variabile independente (s_0, t). Deformaţia ε poate fi eliminată cu ajutorul relaţiei (2.3). Ea va fi păstrată însă ca funcţie necunoscută în scopul de a uşura unele interpretări ulterioare.

Pentru a vedea ce metodă de integrare se poate aplica acestui sistem, în cele ce urmează vor fi calculate liniile lui caracteristice. În acest scop, la sistemul (3.2) vor fi adăugate relaţiile evidente :

$$\begin{gathered}
\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\,\mathrm{d}s_0^2-\frac{\partial x_t}{\partial t}\,\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}x_{s_0}\,\mathrm{d}s_0-\mathrm{d}x_t\,\mathrm{d}t \qquad (x,\ y,\ z)\\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\,\mathrm{d}s_0+\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\varepsilon\\
\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\,\mathrm{d}s_0+\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vartheta \qquad (3.3)\\
\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\,\mathrm{d}s_0+\frac{\partial J_q}{\partial t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}J_q,
\end{gathered}$$

unde $\dfrac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}$ reprezintă panta liniei caracteristice căutate.

Rezolvînd sistemul (3.2), (3.3) în raport cu $\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}$, $\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$, $\frac{\partial J_q}{\partial t}$ se obţine

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} = \frac{-\lambda\,(\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}) + (1+\varepsilon)^2 J_q \frac{\partial T}{\partial \vartheta}}{\lambda\,(1+\varepsilon)\left\{\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right\}} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0} = \frac{\lambda\,(1+\varepsilon)^2\left\{\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \rho_0\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\xi - \lambda x_{s_0}\left\{\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \frac{T}{1+\varepsilon}\right\}(\xi x_{s_0} +}{\lambda\,(1+\varepsilon)^2\left\{\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{T}{1+\varepsilon}\right\}\left\{\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right\}}$$

$$\frac{+\,\eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}) + (1+\varepsilon)^2 J_q\left\{\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{T}{1+\varepsilon}\right\}\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\,x_{s_0}}{\lambda\,(1+\varepsilon)^2\left\{\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{T}{1+\varepsilon}\right\}\left\{\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right\}} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\left\{-\lambda(\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}) + (1+\varepsilon)^2 J_q \frac{\partial T}{\partial \vartheta}\right\}\mathrm{d}s_0\,\mathrm{d}t^2 +}{\lambda\,(1+\varepsilon)\left(\rho_0\,\mathrm{d}s_0^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\mathrm{d}t^2\right)\mathrm{d}t}$$

$$\frac{+\,\lambda\left(\rho_0\,\mathrm{d}s_0^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\mathrm{d}t^2\right)(1+\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon}{\lambda\,(1+\varepsilon)\,(\rho_0\,\mathrm{d}s_0^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\mathrm{d}t^2)\,\mathrm{d}t} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial J_q}{\partial t} = \frac{J_1}{J_2}, \tag{3.7}$$

unde

$$J_1 = (1+\varepsilon)\left\{\lambda\,\mathrm{d}J_q\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}s_0\left(\lambda\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\mathrm{d}\vartheta + \lambda\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\mathrm{d}\varepsilon + \right.\right.$$

$$\left.\left. + h\,\lambda\,\mathrm{d}t + J_q\,(1+\varepsilon)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\,\mathrm{d}s_0\right)\right\}\left\{\rho_0\,\mathrm{d}s_0^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\mathrm{d}t^2\right\} +$$

$$+\left\{-\lambda\,(\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}) + (1+\varepsilon)^2 J_q\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\right\}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\mathrm{d}s_0^2\,\mathrm{d}t^2 \tag{3.7'}$$

$$J_2 = \lambda\,(1+\varepsilon)\left(\rho_0\,\mathrm{d}s_0^2 - \frac{\partial T}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathrm{d}t^2\right)\mathrm{d}t^2.$$

În relațiile (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.7') au fost utilizate notațiile

$$
\begin{aligned}
\xi &= \rho_0 \left(\mathrm{d}x_{s_0} \frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} - \mathrm{d}x_t \right) \frac{1}{\mathrm{d}t} + (1+\varepsilon)\, X^*,\\
\eta &= \rho_0 \left(\mathrm{d}y_{s_0} \frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} - \mathrm{d}y_t \right) \frac{1}{\mathrm{d}t} + (1+\varepsilon)\, Y^*, \qquad (3.8)\\
\zeta &= \rho_0 \left(\mathrm{d}z_{s_0} \frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} - \mathrm{d}z_t \right) \frac{1}{\mathrm{d}t} + (1+\varepsilon)\, Z^*.
\end{aligned}
$$

Din (3.5), (3.6) și (3.7) rezultă că două din familiile de linii caracteristice ale sistemului (3.2) sînt definite de relațiile diferențiale

$$\rho_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} \right)^2 = \frac{T}{1+\varepsilon}, \tag{3.9}$$

alte două familii de

$$\rho_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} \right)^2 = \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \tag{3.10}$$

în plus, sistemul de ecuații posedînd familia de linii caracteristice

$$\mathrm{d}t = 0 \tag{3.11}$$

cu caracter mixt, simultan hiperbolic — parabolic, așa cum rezultă din (3.6) și (3.7).

Se observă că liniile caracteristice definite de (3.9) și (3.10) sînt în general curbe de pantă variabilă, depinzînd de două din funcțiile necunoscute ale sistemului, ε și ϑ, și deci nu pot fi cunoscute decît odată cu soluția sistemului (3.2).

Relația diferențială (3.9) coincide formal cu cea corespunzătoare cazului cînd schimbul de căldură cu exteriorul nu este considerat [9]. Spre deosebire de acel caz, în care sistemul de ecuații al problemei era total hiperbolic posedînd patru familii de linii caracteristice, sistemul actual are caracter intermediar, simultan hiperbolic-parabolic, familia de linii caracteristice care introduce acest caracter fiind, așa cum s-a arătat, $\mathrm{d}t = 0$.

Din punct de vedere mecanic, liniile caracteristice reprezintă fronturi de undă. Caracteristicile (3.9) corespund fronturilor de undă propagabile cu viteza

$$\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} = \pm c_{\mathrm{I}}(\varepsilon, \vartheta) = \pm \sqrt{\frac{T}{\rho_0 (1+\varepsilon)}}, \tag{3.12}$$

iar caracteristicile (3.10), unor fronturi de undă propagabile cu viteza

$$\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} = \pm c_{\mathrm{II}}(\varepsilon, \vartheta) = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}}. \tag{3.13}$$

Dacă se ţine seama în (3.5) de (3.9), rezultă că pe liniile caracteristice (3.9) sînt satisfăcute relaţiile diferenţiale

$$(3.14)\qquad \mathrm{d}x_t = \pm c_{\mathrm{I}}(\varepsilon, \vartheta)\,\mathrm{d}x_{s_0} + $$
$$+ \frac{1}{\rho_0}\{(1+\varepsilon)X^* - x_{s_0}F^*\}\,\mathrm{d}t - \frac{x_{s_0}}{1+\varepsilon}(\pm c_{\mathrm{I}}(\varepsilon, \vartheta)\,\mathrm{d}\varepsilon - \mathrm{d}v)$$

şi încă patru similare, corespunzătoare lui y şi z.

În mod similar, admiţînd că relaţia

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = \frac{T}{1+\varepsilon}$$

nu este satisfăcută decît în puncte izolate, se obţine că pe liniile caracteristice (3.10) sînt satisfăcute relaţiile diferenţiale

$$(3.15)\qquad \pm c_{\mathrm{II}}(\varepsilon, \vartheta)\,\mathrm{d}\varepsilon - \mathrm{d}v + \frac{1+\varepsilon}{\rho_0}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} + F^*\right)\mathrm{d}t = 0.$$

În (3.12) şi (3.14) ca şi în (3.13) şi (3.15), semnele se corespund. În (3.14) şi (3.15) au fost utilizate notaţiile

$$(3.16)\qquad \mathrm{d}v = \frac{1}{1+\varepsilon}(x_{s_0}\,\mathrm{d}x_t + y_{s_0}\,\mathrm{d}y_t + z_{s_0}\,\mathrm{d}z_t)$$
$$F^* = \frac{1}{1+\varepsilon}(x_{s_0}X^* + y_{s_0}Y^* + z_{s_0}Z^*).$$

Prin urmare, v reprezintă proiecţia pe tangenta la fir în punctul de coordonate x, y, z a vitezei acestui punct, iar F^*, suma proiecţiilor pe tangenta în acelaşi punct a forţelor exterioare şi a forţei de rezistenţă, corespunzătoare unităţii de lungime. Dacă se ţine seama de (3.11) în (3.7), rezultă că pe liniile caracteristice $\mathrm{d}t = 0$ este satisfăcută relaţia diferenţială

$$(3.17)\qquad \lambda\,\mathrm{d}\vartheta + (1+\varepsilon)J_q\,\mathrm{d}s_0 = 0.$$

Încercarea de a obţine alte relaţii diferenţiale satisfăcute pe caracteristicile $\mathrm{d}t = 0$, ţinînd seama de (3.11) în (3.6) de exemplu, nu duce la nici un rezultat, numărătorul expresiei de la (3.6) anulîndu-se identic, consecinţă a caracterului parabolic pe care caracteristicile $\mathrm{d}t = 0$ îl posedă simultan cu cel hiperbolic.

În cele ce urmează, vor fi considerate aşa-numitele „relaţii de salt” la traversarea fronturilor undelor de mai sus, în scopul precizării naturii acestor unde. Se va nota cu $[\Phi]$ saltul funcţiei Φ la traversarea unui asemenea front. Scriind relaţiile (3.3) de o parte şi de alta a unei curbe caracteristice şi ţinînd seama că creşterile $\mathrm{d}x_{s_0}$, $\mathrm{d}x_t$ etc. sînt luate în lungul curbelor caracteristice şi sînt de fapt „derivate interioare” care sînt continuie la traversarea unei asemenea linii, se obțin relațiile de compatibilitate cinematică :

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] \mathrm{d}s_0^2 - \left[\frac{\partial x_t}{\partial t}\right] \mathrm{d}t^2 = 0 \qquad (x,\ y,\ z),\\
&\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \mathrm{d}s_0 + \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] \mathrm{d}t = 0,\\
&\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] \mathrm{d}s_0 + \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] \mathrm{d}t = 0,\\
&\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] \mathrm{d}s_0 + \left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] \mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Raționamentele imediat următoare nu sînt valabile pe liniile caracteristice $\mathrm{d}t = 0$. Raționamentul corespunzător acestora va fi făcut ulterior. Din (3.2), ținînd seama de (3.18), se obțin relațiile de compatibilitate dinamică

$$
\begin{gathered}
\left\{\frac{T}{1+\varepsilon} - \rho_0\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] + x_{s_0}\frac{(1+\varepsilon)\dfrac{\partial T}{\partial \varepsilon} - T}{(1+\varepsilon)^2}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0 \quad (x, y, z)\\
x_{s_0}\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] + y_{s_0}\left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right] + z_{s_0}\left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right] - (1+\varepsilon)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0\\
\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \varepsilon} - T\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \vartheta}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = 0\\
\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = 0.
\end{gathered}
\tag{3.19}
$$

în obținerea primelor trei dintre relațiile (3.19), ținîndu-se seama de ultima dintre ele.

În (3.19) se va ține seama fie de (3.9), fie de (3.10). Dacă este satisfăcută (3.9), din primele patru relații (3.19) rezultă

$$
x_{s_0}\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] + y_{s_0}\left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right] + z_{s_0}\left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right] = 0 \quad \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0
\tag{3.20}
$$

din care, ținînd seama în a patra relație (3.18), se obține

$$
\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0.
\tag{3.21}
$$

Din compararea ultimei relații (3.19) cu penultima relație (3.18) rezultă

$$
\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = 0.
\tag{3.22}
$$

Ţinînd seama de (3.21) şi (3.22) în a cincea relaţie (3.19), se obţine

$$\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] = 0 \tag{3.23}$$

de care ţinînd seama în ultima dintre relaţiile (3.18) rezultă

$$\left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] = 0. \tag{3.24}$$

Relaţiile (3.20) arată că undele care se propagă cu viteza dată de (3.12) sînt unde transversale care afectează forma firului şi nu deformaţia longitudinală $\left(\left[\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0\right)$.

Aceste relaţii coincid formal cu cele corespunzătoare cazului cînd influenţa temperaturii nu este considerată [13].

Relaţiile (3.22), (3.23), (3.24) arată că pe fronturile undelor transversale nici una dintre mărimile cu caracter termic nu are salt.

Aşadar, undele ce se propagă cu viteza (3.12) păstrează, în privinţa efectului asupra formei firului, acelaşi caracter ca în cazul clasic. Viteza lor de propagare depinde însă de temperatură şi intervine în relaţiile (3.14), satisfăcute pe frontul undelor transversale. Utilizarea acestor relaţii într-o eventuală schemă de integrare numerică va introduce deci efecte termice în calculul funcţiilor necunoscute.

Dacă în primele relaţii (3.19) se ţine seama de (3.10) rezultă

$$\frac{\left[\dfrac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{x_{s_0}} = \frac{\left[\dfrac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{y_{s_0}} = \frac{\left[\dfrac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{z_{s_0}} = \frac{\left[\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right]}{1+\varepsilon}$$

sau

$$\frac{\left[\dfrac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{x_s} = \frac{\left[\dfrac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{y_s} = \frac{\left[\dfrac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{z_s} = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right]. \tag{3.25}$$

Este evident că următoarea relaţie este de asemenea satisfăcută

$$\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right]^2 + \left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right]^2 + \left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right]^2 = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right]^2.$$

Prin procedee analoge cu cele utilizate pentru fronturile (3.12) se obţine că la traversarea fronturilor ce se propagă cu viteza (3.13) sînt satisfăcute următoarele relaţii de salt:

$$\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = 0 \tag{3.26}$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] = \mp c_{\text{II}}\left[\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \\ \left[\dfrac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] = \pm c_{\text{II}}\left(\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\left[\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \\ \left[\dfrac{\partial J_q}{\partial t}\right] = -c_{\text{II}}^2\left(\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\left[\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \end{cases} \tag{3.27}$$

semnele superioare corespunzînd fronturilor undelor directe, iar cele inferioare fronturilor undelor retrograde.

Relațiile (3.25) arată că undele ce se propagă cu viteza (3.13) sînt unde longitudinale, ele producînd alungiri propagabile, nu și modificări ale formei firului. Ele coincid formal cu cele corespunzătoare cazului în care influența temperaturii nu este considerată [13]. Spre deosebire de acest din urmă caz, relațiile (3.27) arată că undele longitudinale poartă și discontinuități ale derivatei în raport cu timpul a deformației precum și discontinuități ale derivatelor curentului termic J_q. Relațiile (3.25), (3.27) arată că toate salturile nenule se exprimă cu ajutorul saltului lui $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}$. Trebuie remarcat de asemenea faptul că salturile $\left[\dfrac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right]$, $\left[\dfrac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right]$, $\left[\dfrac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right]$ ale derivatelor de ordinul doi ale coordonatelor sînt proiecțiile pe axele de coordonate ale discontinuității lui $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}$.

Atît pe undele longitudinale, cît și pe cele transversale, derivatele de ordinul doi ale temperaturii, sînt continue, atît într-un caz, cît și în celălalt, acest fapt rezultînd ținînd seama în a cincea dintre relațiile de compatibilitate cinematică (3.18), de faptul că derivata în raport cu s_0 a lui ϑ nu are salt, lucru ce rezultă din legea lui Fourier (vezi ultima relație (3.19)). Așadar, continuitatea derivatelor de ordinul întîi ale temperaturii la traversarea frontului unei unde longitudinale sau transversale este în ultimă instanță o consecință a legii lui Fourier, mai precis, a faptului că în această lege singura derivată care intervine este derivata temperaturii în raport cu s_0.

Dată fiind continuitatea derivatelor de ordinul întîi al temperaturii, în cele ce urmează se va stabili comportamentul derivatelor de ordinul doi ale acesteia la traversarea unui front de undă longitudinală sau transversală. În acest scop vor fi utilizate relațiile

$$\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}\right]\mathrm{d}s_0+\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right]\mathrm{d}t=0$$

$$\left[\frac{\partial\vartheta_{s_0}}{\partial s_0}\right]\mathrm{d}s_0+\left[\frac{\partial\vartheta_{s_0}}{\partial t}\right]\mathrm{d}t=0$$

$$\left[\frac{\partial\vartheta_{s_0}}{\partial s_0}\right]\mathrm{d}s_0^2-\left[\frac{\partial\vartheta_{t}}{\partial t}\right]\mathrm{d}t^2=0 \tag{3.28}$$

$$\left[\frac{\partial\vartheta_{s_0}}{\partial s_0}\right]=\frac{\vartheta_{s_0}}{1+\varepsilon}\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}\right]+\frac{1+\varepsilon}{\lambda}\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\varepsilon}-T\right)\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right]$$

$\mathrm{d}s_0$ fiind legat de $\mathrm{d}t$ fie prin relația (3.9), fie prin (3.10).

Ultima dintre relațiile (3.28) a fost obținută prin eliminarea lui J_q între ultimele două relații (3.2) și ținînd seama că derivatele de ordinul întîi ale temperaturii sînt continuie atît la traversarea liniilor caracteristice (3.9), cît și a liniilor (3.10).

Din (3.28) se deduce

$$
\left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial s_0}\right] = -\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}}\left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial t}\right] = \frac{1}{\left(\dfrac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)^2}\left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial t}\right] = \tag{3.29}
$$
$$
= \left(\frac{\vartheta_{s_0}}{1+\varepsilon} - \frac{1+\varepsilon}{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - T\right)\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right].
$$

Fie că este satisfăcută (3.9). Cum pe fronturile undelor transversale este satisfăcută relația $\left[\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0$, din (3.29) rezultă că pe aceste fronturi sînt satisfăcute și relațiile

$$
\left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial t}\right] = 0. \tag{3.30}
$$

Pentru o lege constitutivă de forma

$$
T = T(s_0, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \vartheta),
$$

relațiile (3.30) satisfăcute pe frontul undelor transversale ca și viteza de propagare a acestor unde au fost găsite de Manacorda [20].

Dacă este satisfăcută (3.10), ținînd seama că undele longitudinale dau alungiri propagabile $\left(\left[\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \neq 0\right)$, din (3.29) rezultă

$$
\left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial s_0}\right) = \mp\frac{1}{c_{\mathrm{II}}}\left[\frac{\partial \vartheta_{s_0}}{\partial t}\right] = \frac{1}{c_{\mathrm{II}}^2}\left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial t}\right] = \tag{3.31}
$$
$$
= \left(\frac{\vartheta_{s_0}}{1+\varepsilon} \mp \frac{1+\varepsilon}{\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)c_{\mathrm{II}}\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right]
$$

semnele superioare corespunzînd frontului undei longitudinale directe, iar cele inferioare, undei retrograde.

Așadar, în timp ce pe undele transversale nu se propagă discontinuități ale derivatelor de ordinul doi ale temperaturii, undele longitudinale poartă discontinuități ale acestor derivate, iar expresiile lor sînt date de (3.31).

Analiza raționamentului de mai sus arată că acest ultim rezultat este în definitiv consecința faptului că pe fronturile undelor transversale $\left[\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0$, iar pe fronturile undelor longitudinale $\left[\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \neq 0$. Aceeași mărime care în cazul clasic permitea să se facă distincție între undele longitudinale și cele transversale din punct de vedere al efectului lor mecanic [13], permite așadar să distingem între cele două tipuri de unde și din punct de vedere al efectului termic, conservînd în întregime proprietățile lor privind efectele mecanice propagabile.

Din forma relațiilor diferențiale (3.14), (3.15) satisfăcute pe fronturile de undă, este evident că cele două tipuri de unde nu se pot separa decît în cazuri cu totul particulare, în general ele generîndu-se și influențîndu-se reciproc. Mai mult, dacă relația

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = \frac{T}{1+\varepsilon}$$

nu este satisfăcută numai în puncte izolate, ci pe porțiuni ale suprafeței

$$T = T(\varepsilon, \vartheta),$$

cele două tipuri de unde se cuplează, ceea ce duce la o propagare cu aceeași viteză a efectelor lor.

Cazurile cînd peste tot

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} < \frac{T}{1+\varepsilon} \tag{3.32}$$

sau

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} > \frac{T}{1+\varepsilon} \tag{3.33}$$

corespund propagării undelor transversale înaintea celor longitudinale și invers. Se poate întîmpla însă ca pe unele porțiuni să fie satisfăcută (3.32) (undele transversale se propagă înaintea celor longitudinale), pe alte porțiuni cele două tipuri de unde să se propage cu aceeași viteză, iar pe altele să fie satisfăcută (3.33) (undele longitudinale se propagă înaintea celor transversale).

O schemă de integrare numerică bazată pe relațiile diferențiale satisfăcute pe caracteristici va depinde, bineînțeles, de ordinea de propagare a celor două tipuri de unde.

Rămîne să studiem acum relațiile de salt satisfăcute la traversarea fronturilor undelor cu caracter intermediar, hiperbolic-parabolic d$t = 0$.

Din (3.2) rezultă

$$\begin{aligned}
&\frac{T}{1+\varepsilon}\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] - \rho_0\left[\frac{\partial x_t}{\partial t}\right] + x_{s_0}\frac{(1+\varepsilon)\dfrac{\partial T}{\partial \varepsilon} - T}{(1+\varepsilon)^2}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0 \quad (x, y, z)\\
&x_{s_0}\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] + y_{s_0}\left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right] + z_{s_0}\left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right] - (1+\varepsilon)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = 0\\
&\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = 0\\
&\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

de ultima dintre aceste relații ținîndu-se seama în obținerea celorlalte.

Din relațiile de compatibilitate cinematică (3.18) se deduce că pe fronturile d$t = 0$ sînt satisfăcute relațiile

$$(3.35)\qquad \left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] = 0$$

de care ținîndu-se seama în (3.34) rezultă

$$(3.36)\qquad \left[\frac{\partial x_t}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial y_t}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial z_t}{\partial t}\right] = 0 .$$

Așadar, singurele derivate asupra cărora nu putem decide și deci care ar putea avea salturi la traversarea liniilor caracteristice d$t = 0$, sînt $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \frac{\partial J_q}{\partial t}$.

Relația

$$(3.37)\qquad \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = 0$$

care leagă salturile lui $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ și $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ arată că, cu excepția unor puncte izolate, dacă $\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] = 0$, atunci și

$$\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = 0 .$$

Din relația

$$(3.38)\qquad \left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial t}\right] \mathrm{d}t + \left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial s_0}\right] \mathrm{d}s_0 = 0$$

rezultă că pe fronturile d$t = 0$,

$$\left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial s_0}\right] = 0$$

care comparată cu

$$\frac{\lambda}{1 + \varepsilon}\left[\frac{\partial \vartheta_t}{\partial s_0}\right] + \left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] = 0$$

ce rezultă din legea lui Fourier derivată în raport cu t, dă

$$\left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] = 0. \tag{3.39}$$

Dacă $\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \neq 0$, din (3.37) rezultă că și $\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] \neq 0$. Relația (3.38) nu mai poate fi considerată, iar raționamentul de mai sus bazat pe această relație, de asemenea. Așadar, asupra saltului derivatei $\frac{\partial J_q}{\partial t}$ nu se poate trage nici o concluzie, existînd posibilitatea ca $\left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] \neq 0$.

4. UTILIZAREA LEGII LUI KALISKI

S. Kaliski propune [22] utilizarea în termodinamică a unei legi de forma

$$\tau \frac{\mathrm{d}\vec{J}_q}{\mathrm{d}t} + \vec{J}_q = -\lambda \operatorname{grad} \vartheta \tag{4.1}$$

în locul legii clasice a lui Fourier, unde τ este un coeficient de relaxare cu dimensiune de timp, iar λ coeficientul de conducție termică. Considerentele pe baza cărora este propusă această lege sînt : obținerea unei viteze finite de propagare a căldurii și descrierea proceselor termodinamice cu ajutorul unor ecuații, cu derivate parțiale. Singurul mod de a modifica legea lui Fourier astfel încît, aceste lucruri să fie posibile, este adăugarea termenului $\tau \frac{\mathrm{d}\vec{J}_q}{\mathrm{d}t}$ [22]. Pentru o lege constitutivă întreagă dată de (3.1), sistemul de ecuații al problemei este

$$\begin{gathered}
\frac{T}{1+\varepsilon}\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0} - \rho_0 \frac{\partial x_t}{\partial t} + x_{s_0}\frac{(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - T}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} + \frac{x_{s_0}}{1+\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} + \\
+ (1+\varepsilon)X^{\star} = 0 \quad (x, y, z), \\
x_{s_0}\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0} + y_{s_0}\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0} + z_{s_0}\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0} - (1+\varepsilon)\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} = 0, \\
\frac{\partial J_q}{\partial s_0} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + h = 0, \\
\frac{\lambda}{1+\varepsilon}\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} + \tau\frac{\partial J_q}{\partial t} + J_q = 0.
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Pentru calculul caracteristicilor se va proceda la fel ca în paragraful trei. Se obține :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} = \frac{E_1}{E_2}, \tag{4.3}$$

unde

$$\begin{aligned} E_1 = & - \frac{\lambda}{1+\varepsilon} (\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}) + J_q (1+\varepsilon) \frac{\partial T}{\partial \vartheta} - \\ & - \tau \frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} \left\{ \left(\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T \right) \mathrm{d}\varepsilon + h \mathrm{d}t + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta} \mathrm{d}\vartheta \right) (1+\varepsilon) \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \right. \\ & \left. + \mathrm{d}s_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta} (\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}) \right\} \frac{1}{\mathrm{d}t} - \tau (1+\varepsilon) \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \mathrm{d}J_q \frac{1}{\mathrm{d}t} \\ E_2 = & - \left\{ \tau \rho_0 (1+\varepsilon) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta} \left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} \right)^4 + \left(\tau (1+\varepsilon) \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta} - T \right) \frac{\partial T}{\partial \vartheta} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \tau (1+\varepsilon) \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta} - \lambda \rho_0 \right) \left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \lambda \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right\} \end{aligned} \tag{4.3'}$$

$$\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0} = \frac{E_3}{E_4}, \tag{4.4}$$

unde

$$\begin{aligned} E_3 = & - \mathrm{d}t^2 \left(\frac{\lambda}{1+\varepsilon} \frac{E \,\mathrm{d}t^2}{(1+\varepsilon)^2} + J_q \mathrm{d}t^2 x_{s_0} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \mathrm{I} \right) - \\ & - \tau \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta} \left(- \mathrm{d}s_0 \frac{E \mathrm{d}t^4}{(1+\varepsilon)^2} + \mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}t^2 x_{s_0} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \mathrm{I} \right) \mathrm{d}s_0 - \\ & - \tau \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T \right) \left\{ - \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \mathrm{d}t^4 \mathrm{d}s_0 (x_{s_0} (\eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}) - \right. \\ & \left. - (y_{s_0}^2 + z_{s_0}^2) \xi) + \mathrm{d}t^2 \mathrm{d}\varepsilon x_{s_0} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \mathrm{I} \right\} \mathrm{d}s_0 - \tau h \,\mathrm{d}t^3 \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \mathrm{I} \,\mathrm{d}s_0 \\ E_4 = & \mathrm{I} \left(\lambda \,\mathrm{d}t^2 \,\mathrm{II} - \tau \mathrm{d}s_0^2 \,\mathrm{d}t^2 (1+\varepsilon) \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T \right) \frac{\partial T}{\partial \vartheta} - \tau \mathrm{d}s_0^2 (1+\varepsilon) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta} \mathrm{II} \right) \end{aligned} \tag{4.4'}$$

și expresii similare pentru y și z.

În (4.4′) au fost utilizate notațiile

$$\mathrm{I} = \rho_0 \mathrm{d}s_0^2 - \frac{T}{1+\varepsilon} \mathrm{d}t^2,$$

$$\mathrm{II} = \rho_0 \mathrm{d}s_0^2 - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \mathrm{d}t^2,$$

$$E = (1+\varepsilon)^3 \left\{ \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \rho_0 \left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right\} \xi - x_{s_0} \left\{ (1+\varepsilon) \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - T \right\} (\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}).$$

Din (4.3) și (4.4) rezultă că, caracteristicile sistemului de ecuații ale problemei sînt date de

$$\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{T}{1+\varepsilon} \tag{4.5}$$

și

$$\begin{gathered}\tau\rho_0(1+\varepsilon)\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vartheta}\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)^4+\left(\tau(1+\varepsilon)\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\varepsilon}-T\right)\frac{\partial T}{\partial\vartheta}-\right.\\ \left.-\tau(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vartheta}-\lambda\rho_0\right)\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)^2+\lambda\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}=0.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Vom arăta că (4.6) considerată ca ecuație algebrică în $\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}$ are rădăcini reale, diferite, adică sistemul de ecuații al problemei este pur hiperbolic. Pentru aceasta este suficient să se arate că

$$\begin{gathered}K_1=\left(\tau(1+\varepsilon)\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\varepsilon}-T\right)\frac{\partial T}{\partial\vartheta}-\tau(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vartheta}-\lambda\rho_0\right)^2-\\ -4\tau\rho_0\lambda(1+\varepsilon)\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vartheta}\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}>0,\\ K_2=\lambda\tau\rho_0(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vartheta}>0,\\ K_3=\lambda\rho_0+\tau(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vartheta}-\tau(1+\varepsilon)\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\varepsilon}-T\right)\frac{\partial T}{\partial\vartheta}>0.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Într-adevăr, conform principiului al doilea al termodinamicii, diferențiala entropiei

$$\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}Q}{\theta} \tag{4.8}$$

trebuie să fie o diferențială totală.

Dar

$$\mathrm{d}Q=\mathrm{d}\mathcal{E}-T\,\mathrm{d}\varepsilon \tag{4.9}$$

astfel că (4.8) devine

$$\mathrm{d}s=\frac{1}{\theta}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta+\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\varepsilon}-T\right)\mathrm{d}\varepsilon. \tag{4.10}$$

Impunînd condiția de diferențială totală se obține

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\varepsilon}=T-\theta\frac{\partial T}{\partial\vartheta}\cdot \tag{4.11}$$

Din (4.9) rezultă de asemenea

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta} = c_v, \tag{4.12}$$

unde c_v este căldura specifică corespunzătoare unității de volum în absența deformației

Ținînd seama de (4.11) și (4.12), a doua și a treia relație (4.7) sînt evidente, iar prima dintre ele se poate pune sub forma

$$K_1 = \tau^2(1+\varepsilon)^2\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)^2\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\tau c_v(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \lambda\rho_0\right)^2 + \\ + 2\tau\theta(1+\varepsilon)\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\right)^2\left((1+\varepsilon)\tau c_v\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} + \lambda\rho_0\right)$$

și deci avem și $K_1 > 0$ $(\tau > 0)$.

Pentru un corp elastic pentru care dependența între tensiune, deformație și temperatură este dată de legea lui Hooke, relațiile corespunzătoare lui (4.11) și (4.12) au fost scrise de Biot [23].

Așadar, sistemul de ecuații al problemei este pur hiperbolic și posedă șase familii de linii caracteristice distincte, două fiind definite de (4.5), iar celelalte patru de (4.6).

Relația (4.5) definește fronturi de undă propagabile cu viteza

$$\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} = \pm c_{\mathrm{I}}(\varepsilon, \vartheta) = \pm\sqrt{\frac{T}{\rho_0(1+\varepsilon)}} \tag{4.13}$$

iar (4.6) fronturi a căror viteză de propagare este dată de

$$\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} = \pm c_{\mathrm{II}}^{(i)}(\varepsilon, \vartheta) \qquad i = 1, 2, \tag{4.14}$$

unde prin $+c_{\mathrm{II}}^{(1)}$, $-c_{\mathrm{II}}^{(1)}$, $+c_{\mathrm{II}}^{(2)}$, $-c_{\mathrm{II}}^{(2)}$ au fost notate rădăcinile ecuației

$$\tau\rho_0 c_v(1+\varepsilon)c_{\mathrm{II}}^4 + \left(\tau(1+\varepsilon)\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\frac{\partial T}{\partial \vartheta} - \\ - \tau c_v(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \rho_0\lambda\right)c_{\mathrm{II}}^2 + \lambda\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0. \tag{4.15}$$

Dacă se ține seama în (4.4) de (4.13), rezultă că pe fronturile propagabile cu viteza dată de (4.13) sînt satisfăcute următoarele relații diferențiale:

$$\left(-\frac{\lambda}{1+\varepsilon} + \tau c_{\mathrm{I}}^2 c_v\right)\left((1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - T\right)\Big\{\pm c_{\mathrm{I}}\,\mathrm{d}x_{s_0} - \mathrm{d}x_t + \\ + \frac{1}{\rho_0}\left[(1+\varepsilon)X^\star - x_{s_0}F^\star\right]\mathrm{d}t - \frac{x_{s_0}}{1+\varepsilon}(\pm c_{\mathrm{I}}\,\mathrm{d}\varepsilon - \mathrm{d}v)\Big\} + \\ + \tau c_{\mathrm{I}}^2\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T\right)\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\Big\{x_{s_0}\left[\pm c_{\mathrm{I}}\,\mathrm{d}\varepsilon - \mathrm{d}v + \frac{1+\varepsilon}{\rho_0}F^\star\,\mathrm{d}t\right] - \\ - (1+\varepsilon)\left[\pm c_{\mathrm{I}}\,\mathrm{d}x_{s_0} - \mathrm{d}x_t + \frac{1+\varepsilon}{\rho_0}X^\star\,\mathrm{d}t\right]\Big\} = 0 \tag{4.16}$$

și relații similare pentru y și z.

În (4.13) și (4.16) semnele superioare și inferioare se corespund. În mod similar se arată că pe fronturile propagabile cu vitezele date de (4.14) sînt satisfăcute relațiile diferențiale

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\lambda}{1+\varepsilon}+\tau c_{\mathrm{II}}^{(i)^2} c_v\right)\left(\pm c_{\mathrm{II}}^{(i)}\,\mathrm{d}\varepsilon-\mathrm{d}v+\frac{1+\varepsilon}{\rho_0}F^*\,\mathrm{d}t\right)\pm\\ (4.17)\qquad &\pm\frac{\tau}{\rho_0}c_{\mathrm{II}}^{(i)}\frac{\partial T}{\partial\vartheta}\left(\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\varepsilon}-T\right)\mathrm{d}\varepsilon+h\,\mathrm{d}t+c_v\,\mathrm{d}\vartheta\right)+\\ &+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial T}{\partial\vartheta}(\tau\mathrm{d}\,J_q-J_q\,\mathrm{d}t)=0,\quad i=1,2\end{aligned}$$

în (4.14) și (4.17) semnele superioare și inferioare corespunzîndu-se.

La fel ca în paragraful precedent, vor fi considerate relațiile de salt satisfăcute la traversarea fronturilor undelor puse în evidență mai sus.

Relațiile de compatibilitate cinematică sînt (3.18).

Din (4.2), ținînd seama de (3.18), se obțin relațiile de compatibilitate dinamică :

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{T}{1+\varepsilon}-\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right]+x_{s_0}\frac{(1+\varepsilon)\dfrac{\partial T}{\partial\varepsilon}-T}{(1+\varepsilon)^2}\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}\right]+\\ &+\frac{x_{s_0}}{1+\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial\vartheta}\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}\right]=0\qquad(x,\,y,\,z),\\ (4.18)\qquad &x_{s_0}\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right]+y_{s_0}\left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right]+z_{s_0}\left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right]-(1+\varepsilon)\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}\right]=0,\\ &\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right]-\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\varepsilon}-T\right)\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}\right]-c_v\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}\right]=0,\\ &\frac{\lambda}{1+\varepsilon}\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}\right]-\tau\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right]=0.\end{aligned}$$

Fie că sîntem pe liniile caracteristice (4.5).

Primele trei ecuații (4.18) conduc atunci la relația

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}-\frac{T}{1+\varepsilon}\right)\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}\right]+\frac{\partial T}{\partial\vartheta}\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}\right]=0$$

care împreună cu ultimele două relații (4.18) formează un sistem omogen în $\left[\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}\right]$, $\left[\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s_0}\right]$, $\left[\dfrac{\partial J_q}{\partial s_0}\right]$.

Condiția ce trebuie satisfăcută pentru ca acest sistem să admită soluție nebanală, este

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}-\frac{T}{1+\varepsilon}\right)(\tau c_v\,T-\rho_0\lambda)+\tau\theta\,T\left(\frac{\partial T}{\partial\vartheta}\right)^2=0$$

ceea ce conduce la o formă particulară a legii constitutive.

În general, sistemul admite deci numai soluţia banală

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = \left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] = 0,$$

iar din ecuaţiile de compatibilitate cinematică (3.18) rezultă în consecinţă

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] = 0.$$

Egalitatea cu zero a saltului derivatei în raport cu s_0 a deformaţiei şi a patra relaţie (4.18) conduc la (3.20).

Undele ce se propagă cu viteza (4.13) păstrează aşadar caracterul transversal. Adoptarea legii (4.1) în locul legii clasice a lui Fourier nu aduce nici o modificare calitativă în ceea ce priveşte viteza de propagare a undelor transversale şi a efectului lor. Cantitativ însă, lucrurile nu mai stau aşa, şi aceasta datorită modificării relaţiilor diferenţiale satisfăcute pe fronturile undelor transversale.

Fie că sînt satisfăcute relaţiile

$$\left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\right)^2 = c_{\mathrm{II}}^{(i)^2}(\varepsilon,\ \vartheta) \qquad i = 1,\ 2. \tag{4.19}$$

Scoţînd din primele trei relaţii (4.18) salturile $\left[\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right], \left[\frac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right], \left[\frac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right]$ şi introducîndu-le în a patra, rezultă

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \rho_0 c_{\mathrm{II}}^{(i)^2}\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] + \frac{\partial T}{\partial \vartheta}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = 0 \tag{4.20}$$

care împreună cu ultimele două relaţii (4.18)

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] - \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \varepsilon} - T\right) c_{\mathrm{II}}^{(i)}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] - c_v\, c_{\mathrm{II}}^{(i)}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = 0\\ \frac{\lambda}{1+\varepsilon}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] - \tau c_{\mathrm{II}}^{(i)}\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] = 0\end{gathered} \tag{4.21}$$

constituie un sistem omogen în $\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right], \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right], \left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right]$.

(S-a presupus că sîntem pe undele directe. Raţionamentul corespunzător undelor inverse se face schimbînd pe $c_{\mathrm{II}}^{(i)}$ în $-c_{\mathrm{II}}^{(i)}$.

Ţinînd seama că $c_{\mathrm{II}}^{(i)}$ este o rădăcină a ecuaţiei (4.15), se arată uşor că acest sistem admite soluţii nebanale.

Din (4.20) rezultă, ţinînd seama şi de a cincea relaţie (3.18),

$$\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right] = -\frac{1}{c_{\mathrm{II}}^{(i)}}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = \frac{\left(\rho_0 c_{\mathrm{II}}^{(i)^2} - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right)}{\frac{\partial T}{\partial \vartheta}}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \tag{4.22}$$

de care, dacă se ține seama în prima dintre relațiile (4.21), se obține

$$(4.23)\quad \left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] = -\frac{1}{c_{\mathrm{II}}^{(i)}}\left[\frac{\partial J_q}{\partial t}\right] = c_{\mathrm{II}}^{(i)}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} - T + \frac{c_v}{\dfrac{\partial T}{\partial \vartheta}}\left(\rho_0 c_{\mathrm{II}}^{(i)^2} - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right)\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right]$$

care coincide cu

$$\left[\frac{\partial J_q}{\partial s_0}\right] = \frac{\lambda}{\tau\,(1+\varepsilon)\,c_{\mathrm{II}}^{(i)}\,\dfrac{\partial T}{\partial \vartheta}}\left(\rho_0 c_{\mathrm{II}}^{(i)^2} - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right)\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right]$$

ce rezultă ținînd seama de (4.22) în ultima relație (4.21).

Pentru demonstrație se ține seama că $c_{\mathrm{II}}^{(i)}$ este o rădăcină a ecuației (4.15).

Ținînd seama de (4.20) în primele trei relații (4.18) rezultă

$$(4.24)\quad \frac{\left[\dfrac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{x_s} = \frac{\left[\dfrac{\partial y_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{y_s} = \frac{\left[\dfrac{\partial z_{s_0}}{\partial s_0}\right]}{z_s} = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right].$$

Relațiile (4.24) arată că din punct de vedere al efectelor mecanice, undele ce se propagă cu viteza dată de (4.14) conservă caracterul longitudinal, ele producînd alungiri propagabile $\left(\left[\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right] \neq 0\right)$, nu modificări ale formei firului $\Big($salturile derivatelor în raport cu s_0 ale coordonatelor sînt proiecțiile pe tangentă ale saltului lui $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\Big)$. Relațiile (4.22), (4.23) arată însă că pe aceste unde se propagă simultan efecte cuplate mecanice — termice, relațiile de cuplaj fiind chiar (4.22), (4.23). Acest lucru deosebește în mod esențial undele ce se propagă cu viteza dată de (4.14), atît de undele transversale care produc numai modificări ale formei firului fără a purta discontinuități ale vreunei mărimi cu caracter termic, cît și de undele cu caracter longitudinal obținute utilizînd legea clasică a lui Fourier și pe care derivatele mărimilor cu caracter termic erau de asemenea continuie.

5. CÎTEVA OBSERVAȚII ȘI CONCLUZII

Compararea rezultatelor obținute în paragraful patru cu cele din paragraful trei evidențiază următoarele:

a) Utilizarea legii propusă de Kaliski conduce pentru problema studiată la un sistem de ecuații pur hiperbolic și nu de un tip intermediar, așa cum se întîmpla cînd se utiliza legea clasică a lui Fourier.

b) Undele cu caracter longitudinal sînt unde ce poartă efecte mecanice-termice ce se influențează reciproc în timpul desfășurării procesului și acest lucru le deosebește esențial de undele longitudinale corespunzătoare cazului clasic.

c) Pentru calcularea vitezelor de propagare a undelor cu caracter longitudinal este necesară cunoașterea valorilor lui τ. În acest sens în

[22] este anunțată o lucrare în care vor fi expuse metode pentru măsurarea lui τ [24].

d) Chiar cînd am utilizat legea propusă de Kaliski, primul principiu al termodinamicii a fost păstrat sub forma clasică. Aceasta înseamnă că ne-am situat de la început în cazul în care derivata în raport cu timpul a „energiei cinetice termice" (introdusă în scrierea primului principiu astfel încît să fie compatibil cu legea propusă de Kaliski) poate fi neglijată [(22], pag. 217).

e) Utilizînd relațiile diferențiale satisfăcute pe caracteristici, sistemul de ecuații al problemei poate fi integrat numeric prin aceleași metode utilizate în cazul în care influența temperaturii nu era considerată [14], [15], [16], [17]. Pentru aceasta trebuie precizate însă condițiile la limită. În ceea ce privește mărimile cu caracter mecanic, condițiile la limită se pot formula la fel ca în cazul clasic. Schimbul de căldură cu exteriorul nu poate fi însă prins, căci utilizarea schemei unidimensionale nu permite să spunem ce înseamnă variația temperaturii cu normala la suprafața laterală a firului. Condițiile de schimb cu exteriorul pot fi formulate la capete, unde derivata temperaturii după normală înseamnă derivata în raport cu coordonata curbilinie s. Acceptarea schimbului cu exteriorul numai la capete, înseamnă, însă, fie că firul este suficient de scurt și condițiile concrete ale problemei sînt astfel încît să se poată lua în considerare numai schimbul la capete cu exteriorul, fie că este izolat peste tot în afară de capete și deci schimbul cu exteriorul se poate face numai la capete. Chestiunea în general, însă, rămîne deschisă.

Primită la redacție la 30 septembrie 1966

Facultatea de matematică și mecanică
a Universității din București, Str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. H. A. Rakhmatulin, Prikl. Mat. Mekh., **9**, 91 (1945).
2. — Prikl. Mat. Mekh., **9**, 449 (1945).
3. — Prikl. Mat. Mekh., **11**, 379 (1947).
4. — Uch. zap. Mosk. gos. Univ., **4** (1951).
5. E. V. Ryabova, Vest. Moskovsk. Univ., **10**, 85 (1953).
6. F. L. Smith, J. C. Mc. Crackin, and H. J. Schiefer, Textile Res. J., **26**, 821 (1956).
7. — Textile Res. J., **28**, 288 (1958).
8. N. Cristescu, *Dynamic Plasticity*, North Holland Publ. Comp. Amsterdam (in press).
9. — Prikl. Mat. Mekh., **18**, 257 (1954).
10. — *Probleme dinamice în teoria plasticității*. Ed. tehnică, București, 1959.
11. A. L. Pavlenko, Izv. Akad. Nauk, S.S.S.R. Otd. Tekh-Nauk, Mekh., Masch., **4**, 112 (1959).
12. J. B. Keller, Amer. J. Phys., **27**, 584 (1959).
13. N. Cristescu, Arch. Mech. Stoss., **12**, 564 (1960). J. Mech. Phys. Solids, **9**, 165 (1961).
15. — *Some problems of the mechanics of extensible strings, in Stress waves, in anelastic solids*, Springer Verlag, 1963.
16. — *The braking of high-speed moving bodies by extensible strings in Proc.* 5 *th.* Int. Cong. Rheology, Brown Univ., 1963.
17. — J. Mech. Phys. Solids, **12**, 269 (1964).
18. — Analele Universității București, Ser. St. Nat. Mat. Fiz., **XI**, 34 (1962).
19. — J. de Mec., **4**, 2 (1965).
20. T. Manacorda, Riv. Mat. Univ. Parma, **9**, 13 (1958).
21. S. R. De Groot and P. Mazur, *Non Equilibrium Thermodynamics*. North-Holland Publ. Comp. Amsterdam, 1962
22. S. Kaliski, Bull. de l'Acad. Pol. des Sc., **XIII**, 211 (1965).
23. M. A. Biot, J. Appl. Phys., **27**, 240 (1956).
24. S. Kaliski, Biull. W.A.T. (in press).

ALGORITMUL THEIL-VAN DE PANNE PENTRU PROGRAMAREA CONVEXĂ

MIHAI DRAGOMIRESCU

Scopul acestui articol este de a demonstra posibilitatea extinderii algoritmului Theil-Van de Panne [4] din programarea pătratică la programarea convexă generală. Rezultatul este interesant în special din punct de vedere teoretic, deoarece aplicabilitatea este serios limitată de necesitatea rezolvării unor sisteme de ecuații neliniare.

§ 1. INTRODUCERE

Algoritmul Theil-Van de Panne [4] este o metodă specific combinatorie pentru minimizarea unei funcții pătratice strict convexe cu restricții inegalități liniare. Ideea sa fundamentală este de a determina mulțimea restricțiilor verificate strict (ca egalități) de soluție și de a găsi apoi soluția însăși minimizînd funcția obiectiv cu aceste restricții egalități, ceea ce — cel puțin teoretic — este relativ simplu.

În acest articol se extind la programarea convexă generală teoremele de bază ale algoritmului Theil-Van de Panne, fundamentîndu-se astfel un algoritm pentru rezolvarea problemelor de programare convexă, aplicabil sub rezerva posibilității rezolvării unor sisteme de ecuații neliniare.

Considerăm problema minimizării unei funcții diferențiabile strict convexe, $f(x)$, cu restricții inegalități :

$$\begin{gathered} a(x) \leqslant 0, \\ \min f(x) \end{gathered} \tag{1}$$

unde $a : R^n \to R^m$ este o funcție vectorială convexă, de componente $a_i\ (x)$, $i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$, toate diferențiabile. Eventualele restricții de semn impuse variabilelor sînt considerate în (1), laolaltă cu celelalte restricții, deoarece ele nu joacă un rol special în cadrul algoritmului.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P. 681–690 BUCUREȘTI, 1967

Accentul va indica transpunerea unui vector sau a unei matrici, produsul scalar a doi vectori $x,\ y \in R^n$ va fi notat $x'y$, iar gradientul $\nabla f(x) = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right\|_{j \in N},\ \nabla a(x) = \left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x) \right\|_{i \in M,\, j \in N}$.

Notăm $P = \{x \in R^n \mid a(x) \leqslant 0\}$ mulţimea programelor problemei (1), mulţime convexă în baza convexităţii lui $a(x)$, şi $\hat{x}$ soluţia problemei (1), unică (dacă există soluţie, ceea ce presupunem) în baza convexităţii stricte a lui $f(x)$. Într-adevăr, presupunînd că ar exista două soluţii $x^1 \neq x^2$, evident cu $f(x^1) = f(x^2)$, atunci notînd $\bar{x} = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ cu $0 < \lambda < 1$, am avea $\bar{x} \in P$ şi:

$$f(\bar{x}) < \lambda f(x^1) + (1 - \lambda) f(x^2) = f(x^1)$$

ceea ce contrazice optimalitatea lui x^1. Mai notăm:

$$\hat{S} = \{i \in M \mid a_i(\hat{x}) = 0\}.$$

Facem ipoteza că pentru toate părţile $S \subseteq M$ care vor fi cercetate în cursul algoritmului, problema:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &a_i(x) = 0 \qquad (i \in S) \\ &\min f(x) \end{aligned}$$

are soluţie unică, notată x^s. Mai notăm:

$$\text{(3)} \qquad V(x^s) = \{i \in M \mid a_i(x^s) > 0\}.$$

Rezolvarea problemei (2) este incomparabil mai simplă — din punct de vedere teoretic — decît rezolvarea problemei (1), deoarece restricţiile sînt egalităţi. Soluţia x^s precum şi multiplicatorii lui Lagrange corespunzători u^s se găsesc anulînd derivatele parţiale în raport cu x şi u ale lagrangeanului $\Phi_s(x, u^s) = f(x) + u^{s'} a_s(x)$, adică rezolvînd sistemul:

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} &a_s(x) = 0 \\ &\nabla f(x) + \nabla a_s(x)' u = 0 \end{aligned}$$

sau echivalent:

$$\text{(4')} \qquad \begin{aligned} &a_i(x) = 0, && (i \in S) \\ &\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \sum_{i \in S} u_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x) = 0, && (j \in N). \end{aligned}$$

Nu vom discuta aici dificultăţile de ordin practic legate de rezolvarea unui astfel de sistem neliniar, scopul acestui articol fiind, de a demonstra că rezolvarea problemei (1) se poate reduce la o succesiune finită de probleme de forma (2).

Să remarcăm că sistemul (4) este liniar în x şi u numai în programarea pătratică, unde rezolvarea lui se reduce la inversarea unei matrici pozitiv definite.

§ 2. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ALGORITMULUI

Prima teoremă stabileşte o proprietate generală a programelor convexe, anume că optimalitatea unei soluţii a problemei (1) nu se modifică dacă se înlătură restricţiile verificate slab (ca inegalităţi stricte) de soluţie şi se scriu celelalte restricţii ca egalităţi.

TEOREMA 1. *Avem* $\hat{x} = \hat{x}^s$.

Teorema afirmă deci că dacă cunoaştem mulţimea restricţiilor verificate strict de soluţia $\hat{x}$, atunci $\hat{x}$ se găseşte minimizînd pe $f(x)$ cu restricţiile $\hat{S}$, scrise ca egalităţi. Ea reduce deci rezolvarea problemei (1) la găsirea mulţimii $\hat{S}$.

Demonstraţia se bazează pe următoarea:

LEMĂ. *Soluţia problemei (1), $\hat{x}$, este şi soluţie a problemei restrînse*:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &a_i(x) \leqslant 0, \qquad (i \in \hat{S}).\\ &\min f(x) \end{aligned}$$

Teorema rezultă acum din observaţia că orice soluţie a problemei (5) (de fapt (5) are soluţie unică în ipoteza că $f(x)$ este strict convexă) care satisface restricţiile strict, este evident soluţie a problemei de tip (2):

$$(6)\qquad \begin{aligned} &a_i(x) = 0 \qquad (i \in \hat{S}).\\ &\min f(x) \end{aligned}$$

Soluţia $\hat{x}$ a problemei (1) este în baza lemei şi soluţie a lui (5) şi satisface strict restricţiile lui (5), deci este şi soluţie a lui (6). Cum (6) are soluţie unică $\hat{x}^s$, rezultă $\hat{x} = \hat{x}^s$.

Mai rămîne de demonstrat lema. Să presupunem prin absurd că $\hat{x}$ n-ar fi soluţie a problemei (5), adică ar exista $\bar{x}$ astfel ca:

$$(7)\qquad a_i(\bar{x}) \leqslant 0, \qquad (i \in \hat{S})$$

$$(8)\qquad f(\bar{x}) < f(\hat{x})$$

Să notăm $x_\lambda = \lambda\bar{x} + (1 - \lambda)\hat{x}$ cu $0 < \lambda < 1$. Vom arăta că, pentru λ suficient de mic, x_λ este un program al problemei (1) cu $f(x_\lambda) < f(\hat{x})$. Contrazicerea optimalităţii lui $\hat{x}$ va demonstra lema.

Folosind convexitatea funcţiilor $a_i(x)$ $(i \in M)$ avem:

$$a_i(x_\lambda) \leqslant \lambda a_i(\bar{x}) + (1 - \lambda)\, a_i(\hat{x})$$

deci $a_i(x_\lambda) \leqslant 0$ $(i \in \hat{S})$ pentru orice $\lambda > 0$, iar $a_i(x_\lambda) < 0$ $(i \notin \hat{S})$ pentru $\lambda > 0$ suficient de mic. S-a ţinut seama de faptul că, pentru $i \notin \hat{S}$, $a_i(\hat{x}) < 0$. În concluzie $x_\lambda \in P$ şi în plus:

$$f(x_\lambda) < \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda) f(\hat{x}) < f(\hat{x}).$$

Algoritmul pentru determinarea lui $\hat{S}$ constă în a porni cu $S = \emptyset$ şi a adăuga succesiv cîte un element din M pînă cînd soluţia x^s a problemei (2) este şi soluţie a problemei originale. Teorema 2 şi corolarul respectiv ne indică care restricţii trebuie adăugate la fiecare etapă, iar teorema 3 conţine un criteriu care ne spune dacă un x^s care este program al problemei (1), este sau nu program optimal. Ambele extind teoreme ale lui Theil şi Van de Panne.

Pentru demonstrarea teoremelor 2, 3 şi 4 avem nevoie de o ipoteză de nedegenerare a soluţiei $\hat{x}$, despre care vom arăta în § 4 (teorema 5) că nu este esenţială pentru validitatea algoritmului. Mai precis, presupunem că mulţimea $\hat{S}$ este singura mulţime $S \subseteq M$ cu proprietatea că $x^s = \hat{x}$, adică că :

$$x^{\hat{s}} \neq x^s \text{ pentru orice } S \subset \hat{S}. \tag{9}$$

TEOREMA 2. În ipoteza (9) de nedegenerare a soluţiei $\hat{x}$, dacă $\hat{S} \neq \emptyset$ şi $S \subset \hat{S}$, atunci $V(x^s) \cap (\hat{S} - S) \neq \emptyset$.

În cuvinte, teorema afirmă că, dacă se minimizează $f(x)$ luînd ca restricţii doar o parte S din restricţiile $\hat{S}$ verificate strict de soluţia problemei (1), atunci x^s nu satisface cel puţin o restricţie din $\hat{S} - S$, adică $a_i\,(x^s) > 0$ pentru cel puţin un $i \in \hat{S} - S$. Sau cu alte cuvinte, dacă un x^s nu satisface o parte din restricţii, atunci cel puţin una dintre acesta este din $\hat{S}$.

Demonstraţie. Se ştie că, dacă $\varphi : R^n \to R$ este o funcţie convexă diferenţiabilă, avem, pentru orice $x,\ y \in R^n$:

$$(x - y)' \,\nabla\, \varphi(y) \leqslant \varphi(x) - \varphi(y) \leqslant (x - y)' \,\nabla\, \varphi(x). \tag{10}$$

Deoarece $f(x)$ este strict convexă, inegalităţile de mai sus sînt stricte şi din termenii extremi obţinem :

$$(x - y)' \,[\nabla f(x) - \nabla f(y)] > 0 \tag{11}$$

pentru orice $x \neq y$.

Deoarece $\hat{x}$ este soluţia problemei (1) şi x^s soluţia problemei (2), din necesitatea condiţiilor Kuhn-Tucker rezultă că există multiplicatorii $\hat{u}_i$ $(i \in \hat{S})$ şi u_i^s $(i \in S)$ astfel ca :

$$\hat{u}_i \geqslant 0, \quad a_i(\hat{x}) = 0 \qquad (i \in \hat{S}) \tag{12}$$

$$-\nabla f(\hat{x}) = \sum_{i \in \hat{S}} \hat{u}_i \,\nabla\, a_i(\hat{x}) \tag{13}$$

respectiv

$$u_i^s \in R, \quad a_i\,(x^s) = 0 \qquad (i \in S) \tag{14}$$

$$-\nabla f(x^s) = \sum_{i \in S} u_i^s \,\nabla\, a_i(x^s). \tag{15}$$

Înmulțind (13) și (15) cu $\hat{x} - x^s$ și scăzîndu-le, obținem, ținînd seamă de proprietatea (10), a funcțiilor convexe $a_i(x)$, de (12) și (14):

$$(\hat{x} - x^s)' [\nabla f(\hat{x}) - \nabla f(x^s)] = \sum_{i \in \hat{s}} \hat{u}_i (x^s - \hat{x})' \nabla a_i(\hat{x}) +$$

$$+ \sum_{i \in s} u_i^s (\hat{x} - x^s)' \nabla a_i(x^s) \leqslant \sum_{i \in \hat{s}} \hat{u}_i [a_i(x^s) - a_i(\hat{x})] +$$

$$+ \sum_{i \in s} u_i^s [a_i(\hat{x}) - a_i(x^s)] = \sum_{i \in \hat{s} - s} \hat{u}_i a_i(x^s).$$

În baza ipotezei (9) de nedegenerare, $\hat{x} \neq x^s$ și atunci, folosind proprietatea (11), avem:

$$\sum_{i \in \hat{S} - S} \hat{u}_i a_i(x^s) > 0.$$

Se vede că nu se poate ca toți $a_i(x^s) \leqslant 0$ $(i \in \hat{S} - S)$, căci atunci membrul stîng al inegalității ar fi nepozitiv. În concluzie, $a_i(x^s) > 0$ pentru cel puțin un $i \in \hat{S} - S$ și teorema este demonstrată.

COROLAR. *Dacă $\hat{S}$ este format din k indici, se pot așeza acești indici într-o anumită ordine $i_1, i_2, \ldots, i_k$ astfel ca:*

$i_{p+1} \in V(x^{S_p})$ *pentru* $p = 0, 1, \ldots, k - 1$, *unde* $S_p = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, $S_0 = \emptyset$

Într-adevăr, din $S_0 = \emptyset \subset \hat{S}$ rezultă din teorema 2 că există $i_1 \in V(x^{\emptyset})$. Să notăm $S_1 = \{i_1\}$. Din $S_1 \subset \hat{S}$ rezultă că există $i_2 \in V(x^{S_1}) \cap \cap (\hat{S} - \{i_1\})$. Notăm $S_2 = \{i_1, i_2\}$ ș.a.m.d.

Pe baza acestui corolar, pentru a găsi $\hat{S}$ este suficient să-l căutăm, la fiecare etapă, doar printre mulțimile de indici obținute adăugînd pe rînd unui S dat, cîte una din restricțiile neverificate de x^s.

TEOREMA 3. *Dacă $V(x^s) = \emptyset$, condiția necesară și suficientă pentru ca x^s să fie soluția problemei (1) este ca pentru orice $h \in S$ să avem $h \in V(x^{s-h})$.*

În cuvinte, lema afirmă că dacă un x^s satisface toate restricțiile problemei (1), atunci el este optimal dacă și numai dacă înlăturînd orice restricție $h \in S$, soluția problemei cu restricțiile $S - \{h\}$, notată x^{s-h}, nu verifică restricția h.

Demonstrație. Suficiența criteriului nu necesită nici o ipoteză de nedegenerare: dacă $V(x^s) = 0$ și pentru orice $h \in S$ avem $h \in V(x^{s-h})$, atunci $\hat{x} = x^s$. Deoarece x^s este soluția problemei (2), este satisfăcută relația (15). Mai rămîne de arătat că $u_i^s \geqslant 0$ $(i \in S)$ și atunci folosind suficiența condițiilor Kuhn-Tucker va rezulta că x^s este soluția problemei (1).

Fie $h \in S$ arbitrar. Deoarece x^{s-h} este soluția problemei cu restricțiile $S - \{h\}$, avem:

$$(16) \qquad -\nabla f(x^{s-h}) = \sum_{i \in S - \{h\}} u_i^{s-h} \nabla a_i(x^{s-h})$$

$$a_i(x^{s-h}) = 0, \quad i \in S - \{h\} \tag{17}$$

$$a_h(x^{s-h}) > 0. \tag{18}$$

Scăzînd (15) din (16), înmulţind cu $x^s - x^{s-h}$, ţinînd seama de convexitatea funcţiilor $a_i(x)$ şi de (14) şi (16), obţinem, la fel ca mai sus :

$$(x^s - x^{s-h})' \, [\nabla f(x^s) - \nabla f(x^{s-h})] \leqslant u^s_h \, a_h(x^{s-h})$$

Să observăm că din $h \in V(x^{s-h})$ rezultă $x^{s-h} \neq x^s$ şi atunci din inegalitatea de mai sus rezultă, folosind proprietatea (10), că :

$$u^s_h \, a_h(x^{s-h}) > 0 \tag{19}$$

şi de aici rezultă $u^s_h > 0$, folosind şi (18). Din (19) se mai observă că condiţia (18) a teoremei este echivalentă cu $u^s_h > 0$, afirmaţia teoremei fiind echivalentă cu suficienţa condiţiilor Kuhn-Tucker.

Necesitatea se bazează integral pe ipoteza (9) de nedegenerare : dacă $\hat{x}^{s-h}$ ar satisface restricţia h, atunci ar fi soluţie şi pentru problema cu restricţiile $\hat{S}$, adică $\hat{x}^{s-h} = \hat{x}^s$, ceea ce contrazice (9).

Este adeseori mai avantajos de a înlocui criteriul de optimalitate din teorema 3 prin următorul test liniar al optimalităţii, care înlocuieşte calculul tuturor x^{s-h} $(h \in S)$ prin rezolvarea unei probleme de programare liniară.

TEOREMA 4. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca $x^s \in P$ să fie soluţia problemei (1) este ca x^s să fie o soluţie a programului liniar :*

$$\begin{aligned} & x' \, \nabla a_i(x^s) \leqslant x^{s\prime} \, \nabla a_i(x^s), \quad i \in S \\ & \min \; x' \, \nabla f(x^s) \end{aligned} \tag{20}$$

Demonstraţie. Pentru suficienţă să notăm $P(S) = \{x \in R^n / (x - x^s)' \, \nabla a_i(x^s) \leqslant 0, \; i \in S\}$ tronsonul programelor problemei (20) şi să observăm că $P \subset P(S)$ pentru orice $S \subseteq M$. Într-adevăr, dacă $x \in P$ avem :

$$(x - x^s)' \, \nabla a_i(x^s) \leqslant a_i(x) \leqslant 0$$

pentru orice $i \in S$. Să presupunem că x^s este o soluţie a problemei (20), deci $(x^s - x)' \, \nabla f(x^s) \leqslant 0$ pentru orice $x \in P(S)$. Atunci pentru orice $x \in P$, avem $x \in P(S)$ şi deci $f(x^s) - f(x) \leqslant (x^s - x)' \, \nabla f(x^s) \leqslant 0$, adică x^s este o soluţie a problemei (1).

Necesitatea se bazează pe ipoteza (9) : adică $x^s = \hat{x}$, rezultă $S = \hat{S}$ şi atunci se cunoaşte că $\hat{x}$ este şi o soluţie a programului liniar (20) (a se vedea de exemplu [3], p. 65). Dacă ipoteza (9) nu este verificată, atunci necesitatea teoremei nu este adevărată pentru orice S cu proprietatea că $x^s = \hat{x}$ dar, după cum se va vedea mai jos, există cel puţin o mulţime de indici $\hat{S}^{*}$ astfel ca $\hat{x}^{s\,*} = \hat{x}$ să fie o soluţie a programului liniar (20) asociat lui $\hat{S}^{*}$.

Testul liniar din teorema de mai sus, prezentat în [2], a condus pe autor la articolul de faţă. În fond teorema 4 reduce principial rezolvarea oricărei probleme de programare convexă la rezolvarea unui număr finit de sisteme de ecuații neliniare și de probleme de programare liniară : este suficient ca pentru toți $S \subseteq M$ să calculăm x^s și apoi pentru toți $x^s \in P$ să verificăm optimalitatea rezolvînd programul liniar asociat (20). Folosind ideea algoritmului lui Theil și Van de Panne din programarea pătratică, această sarcină este îndeplinită în mod economic.

§ 3. DESCRIEREA ALGORITMULUI

Pe baza teoremelor de mai sus se poate arăta că aplicarea algoritmului Theil-Van de Panne din programarea pătratică la problema (1) conduce la determinarea soluției $\hat{x}$.

Etapa inițială. Se calculează $x^{\emptyset}$, soluția unică a ecuației $\nabla f(x) = 0$. Dacă $V(x^{\emptyset}) = \emptyset$, atunci, evident, $\hat{x} = x^{\emptyset}$. Dacă $V(x^{\emptyset}) \neq \emptyset$, atunci $\hat{s} \neq \emptyset$.

În continuare vom nota prin S_p o mulțime formată din p indici din M.

Etapa 1. Prima etapă constă în a cerceta dacă $\hat{S}$ este printre mulțimile formate dintr-un singur indice. Pe baza corolarului teoremei 2, este suficient să cercetăm doar mulțimile de forma $S_1 = \{i_1\}$ cu $i_1 \in V(x^{\emptyset})$. Pentru fiecare astfel de S_1 calculăm x^{s_1} și $V(x^{s_1})$. Pentru fiecare S_1 cu $V(x^{s_1}) = \emptyset$, verificăm cu criteriul din teorema 3 dacă este sau nu soluția căutată. Dacă nici unul nu satisface condiția de optimalitate, se trece la etapa 2, notînd $\mathcal{S}_1 = \{s_1 \subset M / V(x^{s_1}) \neq \emptyset\}$.

Etapa 2. În această etapă se cercetează dacă $\hat{S}$ este printre mulțimile compuse din doi indici. Conform corolarului putem să ne mărginim la mulțimi S_2 de forma $S_2 = S_1 \cup \{i\}$ cu $S_1 \in \mathcal{S}_1$ și $i \in V(x^{s_1})$. Pentru toți astfel de S_2 calculăm x^{s_2} și $V(x^{s_2})$. Pentru toți S_2 cu $V(x^{s_2}) = \emptyset$, cercetăm optimalitatea cu criteriul din teorema 3. Dacă nici unul nu este optimal, notăm $\mathcal{S}_2 = \{S_2 \subset M / V(x^{s_2}) \neq \emptyset\}$ și trecem la etapa următoare.

Să presupunem că la sfîrșitul etapei p-1 soluția nu a fost găsită încă. Dispunem de familia $\mathcal{S}_{p-1} = \{S_{p-1} \subset M / V(x^{S_{p-1}}) = \emptyset\}$.

Etapa p se poate schematiza astfel :

a) Formăm toate mulțimile $S_p = S_{p-1} \cup \{i\}$ cu $S_{p-1} \in \mathcal{S}_{p-1}$ și, pentru un astfel de S_{p-1}, cu $i \in V(x^{S_{p-1}})$.

b) Calculăm x^{S_p} și $V(x^{S_p})$ pentru toți acești S_p.

c) Pentru toți S_p cu $V(x^{s_p}) = \emptyset$ testăm optimalitatea cu criteriul din teorema 3. Dacă nici unul nu este soluția căutată, notăm $\mathcal{S}_p = \{S_p \subset M / V(x^{s_p}) \neq \emptyset\}$ ș.a.m.d.

Algoritmul conduce într-un număr finit de pași la determinarea soluției problemei (1) și anume dacă $\hat{S}$ este compus din k elemente, atunci $\hat{x} = x^{\hat{s}}$ se găsește în etapa k, în care cercetăm toate mulțimile formate din k indici și care satisfac în plus condiția necesară din corolarul teoremei 2.

Dacă o parte $S \subset M$ din restricțiile problemei (1) sînt egalități, singura modificare a algoritmului este că în loc de $x^{\emptyset}$ se pornește cu x^s.

§ 4. DEGENERARE ŞI DEPENDENŢĂ

Vom discuta acum ipoteza (9) de nedegenerare a soluţiei, arătînd că nu este esenţială pentru validitatea algoritmului.

Începem printr-o discuţie a condiţiilor (13). Anume, în baza ipotezei (9) putem afirma că în (13) avem $\hat{u}_i > 0$ $(i \in \hat{S})$ şi că vectorii $\nabla a_i(\hat{x})$ $(i \in \hat{S})$ sînt liniar independenţi. Într-adevăr, dacă $\hat{u}_h = 0$, ar însemna că $-\nabla f(\hat{x})$ se poate exprima liniar în funcţie de vectorii $\nabla a_i(\hat{x})$ $(i \in \hat{S} - \{h\})$, adică $\hat{x} = \hat{x}^s$ ar fi şi soluţia problemei cu restricţiile $\hat{S} - \{h\}$, deci $\hat{x}^s = \hat{x}^{s-h}$, ceea ce contrazice ipoteza (9). De asemenea, dacă $\nabla a_h(\hat{x})$ s-ar putea exprima în funcţie de ceilalţi, introducînd în (13) am obţine o exprimare asemănătoare pentru $- \triangle f(\hat{x})$ (eventual cu unii coeficienţi negativi, dar asta nu are importanţă pentru condiţiile Lagrange), deci din nou $\hat{s}^s = \hat{x}^{s-h}$.

Invers, dacă $\hat{u}_i > 0$ $(i \in \hat{S})$ şi dacă vectorii $\nabla a_i(\hat{x})$ $(i \in \hat{S})$ sînt liniar independenţi, atunci soluţia este nedegenerată, deoarece înlăturînd din $\hat{S}$ orice indice h, vectorul $- \nabla f(\hat{x})$ nu se mai poate exprima liniar în funcţie de $\nabla a_i(\hat{x})$ $(i \in \hat{S} - \{h\})$, adică $\hat{x}$ nu este o soluţie a problemei cu restricţiile $\hat{S} - \{h\}$, deci $\hat{x}^{s-h} \neq \hat{x}^s$.

În concluzie degenerarea soluţiei este echivalentă (şi ar putea fi definită astfel) cu faptul că în forma (13) a condiţiilor Kuhn-Tucker se întîmplă una din următoarele situaţii :

a) Cel puţin un $\hat{u}_i = 0$ $(i \in \hat{S})$, dar vectorii $\nabla a_i(\hat{x})$ $(i \in \hat{S})$ sînt liniari independenţi ;

b) Vectorii $\nabla a_i(\hat{x})$ $(i \in \hat{S})$ sînt liniar dependenţi.

Unii autori numesc ,,degenerare'' numai prima situaţie, rezervînd pentru a doua termenul de ,,dependenţă'' (vezi [1]). Păstrăm denumirea globală de degenerare pentru ambele situaţii.

TEOREMA 5 (de dependenţă). *Dacă soluţia problemei* (1), $\hat{x} = \hat{x}^s$, *este degenerată, atunci există* $\hat{S}^* \subset \hat{S}$ *astfel ca :*

$$-\nabla f(\hat{x}) = \sum_{i \in \hat{S}^*} \hat{u}_i^* \nabla a_i(\hat{x}) \tag{21}$$

cu $\hat{u}_i^* > 0$ *şi vectorii* $\nabla a_i(\hat{x})$ $(i \in \hat{S}^*)$ *liniar independenţi.* $\hat{S}^*$ *este unic dacă vectorii* $\nabla a_i(\hat{x})$ $(i \in \hat{S})$ *sînt liniari independenţi.*

Din teoremă rezultă că $\hat{S}^*$ are proprietăţile :

i) $\hat{x}$ este şi soluţia problemelor (5) şi (20) asociate mulţimii de indici $\hat{S}^*$.

(22) ii) $\hat{x}^{s^*} = \hat{x}^s = \hat{x}$.

iii) $\hat{S}^*$ este o mulțime de indici minimală pentru proprietatea ii), adică pentru orice $\hat{S} \subset S^*$ avem $x^s \neq \hat{x}^{s*}$. Cu alte cuvinte $\hat{S}^*$ satisface ipoteza (9).

Proprietatea i) rezultă din faptul că (21), completat cu $\hat{u}_i^* > 0$, reprezintă condițiile Kuhn-Tucker pentru problema (22). Ea este o completare a teoremei 1 arătînd că, în cazul cînd soluția problemei (1) este degenerată, optimalitatea lui $\hat{x}$ se păstrează dacă se înlătură dintre restricțiile problemei (1) nu numai acelea nesatisfăcute strict de $\hat{x}$, ci chiar o parte din restricțiile din $\hat{S}$.

Proprietatea ii) este evidentă, iar iii) rezultă din observația de mai sus că ipoteza (9) este echivalentă cu $\hat{u}_i > 0$ și $\nabla a_i(\hat{x})$ liniar independenți. Lema mai afirmă că, dacă degenerarea se reduce la situația a) de mai sus, $\hat{S}^*$ este unic. Într-adevăr, dacă degenerarea este de tip a), exprimarea (13) a lui $-\nabla f(\hat{x})$ este unică și evident $\hat{S}^* = \{i \in \hat{S} / \hat{u}_i > 0\}$.

Demonstrația teoremei 4 revine la a arăta că dacă un vector b (aici $-\nabla f(\hat{x})$) este în conul generat de vectorii a_i $(i \in \hat{S})$, atunci există un con generat de vectori liniar independenți a_i $(i \in \hat{S}^* \subset \hat{S})$, care conține acel vector. Această proprietate constituie una din teoremele fundamentale ale programării liniare : dacă tronsonul

$$(23) \qquad \begin{aligned} &\sum_{i \in \hat{S}} u_i a_i = b \\ &u_i \geqslant 0 \qquad (i \in \hat{S}) \end{aligned}$$

are programe, atunci are cel puțin un program de bază, adică există $S^* \subset \hat{S}$ astfel ca :

$$\sum_{i \in S^*} u_i a_i = b$$

cu a_i $(i \in S^*)$ liniar independenți și $u_i \geqslant 0$ $(i \in S^*)$, nu toți nuli dacă $b \neq 0$. Este suficient să mai notăm $\hat{S}^* = \{i \in S^* / u_i > 0\}$ și să observăm că (12) și (13) ne asigură că (23) are cel puțin un program. Dacă a_i $(i \in \hat{S})$ sînt liniar independenți, problema (23) are un singur program de bază, adică $\hat{S}^*$ este unic, cum am arătat și mai sus. Dacă degenerarea este de tip b), S^* poate să fie sau să nu fie unic, condiția necesară și suficientă ca să fie unic fiind ca toți vectorii a_i $(i \in \hat{S} - S^*)$ să aparțină conului generat de vectorii $-a_i$ $(i \in S^*)$.

În concluzie, putem afirma că, dacă soluția este nedegenerată, algoritmul conduce la determinarea mulțimii $\hat{S}$ și prin aceasta la soluția $\hat{x} = \hat{x}^s$, iar dacă soluția este degenerată există $S^* \subset \hat{S}$ care satisface ipoteza (9) și deci teoremele 2 și 3 și aplicarea algoritmului duce la determinarea acestei mulţimi $\hat{S}^*$ şi implicit a soluţiei $\hat{x} = \hat{x}^{S^*}$. $\hat{S}^*$ are cel mult n elemente, deci, dacă pînă la sfîrşitul etapei a n-a soluţia nu a fost obţinută, deducem că problema (1) nu are programe.

Primit la redacţie la 10 noiembrie 1966

Centrul de statistică matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. J. C. G. Boot, *Quadratic Programming.* North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1964, pp. 95–117
2. M. Dragomirescu, *Un test liniar pentru optimalitate în programarea convexă.* Comunicare la Colocviul „Metode şi modele matematice aplicabile în practică", Braşov, 1966,
3. H. P. Kunzi, W. Krelle, *Nichtlineare Programmierung.* Springer Verlag, Berlin, 1962, p. 80–90.
4. H. Theil, C. Van de Panne, *Quadratic programming as an extention of conventional quadratic maximization.* Man. Sci. 7, 1–20 (1961).

ASUPRA CONDIȚIILOR KUHN-TUCKER DIN PROGRAMAREA NELINIARĂ

MIHAI DRAGOMIRESCU

În această lucrare se stabilește necesitatea condițiilor Kuhn-Tucker [5] pentru optimalitate în programarea neliniară în ipoteze locale mai slabe decît cele din [7] și mai simple decît cele din [5].

Pentru început vom da o generalizare (lema 3) a binecunoscutei leme a lui Farkas-Minkowski pentru sisteme liniare, care va fi folosită mai jos.

În cele ce urmează A este o matrice $m \times n$, ale cărei coloane le notăm $a_j (j \in N)$; toți vectorii sînt vectori-coloană : $b \in R^m$, $u \in R^m$, $x \in R^n$, $e = (1, \ldots, 1)' \in R^n$; accentul indică transpunerea, produsul scalar a doi vectori x, $y \in R^n$ este notat $x'y$, iar gradientul unei funcții diferențiabile $\nabla f(x) = \| \partial f / \partial x_j (x) \|_{j \in N}$.

Lema 1. (Farkaș-Minkowski). *Dintre sistemele liniare* :

$$Ax = b, \; x \geqslant 0 \tag{1}$$

și

$$u'A \geqslant 0', \; u'b < 0 \tag{2}$$

unul și numai unul are soluții.

Cu alte cuvinte, condiția necesară și suficientă pentru ca sistemul (2) să aibă soluții este ca sistemul (1) să nu aibă soluții.

Lema 2. *Dintre sistemele liniare*

$$Ax = 0, \; x \geqslant 0, \; x \neq 0 \tag{3}$$

și

$$u'A > 0' \tag{4}$$

unul și numai unul are soluție.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P. 691–696 BUCUREȘTI, 1967

Demonstrație. Necesitatea rezultă imediat folosind teorema de separație. Să observăm mai întîi că existența unei soluții nebanale $x \neq 0$ pentru sistemul (3) este echivalentă cu existența unei soluții x cu $e'x = 1$.

Mulțimea $C = \{y \in R^n \mid y = Ax,\ x \geqslant 0,\ e'x = 1\}$ adică poliedrul reprezentînd acoperirea convexă a coloanelor matricii A, este o mulțime convexă, nevidă, închisă, care nu conține originea în baza ipotezei că sistemul (3) nu are soluții. Din teorema de separație rezultă că există $u \in R^m$ astfel ca $u'y > 0$ pentru orice $y \in C$, deci în particular $u'a_j > 0$ pentru orice $j \in N$.

Suficiența. *Fie* u o soluție a sistemului (4). Să presupunem prin absurd că sistemul (3) ar avea o soluție $x \geqslant 0$, $x \neq 0$.

Rezultă, folosind și (4), că $u'Ax > 0$. Pe de altă parte, din $Ax = 0$ rezultă că $u'Ax = 0$. Contradicția demonstrează că sistemul (3) nu poate avea o soluție nebanală.

Într-un limbaj geometric, lema afirmă că coloanele matricii A sînt pozitiv-liniar-independente (adică nu există $x \geqslant 0$, $x \neq 0$ astfel ca $\sum\limits_{j \in N} x_j a_j = 0$) dacă și numai dacă există un vector u care să facă unghiuri strict ascuțite cu toți vectorii reprezentînd coloanele matricii A.

LEMA 3. *Condiția necesară și suficientă pentru ca sistemul de inegalități liniare*

$$u'A > 0' \tag{5}$$

$$u'b < 0 \tag{6}$$

să aibă soluții este ca sistemele (1) și (3) să nu aibă soluții.

Demonstrație. *Necesitate*. Dacă sistemul (5)—(6) are soluții, cu atît mai mult (2) are soluții și atunci, conform lemei Farkaș-Minkowski, sistemul (1) nu are soluții. Mai departe, deoarece sistemul (5) are soluții, conform lemei 2, sistemul (3) nu are soluții.

Suficiența. Presupunem că sistemele (1) și (3) nu au soluții. Atunci, conform lemei 1, sistemul (2) are cel puțin o soluție u_1 și conform lemei 2 sistemul (4) are cel puțin o soluție u_2. Vom arăta că pentru $\lambda > 0$ suficient de mic, $u = u_1 + \lambda u_2$ este soluție a sistemului (5)—(6).

Într-adevăr,

$$\left.\begin{aligned} u'A &= u_1'A + \lambda u_2'A > 0' \\ u'b &= u_1'b + \lambda u_2'b < 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{pentru orice } \lambda \geqslant 0.$$

În ultima inegalitate ținem seama de faptul că $u_1'b < 0$: dacă $u_2'b \leqslant 0$, această inegalitate este adevărată pentru orice $\lambda \geqslant 0$, iar dacă $u_2'b > 0$, pentru $\lambda < -\dfrac{u_1'b}{u_2'b}$.

Să observăm că lema 3 se poate deduce direct din lema 2, dacă scriem sistemul (5)—(6) sub forma :

$$u'(A, -b) > 0'. \tag{7}$$

Faptul că (5)—(6) nu are soluții, este echivalent cu faptul că sistemul:

$$(A, -b)\begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{(8)} \qquad \begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} \neq 0, \qquad x \in R^n, \; x_0 \in R$$

are o soluţie. Dacă în această soluţie $x_0 = 0$, rezultă că (3) are soluţie, iar dacă $x_0 > 0$, împărţind (8) prin x_0 rezultă că sistemul (1) are soluţia $\frac{1}{x_0} x$. În concluzie sistemul (5)—(6) nu are soluţie dacă şi numai dacă sistemul (1) sau (3) are soluţie. Prin negaţie rezultă lema 3.

Să considerăm acum problema de programare neliniară:

$$\text{(9)} \qquad \begin{gathered} a(x) \leqslant 0 \\ x \in R^n \\ \min f(x), \end{gathered}$$

unde $a : R^n \to R^m$ este o funcţie vectorială de componente $a_i(x)$, $i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$, iar $f : R^n \to R$ este funcţia obiectiv. Restricţiile de nenegativitate a variabilelor, dacă astfel de restricţii sînt impuse, le presupunem înglobate în $a(x) \leqslant 0$, deoarece în teoria generală a problemelor neliniare ele nu joacă un rol deosebit faţă de celelalte restricţii.

Fie $P = \{x \in R^n \mid a(x) \leqslant 0\}$ mulţimea programelor. Numim program optimal un vector $\hat{x} \in P$ cu proprietatea că $f(\hat{x}) \leqslant f(x)$ pentru orice $x \in P$. Pentru un program $\hat{x} \in P$ notăm

$$\text{(10)} \qquad \hat{M} = \{i \in M \mid a_i(\hat{x}) = 0\}.$$

Teorema lui Kuhn şi Tucker afirmă, într-o formulare echivalentă, că, dacă $a(x)$ şi $f(x)$ sînt funcţii convexe diferenţiabile, atunci un program $\hat{x} \in P$ este program optimal al problemei (7) dacă şi numai dacă există

$$\text{(11)} \qquad \hat{u}_i \geqslant 0 \qquad (i \in \hat{M})$$

astfel ca:

$$\text{(12)} \qquad -\nabla f(\hat{x}) = \sum_{i \in \hat{M}} \hat{u}_i \nabla a_i(\hat{x}).$$

Într-o interpretare geometrică, teorema afirmă că $\hat{x} \in P$ este program optimal dacă şi numai dacă gradientul funcţiei obiectiv în $\hat{x}$, luat cu semn schimbat, este conţinut în conul generat de normalele exterioare la hipersuprafeţele-frontieră ce trec prin $\hat{x}$.

Necesitatea condiţiilor (11)-(12) se poate stabili fără ipoteza de convexitate, în condiţii locale slabe, dacă funcţiile $a_i(x)$ $(i \in \hat{M})$ au derivate parţiale continue în $\hat{x}$. De exemplu, în [7] se face ipoteza că vectorii $\nabla a_i(\hat{x})$, $i \in \hat{M}$, sînt liniari independenţi, iar în [5] se presupune că pentru orice x aparținînd conului $\hat{K} = \{x \in R^n \,|\, (x - \hat{x})' \nabla a_i(\hat{x}) \leqslant 0, \ i \in \hat{M}\}$ tangent în $\hat{x}$, există un arc conținut în P tangent la $x - \hat{x}$. În cele ce urmează vom demonstra necesitatea condițiilor Kuhn-Tucker într-o ipoteză mai slabă decît cea din [7] și mai simplă decît ipoteza de nesingularitate din [5].

Teoremă. *Fie $f(x)$ și $a(x)$ funcții diferențiabile. Dacă normalele exterioare în $\hat{x}$ la hipersuprafețele-frontieră ce trec prin $\hat{x}$ sînt vectori pozitiv-liniar-independenți, adică dacă nu există $u_i \geqslant 0$ $(i \in \hat{M})$, nu toți nuli, astfel ca :*

$$\sum_{i \in \hat{M}} u_i \nabla a_i(\hat{x}) = \mathbf{0} \tag{13}$$

atunci (11)—(12) constituie o condiție necesară pentru ca $\hat{x} \in P$ să fie un program optimal al problemei (9).

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că nu ar exista $u_i (i \in M)$ care să satisfacă (11)—(12), adică $- \nabla f(\hat{x})$ nu ar fi conținut în conul generat de normalele exterioare în $\hat{x}$ la hipersuprafețele ce trec prin $\hat{x}$. Vom construi atunci un program $\bar{x} \in P$ pentru care $f(\bar{x}) < f(\hat{x})$. Contrazicerea optimalității lui $\hat{x}$ va demonstra teorema.

Deoarece sistemul (11)—(12) nu are soluții și de asemenea sistemul (13) nu are soluții nenegative nebanale, rezultă, conform lemei 3, că există $y \in R^n$ astfel ca :

$$y' \nabla a_i(\hat{x}) > 0 \qquad (i \in \hat{M}), \tag{14}$$

$$y' \nabla f(\hat{x}) < 0. \tag{15}$$

Să notăm $\bar{x} = \hat{x} - \lambda y$. Folosind formula creșterilor finite avem :

$$a_i(\bar{x}) = a_i(\hat{x}) - \lambda y' \nabla a_i(\hat{x} - \theta \lambda y), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Pentru $i \in \hat{M}$, $a_i(\hat{x}) = 0$ și folosind (14) și continuitatea derivatelor parțiale, rezultă că pentru $\lambda > 0$ suficient de mic avem $a_i(\bar{x}) < 0$. Pentru $i \notin \hat{M}$, $a_i(\hat{x}) < 0$ și pentru λ suficient de mic, de asemenea $a_i(\bar{x}) < 0$. În concluzie, $\bar{x} \in P$ și

$$f(\bar{x}) = f(\hat{x}) - \lambda y' \nabla f(\hat{x} - \theta \lambda y) < f(\hat{x})$$

pentru $\lambda > 0$ suficient de mic. Teorema este demonstrată. Din demonstrație mai rezultă că, în ipoteza (13), P are cel puțin un punct interior.

Dacă în problema (9) se cere maximizarea funcției $f(x)$, singura modificare este că în (12) se înlocuiește $- \nabla f(\hat{x})$ prin $\nabla f(\hat{x})$.

Din demonstrație se observă că condiția (11)—(12) are loc nu numai pentru un program optimal $\hat{x}$, ci pentru orice minim local al lui $f(x)$ pe P.

De exemplu, pentru programul înfățișat în figura 1, se observă că $\bar{x}$ satisface (11)—(12), deși nu este decît un punct de minim local al lui $f(x)$

pe P, soluţia problemei fiind evident $\hat{x}$. Mulţimea P a programelor este haşurată, curbele de nivel ale funcţiei obiectiv sînt trasate punctat.

Relativ la condiţia (13) se poate arăta că ea este necesară pentru teoremă : pentru programul înfăţişat în figura 2, $\hat{x}$ este evident soluţie,

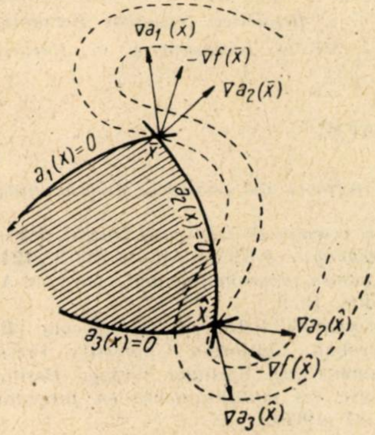

$\nabla a_1(\bar{x})$
$-\nabla f(\bar{x})$
$\nabla a_2(\bar{x})$
$a_1(x)=0$
$\bar{x}$
$a_2(x)=0$
$\hat{x}$
$\nabla a_2(\hat{x})$
$a_3(x)=0$
$-\nabla f(\hat{x})$
$\nabla a_3(\hat{x})$

Fig. 1

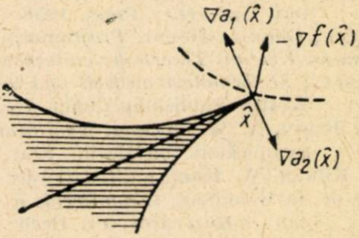

$\nabla a_1(\hat{x})$
$-\nabla f(\hat{x})$
$\hat{x}$
$\nabla a_2(\hat{x})$

Fig. 2

dar condiţiile (11)—(12) nu sînt îndeplinite. Dacă funcţiile $a_i(x)$ sînt convexe şi dacă P are un punct interior, se poate arăta că sînt îndeplinite condiţiile (13), astfel că condiţiile Kuhn-Tucker, în forma cunoscută, rezultă ca un caz particular al teoremei.

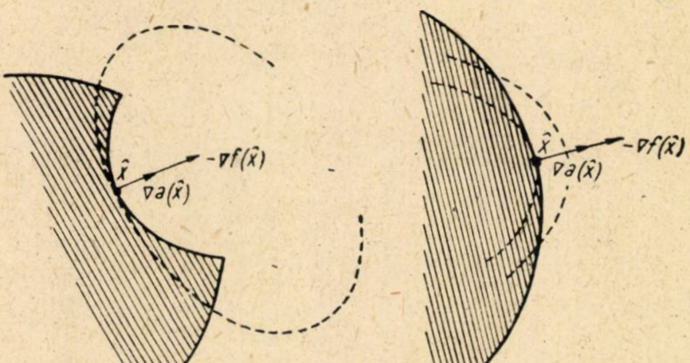

$\hat{x}$
$-\nabla f(\hat{x})$
$\nabla a(\hat{x})$
$\hat{x}$
$-\nabla f(\hat{x})$
$\nabla a(\hat{x})$

Fig. 3

Partea de suficienţă a condiţiilor Kuhn-Tucker nu poate fi extinsă, adică fără ipoteza de convexitate a funcţiilor $f(x)$ şi $a(x)$, condiţiile (11)—(12) nu garantează că $\hat{x}$ este soluţia problemei (9). De exemplu, pentru problemele înfăţişate în figura 3, în care $a_i(x)$, respectiv $f(x)$ nu sînt convexe, condiţiile (11)—(12) sînt îndeplinite şi totuşi $\hat{x}$ nu este nici măcar un minim local.

Primită la redacţie la 10 noiembrie 1966

Centrul de statistică matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. K. J. Arrow, L. Hurwicz, H. Uzawa, *Studies in linear and nonlinear programming*. Stanford University Press, 1958.
2. C. Berge, Ghouila-Houri, *Programmes, jeux et réseaux de transport*. Dunod, Paris, 1962.
3. J. Farkas, *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen*. J. Reine Angew. Math., **124** (1902).
4. S. Karlin, *Mathematical methods and theory in games, programming and economics*. Addison-Wesley Publishing Comp. Inc., London, 1959.
5. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, *Nonlinear programming*. Proc. of the Second Berkeley Symposium on Math. Stat. and Probab., California University Press, 1950.
6. M. P. Künzi, W. Krelle, *Nichtlineare Programmierung*. Springer Verlag, Berlin, 1962.
7. Pallu de la Barrière, *Compléments à la théorie des multiplicateurs en programmation non linéaire*. Rev. Fr. Rech. Oper., *27* (1963).
8. M. Slater, *Lagrange multipler revisited: A contribution to non-linear programming*. The RAND Corporation RM—676, 1951.

MORFISME ÎNTRE CATEGORII AUTONOME

DE

ANDREI DUMA

Nota de faţă are ca scop definirea şi caracterizarea morfismelor între 2 categorii autonome.

Notăm cu Ens categoria mulţimilor, în plus, pentru orice categorie **L**, vom nota **L**(A, B) mulţimea morfismelor $A \to B$ din categoria **L**.

Definiţia 1. [1]. O categorie **K** se numeşte autonomă, dacă este verificată următoarea listă de axiome:

(A_1) Este definit un functor fidel : $\mathbf{K} \to$ Ens numit functorul de subiacenţă şi notat $|\bigstar|$.

(A_2) Este definit un functor Hom : $\mathbf{K}^* \times \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ numit ridicatul functorului hom (din Ens).

(A_3) Este comutativă diagrama :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}^* \times \mathbf{K} \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathbf{K}(-,-)"'] & & \mathbf{K} \arrow[dl, "|\bigstar|"] \\
& \text{Ens} &
\end{tikzcd}$$

adică există un izomorfism natural în A şi B, oricare ar fi A, $B \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K}(A, B) \approx |\mathrm{Hom}(A, B)|$$

(A_4) Oricare ar fi obiectul A, functorul $\Omega_A = \mathrm{Hom}\ (A, -) : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ admite un adjunct tare, adică există un functor $\Sigma_A : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ astfel ca : $\mathrm{Hom}\ (\Sigma_A -, -) \approx \mathrm{Hom}\ (-, \Omega_A -)$. De obicei se notează $\Sigma_A(B) = B \otimes A$.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P.697-699 BUCUREŞTI, 1967

(A_5) Oricare ar fi A, B, $C \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}$, este comutativă diagrama :

$$\begin{tikzcd}
|(\Omega_A \circ \Omega_B)C| \arrow[r, "\approx"'] \arrow[d, "\cong"] & |(\Omega_B \circ \Omega_A)C| \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbf{K}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \arrow[r, "\approx"'] \arrow[d, "\cong"] & \mathbf{K}(B, \mathrm{Hom}(A, C)) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Ens}(|A|, \mathrm{Ens}(|B|, |C|)) \arrow[r, "\approx"'] & \mathrm{Ens}(|B|, \mathrm{Ens}(|A|, |C|)).
\end{tikzcd}$$

DEFINIŢIA 2. Fie **K** şi **H** două categorii autonome; un functor $F : \mathbf{K} \to \mathbf{H}$ se numeşte functor autonom dacă se îndeplinesc axiomele :

(F.A.1) Este comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "|*|_{\mathbf{K}}"'] & & \mathbf{H} \arrow[dl, "|*|_{\mathbf{H}}"] \\
& \mathrm{Ens} &
\end{tikzcd}$$

(F.A.2) Este comutativă diagrama :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}^* \times \mathbf{K} \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}"] \arrow[d, "F^* \times F"] & \mathbf{K} \arrow[d, "F"] \\
\mathbf{H}^* \times \mathbf{H} \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}"] & \mathbf{H}
\end{tikzcd}$$

Comutativitatea ultimei diagrame exprimă faptul că F este tare deplin fidel sau că F comută cu Ω :

$$F \circ \Omega_A \approx \Omega_{FA} \circ F \text{ oricare ar fi } A \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}.$$

Observaţii. 1) Axiomele anterioare se pot înlocui cu axioma echivalentă :

(FA) Este comutativă piramida :

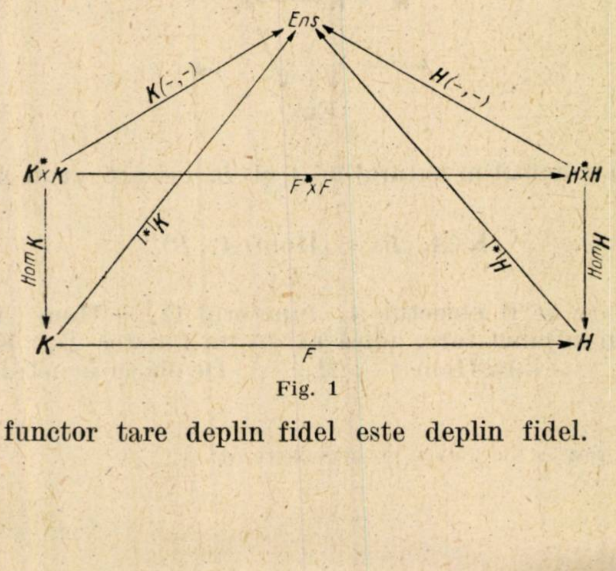


Fig. 1

2) Un functor tare deplin fidel este deplin fidel.

3) Nu rezultă că F comută cu Σ (produsul tensorial); dacă $F(\mathbf{K}) = \mathbf{H}$, atunci $F \circ \Sigma_A = \Sigma_{FA} \circ F$.

DEFINIŢIA 3. [2]. Fie **H** o categorie autonomă; o categorie **K** se numeşte categorie peste **H**, sau de bază **H**, sau o **H**-categorie, dacă există un functor

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}/\mathbf{H}} : \mathbf{K}^* \times \mathbf{K} \to \mathbf{H}$$

astfel ca:

(i) Diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{K}^* \times \mathbf{K} \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}/\mathbf{H}}"] \arrow[dr, "\mathbf{K}(-,-)"'] & & \mathbf{H} \arrow[dl, "|*|"] \\ & \mathrm{Ens} & \end{tikzcd}$$

este comutativă.

(ii) Există un morfism supraiacent morfismului de compunere din Ens, adică: oricare ar fi A, B, $C \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}$, există un morfism $\eta_{A,\,B}(C)$ astfel ca următoarea diagramă să fie comutativă:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(A, B) \arrow[r, "\eta_{A,\,B}(C)"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}/\mathbf{H}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(B, C)\, \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(A, C)) \arrow[d] \\ \mathbf{K}(A, B) \arrow[r] & \mathrm{Ens}(\mathbf{K}(B, C), \mathbf{K}(A, C)) \end{tikzcd}$$

PROPOZIŢIE. *Dacă* $F : \mathbf{K} \to \mathbf{H}$ *este un functor de categorii autonome, atunci* **K** *se poate defini ca o* **H** *categorie autonomă astfel*:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}/\mathbf{H}} = F \circ \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}} \circ (F^* \times F).$$

Într-adevăr, axioma (i) rezultă din (F.A.1), iar (ii) din faptul că Ω_{FC} este tare şi din (A.5).

S-a obţinut astfel o aplicaţie Φ de la categoria morfismelor de categoria autonomă de cosursă **H** la categoria **H**-categoriilor autonome, care este o corestricţie a aplicaţiei anterior definite.

TEOREMĂ. *Dacă functorul* $1_{\mathbf{K}}{}'$ *este reprezentabil tare, adică*: $1_{\mathbf{K}} \approx \approx \mathrm{Hom}\ (G, -)$, *atunci* Φ *admite un invers şi anume*:

$$[\psi(\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}/\mathbf{H}})](A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}/\mathbf{H}}(G, A).$$

Primită la redacţie la 20 decembrie 1966

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. G. KELLY, *Tensor products in categories*. Journal of Algebra, (1965).
2. F. LINTON, *Autonomous categories and duality of Functors*. Journal of Algebra, (1965).

DETERMINAREA SPAȚIILOR A_n CU „p” FORME PFAFF INVARIANTE CU GRUP MAXIM DE MIȘCĂRI

DE

VIOREL DUMITRAȘ

Spațiile A_n cu formă Pfaff invariante au fost considerate pentru prima oară de acad. Gh. Vrănceanu, care a arătat că dacă forma Pfaff este o diferențială, spațiul este cu grup tranzitiv maxim G_{n^2} sau cu grup intranzitiv G_{n^2-1}.

În această lucrare se determină spațiile A_n cu grup maxim de mișcări, care au un sistem de $p < n$ forme Pfaff invariante.

Cazul cînd $p = n$ constituie problema specială de echivalență a lui E. Cartan.

Acad. Gh. Vrănceanu a considerat în [1], spațiile cu conexiune afină cu formă Pfaff invariantă, arătînd că dacă această formă este o diferențială, spațiul este un grup tranzitiv maxim G_{n^2} și componentele conexiunii se pot aduce la forma canonică :

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{11} = c, \quad \Gamma^\alpha_{1\beta} = (r - s)\,\delta^\alpha_\beta, \quad \Gamma^\alpha_{\beta 1} = (r + s)\,\delta^\alpha_\beta \\ \Gamma^\alpha_{11} = -\,\varepsilon x^\alpha, \quad \Gamma^1_{\alpha\beta} = \Gamma^1_{1\alpha} = \Gamma^1_{\beta\gamma} = 0 \\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma = 2,\ \ldots,\ n;\ \varepsilon = 0,\ 1,\ -1)\end{gathered} \tag{I}$$

în care c, r și s sînt constante.

Grupul de mișcări al acestor spații are ecuațiile :

$$\overline{x}^1 = x^1 + a^1, \quad \overline{x}^\alpha = a^\alpha_\lambda x^\lambda + a^\lambda \tag{II}$$

unde a^α_β sînt constante, iar a^α funcții de x^1, soluții ale ecuației diferențiale:

$$\frac{d^2\Psi}{(dx^1)^2} = (2r - c)\frac{d\psi}{dx^1} - \varepsilon\Psi. \tag{II'}$$

În această lucrare ne propunem să determinăm spațiile A_n cu grup maxim de mișcări care au un sistem de p, $(1 < p < n)$, forme Pfaff

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P. 701–705, BUCUREȘTI, 1967

invariante. Cazul a fost studiat în întregime de Gh. Vrănceanu, iar cazul $p = n$ constituie problema specială de echivalenţă a lui E. Cartan.

★

Fie un spaţiu cu conexiune afină A_n, în care componentele conexiunii sînt funcţiile $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$.

O transformare dată de ecuaţiile

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i(x^1, \ldots, x^n), \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

este o mişcare (transformare automorfă) a spaţiului, dacă avem

$$\frac{\partial u^i_j}{\partial x^k} = \overline{\Gamma}^i_{rs}\, u^r_j\, u^s_k - \Gamma^s_{jk}\, u^i_s, \qquad \left(u^i_j = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}\right), \tag{2}$$

unde $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ sînt aceleaşi funcţii de $\overline{x}^i$ cum sînt Γ^i_{jk} de x^i. Scriind condiţiile de integrabilitate ale sistemului (2), putem asocia relaţiile în termeni finiţi

$$\overline{T}^i_{rs}\, u^r_j\, u^s_k - T^r_{jk}\, u^i_r = 0, \qquad \overline{\Gamma}^i_{rst}\, u^r_j\, u^s_k\, u^t_l - \Gamma^r_{jkl}\, u^i_r = 0 \tag{3}$$

unde

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}, \qquad \Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk}\,\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\,\Gamma^s_{jk} \tag{4}$$

sînt respectiv componentele tensorilor de torsiune şi de curbură ai spaţiului considerat.

Fie acum în spaţiul A_n, p forme Pfaff invariante $\mathrm{d}s^1, \ldots, \mathrm{d}s^p$, cărora le asociem alte $n-p$ forme Pfaff $\mathrm{d}s^{p+1}, \ldots, \mathrm{d}s^n$, astfel încît formele $\mathrm{d}s^1, \ldots, \mathrm{d}s^n$ să fie independente.

Cele n forme Pfaff considerate sînt determinate abstracţie făcînd de o transformare de forma [1])

$$\mathrm{d}\overline{s}^h = \mathrm{d}\overline{s}^h, \qquad \mathrm{d}s^\alpha = c^\alpha_r\, \mathrm{d}s^r + c^\alpha_\lambda\, \mathrm{d}s^\lambda. \tag{5}$$

Rezultă că un spaţiu A_n cu p forme Pfaff invariante poate avea un grup de mişcări cu cel mult $n(n-p+1)$ parametri; acest număr se obţine adunînd la numărul celor n variabile x^i numărul $(n-p)^2+p(n-p)$ al funcţiilor c^α_β, c^α_k considerate ca funcţii de variabile x^i.

Să observăm în primul rînd că un spaţiu A_n cu p forme Pfaff invariante poate avea grupul maxim $G_{n(n-p+1)}$ numai dacă cele p forme invariante sînt diferenţiale, deoarece în caz contrar covarianţii biliniari ai acestor forme Pfaff ar conduce la existenţa unor relaţii între funcţiile c^α_β, c^α_k.

Vom presupune că formele $\mathrm{d}s^1, \ldots, \mathrm{d}s^p$ sînt diferenţiale, aşa încît vom putea lua $\mathrm{d}s^h = \mathrm{d}x^h$ $(h = 1, \ldots, p)$. Atunci din primele relaţii (7) rezultă $\mathrm{d}\overline{x}^h = \mathrm{d}x^h$, deci avem:

$$\overline{x}^h = x^h + a^h$$

---

[1] În formulele (5) şi în cele care urmează, indicii notaţi cu litere latine iau valori de la 1 pînă la p, iar indicii notaţi cu litere greceşti valori de la $p+1$ pînă la n.

și spațiile A_n cu grup $G_{n(n-p+1)}$ trebuie să admită aceste translații oricare ar fi constantele a^h. Pe baza formulelor (2), rezultă că toate componentele conexiunii trebuie să fie independente de variabilele $x^1, \ldots, x^p$.

Transformările automorfe ale spațiilor considerate au ecuații de forma :

$$\overline{x}^h = x^h + a^h, \quad \overline{x}^\alpha = \overline{x}^\alpha(x^1, \ldots, x^n). \tag{6}$$

Față de o transformare (6), coeficienții $\Gamma^h_{\alpha\beta}$ ai conexiunii sînt componentele unui tensor covariant de-al doilea ordin, deoarece $u^h_\alpha = 0$ și deci $\overline{\Gamma}^h_{\rho\sigma} u^\rho_\alpha u^\sigma_\beta - \Gamma^h_{\alpha\beta} = 0$.

Pentru spațiile A_n cu grup maxim $G_{n(n-p+1)}$, aceste componente trebuie să fie nule, deoarece în caz contrar am avea relații între u^α_β. ceea ce este tot una cu a avea relații între c^α_β. De asemenea avem

$$\overline{\Gamma}^h_{ls} u^s_\beta + \overline{\Gamma}^h_{l\lambda} u^\lambda_\beta - \Gamma^h_{l\beta} = 0$$

și deci este necesar ca și componentele $\Gamma^h_{l\beta}$ să fie nule.

În sfîrșit, deoarece $u^h_\alpha = 0$, $u^h_k = \delta^h_k$, avem

$$\overline{\Gamma}^h_{kl} - \Gamma^h_{kl} = 0$$

și prin urmare Γ^h_{kl} trebuie să fie constante; vom nota aceste constante prin c^h_{kl}.

Observăm că printr-o transformare (6) avem

$$\frac{\partial u^\alpha_\beta}{\partial x^\gamma} = \overline{\Gamma}^\alpha_{\rho\sigma} u^\rho_\beta u^\sigma_\gamma - \Gamma^\rho_{\beta\gamma} u^\alpha_\rho$$

și aceste relații ne arată că pentru x^h constante, coeficienții $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ constituie componentele unei conexiuni afine ale unui spațiu A_{n-p} și acest spațiu trebuie să aibă grupul maxim de mișcări cu $(n-p)^2 + (n-p)$ parametri, cum rezultă din formulele (5). Spațiul A_{n-p} considerat este deci afin euclidian și prin urmare putem alege un sistem de variabile $x^{p+1}, \ldots, x^n$ astfel încît $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ să fie nuli. Transformările (6) care păstrează această formă canonică sînt :

$$\overline{x}^h = x^h + a^h, \quad \overline{x}^\alpha = a^\alpha_\lambda x^\lambda + b^\alpha, \tag{7}$$

unde a^α_β, b^α pot depinde numai de variabilele $x^1, \ldots, x^p$.

Deoarece spațiul A_{n-p} nu depinde de aceste variabile, putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că a^α_β sînt constante.

În continuare, considerînd ecuațiile (2) în care indicele superior și un indice inferior iau valori mai mari decît β, iar indicele rămas ia valori între 1 și p, obținem :

$$\overline{\Gamma}^\alpha_{h\rho} a^\rho_\beta - \Gamma^\rho_{h\beta} a^\alpha_\rho = 0, \quad \overline{\Gamma}^\alpha_{\rho h} a^\rho_\beta - \Gamma^\rho_{\beta h} a^\alpha_\rho = 0$$

și din aceste formule rezultă că trebuie să avem

$$\Gamma^\alpha_{h\beta} = (r_h - s_h)\,\delta^\alpha_\beta, \quad \Gamma^\alpha_{\beta h} = (r_h + s_h)\,\delta^\alpha_\beta \tag{8}$$

în care r_h și s_h sînt constante.

Dînd acum indicelui superior valori mai mari decît p, iar indicilor inferiori valori între 1 şi p şi ţinînd seama de formulele (8), avem

$$\frac{\partial^2 b^\alpha}{\partial x^h \partial x^l} = \Gamma^\alpha_{hl} + (r_h - s_h)\frac{\partial b^\alpha}{\partial x^l} + (r_l + s_i)\frac{\partial b^\alpha}{\partial x^h} - c^r_{hl}\frac{\partial b^\alpha}{\partial x^r} - \Gamma^\rho_{hl}\, a^\alpha_\rho. \tag{9}$$

Din aceste formule rezultă că trebuie să avem

$$\Gamma^\alpha_{hl} = -\varepsilon_{hl}\, x^\alpha,$$

unde ε_{hl} sînt p^2 constante.

Din condiţiile de integrabilitate ale ecuaţiilor (9), rezultă că funcţiile b^α verifică ecuaţiile :

$$2\left(s_h \frac{\partial b^\alpha}{\partial x^l} - s_l \frac{\partial b^\alpha}{\partial x^h}\right) + (c^r_{hl} - c^r_{lh})\frac{\partial b^\alpha}{\partial x^r} + (\varepsilon_{hl} - \varepsilon_{ih})\, b^\alpha = 0. \tag{9'}$$

Ţinînd seama de aceste relaţii, ecuaţiile (9) se vor scrie sub forma

$$\frac{\partial^2 b^\alpha}{\partial x^h \partial x^l} = r_h \frac{\partial b^\alpha}{\partial x^l} + r_l \frac{\partial b^\alpha}{\partial x^h} - \frac{1}{2}(c^r_{hl} + c^r_{lh})\frac{\partial b^\alpha}{\partial x^r} - \frac{1}{2}(\varepsilon_{hl} + \varepsilon_{lh})\, b^\alpha. \tag{9''}$$

Prin urmare conexiunea spaţiilor considerate poate fi adusă la forma canonică :

$$\begin{gathered} \Gamma^h_{kl} = c^h_{kl}, \quad \Gamma^\alpha_{h\beta} = (r_h - s_h)\delta^\alpha_\beta, \quad \Gamma^\alpha_{\beta h} = (r_h + s_h)\delta^\alpha_\beta, \\ \Gamma^\alpha_{hl} = -\varepsilon_{hl}\, x^\alpha, \quad \Gamma^h_{\alpha\beta} = \Gamma^h_{l\alpha} = \Gamma^h_{\alpha l} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Grupul de mişcări al acestor spaţii are ecuaţiile (7) în care funcţiile a^α verifică ecuaţiile (9′) şi (9″). Să observăm că printr-o transformare de variabile de forma $x'^i = q^i_s\, x^s$, $x'^\alpha = x^\alpha$ (q^i_j = constante) avem

$$\varepsilon_{rs}\, q^r_j\, q^s_k = \varepsilon_{jk}$$

relaţii care ne arată că faţă de o transformare centroafină de coordonate în spaţiul variabilelor $x^1, \ldots, x^p$, constantele ε_{jk} sînt componentele unui tensor covariant de-al doilea ordin. Folosind coeficienţii q^i_j putem reduce componentele acestui tensor la forma canonică

$$\varepsilon_{jk} = \delta_{jk}\, \varepsilon, \quad (\varepsilon = 0, 1, -1). \tag{11}$$

Făcînd o transformare de variabile de forma

$$x'^h = x^h, \quad x'^\alpha = e^{-(q_1 x^1 + \cdots + q_p x^p)}\, x^\alpha$$

putem alege convenabil constantele $q_1, \ldots, q_p$ astfel ca să avem

$$c^h_{jk} = \delta^h_k (r_j + s_j) + \delta^h_j (r_k - s_k). \tag{11'}$$

În aceste noi variabile conexiunea are forma canonică

$$\begin{gathered} \Gamma^h_{kl} = \delta^h_k (r_l + s_l) + \delta^h_l (r_k - s_k) \\ \Gamma^\alpha_{\beta h} = (r_h + s_h)\,\delta^\alpha_\beta, \quad \Gamma^\alpha_{h\beta} = (r_h - s_h)\,\delta^\alpha_\beta, \quad \Gamma^\alpha_{hk} = -\delta_{hk}\, \varepsilon\, x^\alpha \\ \Gamma^h_{\alpha\beta} = \Gamma^h_{k\alpha} = \Gamma^h_{\alpha k} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

unde ε poate lua una din valorile 0, 1 sau -1, Ecuaţiile (9′) şi (9″) vor căpăta în acest sistem de coordonate forma mai simplă

$$s_h \frac{\partial b^\alpha}{\partial x^l} - s_l \frac{\partial b^\alpha}{\partial x^h} = 0, \qquad \frac{\partial^2 b^\alpha}{\partial x^h \, \partial x^l} + \varepsilon \, \delta_{hl} \, b^\alpha = 0. \tag{13}$$

Ultimele ecuaţii (13) ne arată că avem

$$\frac{\partial^2 b^\alpha}{\partial x^h \, \partial x^l} = 0 \text{ pentru } h \neq l$$

prin urmare funcţiile b^α sînt de forma

$$b^\alpha = f_1^\alpha (x^1) + \ldots . + f_p^\alpha (x^p).$$

De aici rezultă că dacă $\varepsilon \neq 0$, toţi b^α sînt nuli şi în acest caz spaţiile considerate nu ar mai avea grup maxim de mişcări. Aşadar, trebuie să admitem că $\varepsilon = 0$ şi prin urmare componentele conexiunii spaţiilor A_n care au grupul maxim de mişcări $G_{n(n-p+1)}$ se pot scrie sub forma

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \, \varphi_k + \delta^i_k \psi_j, \tag{14}$$

unde

$$\begin{aligned} &\varphi_h = r_h + s_h, \quad \psi_h = r_h - s_h, \quad (h = 1, \ldots, p) \\ &\varphi_{p+1} = \ldots = \varphi_n = 0, \quad \psi_{p+1} = \ldots = \psi_n = 0 \end{aligned} \tag{14′}$$

iar grupul de mişcări are ecuaţiile

$$\overline{x}^h = x^h + a^h, \qquad \overline{x}^\alpha = a^\alpha_\lambda \, x^\lambda + a^\alpha_l \, x^l + a^\alpha. \tag{15}$$

Putem enunţa :

TEOREMĂ. *Conexiunea spaţiilor A_n cu grup maxim de mişcări $G_{n(n-p+1)}$, care are un sistem de p ($1 < p < n$) forme Pfaff invariante, se poate aduce la forma canonică* (*14*), (*14′*). *Ecuaţiile grupului de mişcări ale acestor spaţii se pot scrie sub forma* (*15*) *în care a^h, a^α_β, a^α_l, a^α sînt constante.*

Observaţie. Spaţiile determinate mai sus au fost găsite în [2] ca o generalizare a spaţiilor A_3 cu grup G_6 care au un sistem de două forme Pfaff invariante.

Primită la redacţie la 15 octombrie 1966

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Leçons de Géométrie différentielle*, Bucarest, 1947.
2. V. DUMITRAŞ, *Grupurile de mişcare cu şase parametri ale spaţiilor A_3*. St. cerc. mat., **VIII**, 3–4, 335 (1957).

ASUPRA PSEUDOCORECTĂRII ERORILOR

DUMITRU ENE

În această notă se prezintă cîteva chestiuni în legătură cu [1]. Notaţiile sînt cele din [1].

1. Metoda folosită în [1] pentru pseudocorectarea erorilor rezolvă şi următoarea problemă mai generală: dîndu-se $u \in V$ şi $T \subset V$, să se decidă dacă $u \in T$ sau nu, altfel decît prin simpla inspecţie a vectorilor din T.

La această problemă se reduce şi aceea a stabilirii relaţiilor între două mulţimi T_1, $T_2 \subset V$, adică a decide dacă $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ sau nu şi în ultimul caz, dacă $T_1 \subseteq T_2$ sau invers, fără a apela la inspecţia vectorilor lor. Într-adevăr, $T_1 \cap T_2 = \emptyset \Leftrightarrow$ pentru orice $u \in T_1$ avem $u \notin T_2$, iar $T_1 \subseteq T_2 \Leftrightarrow$ pentru orice $u \in T_1$ avem $u \in T_2$.

Metoda folosită în [1] constă în descompunerea lui T într-o reuniune de clase de resturi şi în folosirea faptului că apartenenţa unui vector la o clasă de resturi este echivalentă cu verificarea de către el a sistemului de ecuaţii asociat clasei.

Această metodă o vom numi, mai departe, *metoda claselor de resturi*.

2. Fie l numărul vectorilor lui T. Evident, $1 \leqslant l < 2^k$.

În metoda claselor de resturi, T e caracterizată de cuplul (H_T, S_T) Fie $N(T)$ numărul liniilor lui H_T ($\equiv$ numărul componentelor lui S_T) Atunci pentru această metodă avem de exemplu

$$N(T)_{\text{minim}} = N_C(T)_{\text{minim}} = kt - \sum_{i=1}^{t} m_i,$$

unde $2^{m_i} \leqslant l$ pentru orice $i = 1, \ldots, t$.

Metoda inspecţiei e un caz particular al metodei claselor de resturi şi anume pentru acest caz clasele de resturi din descompunerea lui T sînt clasele triviale formate dintr-un singur vector ([1], observaţie), H_T e formată din l matrici-unitate de tip $k \times k$ iar $S_1, \ldots, S_l$ din structura

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P. 707–710, BUCUREŞTI, 1967

lui S_T sînt chiar vectorii lui T. Deci, de fapt cuplul (H_T^{-}, S_T) se reduce la S_T.

Vom folosi în metoda inspecției în locul lui S_T o matrice de tip $l \times k$ notată tot H_T ce are pe linii pe $S_1, \ldots, S_l$.

În acest caz $u \in T \Leftrightarrow$ matricea $u + H_T$ conține o linie cu toate componentele egale cu zero.

Deci în metoda inspecției $N(T)_{\text{minim}} = N_i(T) = l$.

Observăm că în cazul metodei inspecției, dacă $2^{k-1} < l < 2^k$, putem lucra cu $V \setminus T$ în locul lui T și anume $u \in T \Leftrightarrow u \notin V \setminus T$; $V \setminus T$ are $2^k - l$ vectori și $0 < 2^k - l < 2^{k-1}$. Deci în realitate putem lua $N_i(T) = \min(l, 2^k - l)$.

În funcție de l avem $N_C(T)_{\text{minim}} < N_i(T)$ sau $N_i(T) < N_C(T)_{\text{minim}}$; în primul caz folosim metoda claselor de resturi, iar în al doilea metoda inspecției.

Vom folosi mai departe notația $N(T) = \min\,[N_C(T)_{\text{minim}}, N_i(T)]$.

3. Observațiile următoare servesc la micșorarea lui $N_C(T)$ obținut în [1] și apropierea lui de $N_C(T)_{\text{minim}}$.

a) În [1] clasele C_{m_i} din descompunerea lui T au fost luate disjuncte cîte două. Dacă lucrăm cu clasele nedisjuncte $C_{m'_i}$, $N_C(T)$ se micșorează.

În adevăr, dacă $C_{m'_{ij}} = C_{m'_i} \cap C_{m'_j}$ are $2^{m'_{ij}}$ vectori, avem $l = \Sigma 2^{m_i} = \Sigma 2^{m'_i} - \Sigma 2^{m'_{ij}}$, deci m'_i sînt în ansamblu mai mari ca m_i, etc.

b) În scopul micșorării lui $N_C(T)$, procesul de obținere a unei descompuneri într-o reuniune de clase de resturi a lui T descris în [1] se poate înlocui cu următorul: se aleg din T în toate modurile posibile mulțimi cu $2^m, 2^{m-1}, \ldots, 2^2$ vectori și se cercetează ca în [1] care din ele sînt clase de resturi.

Fie $C_0^m, \ldots, C_{i_0}^m, C_1^{m-1}, \ldots, C_{i_1}^{m-1}, \ldots, C_{m-2}^2, \ldots, C_{i_{m-2}}^2$ aceste clase (e posibil ca $C_j^{m-j}, \ldots, C_{i_j}^{m-j}$ să lipsească pentru unii indici j, unde $0 \leqslant j \leqslant m-2$).

O reuniune a unui număr oarecare dintre aceste clase se va numi *acoperire* pentru T dacă reuniunea conține l vectori distincți (deci reuniunea coincide ca mulțime cu T).

Luăm reuniunile claselor $C_0^m, \ldots, C_{i_0}^m$ cîte $2, 3, \ldots, i_0$ și cercetăm care din aceste reuniuni e acoperire pentru T. Între aceste acoperiri o reținem pe cea cu numărul minim de clase.

Dacă între reuniunile precedente n-avem nici o acoperire, luăm în considerare clasele $C_0^m, \ldots, C_{i_0}^m, C_1^{m-1}, \ldots, C_{i_1}^{m-1}$ și repetăm operațiile de mai sus.

Dacă cu unele din clasele $C_0^m \ldots C_{i_{m-2}}^2$ nu putem forma nici o acoperire pentru T, atunci procedăm astfel: pentru l par, împărțim pe T în perechi disjuncte de vectori, aceste perechi fiind sigur clase de resturi [1], iar pentru l impar, procedăm ca în [1] pct. 2, sau ca la pct. g) de mai jos.

c) Fie $T = \bigcup_{i=1}^{t} C_i$ o descompunere a lui T care realizează pe $N_C(T)_{\text{minim}}$ şi $T_0 = T \setminus \bigcup_{i=1}^{t_0} C_i$. Notăm $N_{i,C}(T) = \min\limits_{1 \leqslant t_0 \leqslant t} [N_i(T_0) + N_C(\bigcup_{1}^{t_0} C_i)]$.

Dacă $N_{i,C}(T)$ e mai mic ca $N_i(T)$, $N_C(T)_{\text{minim}}$ sau ca $N(T)$, atunci preferăm îmbinarea metodelor inspecţiei şi claselor de resturi uneia respectiv ambelor metode aplicată singură.

Exemple concrete arată că există valori ale lui l pentru care acest lucru este posibil.

d) Dacă se cere să se decidă dacă $u \in T$, dar se ştie că $u \in R$, atunci $u \in T \Leftrightarrow u \in (T \cap R) \Leftrightarrow u \in [(V \setminus R) \cup T]$.

T se poate înlocui deci cu $T \cap R$ sau cu $(V \setminus R) \cup T$ dacă pentru una din aceste mulţimi funcţia $N(.)$ se micşorează.

e) Dacă $T \subset C$, unde C e o clasă de resturi cu 2^m vectori, avem $T = C \cap T_0$, unde T_0 se alege astfel ca $N(T) \gg k - m + N(T_0)$.

C se alege astfel ca m să fie maxim cu proprietatea precedentă, dacă există mai multe clase de resturi ce includ pe T.

Observaţiile următoare se referă la [1].

f) H_T poate fi folosită la recepţie [1] pentru $2^{k-m_1} \ldots 2^{k-m_t} = 2^{N_C(T)_{\min}}$ mulţimi T (care diferă între ele prin S_T). Acelaşi lucru şi pentru S_T.

g) Cazul l impar se reduce, conform ideii de la pct. c), la cazul l par mai avantajos ca la pct. 2 din [1] astfel: se alege $u_0 \in T$ iar la $H_{T-\{u_0\}}$ readăugăm pe u ca ultimă linie; $u \in T \Leftrightarrow uH_{T-\{u_0\}} = 0$ sau $u + u_0 = 0$ iar u_0 trebuie ales astfel ca $N(T - \{u_0\})$ să fie minim.

Dacă T conţine cel puţin un vector de pondere pară, alegem pe u_0 de pondere pară şi atunci $u \in T \Leftrightarrow uH_T = 0$ ca în cazul obişnuit.

h) Detectarea erorilor cu ajutorul pseudocorectării ([1], aplicaţia 1°) poate fi făcută şi astfel: alegem T_1 cu $u \notin T_1$ (sau T_1 disjunct de rezervorul de informaţii) şi cu $N(T_1)_{\text{minim}}$ cu această proprietate:

$$u' \text{ e corect} \Leftrightarrow u' \in T_2 \quad \text{dar } u' \notin T_1, \text{ unde } T_2 = T_1 \cup \{u\}.$$

4. În metoda claselor de resturi, a decide dacă $u \in T$ revine la verificarea unui sistem de ecuaţii. Pot exista însă şi alte moduri de a decide dacă $u \in T$. De exemplu, în cazul particular în care T e o reuniune de cicli [2] (unde numerele din fiecare ciclu le scriem în baza 2 şi utilizăm vectorii ce au ca componente coeficienţii expresiilor în baza 2 ale acestor numere) în locul cuplului (H_T, S_T) din metoda claselor de resturi folosim matricea C_T ce are pe linii cîte un vector din fiecare ciclu al reuniunii. În acest caz $u \in T \Leftrightarrow u$ e linie în C_T sau se obţine dintr-o linie a lui C_T printr-un număr oarecare de deplasări ciclice.

Probleme deschise. 1°. Mecanizarea operaţiei de obţinere a sistemului de ecuaţii asociat unei clase de resturi cînd aceasta se dă prin vectorii săi, de exemplu cu reţele de tipul celor folosite în teoria codurilor [3], cap. 7.

2°. Realizarea lui T ca reuniune sau intersecţie a altor mulţimi particulare de vectori decît clasele de resturi.

Primită la redacţie la 26 octombrie 1966

Societatea de ştiinţe matematice
din Republica Socialistă România
Str. Academiei nr. 14, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. D. Ene, *Asupra pseudocorectării erorilor în teoria codurilor*. St. cerc. mat., **19**, *1* (1967).
2. J. Mac Williams, *The structure and properties of binary cyclic alphabets*. Bells Syst. Tech. J., **44**, *2*, 303–332 (1965).
3. W. W. Peterson, *Error-Correcting Codes*. M.I.T. Press and Wiley, New York, 1961.

OBSERVAŢII CU PRIVIRE LA SUBSERIILE UNEI SERII DINTR-UN SPAŢIU BANACH

DE

G. GODINI

În [1], B. Gelbaum a tratat convergenţa condiţionată şi necondiţionată a seriilor într-un spaţiu Banach E în funcţie de grupul G_∞ care va fi definit mai jos. Folosind această idee vom trata subseriile unei serii dintr-un spaţiu Banach E în funcţie de acelaşi grup G_∞ şi vom face legătura cu unele rezultate din [2] cu privire la subseriile unei serii divergente.

Fie G grupul aditiv de ordinul 2 cu topologia discretă. Fie $G_i = G$, $i = 1, 2, \ldots$, şi fie $G_\infty = \prod\limits_{1}^{\infty} G_i$ produsul cartezian înzestrat cu topologia Tihonov. Un element δ din G_∞ este deci un şir $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots)$, $\delta_i = 0$ sau 1. Dacă μ este măsura Haar pe G, $\mu(G) = 1$, atunci μ_∞ va însemna măsura produs pe G_∞ (măsura Haar normalizată).

Fie y_n, $n = 1, 2, \ldots$, un şir de elemente dintr-un spaţiu Banach E şi fie $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, un şir crescător de numere naturale. Atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_{k_n}$ se numeşte subserie a seriei (formale) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. O subserie a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ este atunci de forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n y_n$, unde $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots)$ este în G_∞ iar $\delta_n = 1$ pentru o infinitate de n, şi reciproc pentru orice $\delta \in G_\infty$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots)$ pentru care $\delta_i = 1$ pentru o infinitate de n, expresia $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n y_n$ este o subserie a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

În cele ce urmează vom lucra cu expresii de forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n y_n$, unde δ este arbitrar în G_∞ (deci fără restricţia ca $\delta_i = 1$ pentru o infinitate de n), ceea ce ne va conduce la a lua în considerare şi sume finite.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P. 71–714, BUCUREŞTI, 1967

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n y_n$ există, vom nota suma prin $y(\delta)$.

Pentru un element $\delta \in G_\infty$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots)$, fie

$$p(n, \delta) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k .$$

Atunci numerele :

$$p_1(\delta) = \liminf_{n \to \infty} \frac{p(n, \delta)}{n}$$

$$p_2(\delta) = \limsup_{n \to \infty} \frac{p(n, \delta)}{n}$$

se numesc (vezi de exemplu [2]) densitatea asimptotică inferioară și superioară a sumei $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n y_n$ în seria $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Dacă există

$$p(\delta) = \lim_{n \to \infty} \frac{p(n, \delta)}{n},$$

atunci ultimul număr se numește, [2], densitatea asimptotică a sumei $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n y_n$ în seria $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Evident, $p(\delta)$, $p_1(\delta)$ și $p_2(\delta)$ sînt numere din intervalul $[0, 1]$.

Fie $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ un șir de elemente din E. Vom defini următoarele mulțimi :

$$C = \{\delta \in G_\infty \mid y(\delta) \text{ există}\},$$

$$D(X) = \{\delta \in G_\infty \mid \sum_{1}^{\infty} X(y_n) \text{ există} ;\ X \in E^*\},$$

$$D = \bigcap_{E^*} D(X)$$

$$A_1 = \left\{\delta \in G_\infty \mid \liminf_{n \to \infty} \frac{p(n, \delta)}{n} = 0\right\},$$

$$A = \left\{\delta \in G_\infty \mid \lim_{n \to \infty} \frac{p(n, \delta)}{n} = 0\right\}.$$

Avem evident $A \subset A_1$.

Observație. Fiecare din mulțimile definite mai sus sînt nevide.

Mulțimile C, $D(X)$, D au fost introduse de B. Gelbaum [1] și el a arătat că aceste mulțimi sînt dense în G_∞, că mulțimile C, $D(X)$ sînt măsurabile și măsura lor este sau zero sau unu. Dacă D este măsurabilă, atunci și măsura ei este zero sau unu.

Vom arăta același lucru pentru mulțimile A și A_1.

PROPOZIȚIA 1. *Mulțimile A și A_1 sînt dense în G_∞.*

Demonstrație. Fie M una din aceste mulțimi și fie $\delta \in G_\infty$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots)$ un element arbitrar ales. Să arătăm că, dacă $V(\delta)$ este o vecinătate arbitrară a lui δ, fie $V(\delta) = \prod_1^\infty V_i$, $V_i \subset G_i$ și $V_i \neq G_i$ pentru $i = n_1, n_2, \ldots, n_k$, atunci există în ea un element din M. Deoarece $M \neq \emptyset$, fie $\overline{\delta} \in M$, $\overline{\delta} = (\overline{\delta}_1, \overline{\delta}_2, \ldots, \overline{\delta}_n, \ldots)$. Elementul $\alpha \in G_\infty$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ definit astfel: $\alpha_{n_i} = \delta_{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ și $\alpha_n = \overline{\delta}_n$ pentru $n \neq n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ aparține lui $V \cap M$.

PROPOZIȚIA 2. *Mulțimile A și A_1 sînt mulțimi măsurabile și măsura lor este zero sau unu.*

Demonstrație. Vom face demonstrația pentru mulțimea A, demonstrația pentru A_1 făcîndu-se asemănător. Fie

$$A_{n,m} = \left\{\delta \in G_\infty \mid \frac{p(n, \delta)}{n} \leqslant \frac{1}{m}\right\}.$$

Atunci avem:

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_{n,m}.$$

Deoarece mulțimile $A_{n,m} = \left\{\delta \in G_\infty \mid \frac{p(n, \delta)}{n} \leqslant \frac{1}{m}\right\} = \left\{\delta \in G_\infty \mid \sum_{i=1}^{n} \delta_i \leqslant \frac{n}{m} = r\right\}$

sînt măsurabile, rezultă și A măsurabilă.

A este un J_n-cilindru pentru fiecare n, unde $J_n = (n + 1, n + 2, \ldots)$, căci dacă $\delta_i = \overline{\delta}_i$ pentru $i \geqslant n + 1$, atunci $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots)$ și $\overline{\delta} = (\overline{\delta}_1, \overline{\delta}_2, \ldots, \overline{\delta}_n, \ldots)$ aparțin sau nu simultan lui A. Aplicînd legea zero-unu care spune că dacă mulțimea măsurabilă A este un J_n-cilindru pentru fiecare n, atunci măsura ei este zero sau unu [3], rezultă

$$\mu_\infty(A) = 0 \text{ sau } \mu_\infty(A) = 1.$$

TEOREMA 1. *Măsura mulțimilor A și A_1 este zero.*

Pentru demonstrația acestor teoreme avem nevoie de următoarea:

LEMĂ. *Există $\eta \in G_\infty$ cu proprietatea că oricare ar fi $\delta \in A_1$, $\delta + \eta \notin A_1$.*

Demonstrație. Demonstrația se face prin reducere la absurd. Dacă oricare ar fi $\eta \in G_\infty$ există $\delta \in A_1$ astfel ca $\eta \in A_1 - \delta \subset A_1 - A_1$ ar rezulta că

$$G_\infty \subset A_1 - A_1$$

adică $G_\infty = A_1 - A_1$ și cum $0 \in A_1$, rezultă $A_1 = G_\infty$, ceea ce este o contradicție.

Demonstrația teoremei 1. Vom arăta că $\mu_\infty(A_1) = 0$; deoarece $A \subset A_1$, va rezulta atunci și $\mu_\infty(A) = 0$. Presupunînd $\mu_\infty(A_1) = 1$ și aplicînd lema, fie $\eta \in G_\infty$ cu proprietatea că

$$A_1 \cap (\eta + A_1) = \emptyset.$$

Atunci invarianța măsurii Haar ne dă:

$$1 = \mu_\infty(G_\infty) \geqslant \mu_\infty(A_1 \cup (\eta + A_1)) = \mu_\infty(A_1) + \mu_\infty(\eta + A_1) = 2.$$

Să observăm că pentru mulţimea A o demonstraţie directă se poate face imediat ţinînd seama că A este un subgrup al lui G_∞ şi că măsura Haar este invariantă la translaţii.

COROLAR. *Dacă pentru o serie* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *avem* $C \subset A$ (*sau* $C \subset A_1$), *atunci aproape toate subseriile seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *sînt divergente.*

Faptul că pot fi îndeplinite condiţiile corolarului este asigurat de următoarele teoreme ale lui T. Salat [2] care pot fi acum formulate astfel (în [2] se consideră serii numerice) :

TEOREMA 2. *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *o serie care are proprietatea că există* $X \in E^\star$ *astfel ca*

$$1^\circ)\ X(y_n) \downarrow 0$$

$$2^\circ)\ \liminf_{n \to \infty} nX(y_n) > 0.$$

Atunci $C \subset A$ (*sau* $D \subset A$)

TEOREMA 3. *Fie* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *un şir de elemente din* E *cu proprietatea că există* $X \in E^\star$ *care îndeplineşte condiţiile* :

$$1^\circ)\ \sum_{1}^{\infty} X(y_n) = \infty,\ X(y_n) \geqslant 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

2°) *Există* s *astfel ca*

$$X(y_s) \geqslant X\ (y_{s+1}) \geqslant \ldots$$

Atunci $C \subset A_1$ (*sau* $D \subset A_1$).

Primită la redacţie la 10 decembrie 1966

Institutul de matematică al
Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. BERNARD R. GELBAUM, *Conditional and Unconditional Convergence in Banach Spaces.* Anais da Academia Brasileira de Ciências, **30** (1958).
2. TIBOR ŠALÁT, *On Subseries.* Math. Zeitschr., **85**, 209–225 (1964).
3. P. HALMOS, *Measure Theory.* New York, 1950.

ASUPRA NOMOGRAMELOR DE GEN ZERO CU DOUĂ SCĂRI REGULATE ȘI UNA PROIECTIVĂ[1])

DE

MARIA PETER-MIHOC
(Cluj)

În lucrare se cercetează clasele de ecuații (5) care se reprezintă cu nomograme cu puncte aliniate cu două scări regulate și una proiectivă. Pentru fiecare tip de nomogramă considerat se dau formulele pentru calculul parametrilor scărilor ei (7), (12), (15).

În construcția și utilizarea nomogramelor pentru rezolvarea ecuațiilor se urmărește atît rapiditatea calculului, cît și gradul de exactitate al scărilor. Din această cauză, se caută să se construiască scări de un anumit tip, de diferite module, cum sînt : scările regulate, logaritmice și proiective. Această cerință justifică cercetarea ecuațiilor care admit reprezentare nomografică de un anumit tip.

În această lucrare se cercetează clasele de ecuații care se reprezintă cu nomograme de gen zero cu două scări regulate și una proiectivă.

Se știe că trei drepte în plan, pot avea numai două poziții relativ distincte proiectiv, sau formează un triunghi, sau sînt concurente. Ecuația lui Soreau pentru cazul cînd cele trei scări formează un triunghi este :

$$\begin{vmatrix} a_1x + b_1 & a_2x + b_2 & 1 \\ c_1y + d_1 & c_2y + d_2 & 1 \\ \dfrac{e_1z + f_1}{g_1z + k_1} & \dfrac{e_2z + f_2}{g_1z + k_1} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

---

[1]) Această lucrare a fost comunicată la Sesiunea științifică a tineretului, București, 20—22 mai 1966.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P. 715–721, BUCUREȘTI, 1967

Se arată ușor că transformarea afină $X = \alpha x + \beta y + \gamma$, $Y = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1$, păstrează scările regulate. Cu ajutorul acestei transformări aducem ecuația (1) la forma :

$$\begin{vmatrix} 0 & x + a & 1 \\ y + b & 0 & 1 \\ \dfrac{cz + d}{ez + k} & \dfrac{fz + h}{ez + k} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

unde cele trei scări formează un triunghi cu două laturi situate pe axele de coordonate, sau

$$\begin{vmatrix} 0 & x + a & 1 \\ y + b & 0 & 1 \\ \dfrac{cz + d}{ez + k} & m\dfrac{cz + d}{ez + k} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

cînd cele trei scări sînt concurente, două fiind situate pe axele de coordonate.

În aceste condiții, a, b, c, d, e, h, k, m sînt parametrii scărilor nomogramelor.

Dezvoltînd membrul întîi al ecuației (2) obținem :

$$\begin{aligned} & exyz + (ae - f)yz + (be - c)xz + kxy + (bk - d)x + \\ & + (ak - h)y + (abe - bf - ac)z + (abk - bh - ad) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Această ecuație este o ecuație de ordinul 3 nomografic ai cărei coeficienți sînt funcții de parametrii scărilor date.

Se pune deci întrebarea, dacă pentru orice ecuație de ordinul trei nomografic, se pot construi nomograme cu două scări regulate și una proiectivă? Prin urmare, se caută condițiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienții unei ecuații de ordinul trei nomografic pentru a admite o astfel de reprezentare.

În acest caz, identificînd coeficienții ecuației (4) cu cei ai formei generale a ecuației de ordinul trei nomografic

$$Axyz + B_1yz + B_2xz + B_3xy + C_1x + C_2y + C_3z + D = 0 \tag{5}$$

se obține sistemul :

$$\begin{aligned} e &= A & bk - d &= C_1 \\ ae - f &= B_1 & ak - h &= C_2 \\ be - c &= B_2 & abe - bf - ac &= C_3 \\ k &= B_3 & abk - bh - ad &= D. \end{aligned} \tag{6}$$

Rezolvarea sistemului (6) de opt ecuații cu opt necunoscute ne conduce la ecuația :

$$(B_1B_3 - AC_2)b^2 - (B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD)b +$$
$$+ (C_1C_3 - B_2D) = 0$$

și la următoarele valori ale parametrilor scărilor :

$$b_{1,2} = \frac{B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD \pm}{2(B_1B_3 - AC_2)}$$
$$\frac{\pm \sqrt{(B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD)^2 - 4(B_1B_3 - AC_2)(C_1C_3 - B_2D)}}{2(B_1B_3 - AC_2)}$$

$$(7) \qquad a = \frac{B_1b - C_3}{Ab - B_2}, \; c = Ab - B_2, \; d = B_3b - C_1, \; e = A$$

$$f = \frac{B_1B_2 - AC_3}{Ab - B_2}, \quad h = \frac{(B_1B_3 - AC_2)\,b + (B_2C_2 - B_3C_3)}{Ab - B_2}, \; k = B_3.$$

Rezultă că dacă expresia :

$$(8) \qquad \Delta = (B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD)^2 - 4(B_1B_3 - AC_2)(C_1C_3 - B_2D)$$

este pozitivă, sistemul admite două soluții reale și finite, adică ecuația poate fi reprezentată prin două nomograme cu două scări regulate și una proiectivă, distincte proiectiv. Dacă discriminantul Δ este negativ, atunci nu există o reprezentare a ecuației de tipul indicat mai sus.Dacă expresia (8) este nulă, rezultă pentru parametrii scărilor proporționalitatea :

$$\frac{c}{d} = \frac{f}{h},$$

adică ecuația dată (5) se poate reprezenta printr-o nomogramă cu toate scările concurente de forma (3), parametrii scărilor calculîndu-se tot după formulele (7).

Sistemul (6) este compatibil dacă $B_1B_3 - AC_2 \neq 0$ și $Ab - B_2 \neq 0$. Dacă $Ab - B_2 = 0$ și $B_3b - C_1 \neq 0$, atunci parametrii b, c, d, e, k se calculează tot cu formulele (7), iar a, f, h cu formulele :

$$a = \frac{C_2b - D}{B_3b - C_1}, \quad f = \frac{(AC_2 - B_1B_3)b + (B_1C_1 - AD)}{B_3b - C_1},$$

$$h = \frac{C_1C_2 - B_3D}{B_3b - C_1}.$$

Dacă $B_1B_3 - AC_2 = 0$ sau $B_2B_3 - AC_1 = 0$, ecuația va fi reprezentată printr-o nomogramă cu două scări paralele, dar acest caz se va studia separat.

Dacă se schimbă scara variabilei x cu scara variabilei y, se obţin formule analoage cu (7), discriminantul avînd forma :

$$\Delta = (B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3 + AD)^2 - 4\,(B_2B_3 - AC_1)(C_2C_3 - B_1D)$$

care este identic cu (8) (vezi [3]).

Nomograma cu două scări paralele nu e distinctă din punct de vedere proiectiv de nomograma cu scările situate pe laturile unui triunghi şi nici nomograma cu toate scările paralele de nomograma cu scările concurente. Dar dacă considerăm două scări regulate, transformarea proiectivă trebuie exclusă, deoarece ea nu păstrează proprietatea de regularitate a scărilor. Deci aceste cazuri trebuie tratate separat.

În cazul nomogramei cu două scări paralele, două fiind regulate, după o transformare afină ecuaţia lui Soreau are forma :

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 0 & x + a & 1 \\ y + b & 0 & 1 \\ \dfrac{cz + d}{ez + k} & h & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltînd determinantul din membrul întîi găsim :

$$10)\qquad exyz + (ae - he)yz + (be - c)\,xz + kxy + (bk - d)x +$$
$$+ k(a - h)y + (abe - ac - beh)z + (abk - ad - bhk) = 0.$$

Prin identificarea membrului întîi al ecuaţiei de ordinul trei nomografic (5) cu membrul întîi al ecuaţiei (10), găsim următorul sistem de ecuaţii :

$$(11)\qquad \begin{aligned} e &= A, & bk - d &= C_1 \\ e(a - h) &= B_1, & k\,(a - h) &= C_2 \\ be - c &= B_2, & abe - ac - bhe &= C_3 \\ k &= B_3, & abk - ab - bhk &= D \end{aligned}$$

cu soluţia

$$a = \frac{B_3C_3 - AD}{B_2B_3 - AC_1},\quad b = \frac{C_1C_3 - B_2D}{B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD}$$

$$(12)\qquad c = \frac{B_2\,(B_2C_2 - B_1C_1) - C_3\,(B_2B_3 - AC_1)}{B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD},\quad e = A,\ k = B_3$$

$$d = \frac{C_1\,(B_2C_2 - B_1C_1) - D\,(B_2B_3 - AC_1)}{B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD},$$

$$h = \frac{B_3C_3 - AD}{B_2B_3 - AC_1} - \frac{B_1}{A}$$

pentru existenţa soluţiei de mai sus trebuie îndeplinite condiţiile

$$B_1B_3 = AC_2,\quad B_2B_3 \neq AC_1.$$

Dacă $B_1B_3 \neq AC_2$ şi $B_2B_3 = AC_1$, scara variabilei x se schimbă cu cea a variabilei y, valorile parametrilor calculîndu-se după formulele de mai sus în care B_1, C_1 se înlocuiesc cu coeficienţii B_2 respectiv C_2 şi invers.

În cazul în care nomograma are toate scările paralele, ecuaţia lui Soreau are forma :

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ a & y & 1 \\ 1 & \dfrac{dz+e}{gz+k} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

În urma dezvoltării determinantului avem :

$$gyz + (a-1)gxz + (a-1)kx + ky - adz - ae = 0. \tag{14}$$

Această ecuaţie este o ecuaţie de ordinul trei nomografic din care lipsesc termenii xyz şi xy, adică $A = 0$, $B_3 = 0$.

Prin identificarea coeficienţilor din membrul întîi al ecuaţiei (5) cu membrul întîi al ecuaţiei (14) găsim sistemul :

$$\begin{aligned} &g = B_1, && k = C_2 \\ &(a-1)g = B_2, && -ad = C_3 \\ &(a-1)k = C_1, && -ae = D \end{aligned} \tag{15}$$

pe care rezolvîndu-l obţinem soluţia :

$$a = \frac{C_1 + C_2}{C_2}, \quad d = -\frac{C_2C_3}{C_1 + C_2}, \quad e = -\frac{C_2D}{C_1 + C_2}, \quad g = B_1, \; k = C_2.$$

Pentru existenţa soluţiei acestui sistem trebuie să fie îndeplinite condiţiile :

$$B_1C_1 = B_2C_2, \quad C_2 \neq 0, \quad C_1 \neq -C_2.$$

Din ecuaţia (14) pe lîngă coeficientul termenului xyz lipseşte şi coeficientul termenului xy, tocmai cel al produsului variabilelor corespunzătoare scărilor regulate. Dacă ar lipsi coeficientul B_1, atunci ar trebui să fie îndeplinită relaţia $B_2C_2 = B_3C_3$ şi scările regulate ar fi cele ale variabilelor y şi z. Aceeaşi discuţie, dacă $B_2 = 0$.

Putem rezuma rezultatele obţinute în următoarea schemă :

Cazul I : $\Delta > 0$.

a) $B_1B_3 - AC_2 \neq 0$ şi $B_2B_3 - AC_1 \neq 0$

ecuaţia de ordinul trei nomografic se reprezintă cu ajutorul a două nomograme cu două scări regulate şi una proiectivă, distincte proiectiv ce au scările situate pe laturile unui triunghi.

b) $B_1B_3 - AC_2 \neq 0$, $B_2B_3 - AC_1 = 0$ sau $B_1B_3 - AC_2 = 0$,

$B_2B_3 - AC_1 \neq 0$

ecuaţia de ordinul trei nomografic se reprezintă cu ajutorul unei nomograme de acest tip cu două scări paralele.

c) $B_1B_3 - AC_2 = 0$ şi $B_2B_3 - AC_1 = 0$

ecuaţia de ordinul trei nomografic nu admite reprezentare nomografică de tipul dat.

Cazul II : $\Delta = 0$.

a) $B_1B_3 - AC_2 \neq 0$ şi $B_2B_3 - AC_1 \neq 0$

ecuaţia de ordinul trei nomografic admite o reprezentare nomografică printr-o nomogramă cu scările concurente.

b) $B_1B_3 - AC_2 \neq 0$ şi $B_2B_3 - AC_1 = 0$ sau $B_2B_3 - AC_1 \neq 0$ şi $B_1B_3 - AC_2 = 0$

c) $B_1B_3 - AC_2 = 0$ şi $B_2B_3 - AC_1 = 0$

în aceste cazuri ecuaţia de ordinul trei nomografic nu admite reprezentare nomografică de tipul considerat.

d) $A = 0$, $B_3 = 0$ şi $B_1C_1 = B_2C_2$ sau $B_2 = 0$ şi $B_1C_1 = B_3C_3$ sau $B_1 = 0$ şi $B_2C_2 = B_3C_3$

ecuaţia se reprezintă cu o nomogramă cu trei scări paralele.

Cazul III : $\Delta < 0$.

Ecuaţia de ordinul trei nomografic nu admite o reprezentare nomografică de tipul dat.

Toate aceste rezultate se transpun întocmai, în cazul în care în locul variabilelor x, y, z sînt funcţii de un parametru $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$.

Exemple. Să se cerceteze următoarele ecuaţii :

1°. $-xyz - yz + 2xz + xy - x + 2y + 2z + 1 = 0, \quad \Delta = 16.$

Parametrii calculaţi după formulele (7) sînt :

$$a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ c_1 = -4,\ d_1 = 3,\ e_1 = -1,\ f_1 = 0,\ h_1 = -1,$$
$$k_1 = 1,\ a_2 = 5,\ b_2 = -2,\ c_2 = 0,\ d_2 = -1,\ e_2 = -1,\ f_2 = -4,\ h_2 = 3,$$
$$k_2 = 1.$$

Ecuaţiile Soreau corespunzătoare sînt :

$$\begin{vmatrix} 0 & x+1 & 1 \\ y+2 & 0 & 1 \\ \dfrac{-4z+3}{-z+1} & \dfrac{-1}{-z+1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x+5 & 1 \\ y-2 & 0 & 1 \\ \dfrac{-1}{-z+1} & \dfrac{-4z+3}{-z+1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2°. $2xyz + 3yz + xz + xy + x + y + 2z + 1 = 0 \quad \Delta = 0.$

Parametrii scărilor nomogramei calculaţi cu ajutorul formulelor (7) sînt :

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 0,\ e = 2,\ f = -1,\ h = 0.$$

Ecuaţia lui Soreau corespunzătoare acestei ecuaţii este :

$$\begin{vmatrix} 0 & x + 1 & 1 \\ y + 1 & 0 & 1 \\ \dfrac{z}{2z + 1} & \dfrac{-z}{2z + 1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3°. $2xyz + 3yz + xz + 4xy + x + 6y + 5z + 3 = 0$

$$\Delta = 121, \qquad AC_2 = B_1B_3.$$

Parametrii scărilor nomogramei acestei ecuaţii sînt :

$$a = 7,\ b = \frac{2}{11},\ c = -\frac{7}{11},\ d = -\frac{3}{11},\ e = 2,\ h = \frac{11}{2},\ k = 4.$$

Ecuaţia lui Soreau are forma :

$$\begin{vmatrix} 0 & x + 7 & 1 \\ y + \dfrac{2}{11} & 0 & 1 \\ \dfrac{-\dfrac{7}{11}z - \dfrac{3}{11}}{2z + 4} & \dfrac{11}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4°. $2yz + xz + x + 2y + 4z + 3 = 0,\ A = B_3 = 0,\ \Delta = 0$

$$a = \frac{3}{2},\ c = 1,\ d = -\frac{4}{3},\ e = -1,\ g = 1,\ k = 1.$$

Ecuaţia lui Soreau corespunzătoare este :

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ \dfrac{3}{2} & y & 1 \\ 1 & \dfrac{-\dfrac{4}{3}z - 1}{z + 1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bal şi F. Radó, *Lecţii de nomografie*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
2. Г. Е. Джемс-Леви, В. В. Козмин, *Номограммы с равномерными прямолинейными шкалами*. Номографический сборник, нр. 2, Москва, 1964.
3. Н. А. Глаголев, *Курс номографии*. Изд. 2-е, М. Гос. Изд-во, ,,Высшая школа'', 1961.

ASUPRA UNUI MODEL ALGEBRIC AL CATEGORIILOR GRAMATICALE. II

DE

CONSTANTIN RAISCHI

Acest articol este o continuare a articolului [12]. Se introduc noţiunile de mulţime centrală şi mulţime nodală într-un graf oarecare şi se transpun în termeni de teoria grafurilor noţiunile şi proprietăţile din [11] şi [12]. Apoi se asociază claselor de distribuţie peste o mulţime de cuvinte Γ, un graf reflexiv şi tranzitiv şi se studiază proprietăţile lui.

INTRODUCERE

Noţiunea de bază folosită în cele ce urmează este noţiunea de clan într-un graf reflexiv şi tranzitiv.

Conceptul de clan a fost introdus de S. Marcus în [5], [6], [7] (a se vedea şi cap. 5 din [8] şi [9]) sub denumirea de categorie gramaticală, pentru a explica noţiunea intuitivă de categorie gramaticală. Acest concept constituie o extensiune a unui concept introdus anterior de Dobruşin, sub denumirea de categorie gramaticală elementară [3], [4]. B. H. Mayoh a extins aceste concepte, introducînd şi denumirea de clan [11].

Într-un graf reflexiv şi tranzitiv $G = (V, R)$ definit de relaţia binară, reflexivă şi tranzitivă R, pe mulţimea de vîrfuri V, nevidă, noţiunile de generator al unui clan, generator critic, familie a unui vîrf, nucleu al unui clan au fost introduse de B. H. Mayoh în [11].

Aceste noţiuni vor fi utilizate în continuare.

În cele ce urmează, prin termenul de familie-nucleu a unui clan dat se înţelege familia care este nucleul clanului dat.

Se vor utiliza noţiunile de mulţime iniţială, mulţime finală, mulţime normală, produs saturat, mulţime saturat productivă, introduse de S. Marcus în [5], [6], [7], [8], [9].

Uneori, pentru a uşura exprimarea, se foloseşte expresia de ,,clan normal'' în loc de expresia ,,clan care este o mulţime normală''.

Se mai folosesc noţiuni de teoria grafurilor după [1] şi [2].

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P. 723–738, BUCUREŞTI, 1967

Prin stabilirea analogului, în teoria grafurilor, al unora dintre proprietățile categoriilor gramaticale, se conferă acestor proprietăți o semnificație mai generală, interesînd însăși teoria grafurilor și punînd acesteia probleme noi.

MULȚIME CENTRALĂ ȘI MULȚIME NODALĂ ÎNTR-UN GRAF

În cele ce urmează se vor da cîteva proprietăți ale mulțimilor centrale și nodale într-un graf.

DEFINIȚIA 1. *Într-un graf, o mulțime A, de vîrfuri, se numește centrală, dacă orice vîrf x din A este unit printr-un arc, cu originea în x, cu orice vîrf al grafului, care nu aparține lui A.*

Un vîrf al unui graf care este mulțime centrală se numește punct central.

Un exemplu de punct central este centrul unui graf de rază 1.

DEFINIȚIA 2. *Într-un graf, o mulțime A, de vîrfuri, se numește nodală, dacă orice vîrf x, astfel încît $x \in A$, este unit printr-un arc, cu originea în x, cu orice vîrf din A.*

Un vîrf al unui graf care este mulțime nodală se numește punct nodal.

Din definiție, rezultă că un punct nodal poate fi punct de ieșire, dar nu orice punct de ieșire este punct nodal.

Din definiția mulțimii nodale, rezultă că o mulțime nodală este exterior stabilă.

PROPOZIȚIA 1. *Într-un graf, orice mulțime nodală, interior stabilă, este nucleu al grafului.*

În baza propoziției 1, rezultă că orice punct nodal al unui graf este nucleu al grafului.

Noțiunile de mulțime centrală și mulțime nodală sînt noțiuni duale, în sensul următor : dacă o mulțime este centrală în graful G, atunci ea este o mulțime nodală în graful G^*, obținut prin inversarea sensului arcelor din G, și reciproc.

PROPOZIȚIA 2. *Într-un graf, orice mulțime de vîrfuri, formată numai din puncte centrale este un subgraf simetric și complet.*

Aceasta rezultă din definiția punctului central.

Propoziția duală propoziției 2, în sensul de mai sus, este următoarea :

PROPOZIȚIA 3. *Într-un graf, orice mulțime de vîrfuri formată numai din puncte nodale este un subgraf simetric și complet.*

Unui graf finit i se poate asocia o matrice pătratică booleeană [1], care permite studierea anumitor proprietăți ale grafului.

Unei matrici pătratice booleene, finite, i se poate atașa cel puțin un graf finit.

În baza teoremei 2.1 din [2], rezultă că grafurile finite atașate unei asemenea matrici formează o clasă de grafe echivalente.

Fiecărui graf G i se poate asocia închiderea tranzitivă a sa, $\hat{G}$, care este un graf reflexiv și tranzitiv. Anumite legături care există între cele două grafuri sînt puse în evidență de următoarele două propoziții.

PROPOZIȚIA 4. *Vîrfurile care au ecartamentul finit în graful G formează un subgraf simetric și complet în graful $\hat{G}$.*

Aceasta rezultă din faptul că orice vîrf al grafului G, care are ecartamentul finit, devine un punct central al grafului $\hat{G}$.

Reciproca acestei propoziţii este, de asemenea, adevărată.

Propoziţia 5. *Raza grafului G este finită, dacă şi numai dacă raza grafului $\hat{G}$ este egală cu 1.*

Demonstraţie. Presupunem că raza grafului G este finită. Atunci, în graful G există cel puţin un vîrf x, cu ecartamentul finit. Vîrful x devine în graful $\hat{G}$ punct central. Rezultă că raza grafului $\hat{G}$ este egală cu 1.

Invers, presupunem că raza grafului $\hat{G}$ este egală cu 1. Atunci există în $\hat{G}$ un vîrf x, care este punct central. Rezultă că ecartamentul vîrfului x din G este finit. Deci raza grafului G este finită.

PROPRIETĂŢI ALE UNUI GRAF REFLEXIV ŞI TRANZITIV

În acest paragraf se transpun în termeni de teoria grafurilor noţiunile de clan, generator al unui clan, nucleu al unui clan, mulţime iniţială, mulţime finală şi proprietăţi ale clanurilor din [8], [11] şi [12].

Considerăm un graf reflexiv şi tranzitiv $G = (V, R)$ definit de relaţia binară reflexivă şi tranzitivă R pe o mulţime de vîrfuri V, nevidă.

După [6] vom spune că un subgraf C al grafului G este clan, dacă are un generator.

Propoziţia 6. *Fie un clan C în G şi un generator al său A. Generatorul A este o mulţime centrală în subgraful C, iar mulţimea $\hat{A}$ este o mulţime nodală.*

Aceasta rezultă din definiţia generatorului unui clan dată în [11].

Propoziţia 7. *Condiţia necesară şi suficientă ca un subgraf C al grafului G să fie un clan este ca C să conţină o mulţime centrală A, astfel încît $\hat{A}$ să fie inclusă în C. Mulţimea centrală A este, în acest caz, un generator al clanului C.*

Demonstraţie. Necesitatea condiţiei rezultă din propoziţia 6.

Condiţia este suficientă. Evident, $A \cup \hat{A}$ este inclusă în C. Vom arăta că această incluziune nu este strictă. Presupunem, prin reducere la absurd, că există un vîrf x în C, care nu aparţine mulţimii $A \cup \hat{A}$. Deoarece A este o mulţime centrală în C, rezultă că $A \to \{x\}$. Atunci x aparţine lui $\hat{A}$ şi am ajuns la o contradicţie.

Consecinţă. *Condiţia necesară şi suficientă ca graful G să fie clan, este ca G să conţină o mulţime centrală A.*

Aceasta rezultă din faptul că condiţia din propoziţia 7, ca mulţimea $\hat{A}$ să fie inclusă în G este îndeplinită în mod evident.

Următoarea propoziţie arată legătura care există între mulţimile centrale şi mulţimile nodale.

Propoziţia 8. *Condiţia necesară şi suficientă ca un subgraf C al grafului G să conţină o mulţime centrală este ca C să conţină o mulţime nodală.*

Demonstrație. Condiția este necesară. Presupunem că subgraful C conține o mulțime centrală A. Atunci mulțimea de vîrfuri $C \setminus A$ este o mulțime nodală. Într-adevăr, fie x un vîrf oarecare din $C \setminus A$. Deoarece A este o mulțime centrală, rezultă că orice vîrf a din A este unit printr-un arc cu originea în a, cu vîrful x.

Condiția este suficientă. Presupunem că subgraful C conține o mulțime nodală B. Atunci mulțimea $C \setminus B$ este centrală. Într-adevăr, fie a un vîrf oarecare din $C \setminus B$. Deoarece B este o mulțime nodală, vîrful a este unit printr-un arc, cu originea în a, cu oricare vîrf din B.

Această propoziție este adevărată și într-un graf oarecare.

CONSECINȚA 1. *Într-un subgraf C al grafului G, complementara unei mulțimi centrale este o mulțime nodală, iar complementara unei mulțimi nodale este o mulțime centrală.*

CONSECINȚA 2. *Orice subgraf C al grafului G, care este clan, conține o mulțime centrală și o mulțime nodală, disjuncte.*

Din propoziția 7 rezultă că într-un subgraf C al grafului G, care este clan, nu orice mulțime centrală este generator al lui C. Totuși, în graful G orice mulțime centrală este generator al lui G.

PROPOZIȚIA 9. *O condiție suficientă ca un subgraf C al grafului G să fie clan este ca C să conțină o mulțime centrală A, astfel încît $C \setminus A$ să coincidă cu mulțimea $\hat{A}$.*

Aceasta rezultă din propoziția 7.

În graful G reflexiv și tranzitiv generatorul critic, dacă există, este o mulțime centrală, care conține sau este conținută în oricare altă mulțime centrală.

Analog, generatorul critic al unui clan C, conținut în graful G, este o mulțime centrală, care conține sau este conținută în oricare altă mulțime centrală din clanul C.

Definiția mulțimii inițiale și a mulțimii finale se transpune în termeni de teoria grafurilor, astfel:

O mulțime de vîrfuri A, din graful G, este inițială, dacă nu există nici un vîrf x, care nu aparține lui A, astfel încît x să fie unit printr-un arc, cu originea în x, cu oricare vîrf din A.

O mulțime de vîrfuri A, din graful G, este finală, dacă nu există nici un vîrf x, care nu aparține lui A, astfel încît orice vîrf a din A să fie unit printr-un arc, cu originea în a, cu vîrful x.

TEOREMA 1. *Într-un graf reflexiv și tranzitiv G, o mulțime de vîrfuri A este inițială, dacă și numai dacă orice subgraf al lui G, care conține mulțimea A, nu conține nici o mulțime centrală diferită de mulțimea A.*

Demonstrație. Presupunem că A este o mulțime inițială în graful G. Admitem, prin reducere la absurd, că există un subgraf al lui G care conține mulțimea A și o mulțime centrală B, distinctă de A. Deoarece B este o mulțime centrală, există un vîrf b din B, astfel încît b să fie unit printr-un arc cu orice vîrf al mulțimii A și b să nu aparțină mulțimii A. Dar acest fapt contrazice ipoteza că A este o mulțime inițială.

Invers, presupunem că orice subgraf care conține mulțimea A nu conține nici o mulțime centrală distinctă de A. În aceste condiții, vom arăta că mulțimea A este inițială. Presupunem, prin reducere la absurd, că mulțimea A nu este inițială. Atunci există un vîrf x, care nu aparține lui A şi este unit printr-un arc, cu originea în x, cu oricare vîrf din A. Rezultă că în subgraful format cu mulţimea de vîrfuri $A \cup \{x\}$, vîrful x este punct central, adică o mulţime centrală. Astfel am ajuns la o contradicţie.

Teorema 2. *Înrt-un graf reflexiv şi tranzitiv G, o mulţime de vîrfuri A este finală, dacă şi numai dacă, orice subgraf al lui G, care conţine mulţimea A, nu conţine nici o mulţime nodală diferită de mulţimea A.*

Demonstraţia acestei teoreme este analogă demonstraţiei teoremei 1.

Consecinţa 1. *O condiţie necesară pentru ca o mulţime de vîrfuri A, conţinută în graful G să fie iniţială este ca G să nu conţină nici o mulţime centrală care nu include sau nu este inclusă în A.*

Aceasta rezultă din teorema 1, luînd drept subgraf al lui G chiar pe G.

Consecinţa 2. *O condiţie necesară pentru ca o mulţime de vîrfuri A, conţinută în graful G, să fie finală, este ca G să nu conţină nici o mulţime nodală care nu include sau nu este inclusă în A.*

Observaţia 1. Din cele de mai sus, rezultă că într-un graf reflexiv şi tranzitiv G care conţine o mulţime iniţială A, orice mulţime centrală este conţinută sau conţine pe A.

Propoziţia 10. *În graful G, o mulţime de vîrfuri care este iniţială şi centrală este un generator critic al lui G.*

Demonstraţie. Fie A o mulţime iniţială şi centrală în graful G. Orice generator al lui G este o mulţime centrală, conform propoziţiei 6. În baza observaţiei 1, orice generator este inclus sau include pe A, adică A este un generator critic.

Propoziţia 11. *Dacă graful G are o mulţime iniţială şi centrală A, atunci nu există nici o mulţime iniţială, care să nu fie inclusă în A sau să nu includă pe A.*

Din definiţie, rezultă că o mulţime iniţială conţinută în G nu este o mulţime exterior stabilă.

Propoziţia 12. *Într-un graf reflexiv şi tranzitiv, orice clan este un subgraf conex.*

Aceasta rezultă din faptul că orice clan conţine o mulţime nodală, complementară.

Consecinţă. *Un graf reflexiv şi tranzitiv, care este clan, este conex.*

Prin definiţie, o familie a unui vîrf x într-un graf reflexiv şi tranzitiv este formată din toate vîrfurile y cu proprietatea : între x şi y există un arc de la x la y şi un arc de la y la x.

Noţiunea de familie datorită lui O. S. Kulagina şi studiată în [3], [4,] [5] şi [9] corespunde, într-un graf reflexiv şi tranzitiv, noţiunii de subgraf simetric şi complet. Într-adevăr, are loc următoarea :

Propoziţia 13. *Într-un graf reflexiv şi tranzitiv G, subgraful format cu vîrfurile unei familii este simetric şi complet. Reciproc, mulţimea formată de vîrfurile unui subgraf simetric şi complet, al grafului G, este o familie.*

Demonstraţie. Din definiţia familiei rezultă că subgraful format cu vîrfurile familiei este simetric şi complet.

Reciproc, considerăm un subgraf simetric şi complet F, al lui G şi un vîrf x din F. Între orice vîrf y, din F şi vîrful x există un arc de la x la y, sau un arc de la y la x, deoarece subgraful F este complet.

Deoarece subgraful F este simetric, rezultă că între x şi y există un arc de la x la y şi un arc de la y la x. Deci mulţimea formată cu vîrfurile subgrafului F este o familie.

Această propoziţie arată că noţiunea de familie, într-un graf reflexiv şi tranzitiv, este echivalentă cu noţiunea de subgraf simetric şi complet.

În [11] nucleul unui clan, într-un graf reflexiv şi tranzitiv, a fost definit ca fiind cel mai mic generator critic al clanului.

În [12] s-a demonstrat că nucleul unui clan este o familie care generează clanul şi este unic.

Trebuie să observăm că noţiunea de nucleu al unui clan şi noţiunea de nucleu din teoria grafurilor sînt două noţiuni distincte. Astfel nucleul din teoria grafurilor este întotdeauna o mulţime interior stabilă, pe cînd nucleul unui clan este o familie, care nu este o mulţime interior stabilă.

TEOREMA 3. *Într-un graf reflexiv şi tranzitiv G, nucleul unui clan C este echivalent cu mulţimea F formată din toate punctele centrale din C, care pot genera clanul C, şi numai din ele.*

Demonstraţie. Fie F familia-nucleu a clanului C. Orice element x, $x \in F$, este un punct central al lui C, deoarece poate fi considerat drept generator al clanului. Vom arăta că nu există nici un punct central în C, care să nu aparţină lui F şi să genereze clanul C. Presupunem, prin reducere la absurd, că există în C un asemenea punct central y. În acest caz, y reprezintă un generator disjunct de F, ceea ce contrazice faptul că familia F este nucleul lui C.

Invers, considerăm mulţimea F formată din toate punctele centrale din C, care pot genera clanul C, şi numai din ele. În baza propoziţiei 2 şi a propoziţiei 13, rezultă că mulţimea F este o familie, care generează clanul C.

În baza teoremei 1 din [12], rezultă că F este familia-nucleu a clanului C.

CONSECINŢĂ. *Într-un clan C al lui G mulţimea tuturor punctelor centrale din C care sînt generatori ai clanului este unică.*

Aceasta rezultă din teorema 3 şi teorema 1 din [12].

PROPOZIŢIA 14. *Dacă un clan C, din G, are drept generator un punct central, atunci orice alt punct central din C este generator al lui C.*

Aceasta rezultă din faptul că mulţimea formată din puncte centrale este o familie.

În [12] s-a arătat că orice clan este o mulţime finală. Astfel se poate spune că duala observaţiei 1 este :

Observaţia 2. Într-un graf reflexiv şi tranzitiv G care conţine un clan C, orice mulţime nodală este conţinută sau conţine pe C.

Cu ajutorul noţiunilor de mulţime centrală, mulţime nodală, subgraf simetric şi complet, punct central, punct nodal, unele propoziţii din [11] şi [12] pot fi exprimate în termeni de teoria grafurilor. De exemplu:

PROPOZIŢIA 15. *Un subgraf simetric şi complet C are proprietatea că orice submulţime centrală din C este şi nodală, dacă şi numai dacă este o familie neproductivă.*

PROPOZIŢIA 16. *Orice clan din G, care are nucleu, este o reuniune de subgrafuri simetrice şi complete, disjuncte.*

PROPOZIȚIA 17. *Dacă C este un clan din G și $\hat{C}$ este o mulțime nevidă, atunci $\hat{C}$ este un subgraf simetric și complet.*

Noțiunea de mulțime normală, introdusă și studiată în [5], [6], [7], [8] și [9], se transpune în termeni de teoria grafurilor astfel:

Într-un graf reflexiv și tranzitiv, o mulțime de vîrfuri este normală, dacă este o reuniune de subgrafuri simetrice și complete.

LEMA 1. *Pentru ca un clan C din graful G să fie o mulțime normală, este necesar și suficient ca clanul C să aibe cel puțin un generator, care să fie o mulțime normală.*

Demonstrație. Condiția este necesară. Fie clanul C care este o mulțime normală. Presupunem, prin reducere la absurd, că C nu are nici un generator care să fie mulțime normală. În acest caz, fie A un generator al lui C.

Pentru ca mulțimea $A \cup \hat{A}$ să fie normală, este necesar să avem: $A \subset \hat{A}$.

Rezultă că mulțimea A este inclusă într-o familie F, care are proprietatea: $F \cup \hat{F} = C$. Adică, familia F este un generator al clanului C și am ajuns la o contradicție.

Suficiența condiției este evidentă.

CONSECINȚA 1.1. *Un clan din graful G, care nu este mulțime normală, nu are nici un generator, care să fie o mulțime normală.*

Aceasta rezultă în baza lemei 1.

LEMA 2. *Pentru orice mulțime A, nevidă, din graful G, există o mulțime normală M cu proprietățile:*

1. $A \subseteq M$.

2. *Dacă N este o mulțime normală care conține mulțimea A, atunci sau N conține mulțimea M, sau N coincide cu M.*

3. *Dacă $B \to A$, atunci $B \to M$; dacă $A \to B$, atunci $M \to B$.*

Demonstrație. Dacă A este o mulțime normală, atunci drept mulțimea M se consideră chiar mulțimea A, care, în acest caz, posedă proprietățile 1—3.

Dacă A nu este o mulțime normală, atunci se consideră reuniunea tuturor familiilor distincte F_i, cu proprietatea: $F_i \cap A \neq 0$, pe care o notăm: $M = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$. Vom arăta că mulțimea normală M posedă proprietățile 1—3.

Fie $x \in A$. Deoarece familia lui x este inclusă în M, rezultă că $x \in M$. Deci $A \subset M$.

Fie N o mulțime normală care conține mulțimea A. Presupunem, prin reducere la absurd, că $N \subset M$. În acest caz avem: $M = N \cup B$, unde B este o mulțime normală și $B \cap N = 0$.

Deoarece mulțimea B este formată din familii F_i, pentru care $F_i \cap A \neq 0$, rezultă că

$$B \cap A \neq 0. \tag{1}$$

Deoarece $A \subset N$ și $B \cap N = 0$, rezultă că

$$B \cap A = 0. \tag{2}$$

Relațiile (1) și (2) sînt contradictorii, ceea ce demonstrează falsitatea ipotezei.

Deci mulțimea M posedă proprietatea 2.

Considerăm o mulțime B astfel încît $B \to A$. Deoarece $F_i \cap A$ este nevidă pentru orice i, rezultă că $B \to F_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Deci $B \to M$.

În mod analog se arată că dacă $A \to B$, atunci $M \to B$.

Rezultă că mulțimea M are proprietatea 3.

Observație. Mulțimea M cu proprietățile 1—3 este unică. Aceasta arată că unei mulțimi A, oarecare, îi corespunde în mod univoc o mulțime normală cu proprietățile 1—3.

CONSECINȚA 2.1. $\hat{M} = \hat{A}$, *unde* M *și* A *sînt mulțimile din lema 2.*

Aceasta rezultă din lema 2.

Consecința 2.1 este o generalizare a propoziției 22 din [8], capitolul V.

Mulțimea M din lema 2 este numită cuvertură ([8], capitolul V).

LEMA 3. *Dacă o mulțime normală* $M = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ *este o mulțime inițială, în graful* G, *atunci există cel puțin o familie* F_m *în* M, *care să fie inițială în graful* G.

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că nu există în M nici o familie inițială. Deoarece M este inițială și este formată dintr-un număr finit de familii, rezultă că orice familie din M este dominată de cel puțin o altă familie din M. Din această cauză, cel puțin două familii distincte din M coincid și am ajuns la o contradicție.

TEOREMA 4. *Fie* G *un graf reflexiv și tranzitiv și* $F_1, F_2, \ldots, F_m$, *toate familiile inițiale conținute în* G. *Notăm cu* $C_1, C_2, \ldots, C_m$, *clanurile generate, respectiv, de* $F_1, F_2, \ldots, F_m$. *În aceste condiții, avem*:

$$G = \bigcup_{i=1}^{m} C_i;$$

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că $G = \left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\right) \cup C$, unde C este un clan distinct de clanurile C_i. Avem următoarele cazuri:

1. Clanul C este generat de o familie F. Deoarece clanul C este distinct de clanul C_i, pentru orice i, rezultă că nu există nici o familie F_k în $\bigcup_{i=1}^{m} C_i$, astfel încît $F_k \to F$. Deci F este o familie inițială, ceea ce contrazice faptul că avem numai m familii inițiale în G.

2. Clanul C este generat de o reuniune de familii distincte $M = \bigcup_{j=1}^{k} F_j$. Rezultă că M este o mulțime inițială în G. În baza lemei 3, există cel puțin o familie F în M, care să fie inițială în G. Aceasta contrazice faptul că sînt numai m familii inițiale în G.

3. Clanul C este generat de o mulțime A, care nu este normală. Acest caz nu este posibil deoarece în caz contrar trebuie ca $\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\right) \cup C'$,

unde C' este clanul normal corespunzător clanului C, în baza teoremei 5, să coincidă cu graful G, ceea ce nu se poate.

TEOREMA 5. *Într-un graf reflexiv și tranzitiv G, pentru orice clan C există un clan C' cu următoarele proprietăți :*

1. $C' \supseteq C$.
2. C' *este o mulțime normală.*
3. *Dacă C'' este un clan cu proprietățile :*
   a. $C'' \supset C$.
   b. C'' *este o mulțime normală.*

atunci C'' coincide cu clanul C' sau conține clanul C'.

4. $C' = \bigcap_{C'' \supset C} C''$, *unde clanul C'' este o mulțime normală.*

Demonstrație. Fie un clan C. Avem de cercetat următoarele două cazuri :

Cazul 1. C este o mulțime normală. În acest caz, drept clan C' se consideră chiar clanul C. În mod evident, clanul C are proprietățile 1—3. Vom arăta că are proprietatea 4.

Fie $C' = \bigcap_{C'' \supset C} C''$. Clanul C' include clanul C. Deoarece putem considera clanul C drept clan C'', rezultă că C include pe C'. Deci $C = C'$.

Cazul 2. C nu este o mulțime normală. În acest caz considerăm un generator A al clanului C. În baza consecinței 1.1, A nu este o mulțime normală. În baza lemei 2, mulțimii A îi corespunde univoc o mulțime normală M care o include. Considerăm clanul generat de mulțimea M, pe care-l notăm cu C'.

Vom arăta că oricare ar fi generatorul A' al clanului C, clanul $C_{A'}$, obținut în același mod ca clanul C', coincide cu C'. Vom nota cu N mulțimea normală care corespunde mulțimii A', în baza lemei 2.

Avem de cercetat următoarele situații :

a. $A \cap A' = 0$. În acest caz, conform propoziției 1 din [12], există o familie F astfel încît A și A' sînt incluse în F. În baza lemei 2, rezultă că $M = N$ și deci $C' = C_{A'}$.

b. $A' \supset A$. În acest caz, rezultă că $N \supset M$. Din relația $A' - A \subset \hat{A}$ rezultă că $N - M \subset \hat{M}$. Notăm $E = N - M$. Rezultă că $M \rightarrow E$, adică $E \subset \hat{M}$.

Deoarece : $N = M \cup F$, $\hat{N} = \hat{A}'$, $\hat{M} = \hat{A}$, $\hat{A} \supseteq \hat{A}'$ și $E \subset \hat{A}$, rezultă că $N \cup \hat{N} \subseteq M \cup \hat{M}$.

Deci $C' \supset C_{A'}$.

Să arătăm incluziunea contrară. Fie F_i o familie oarecare din planul C'. Trebuiesc cercetate următoarele cazuri :

α) $F_i \subset M$. Atunci $F_i \subset N \subset C_{A'}$.

β) $F_i \subset M \cap \hat{M} = M \cap \hat{A}$. Atunci $F_i \subset M \subset N \subset C_{A'}$.

γ) $F_i \subset \hat{M} = \hat{A}$. Atunci $F_i \subset C$ și deoarece $C_{A'} \supset C$, rezultă $F_i \subset C_{A'}$.

Rezultă că $C_{A'} \supset C'$ și deci $C' = C_{A'}$.

c. $A' \subset A$. La fel ca în cazul b se ajunge la concluzia $C' = C_{A'}$.

d. $A' \cap A \neq 0$. În acest caz, rezultă că : $A' - A \subset \hat{A}$, $A - A' \subset \hat{A}$, $M - N \subset \hat{N}$ şi $N - M \subset \hat{M}$. Deoarece $N - M \subset \hat{M}$, rezultă că $M \to N - M$ şi deci :

$$M - N \to N - M. \tag{1}$$

Deoarece $M - N \subset N$, rezultă că $N \to M - N$ şi deci

$$N - M \to M - N. \tag{2}$$

Deoarece mulţimile $M - N$ şi $N - M$ sînt normale, din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $N - M = M - N$, adică $N = M$. Aceasta atrage după sine $C' = C_{A'}$.

Vom arăta că clanul C' are proprietăţile 1—4.

Deoarece : $C' = M \cup \hat{M}$ şi $\hat{M} = \hat{A}$, rezultă că $C' \supset C$, adică C' are prima proprietate.

Deoarece M este o mulţime normală, în baza lemei 1, rezultă că C' este o mulţime normală.

Fie un clan C'' care este o mulţime normală şi conţine clanul C. Să arătăm că C'' sau include pe C' sau coincide cu C'.

Fie $C'' = N \cup \hat{N}$. Considerăm mulţimile $C' - \hat{A}$ şi $C'' - \hat{A}$ care sînt nevide.

Avem două cazuri :

1° $A \cap \hat{A} = 0$. Atunci $C' - \hat{A} = M$. Deoarece $C'' - \hat{A}$ este o mulţime normală care conţine mulţimea A, rezultă, în baza lemei 2, că $C'' - \hat{A} \supset C' - \hat{A}$. Deci $C' \subset C''$.

2°. $A \cap \hat{A} \subseteq F_k$. Atunci $C' - \hat{A} = M - F_k$. Mulţimea $M - F_k$ este egală cu reuniunea tuturor familiilor F_j cu proprietatea : $F_j \cap (A - F_k) \neq 0$. Deci $C' - \hat{A}$ este mulţimea normală care corespunde, în baza lemei 2, mulţimii $A - F_k$. Deoarece $C'' - \hat{A} \supset A - F_k$, rezultă, în baza lemei 2, că $C'' - \hat{A} \supset C' - \hat{A}$.

Deci $C'' \supset C'$.

Dacă N este o mulţime normală care corespunde în baza lemei 2 unui generator A' al clanului C, atunci $C'' = C'$.

Din cele de mai sus rezultă că C' are proprietatea 3.

Arătăm că

$$C' = \bigcap_{C'' \supset C} C'',$$

unde clanul C'' este o mulţime normală.

Într-adevăr, deoarece C' are proprietatea 3, orice clan C'' conţine pe C' sau coincide cu C'. Deci C' are proprietatea 4.

Observaţie. Clanul C' este unicul clan care are proprietăţile 1—4.

Se poate spune că unui clan C îi corespunde univoc un clan C' cu proprietăţile 1—4.

GRAFUL REFLEXIV ŞI TRANZITIV, CA O CATEGORIE

Fie un graf reflexiv şi tranzitiv $G = (V, R)$ definit de relaţia reflexivă şi tranzitivă R pe mulţimea de vîrfuri V, nevidă.

Un asemenea graf G poate fi prezentat ca o categorie, pe care o notăm $\mathcal{C}_G$. Obiectele categoriei $\mathcal{C}_G$ sînt elementele mulţimii V, iar mulţimea morfismelor Hom (x, y), unde x şi y aparţin lui V, este mulţimea vidă dacă nu există în graful G un arc de la x la y şi este mulţimea formată dintr-un singur element, dacă există în graful G un arc de la x la y.

Vom arăta că sînt îndeplinite axiomele definiţiei unei categorii :

1. Mulţimea Hom (x, x) este formată din unicul morfism—morfismul identic. Acest morfism există deoarece relaţia R este reflexivă.

2. În cazul în care Hom (x, y) şi Hom (y, z) sînt mulţimi nevide, şi numai în acest caz, morfismele corespunzătoare se pot compune.

Deoarece relaţia R este tranzitivă, compunerea morfismelor este asociativă.

Categoria duală categoriei $\mathcal{C}_G$ este categoria $\mathcal{C}_G^o$, care reprezintă un graf reflexiv şi tranzitiv G''. Graful G'' se obţine din graful G, inversînd sensul arcelor din G.

Noţiunilor de mulţime iniţială şi mulţime centrală, din categoria $\mathcal{C}_G$ le corespund, respectiv, noţiunile de mulţime finală şi mulţime nodală din categoria $\mathcal{C}_G^o$. Aceasta arată că duala noţiunii de mulţime iniţială este noţiunea de mulţime finală, iar duala noţiunii de mulţime centrală este noţiunea de mulţime nodală.

Noţiunea de familie în $\mathcal{C}_G$ are ca duală tot noţiunea de familie.

Duala noţiunii de mulţime interior stabilă din $\mathcal{C}_G$ este chiar noţiunea de mulţime interior stabilă. Deci noţiunile de familie şi mulţime interior stabilă sînt noţiuni autoduale.

În baza afirmaţiilor de mai sus, se poate spune că din teorema 1 prin dualizare se obţine teorema 2 ; că observaţia 2 este duală observaţiei 1.

Pentru orice obiect x din categoria $\mathcal{C}_G$, noţiunea de produs saturat introdusă în [5] şi [8], coincide cu mulţimea obiectelor cît, corespunzătoare lui x. Noţiunea duală produsului saturat este noţiunea de mulţime saturat productivă, introdusă în [5] şi [8]. Pentru un obiect x, mulţimea saturat productivă, corespunzătoare, coincide cu mulţimea tuturor subobiectelor lui x.

Considerăm o mulţime A de obiecte din $\mathcal{C}_G$. Pentru fiecare x din A notăm cu P_x mulţimea tuturor obiectelor cît, corespunzătoare lui x.

În aceste condiţii, produsul saturat al mulţimii A coincide cu intersecţia mulţimilor P_x, unde $x \in A$.

Prin dualizare, se obţine că mulţimea saturat productivă corespunzătoare lui A, coincide cu intersecţia mulţimilor S_x, $x \in A$, unde S_x este mulţimea tuturor subobiectelor, corespunzătoare lui x.

GRAFUL ASOCIAT CLASELOR DE DISTRIBUȚIE

Fie Γ o mulțime de cuvinte și Φ mulțimea frazelor marcate peste Γ. Peste Γ considerăm relația de dominare definită în [5].

Considerăm clasele de distribuție peste Γ definite cu ajutorul relației de dominare. Dacă numărul lor este finit, atunci ele formează o partiție a lui Γ.

Fie graful $\mathbf{G} = (V, R)$, unde V este mulțimea claselor de distribuție peste Γ, iar R este relația de dominare între clasele de distribuție.

Din modul în care a fost definit graful $\mathbf{G}$, rezultă că orice vîrf al grafului reprezintă o clasă de distribuție peste Γ, și orice clasă de distribuție peste Γ este reprezentată printr-un vîrf în graful $\mathbf{G}$.

Vom numi graful $\mathbf{G}$, *graful asociat claselor de distribuție peste* Γ.

Deoarece noțiunea de clasă de distribuție peste Γ este echivalentă cu noțiunea de familie peste Γ, pentru ușurința exprimării vom folosi, în cele ce urmează, termenul de familie în locul termenului de clasă de distribuție.

În continuare vom da cîteva caracterizări și proprietăți ale grafului asociat claselor de distribuție peste Γ.

Din modul în care a fost definit, rezultă că graful $\mathbf{G}$ este reflexiv și tranzitiv. O proprietate caracteristică a grafului $\mathbf{G}$ este următoarea : oricare două vîrfuri ale grafului $\mathbf{G}$ sînt unite printr-un arc cel mult într-un sens.

PROPOZIȚIA 18. *Presupunem graful* $\mathbf{G}$ *finit. Necesar și suficient pentru ca un vîrf al grafului* $\mathbf{G}$ *să aibe valență egală cu 1 este ca vîrful să reprezinte o familie inițială.*

Demonstrație. Condiția este necesară. Presupunem că un vîrf x al grafului $\mathbf{G}$ reprezintă o familie inițială. Presupunem, prin reducere la absurd, că valența vîrfului x este mai mare ca 1. În acest caz, există cel puțin un vîrf y distinct de x, care este unit printr-un arc cu vîrful x. Rezultă că există o familie — familia reprezentată de vîrful y — care domină familia reprezentată de vîrful x. Aceasta contrazice faptul că familia reprezentată de vîrful x este o familie inițială.

Condiția este suficientă. Fie x un vîrf din graful $\mathbf{G}$, care are valența 1. În acest caz, nu există nici un vîrf y, distinct de x, care să fie unit printr-un arc cu vîrful x. Adică, nu există nici o familie care să domine familia reprezentată de vîrful x. Deci vîrful x reprezintă o familie inițială.

Din propoziția 18 rezultă că un vîrf din graful $\mathbf{G}$ este o mulțime inițială, dacă și numai dacă reprezintă o familie inițială.

Propoziția duală propoziției 18 este următoarea :

PROPOZIȚIA 19. *Dacă graful* $\mathbf{G}$ *este finit, atunci necesar și suficient pentru ca un vîrf al grafului* $\mathbf{G}$ *să aibe gradul egal cu 1 este ca vîrful să reprezinte o familie finală.*

Din propoziția 19 rezultă că un vîrf din graful $\mathbf{G}$ este o mulțime finală, dacă și numai dacă reprezintă o familie finală.

Deoarece graful $\mathbf{G}$ este reflexiv, el are circuite de lungime 1.

LEMA 4. *Graful* $\mathbf{G}$ *nu are circuite de lungime mai mare ca 1.*

Demonstrație. Să presupunem prin reducere la absurd, că graful $\mathbf{G}$ admite un circuit de lungime m, : $x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}, x_m = x_1$, unde $m > 1$.

Din tranzitivitatea relației R rezultă că familiile F_i și F_j, reprezentate, respectiv, de vîrful x_i și vîrful x_j, coincid pentru orice $1 \leqslant i, j \leqslant m$.

TEOREMA 6. *Dacă graful* **G** *este finit, atunci există cel puțin un vîrf în* **G**, *care reprezintă o familie inițială.*

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că în graful **G** nu există nici un vîrf care să reprezinte o familie inițială. Rezultă, în baza propoziției 18, că în graful **G** nu există nici un vîrf care să aibă valența egală cu 1. Această situație este posibilă numai dacă există în graful **G** circuite de lungime mai mare decît 1. Datorită lemei 4, am ajuns la o contradicție.

CONSECINȚĂ. *Dacă graful* **G** *este finit, există cel puțin o categorie gramaticală elementară peste* Γ.

Prin dualizare, din teorema 6, se obține următoarea teoremă :

TEOREMA 7. *Dacă graful* **G** *este finit, atunci există cel puțin un vîrf în* **G**, *care reprezintă o familie finală.*

Teoremele 6 și 7 arată că peste Γ există cel puțin o categorie gramaticală elementară și cel puțin o categorie gramaticală normală.

PROPOZIȚIA 20. *Presupunem că graful* **G** *este finit și are* n *vîrfuri. Necesar și suficient pentru ca un vîrf al grafului* **G** *să fie punct nodal este ca vîrful să aibă valența* n.

Aceasta rezultă din definiția punctului nodal.

PROPOZIȚIA 21. Dacă *graful* **G** *are o mulțime nodală* A, *ca nucleu în sensul teoriei grafurilor, atunci mulțimea* A *este unicul nucleu al grafului* **G**.

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că mai există un alt nucleu B, distinct de A, al grafului **G**. Fie $x \in B - A$. Deoarece A este o mulțime nodală, rezultă că familia reprezentată de vîrful x domină reuniunea de familii, reprezentată de mulțimea A. Deoarece B este o mulțime exterior stabilă, rezultă că există un vîrf y în A, astfel încît familia reprezentată de vîrful y să domine familia reprezentată de vîrful x. Rezultă că familiile, reprezentate, respectiv, de vîrful x și vîrful y, coincid. Deci vîrful x coincide cu vîrful y și am ajuns la o contradicție.

TEOREMA 8. *Un subgraf* C *al grafului* **G** *este clan, dacă și numai dacă reprezintă o categorie gramaticală normală generată de o reuniune de familii.*

Demonstrație. Presupunem că subgraful C este clan. În mod evident el reprezintă o categorie gramaticală $\mathfrak{G}$. Această categorie este normală, deoarece este formată din reuniunea familiilor, care sînt reprezentate de vîrfurile subgrafului C.

Deoarece mulțimea centrală care generează clanul C este formată dintr-o mulțime de vîrfuri, care reprezintă familii, rezultă că această categorie gramaticală este generată de o reuniune de familii.

Reciproc, presupunem că avem o categorie gramaticală normală $\mathfrak{G}$ peste Γ, generată de o reuniune de familii F. În graful **G**, $\mathfrak{G}$ reprezintă un subgraf C. Deoarece vîrfurile din **G**, care reprezintă reuniunea F, formează o mulțime centrală A cu proprietatea $\hat{A} \subset C$, atunci, conform propoziției 2, subgraful C este clan.

Teorema 9. *O condiție necesară și suficientă pentru ca un subgraf C al grafului* $\mathbf{G}$ *să reprezinte o categorie gramaticală normală, generată de o familie, este ca subgraful C să aibe un punct central, ca generator.*

Demonstrație. Condiția este necesară. Presupunem că subgraful C reprezintă o categorie gramaticală normală, generată de o familie F. Atunci, conform teoremei 8, subgraful C este un clan. Vîrful subgrafului C care reprezintă familia F este un punct central, care generează clanul C.

Condiția este suficientă. Presupunem că subgraful C are un punct central, ca generator. Deci C este un clan. Conform teoremei 8, C reprezintă o categorie gramaticală normală $\mathcal{G}$. Un generator al lui $\mathcal{G}$ este familia F, reprezentată de punctul central al clanului C.

Teorema 9 stabilește echivalența dintre proprietățile clanurilor cu familie-nucleu stabilite în [12] și proprietățile generale ale categoriilor gramaticale generate de o familie, în sensul că orice proprietate a clanurilor cu familie-nucleu este proprietate a categoriilor gramaticale generate de o familie și reciproc.

Teorema 10. *O condiție necesară și suficientă pentru ca un subgraf C al grafului* $\mathbf{G}$ *să reprezinte o categorie gramaticală elementară este ca subgraful C să fie un clan generat de un punct central care este o mulțime inițială în* $\mathbf{G}$.

Demonstrație. Condiția este necesară. Presupunem că subgraful C reprezintă o categorie gramaticală elementară $\mathcal{G}$ generată de o familie inițială F. În baza teoremei 9, C este un clan care are un punct central x ca generator. Deoarece x reprezintă o familie inițială, rezultă că x este o mulțime inițială în $\mathbf{G}$.

Condiția este suficientă. În baza teoremei 9, un subgraf C care are ca generator un punct central reprezintă o categorie gramaticală $\mathcal{G}$ generată de o familie. Dacă presupunem că punctul central reprezintă o mulțime inițială, atunci familia reprezentată de acest punct este o familie inițială, care generează pe $\mathcal{G}$.

Consecință. *Un subgraf C al grafului* $\mathbf{G}$ *care reprezintă o categorie gramaticală elementară, generată de o familie inițială F are un singur punct central — vîrful care reprezintă familia F —, iar orice mulțime centrală distinctă de punctul central este formată din cel puțin două vîrfuri distincte și conține punctul central.*

Aceasta rezultă din teorema 10 și propoziția 6.

În baza teoremei 10, se poate spune că numărul categoriilor gramaticale elementare peste Γ este dat de numărul vîrfurilor din $\mathbf{G}$ care, fiecare în parte, reprezintă o mulțime inițială în graful $\mathbf{G}$.

Dacă presupunem că numărul claselor de distribuție peste Γ este finit, atunci graful $\mathbf{G}$ este finit și reciproc.

Propoziția 22. *Dacă graful* $\mathbf{G}$ *este finit, atunci numărul clanurilor generate de puncte centrale inițiale este finit și graful* $\mathbf{G}$ *este egal cu reuniunea acestor clanuri.*

Demonstrație. Deoarece graful **G** este finit, rezultă că numărul vîrfurilor care reprezintă familii inițiale peste Γ este finit și deci numărul clanurilor generate de puncte centrale inițiale este finit.

Partea a doua a propoziției rezultă din teorema 4.

CONSECINȚĂ. Dacă *graful* **G** *este finit, atunci numărul categoriilor gramaticale elementare peste* Γ *este finit.*

Aceasta rezultă din propoziția 22 și teorema 10.

PROPOZIȚIA 23. *Considerăm toate clanurile din* **G** *care reprezintă categorii gramaticale elementare peste* Γ. *Dacă aceste clanuri sînt în număr finit și dacă fiecare clan reprezintă o reuniune finită de familii, atunci graful* **G** *este finit.*

Aceasta rezultă în baza teoremei 4.

GRAFUL ASOCIAT CLASELOR DE DISTRIBUȚIE ÎM SENS LARG

Fie Γ o mulțime de cuvinte și L o limbă peste Γ. Considerăm clasele de distribuție în sens larg definite în [9], formate din fraza peste Γ. Două fraze x și y sînt în aceeași clasă de distribuție dacă pentru orice pereche $\langle u, v\rangle$ de fraze avem $uxv \in L$, $uyv \in L$ sau $uxv \notin L$, $uyv \notin L$.

În cele ce urmează vom considera graful atașat claselor de distribuție în sens larg, pe care îl vom nota prin $\mathbf{G}^\star$.

Graful $\mathbf{G}^\star$ este reflexiv și tranzitiv. Oricare două vîrfuri ale grafului $\mathbf{G}^\star$ sînt unite cel mult într-un sens, printr-un arc.

Datorită acestor caracteristici ale grafului $\mathbf{G}^\star$, toate proprietățile pe care le are graful **G** le are și graful $\mathbf{G}^\star$.

PROPOZIȚIA 24. *Dacă* L *este o limbă, peste* Γ, *cu un număr finit de stări, atunci există cel puțin o categorie gramaticală elementară formată din fraze peste* Γ.

Aceasta rezultă din teoremele 6 și 10.

TEOREMA 11. *O condiție necesară și suficientă pentru ca o limbă* L, *peste* Γ, *să fie cu un număr finit de stări este ca graful asociat claselor de distribuție în sens larg să fie finit.*

În baza propoziției 23, o condiție suficientă pentru ca o limbă L, peste Γ, să fie cu un număr finit de stări este dată de :

PROPOZIȚIA 25. *Dacă numărul categoriilor gramaticale elementare formate din fraze peste* Γ *este finit și dacă fiecare categorie gramaticală elementară este formată dintr-un număr finit de clase de distribuție în sens larg, atunci limba* L *este cu un număr finit de stări.*

Teorema 4 aplicată la graful $\mathbf{G}^\star$ are următorul enunț :

PROPOZIȚIA 26. *Fie* L *o limbă peste* Γ *cu un număr finit de stări. În aceste condiții graful* $\mathbf{G}^\star$ *asociat claselor de distribuție în sens larg coincide cu reuniunea tuturor clanurilor care reprezintă categorii gramaticale elementare formatė din fraze peste* Γ.

Primită la redacție la 21 noiembrie 1966

Facultatea de matematică și mecanică
a Universității din București,
Str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. Claude Berge, *Théorie des graphes et ses applications.* Dunod, Paris, 1957.
2. F. Harary, R. Z. Norman, D. Cartwright, *Structural Models. An introduction to the theory of directed graphs.* In John Wiley & Sons, Inc. New York-London-Sydney, 1965.
3. Р. Л. Добрушин, *Элементарная грамматическая категория.* Бюллетень Обьединения по проблемам машинного перевода, *5*, 19—21 (1957).
4. Р. Л. Добрушин, *Опыт определения понятия грамматической категории.* Тезисы Конференции по машинному переводу (15—21 мая 1958 года), Москва 1958, стр. 37.
5. Solomon Marcus, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire* I. Revue de mathématiques pures et appliquées, **7**, 91—107 (1962).
6. Solomon Marcus, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire II.* Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, **8**, *3—4*, 323—329 (1962).
7. Solomon Marcus, *Об одной логической модели элементарной грамматической категории. III*, Revue de mathématiques pures et appliquées, vol. 7, 1962, nr. 4, p. 683—691.
8. Solomon Marcus, *Lingvistică matematică. Modele matematice în lingvistică.* Ed. didactică și pedagogică, București, 1963.
9. Solomon Marcus, *Introduction mathématique à la Linguistique structurale*, Dunod, Paris, 1967.
10. Solomon Marcus, *Algebraic Linguistics* ; *Analytical Models.* Academic Press Inc., New York, 1967.
11. Brian H. Mayoh, *Simple structures defined on a transitive and reflexive graph.* Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées, **XI**, *1* (1966).
12. Constantin Raischi, *Asupra unui model algebric al categoriiler gramaticale.* St. cerc. mat, **19** (1967).

CONTRIBUȚII LA STUDIUL ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP PARABOLIC

VII. POLINOAME CALORICE ȘI TRANSFORMĂRI PAUL APPELL

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ și PAUL COCÂRLAN

Pentru o soluție v a ecuației căldurii (1) se determină transformările (2) care satisfac condițiile (3), (4), (5). Autori le numesc transformări Paul Appell. Pentru v polinom caloric $P_{(m)}$, de grad $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, se studiază atît proprietăți ale lui $P_{(m)}$ cît și ale funcției asociate $w_{(m)}$.

Se stabilește legătura cu polinoamele Hermite. Teorema 7.1 arată că șirurile de funcții $P_{(m)}$ și $W_{(m)}$ sînt ortogonale.

1. Fie $v(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta)$ o soluție a ecuației căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2} \tag{1}$$

cu variabilele spațiale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $n > 1$, definite într-un domeniu $D \subset R^n \times R_+$. Ne propunem să determinăm transformările

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ \beta &= \beta(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \end{aligned} \tag{2}$$

definite în $D' \subset D$ astfel încît funcția w definită în D' de:

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \mu(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\, v(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta) \tag{3}$$

cu

$$\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{4t}\right), \tag{4}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P. 739–746, BUCUREȘTI, 1967

să fie, în D', o soluţie a ecuaţiei

$$(5)\qquad \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2}.$$

Pentru $n=1$, o transformare particulară (2) a fost găsită de Paul Appell [1], din acest motiv vom numi transformările (2) care satisfac condiţiile (3), (4) şi (5), transformări Paul Appell.

Într-un memoriu recent, P. C. Rosenbloom şi D. V. Widder [2] studiază, tot în cazul $n=1$, proprietăţile funcţiilor w cu v polinoame calorice.

2. Înlocuind pe (3) în (5) şi ţinînd seama că μ verifică ecuaţia (5), obţinem, folosind sumarea în raport cu indicii care se repetă într-un monom, pentru α_i, β condiţiile:

$$(6)\qquad \left(-\frac{x_j}{t}\frac{\partial\alpha_k}{\partial x_j}+\frac{\partial^2\alpha_k}{\partial x_j\partial x_j}-\frac{\partial\alpha_k}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha_k\partial\alpha_i}\frac{\partial\alpha_k}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}=0$$

cu $i,\ j,\ k=1,\ 2,\ldots,\ n+1,\ \beta=\alpha_{n+1}$.

Considerînd pe $\frac{\partial v}{\partial\alpha_k}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha_k\partial\alpha_j}$, $k\neq j$, independente şi ţinînd seama de (1) avem următoarea:

TEOREMA 2.1. *Fie $w(x_1, x_2,\ldots, x_n, t)$ o soluţie a ecuaţiei (5) definită în $D\subset R^n\times R_+$ care se poate scrie sub forma (3) cu α_i, $\beta\in C^2$ în $D'\subset D$. Condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească funcţiile α_i, β în D' pentru ca $v(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n, \beta)$ să verifice (1), sînt următoarele:*

$$(7)\qquad -\frac{x_j}{t}\frac{\partial\alpha_k}{\partial x_j}+\frac{\partial^2\alpha_k}{\partial x_j\partial x_j}-\frac{\partial\alpha_k}{\partial t}=0,\qquad k=1,\ 2,\ldots,\ n$$

$$(8)\qquad \frac{x_j}{t}\cdot\frac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial x_j}-\frac{\partial^2\alpha_{n+1}}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial t}=\frac{\partial\alpha_k}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_k}{\partial x_j},\qquad k=1,\ 2,\ldots,\ n$$

$$(9)\qquad \frac{\partial\alpha_k}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}=0,\qquad k\neq i=1,\ 2,\ldots,\ n+1.$$

În relaţiile (8) nu se însumează în raport cu k, numărul lor este deci n.

3. Sînt importante pentru aplicaţii transformările următoare:

$$(10)\qquad \begin{aligned}\alpha_k&=\frac{1}{t}a_{kl}x_l,\qquad k=1,\ 2,\ldots,\ n\\ \beta&=-\frac{b}{t}.\end{aligned}$$

Se observă imediat că relaţiile (7) sînt verificate identic, iar (8) şi (9) conduc la

$$a_{kj}a_{lj}=\begin{cases}b, & \text{pentru } k=l\\ 0, & \text{pentru } k\neq l.\end{cases}$$

Putem aşadar să enunţăm

TEOREMA 3.1. *Transformările*

$$\alpha_k = \frac{1}{t} a_{kl} x_l, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$
$$\beta = -\frac{1}{t}$$

satisfac condiţiile (*3*) *şi* (*5*) *dacă vectorii*

$$a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}), \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

sînt ortonormali.

Pentru $n = 1$, obţinem transformarea lui Paul Appell

$$\alpha = \frac{x}{t}, \quad \beta = -\frac{1}{t}$$

şi în acest caz particular w este dat de :

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \cdot v\left(\frac{x}{t}, -\frac{1}{t}\right).$$

4. Să impunem funcţiilor α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, de a fi omogene de grad zero în toate variabilele. În această situaţie ecuaţiile (7) se scriu

$$\Delta \alpha_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{13}$$

deci $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt funcţii armonice în $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Condiţiile (9) conduc la

$$(\text{grad}\ \alpha_k, \text{grad}\ \alpha_i) = 0, \qquad k \neq i, \tag{14}$$

gradientul fiind luat în raport cu variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Prin urmare n-suprafeţele definite de ecuaţiile

$$z_k = \alpha_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \in D'$$

formează un sistem n-ortogonal în raport cu variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, t fiind considerat parametru.

Pentru fiecare din soluţiile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ale sistemului (13) şi (14), din ecuaţiile (8) obţinem şi pe α_{n+1}.

În particular, dacă

$$(\text{grad}\ \alpha_k, \text{grad}\ \alpha_i) = \delta_{ij},$$

(8) se reduce la o ecuaţie de ordinul doi de tip eliptic, în α_{n+1}.

5. Să căutăm pentru ecuaţia (5) soluţia de forma [4] :

$$u = f(w), \quad w = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_n x_n + \varphi t, \tag{15}$$

unde θ_i, φ sînt numere hipercomplexe. Derivînd şi înlocuind în (5) obţinem pentru θ_i, φ ecuaţia caracteristică

$$\varphi = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_n^2,$$

iar f este definit de ecuaţia diferenţială

$$f''(\omega) = f'(\omega),$$

deci soluţiile căutate sînt de forma

$$u = \exp\,[\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_n x_n + t(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_n^2)] \tag{16}$$

în afara unei constante aditive hipercomplexe, arbitrare.

DEFINIŢIA 5.1. Se numeşte polinom caloric de indici $m_1, m_2, \ldots m_n$ în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ coeficientul $P_{(m)}(x, t) = P_{m_1, m_2, \ldots, m_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ al lui $\dfrac{\theta_1^{m_1}\theta_2^{m_2} \ldots \theta_n^{m_n}}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!}$ din dezvoltarea

$$\exp(\omega) = 1 + \frac{\omega}{1!} + \frac{\omega^2}{2!} + \ldots + \frac{\omega^p}{p!} + \ldots \tag{17}$$

cu

$$\omega = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_n x_n + (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_n^2) \cdot t \tag{18}$$

Fie

$$P_{m_i}(x_i, t)$$

polinomul caloric de grad m_i, în raport cu variabilele x_i, t, adică coeficientul lui $\dfrac{\lambda^{m_i}}{m_i!}$ din dezvoltarea

$$\exp(\lambda x_i + \lambda^2 t)$$

polinom ce apare în studiul ecuaţiei căldurii (5), cu $n = 1$.

TEOREMA 5.1. *Polinomul* $P_{(m)}(x, t)$ *este dat de*

$$P_{m_1}(x_1, t) \cdot P_{m_2}(x_2, t) \ldots P_{m_n}(x_n, t). \tag{19}$$

Demonstraţie. Putem scrie

$$\exp\,\omega = \prod_{i=1}^{n} \exp(x_i\,\theta_i + t\theta_i^2)$$

cu ω dat de (18). Deoarece θ_i sînt independenţi, rezultă imediat (19). Avem :

$$P_{m_i}(x_i, t) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m_i}{2}\right]} \frac{x_i^{m_i-2k}}{(m_i - 2k)!} \cdot \frac{t^k}{k!}$$

deci

$$P_{(m)}(x, t) = \sum_{k=0}^{p} \left[\sum_{k_i} \frac{1}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \cdot \frac{x_1^{m_1-2k_1}}{(m_1 - 2k_1)!} \cdots \frac{x_n^{m_n-2k_n}}{(m_n - 2k_n)!} \right] t^k \tag{20}$$

unde suma din paranteză se întinde la toţi indicii

$$k_1 \geqslant 0, k_2 \geqslant 0, \ldots, k_n \geqslant 0 \text{ şi } k_1 \leqslant \left[\frac{m_1}{2}\right], k_2 \leqslant \left[\frac{m_2}{2}\right], \ldots, k_n \leqslant \left[\frac{m_n}{2}\right]$$

cu $\left[\frac{m_i}{2}\right]$ partea întreagă din numărul raţional $\frac{m_i}{2}$, iar p este

$$p = \left[\frac{m_1}{2}\right] + \left[\frac{m_2}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{m_n}{2}\right]$$

şi $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Din expresia (20) rezultă

TEOREMA 5.2. *Polinomul caloric $P_{(m)}(x, t)$ este omogen de gradul $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ în nedeterminatele $x_1, x_2, \ldots, x_n, t^{\frac{1}{2}}$.*

Deoarece exp (ω), cu ω dat de (18), este soluţie a ecuaţiei (5) şi cum $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ sînt arbitrare, avem

TEOREMA 5.3. *Polinoamele $P_m(x, t)$ pentru orice $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, $m_1 \geqslant 0$, $m_2 \geqslant 0, \ldots, m_n \geqslant 0$ sînt soluţii ale ecuaţiei (5).*

6. După cum se ştie, polinoamele lui Hermite, $H_m(x)$, sînt definite de

$$H_m(x) = (-1)^n e^{x^2} D^m e^{-x^2}$$

sau de

$$e^{2zx - z^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} H_m(x).$$

Pentru ecuaţia căldurii într-o singură variabilă spaţială x_i, avem relaţia:

$$P_{m_i}(x_i, t) = (-t)^{\frac{m_i}{2}} \cdot H_{m_i}\left(\sqrt{\frac{x_i^2}{-4t}}\right)$$

de unde rezultă imediat folosind relaţia (20).

TEOREMA 6.1. $P_{(m)}(x, t) = (-t)^{\frac{m}{2}} \cdot H_{m_1}\left(\sqrt{\frac{x_1^2}{-4t}}\right) \ldots H_{m_n}\left(\sqrt{\frac{x_n^2}{-4t}}\right)$.

Această teoremă stabileşte legătura între polinoamele calorice şi produse de polinoame Hermite.

DEFINIŢIA 6.1. Numim polinom Hermite în n variabile şi indici $m_1, m_2, \ldots, m_n$, polinomul $H_{(m)}(x) = H_{m_1, m_2, \ldots, m_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definit de:

$$H_{(m)}(x) = (-1)^m e^{r^2} D_1^{m_1} D_2^{m_2} \ldots D_n^{m_n} e^{-r^2}, \tag{22}$$

unde

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

Rezultatul din teorema 6.1 cît şi (22) ne conduce imediat la

TEOREMA 6.2. *Avem relaţia*

$$H_{(m)}(x) = H_{m_1}(x_1)\, H_{m_2}(x_2) \ldots H_{m_n}(x_n). \tag{23}$$

Relaţia (21) şi teorema 6.1 ne dă:

TEOREMA 6.3. *Avem*

$$(24)\quad P_m(x,t) = (-t)^{\frac{m}{2}} H_{m_1, m_2, \ldots, m_n}\left(\sqrt{\frac{x_1^2}{-4t}}, \sqrt{\frac{x_2^2}{-4t}}, \ldots, \sqrt{\frac{x_n^2}{-4t}}\right).$$

Se ştie [3] ¹) că polinoamele lui Hermite într-o variabilă formează un sistem ortogonal de polinoame de pondere e^{-x^2}, adică avem

$$(25)\qquad \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m \neq n, \\ n!\, 2^n, & \text{dacă } m = n. \end{cases}$$

Cu notaţiile $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n = \int_{\Omega_\infty} dx.$$

Folosind (23) obţinem imediat

TEOREMA 6.4. *Avem relaţia integrală*

$$(26)\quad \pi^{\frac{m}{2}} \int_{\Omega_\infty} e^{-r^2} H_{(m)}(x, t) H_{(s)}(x, t) dx = m_1!\, m_2! \ldots m_n!\, 2^m\, \delta_{s_1 s_2 \ldots s_n}^{m_1 m_2 \ldots m_n},$$

unde $\delta_{s_1 \ldots s_n}^{m_1 \ldots m_n} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } m_1 = s_1,\ m_2 = s_2,\ m_n = s_n \\ 0, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$

7. Să revenim la transformările (12) în care vectorii $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$ sînt ortonormali. Pentru simplitate alegem de exemplu sistemul

$$e_k = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \ldots, \delta_{kn}),$$

unde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

care ne conduce la transformarea

$$(27)\qquad \begin{aligned} \alpha_k &= \frac{x_k}{t}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \\ \beta &= -\frac{1}{t}. \end{aligned}$$

În acest caz înlocuind în (3) v cu $P_{(m)}\left(\frac{x}{t}, -\frac{1}{t}\right)$, obţinem :

$$(28)\qquad W_{(m)}(x, t) = \mu(x, t) P_{(m)}\left(\frac{x}{t}, -\frac{1}{t}\right)$$

şi conform teoremei 5.2,

$$(29)\qquad \begin{aligned} &W_{m_1, m_2 \ldots m_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \\ &= t^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{r^3}{4t}} \cdot t^{-m} P_{m_1, m_2, \ldots, m_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, -t) \end{aligned}$$

---

¹) Pag. 659.

sau, folosind teorema 6.3,

$$(30)\qquad \begin{aligned} &W_{m_1, m_2 \ldots m_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \\ &= t^{-\frac{n}{2}-m}\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}\, t^{\frac{m}{2}} H_{m_1, m_2, \ldots, m_n}\left(\sqrt{\frac{x_1^2}{4t}}, \sqrt{\frac{x_2^2}{4t}}, \ldots, \sqrt{\frac{x_n^2}{4t}}\right) \end{aligned}$$

deci

$$(30')\qquad W_{(m)}(x, t) = \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}} \cdot t^{-\frac{m+n}{2}} \cdot H_{(m)}\left(\sqrt{\frac{x^2}{4t}}\right).$$

DEFINIŢIA 7.1. Vom numi funcţiile $W_{(m)}(x, t)$, date de (28) sau (30′), *funcţiile asociate* mulţimii polinoamelor calorice.

Din consideraţiile anterioare rezultă că mulţimea $\{W_m(x, t)\}$ reprezintă o clasă de soluţii ale ecuaţiei (5) care se obţin, plecînd de la mulţimea polinoamelor calorice (soluţii ale ecuaţiei (5)), cu ajutorul transformării (3). Vom arăta acum că mulţimea funcţiilor asociate este ortogonală pe mulţimea polinoamelor calorice. Vom enunţa acest rezultat sub forma următoarei teoreme:

TEOREMA 7.1. *Avem relaţia integrală*:

$$\int_{\Omega_\infty} W_{(m)}(x, t) P_{(s)}(x, -t)\mathrm{d}x = m_1!\, m_2! \ldots m_n!\; 2^{m+n} \pi^{\frac{2}{m}}\, \delta_{s_1, s_2 \ldots s_n}^{m_1, m_2 \ldots m_n}.$$

Într-adevăr, ţinînd seama de (30) şi (24), avem

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\infty} W_{(m)}(x, t) P_{(s)}(x, -t)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} W_{m_1 m_2 \ldots m_n}(x_1, x_2, \ldots \\ &\quad \ldots, x_n, t) P_{s_1, s_2 \ldots s_n}\, P(x_1, x_2, \ldots, x_n, -t)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}} t^{-\frac{m}{2}} H_{m_1 m_2, \ldots, m_n}\left(\sqrt{\frac{x_1^2}{4t}}, \ldots, \sqrt{\frac{x_n^2}{4t}}\right) \times \\ &\quad \times t^{\frac{s}{2}} H_{s_1 s_2 \ldots s_n}\left(\sqrt{\frac{x_1^2}{4t}}, \ldots, \sqrt{\frac{x_n^2}{4t}}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n . \end{aligned}$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{x_1}{4t} \\ &\vdots \\ u_n &= \frac{x_n}{4t} \end{aligned}\right. \quad \text{sau} \quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= u_1\sqrt{4t} \\ &\vdots \\ x_n &= u_n\sqrt{4t} \end{aligned}\right.$$

cu

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = t^{\frac{n}{2}} \cdot 2^n,$$

obţinem

$$\int_{\Omega_\infty} W_{(m)}(x,t)P_{(s)}(x,-t)\mathrm{d}x = 2^n \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\frac{s-m}{2}} \mathrm{e}^{-\rho^2} \cdot$$

$$\cdot H_{m_1,m_2,\ldots,m_n}(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, H_{s_1,s_2,\ldots,s_n}(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, \mathrm{d}u_1, \ldots, \mathrm{d}u_n =$$

$$= 2^n t^{\frac{s-m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\rho^2} H_{(m)}(u) H_{(s)}(u) \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n =$$

$$= m_1!.\, m_2! \ldots m_n!\, 2^{m+n} t^{\frac{s-m}{2}} \delta_{s_1 s_2 \ldots s_n}^{m_1 m_2 \ldots m_n} \pi^{\frac{2}{m}},\ \ \rho^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2$$

Primită la redacţie la 21 decembrie 1966

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Paul Appell, *Sur l'équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$ *et la théorie de la chaleur.* Journal des Math. Pures et Appl., **8** (1892).
2. P. C. Rosenbloom, D. V. Widder, *Expansions in terms of heat polynomials and associated functions.* Transactions of the Amer. Math. Soc., **92**, aug. (1959).
3. V. I. Smirnov, *Curs de matematici superioare.* Vol. III, partea II, Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
4. Marcel N. Roşculeţ, *Contribuţii la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip parabolic. III. Problema lui Cauchy pentru o clasă de ecuaţii cu derivate parţiale de ordin superior.* Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti, **XXIII**, *IV* (1961).

ASUPRA UNOR CLASE DE CURBE

DE

P. STAVRE

(Craiova)

Se dau condiții necesare și suficiente ca o curbă (C) dintr-un E_n (spațiu euclidian n-dimensional) să fie elice sau curbă Bertrand.

În [1] se demonstrează, prin metoda plan-spațiu, o condiție necesară și suficientă ca o curbă să fie curbă Bertrand în E_3.

Problema curbelor Bertrand și elicelor este reluată în [2] în legătură cu transformarea lui Comberscure

În cele ce urmează vom generaliza proprietățile curbelor Bertrand și elice, socotindu-le în E_n și pornind de la [3].

Fie curba (C):

$$x^{\lambda} = x^{\lambda}(s). \tag{1}$$

din spațiul euclidian E_n, de clasă necesară (s este arcul natural pe curbă). Din [4], [5] putem asocia în fiecare punct M al lui (C) reperele:

$$\left\{\begin{array}{l} R^n(M;\, I^{\lambda}_{1} \ldots I^{\lambda}_{n}) \\ \widetilde{R}^n(M;\, \widetilde{I}^{\lambda}_{1} \ldots \widetilde{I}^{\lambda}_{n}) \end{array}\right. \quad \text{cu} \quad \widetilde{I}^{\lambda}_{1} = I^{\lambda}_{1};\quad \widetilde{I}^{\lambda}_{2} = I^{\lambda}_{2} \tag{2}$$

așa încît să avem formulele

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s} = I^{\lambda}_{1} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} I^{\lambda}_{p} = -K_{p-1}\, I^{\lambda}_{p-1} + K_p\, I^{\lambda}_{p+1},\ p = 1, 2, \ldots, n \ (\text{cu } K_0 = K_n = 0) \end{array}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \widetilde{I}^{\lambda}_{1} = K_1 \widetilde{I}^{\lambda}_{2} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \widetilde{I}^{\lambda}_{2} = -K_1 \widetilde{I}^{\lambda}_{1} - \sum\limits_{\alpha=3}^{n} T_{\alpha-1} \widetilde{I}^{\lambda}_{\alpha} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \widetilde{I}^{\lambda}_{\alpha} = T_{\alpha-1} \widetilde{I}^{\lambda}_{2},\ \alpha = 3, \ldots, n. \end{array}\right. \tag{4}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P. 747–752 BUCUREȘTI, 1967

Pentru generalizarea amintită, putem porni de la (3) sau de la (4). Noi vom porni de la (4).

1. ELICE ÎN E_n

DEFINIȚIE. Curba (C) din E_n o numim elice, dacă unghiul format de tangenta $\underset{1}{\tilde{I}}^{\lambda}$ în orice punct la C, cu o direcție fixă $\vec{p}$ (p^{λ}), $\lambda = 1, \ldots, n$ este un unghi constant.

Dacă $\theta = \sphericalangle (\underset{1}{\tilde{I}}^{\lambda}, p^{\lambda}) = \text{const.}$, atunci

$$(1.1) \quad \begin{cases} \cos Q = \underset{1}{\tilde{I}}^{\lambda} p_{\lambda} = C_1 \ (\text{const.}) \quad (\text{sumare } \lambda), \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \underset{1}{\tilde{I}}^{\lambda} p_{\lambda} = 0. \end{cases}$$

Din (1.1) ținînd seama (4) (în care presupunem curba generală în sensul că toți $K_1 \neq 0$, $T_{\alpha-1} \neq 0$) avem

$$(1.2) \quad \underset{2}{\tilde{I}}^{\lambda} p_{\lambda} = 0.$$

Din (1.2), (4) obținem

$$(1.3) \quad K_1 \underset{1}{\tilde{I}}^{\lambda} p_{\lambda} = -\left(\sum_{\alpha=3}^{n} T_{\alpha-1} \underset{\alpha}{\tilde{I}}^{\lambda} \right) p_{\lambda}.$$

Cum $T_{\alpha-1} \neq 0$, $\alpha = 3, \ldots, n$, amplificînd în (1.2) obținem

$$(1.4) \quad T_{\alpha-1} \underset{2}{\tilde{I}}^{\lambda} p_{\lambda} = 0.$$

Din (1.4), (4), (1.1) avem

$$(1.5) \quad \underset{s}{\tilde{I}}^{\lambda} p_{\lambda} = C_s \ (C_s = \text{const.}), \quad (s = 3, \ldots, n).$$

Din (1.3), (1.5) rezultă.

$$(1.6) \quad \sum_{k=1}^{n} T_k - 1\, C_k = 0 \ (\text{cu } T_0 = K_1,\ T_1 = 0,\ C_2 = 0)\,(C_k = \text{const.})$$

Avem deci

TEOREMA 1.1. *Condiția necesară ca o curbă* (C) *din* E_n *să fie elice, este dată de* (*1.6*) (*sau de* (*1.2*)).

Această relație generalizează relația din E_3 (la care se reduce de altfel pentru $n = 3$, căci $K_1 C_1 + T_2\, C_3 = 0$ înseamnă $\dfrac{K_1}{T} = \text{const.}$, unde T este torsiunea curbei: $T = T_2$).

Putem scrie din (4), (1.6)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underset{1}{\tilde{I}}^{\lambda} C_1 + \sum_{\alpha=3}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underset{\alpha}{\tilde{I}}^{\lambda} C_\alpha = \left(\sum_{k=1}^{n} T_{k-1} C_k\right)\underset{2}{\tilde{I}}^{\lambda} = 0 \tag{1.7}$$

$$(T_0 = K_1\ T_1 = 0,\ C_2 = 0).$$

De aici

$$C_1 \underset{2}{\tilde{I}}^{\lambda} + \sum_{\alpha=3}^{n} C_\alpha \underset{\alpha}{\tilde{I}}^{\lambda} = p^{\lambda} \text{ (direcţie fixă).} \tag{1.8}$$

Din (1.8) obţinem înmulţind scalar

$$\underset{2}{\tilde{I}}^{\lambda} p_\lambda = 0. \tag{1.9}$$

Amplificînd cu K_1 şi ţinînd seama de prima formulă din (4), avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underset{1}{\tilde{I}}^{\lambda} p_\lambda = 0, \tag{1.10}$$

de unde rezultă uşor (1.1). Şi deci

TEOREMA 1.2. *Condiţia necesară şi suficientă ca o curbă* (C) *din* E_n *să fie elice este dată de* (*1.2*) *sau* (*1.6*).

Destul de uşor se pot găsi alte proprietăţi asemănătoare cu cele din E_3 [3].

2. CURBE BERTRAND

DEFINIŢIE. Curba (C) din E_n, pentru care normala principală $\underset{2}{\tilde{I}}^{\lambda}$ este normala principală şi pentru altă curbă, o numim curbă Bertrand.

Fie dar curbele Bertrand

$$(C)\quad x^{\lambda} = x^{\lambda}(s) \qquad (C')\quad x'^{\lambda} = x'^{\lambda}(s') \tag{2.1}$$

de clasă necesară. Dacă normala principală din $M \in (C)$ este $\underset{2}{\tilde{I}}^{\lambda}$, atunci punctului M îi va corespunde un $M' \in (C')$ aşa ca

$$\underset{2}{\tilde{I}}'^{\lambda} = \varepsilon \underset{2}{\tilde{I}}^{\lambda}, \tag{2.2}$$

unde $\underset{2}{\tilde{I}}'^{\lambda}$ să fie normală principală în $M' \in (C')$.

Fiecărei curbe (C), (C') îi putem asocia în punctele corespondente M, M' formule Frenet de tipul (4) [care pentru (C') vor căpăta un accent „ ' " şi în plus avem (2.2)].

Dacă notăm cu $x'^{\lambda}(s')$ coordonata lui $M' \in (C')$ avem

$$x'^{\lambda} = x^{\lambda} + a\underset{2}{\tilde{I}}^{\lambda} \tag{2.3}$$

Dacă luăm pe $M_0 \in (C)$ şi corespondentul său $M'_0 \in (C')$ ca origine pentru s, s', atunci putem considera pe S' ca o funcţie de s pentru o poziţie oarecare a punctelor corespondente (M, M^1). Din (2. 3) (2.2) (4) se deduce uşor că $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s} = 0$ şi deci $a = \text{const.}$ În plus,

$$\underset{1}{\widetilde{I}}'^{\lambda} = \left[(1 - a\,K_1)\underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda} - a \sum_{\alpha=3}^{n} T_{\alpha-1}\underset{\alpha}{\widetilde{I}}^{\lambda}\right]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'}. \tag{2.4}$$

Ca atare $\underset{1}{\widetilde{I}}'^{\lambda}$ are în reperul $\widetilde{R}^n\,(M\,;\underset{1}{\widetilde{I}}^{\lambda},\ldots,\underset{n}{\widetilde{I}}^{\lambda})$ cosinusurile directoare date de

$$\begin{cases} \cos\ \omega_{11} = (1 - a\,K_1)\,\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'} \\ \cos\ \omega_{12} = \cos\ \omega_{21} = 0 \\ \cos\omega_{1\alpha} = -\,a\,T_{\alpha-1}\,\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Din

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underset{1}{\widetilde{I}}'^{\lambda} = \varepsilon K_1'\,\underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda}\,;\ \underset{1}{\widetilde{I}}'^{\lambda} = \sum_{k=1}^{n}\cos\,\omega_{1k}\,\underset{k}{\widetilde{I}}^{\lambda} \tag{2.6}$$

în condiţiile (2.5), ţinînd seama de (4), obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\,\omega_{1k} = 0 \Rightarrow \cos\,\omega_{1k} = C_k\,(\text{const.})\ \ (C_2 = 0) \\ \varepsilon\!\left(K_1\ \cos\,\omega_{11} + \displaystyle\sum_{\alpha=3}^{n} T_{\alpha-1}\ \cos\,\omega_{1\alpha}\right)\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'} = K_1'. \end{cases} \tag{2.7}$$

Din (2.5), (2.7) rezultă,

$$\sin\,\omega_{1k}\frac{\mathrm{d}\omega_{1k}}{\mathrm{d}s} = 0 \quad (k = 1,\ldots,\,n). \tag{2.8}$$

Relaţiile obţinute duc şi la o generalizare a teoremei lui Schell.

Din (2.5) avem, dacă notăm cu $\frac{\cos\,\omega_{11}}{\cos\,\omega_{1\alpha}} = -\,\frac{b_\alpha}{a}$ [$b_\alpha = \text{const.}$ iar „a" dat de (2.3)],

$$a\cdot K_1 + b_\alpha\,T_{\alpha-1} = 1,\ \alpha = 3,\ldots,\,n\ \text{(fără sumare)}. \tag{2.9}$$

Avem :

TEOREMA 2.1. *Condiţia necesară ca două curbe* (C), (C') *să fie curbe Bertrand este* (*2.9*).

Reciproc. Fie dată curba (C) de ecuaţie $x^\lambda = x^\lambda(s)$ pentru care avem (2.9) (cu a, b_α constante). Fie o altă curbă $x'^\lambda = x'^\lambda\,(s')$ determinată astfel : $x'^\lambda = x^\lambda + a\underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda}$, unde „$a$" este constanta din (2.9), adică (C') e dată de (2.3).

În (2.3) derivînd și luînd modulele avem

$$1=\left[(1-a K_1)^2+a^2\sum_{\alpha=3}^{n} T_{\alpha-1}^2\right]\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'}\right)^2. \tag{2.10}$$

Din (2.10), (2.9) obținem (dacă notăm $\sum\limits_{\alpha=3}^{n}\frac{1}{b_\alpha^2}=\frac{1}{C^2}\,(C\neq 0)$)

$$\sum_{\alpha=3}^{n} T_{\alpha-1}^2\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'}\right)^2=\frac{1}{C^2+a^2}=\text{const.} \tag{2.11}$$

Deci din (2.10) rezultă și

$$(1-aK_1)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'}=\text{const.} \tag{2.12}$$

Din (2.9), (2.12) rezultă

$$\sum_{\alpha=3}^{n} T_{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'}=(1-aK_1)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'}\sum_{\alpha=3}^{n}\frac{1}{b_\alpha}=\text{const.} \tag{2.13}$$

Cum avem (2.4) (căci $a=$ const. dat de (2.9)), din (2.4), (2.12) (2.13), (4) rezultă (derivînd)

$$K_1'\underset{2}{\widetilde{I}}'^{\lambda}=\left[(1-a K_1) K_1-a\sum_{\alpha=3}^{n} T_{\alpha-1}^2\right]\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'}\right)^2\underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda}, \tag{2.14}$$

de unde

$$\underset{2}{\widetilde{I}}'^{\lambda}=\varepsilon\,\underset{2}{\widetilde{I}}^{\lambda}, \qquad (\varepsilon=\pm 1). \tag{2.15}$$

Avem deci

Teorema 2.2. *Condiția necesară și suficientă ca o curbă să fie curbă Bertrand este* (*2.9*).

Se observă că această teoremă generalizează pe cea cunoscută din E_3 la care de altfel se reduce pentru $n=3$.

Dacă (C) este Bertrand, atunci (C') de ecuație (2.3), unde „a" este dat de (2.9), este Bertrand (și reciproc). Avem și relația

$$a' K_1'+b_\alpha' T_{\alpha-1}'=1, \qquad (\alpha=3,\ldots,n). \tag{2.9'}$$

(Se observă ușor că $a'=-\varepsilon a$, $b_\alpha=b_\alpha'$).

Curbele (C), (C') Bertrand se mai zic și *asociate*. Se mai poate arăta ușor

$$T_{\alpha-1}\, T_{\alpha-1}'=\text{const.} \qquad (\alpha=3,\ldots,n) \tag{2.16}$$

care generalizează o altă relație din E_3. Tot la fel de ușor se pot obține și alte proprietăți. (Se observă de exemplu din relațiile de formă (2.5) că dacă (C), (C') au tangentele perpendiculare, atunci au curburile constante și egale etc.)

Se putea ajunge la o generalizare pornind și de la (3).

Cele spuse mai înainte se pot extinde uşor şi la cazul unei curbe (C) dintr-un spaţiu Riemann V_n.

Ca aplicaţie la relaţiile de mai sus se pot extinde rezultatele lui Ţiţeica, Cosserat şi [6] la cazul hipersuprafeţelor E_{n-1} din E_n.

Primită la redacţie la 9 mai 1966

Institutul Pedagogic de 3 ani
Craiova

BIBLIOGRAFIE

1. M. Takasu, Des Science Reports of. the Tôhoku Imp. University, *12*, 112 (1923).
2. L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale.* vol. I (partea I şi II), Bologna, 1927.
3. A. Dobrescu, *Geometrie diferenţială.* Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
4. G. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială.* Vol. I, Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, 1962.
5. Gh. Rizescu şi N. M. Teodorescu, *Asupra generalizării formulelor lui Frenet.* St. cerc. mat., *8* (1965).
6. V. Cruceanu, *Asupra legăturii dintre suprafeţele minime care taie o sferă sub un unghi constant şi curbele Betrand.* Analele Ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi, 1956.

CURBE (S) PE VARIETĂŢI V_n^{n-1} SAU V^{n-1} DIN SPAŢII RIEMANNIENE V_n

DE

P. STAVRE

(Craiova)

Se definesc curbele (S) şi se dă o teoremă care pentru $n = 3$ coincide cu teorema lui Enneper.

1. Fie V_n^{n-1} o varietate din V_n riemannian, cu tensorul de torsiune $T_{\lambda\mu}^{\sigma}$ şi cu tensor metric $g_{\lambda\mu}^{1}$ [1].

Fie (C) o curbă în V_n dată prin,

$$x^{\sigma} = x^{\sigma}(s) \tag{1}$$

regulată de clasă necesară (s = abscisă curbilinie).

Dacă notăm cu δ operatorul de diferenţiere covariantă în V_n, putem asocia curbei (C) invarianţii ($K_1, \ldots, K_{n-1}$) şi reperul ortonormat $R\left(M;\ \underset{1}{i}^{\lambda} = \frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s}, \underset{2}{i}^{\lambda}, \ldots, \underset{n}{i}^{\lambda}\right)$ (invariant) ce verifică formulele Frenet cunoscute.

În [2] curbei (C) din V_n i s-au asociat alţi invarianţi (K_1, T_{a-1}, $a = 3, \ldots, n$) şi un reper

$$\tilde{R}(M;\ \underset{1}{\tilde{I}}^{\lambda} = \underset{1}{i}^{\lambda},\ \underset{2}{\tilde{I}}^{\lambda} = \underset{2}{i}^{\lambda},\ \underset{3}{\tilde{I}}^{\lambda}, \ldots, \underset{n}{\tilde{I}}^{\lambda})$$

ce verifică relaţiile

$$\begin{gathered}
\frac{\delta}{\mathrm{d}s}\underset{1}{\tilde{I}}^{\lambda} = K_1 \underset{2}{\tilde{I}}^{\lambda} \\
\frac{\delta}{\mathrm{d}s}\underset{2}{\tilde{I}}^{\lambda} = -K_1 \underset{1}{\tilde{I}}^{\lambda} - \sum_{\alpha=3}^{n} T_{\alpha-1} \underset{\alpha}{\tilde{I}}^{\lambda} \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\delta}{\mathrm{d}s}\underset{p}{\tilde{I}}^{\lambda} = T_{p-1} \underset{2}{\tilde{I}}^{\lambda} \qquad (p \geqslant 3)
\end{gathered} \tag{2}$$

unde curbura K_1 are interpretarea cunoscută.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P. 753–755, BUCUREŞTI, 1967

Interpretarea geometrică a torsiunilor ($T_p - 1$) a fost dată în [2] pentru cazul cînd curba (C) este considerată ca fiind scufundată într-un E_n (euclidian) iar în [3] pentru cazul cînd (C) este o curbă din V_n. Tot în [3] s-a arătat că (2) rămîn valabile și pentru o familie de direcții definită pe (C) din V_n.

Să considerăm acum curba (C) situată pe V_n^{n-1} din V_n. Vom nota cu T^{n-1}, N^1 varietățile liniare, tangente respectiv normală la V_n^{n-1} în punctul generic $M(s) \in (C)$. (Asupra acestui caz vom mai reveni într-o altă notă). Curbei (C) pe V_n^{n-1} i se poate asocia un reper ortonormat invariant, orientat pozitiv R^n $(M ; \underset{1}{\widetilde{I}^\lambda} = \underset{1}{I^\lambda}, \underset{2}{I^\lambda}, \dots, \underset{n-1}{I^\lambda}, \underset{1}{n^\lambda})$, unde $\underset{a}{I^\lambda}$ $(a = 1, 2, \dots, n-1)$ formează un $(n-1)$-uplu ortonormat în T^{n-1} iar $\underset{1}{n^\lambda}$ este versorul din N^1, normal varietății V_n^{n-1} în $M \in (C)$.

Vom introduce în cele ce urmează:

DEFINIȚIA 1. Curbele (1) de pe $V_n^{n-1} \subset V_n$ pentru care avem

$$\underset{1}{\widetilde{I}^\lambda} = \underset{1}{I^\lambda}, \underset{2}{\widetilde{I}^\lambda} = \underset{2}{I^\lambda}, \dots, \underset{k}{\widetilde{I}^\lambda} = \underset{k}{I^\lambda} \qquad (k < n-1)$$

le numim curbe (S) de rang $r = k - 1$ $(k \geqslant 2)$ pe $V_n^{n-1} \subset V_n$.

Se știe că avem

DEFINIȚIA 2. Curbele (1) de pe $V_n^{n-1} \subset V_n$ pentru care

$$\underset{1}{i^\lambda} = \underset{1}{I^\lambda}, \underset{2}{i^\lambda} = \underset{2}{I^\lambda}, \dots, \underset{k}{i^\lambda} = I^\lambda, \qquad (k < n-1)$$

le numim curbe asimptotice de rang $r = k - 1$ $(k \geqslant 2)$ pe $V_n^{n-1} \subset V_n$

Din definițiile (1) (2) rezultă:

TEOREMA 1. *Orice curbă* (S) *de rang* 1 *de pe* $V_n^{n-1} \subset V_n$ *este o curbă asimptotică pe* $V_n^{n-1} \subset V_n$ *de rang* $r = 1$.

Ca atare în cazul $n = 3$, curbele (S) de pe $V_3^2 \subset V_3$ coincid cu curbele asimptotice de pe $V_3^2 \subset V_3$.

Pentru curbele (S) vom da o teoremă de tipul teoremei lui Enneper relativă la curbele asimptotice pe $V_n^{n-1} \subset V_n$.

Din definiția (1) putem scrie

$$\underset{1}{n^\lambda} = \sum_{p=k+1}^{n} \cos \varphi_{1p} \underset{p}{\widetilde{I}^\lambda}. \tag{3}$$

Se știe (vezi [1]) că a doua formă fundamentală a lui V_n^{n-1} în V_n este dată prin

$$h_{\lambda\mu} = g_\lambda'^\alpha g_\mu'^\beta D_\alpha \underset{1}{n_\beta}, \tag{4}$$

unde D_α este operatorul de derivare covariantă în V_n și

$$h_{\lambda\mu} - h_{\mu\lambda} = 2\, g_\mu'^\alpha g_\lambda'^\beta T_{\beta\alpha}^\sigma \underset{1}{n_\sigma}. \tag{5}$$

Din (2) și (3) deducem pentru curbele (S) de rang $r \geqslant 1$

$$\frac{\delta}{ds} \underset{1}{n_\beta} = \sum_{p=k+1}^{n} T_{p-1} \cos \varphi_{1p} \underset{2}{\widetilde{I}_\beta} + \sum_{p=k+1}^{n} \frac{d}{ds} \cos \varphi_{1p} \underset{p}{\widetilde{I}_\beta}, \quad (\beta = 1, 2, \dots, n). \tag{6}$$

Dacă considerăm scalarul $h_{1a} = \underset{1}{\widetilde{I}^{\lambda}}\, \underset{a}{\widetilde{I}^{\mu}}\, h_{\lambda\mu}$ şi ţinem seama de (4), de semnificaţia operatorului δ (respectiv D_α) şi de

$$\text{(a)} \qquad \underset{a}{\widetilde{I}^{\beta}}\, \underset{p}{\widetilde{I}_{\beta}} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } p \neq a \\ 1 & \text{,, } \; p = a \end{cases}$$

avem

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} & h_{1a} = 0, \ a \neq 2 \ a \leqslant k, \\ & h_{12} = \sum_{p=k+1}^{n} T_{p-1} \cos \varphi_{1p} \, . \end{aligned}$$

Din (5) şi (7) obţinem scalarii

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} & h_{a1} = 2\, \underset{a}{\widetilde{I}^{\alpha}}\, \underset{1}{\widetilde{I}^{\beta}}\; T^{\sigma}_{\alpha\beta}\, \underset{1}{n_{\sigma}} = 2\, T_{a1} \qquad \begin{matrix} (a \neq 2) \\ a \leqslant k \end{matrix}\,, \\ & h_{21} = 2\, T_{21} + \sum_{p=k+1}^{n} T_{p-1} \cos \varphi_{1p} \, . \end{aligned}$$

Se ştie [4] că notînd cu $R_{\alpha\beta\nu\delta}$, $R'_{\alpha\beta\nu\delta}$ tensorii lui Riemann — Cristoffel pentru V_n respectiv V_n^{n-1}, putem defini curburile lui V_n, V_n^{n-1} în bidirecţiile $\underset{1}{\widetilde{I}^{\lambda}}$, $\underset{a}{\widetilde{I}^{\lambda}}$ prin scalarii

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} & K_{1a1a} = \underset{1}{\widetilde{I}^{\alpha}}\, \underset{a}{\widetilde{I}^{\beta}}\, \underset{1}{\widetilde{I}^{\nu}}\, \underset{a}{\widetilde{I}^{\delta}}\; R_{\alpha\beta\nu\delta} \\ & K'_{1a1a} = \underset{1}{\widetilde{I}^{\alpha}{}'}\, \underset{a}{\widetilde{I}^{\beta}{}'}\, \underset{1}{\widetilde{I}^{\nu}{}'}\, \underset{a}{\widetilde{I}^{\delta}{}'}\; R'_{\alpha\beta\nu\delta} \, . \end{aligned}$$

Dar

$$\text{(10)} \qquad K_{1a1a} - K'_{1a1a} = (h_{a1}\, h_{1a} - h_{11}\, h_{aa}), \quad (a = 1, \ldots, k).$$

Din (7), (8), (10) avem

$$\text{(10')} \qquad \sum_{a=1}^{k} (K_{1a1a} - K'_{1a1a}) = h_{21}\, h_{12}$$

$$\text{(11)} \qquad \sum_{a=1}^{k} (K_{1a1a} - K'_{1a1a}) = 2\, T_{21}\, T + T^2,$$

unde am notat

$$\text{(12)} \qquad T = \sum_{p=k+1}^{n} T_{p-1} \cos \varphi_{1p} \, .$$

Avem dar

TEOREMĂ. *Dacă* (C) *este o curbă* (S) *de rang* $r = k - 1$ *pe* V_n^{n-1} *din* V_n, *atunci are loc relaţia* (11).

Dacă V_n^{n-1} este o varietate V^{n-1} (fără torsiune), atunci are loc relaţia

$$\sum_{a=1}^{k} (K_{1a1a} - K'_{1a1a}) = T^2, \tag{11'}$$

unde T este dat de (12).

Dacă $n = 3$, $k = 2$, atunci pentru o suprafaţă din E_3 (euclidian), cum $T_{21} = 0$ şi $T_2 = T$ = torsiunea curbei (C), obţinem din (11')

$$-K_1 = T^2, \tag{13}$$

adică binecunoscuta formulă a lui Enneper.

Primită la redacţie la 9 mai 1966

Institutul pedagogic de 3 ani Craiova

BIBLIOGRAFIE

1. VACLAV HLAVATY, *Les courbes de la variété générale à n dimensions*. Mémorial des Sciences Mathématiques, **LXIII** (1934).
2. GH. N. RIZESCU şi N. M. TEODORESCU, *Asupra generalizării formulelor lui Frenet*. St.cerc. mat., *8* (1965).
3. P. STAVRE, *Asupra formulelor Frenet ale unei familii de direcţii, definită pe curbe* (*C*) *din* V_n. St. cerc. mat.,
4. G. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială*. Vol. I, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952.

TEORIA SPAŢIILOR H^p ÎN CAZUL ALGEBRELOR DE FUNCŢII

DE

I. SUCIU

În paragraful 2 se introduc noţiunile de bază ale teoriei algebrelor de funcţii cum ar fi spaţiul idealelor maximale, frontieră Şilov, măsuri de reprezentare, părţi Gleason etc.

În § 3 se introduc noţiunea de algebră logmodulară şi spaţiile H^p.

În § 4 se studiază spaţiul H^2. Se demonstrează teoreme de bază ca teorema lui Szegö, Kolmogorov, Krein, teorema lui Beurling de subspaţii invariante etc.

În § 5 sînt studiate spaţiile H^1 şi H^∞ demonstrîndu-se rezultate asupra funcţiilor din aceste spaţii.

În § 6 se studiază părţile Gleason ale spaţiului idealelor maximale ale unei algebre logmodulare.

În § 7 se dau cîteva exemple.

1. INTRODUCERE

Teoria funcţiilor analitice în interiorul cercului unitate şi a claselor H^p ale lui Hardy joacă un rol important în diverse probleme ale matematicii moderne. De aceea s-a impus o reconsiderare a acestei teorii, o tratare a ei cu mijloace moderne precum şi eventuale generalizări ale ei.

Întreaga teorie se poate reface luînd ca elemente de bază algebra Banach A a funcţiilor analitice în interiorul cercului unitate $D = \{z : |z| < 1\}$ din planul complex care se prelungesc continuu la frontiera $X = \{z : |z| = 1\}$ şi măsura lui Lebesgue normalizată $\mathrm{d}m = 1/2\,\pi\,\mathrm{d}t$ pe X.

Algebra A poate fi privită din următoarele două puncte de vedere:

1) A este algebra funcţiilor continue pe X care admit prelungire analitică în interior. Dacă notăm cu $C(X)$ algebra Banach a tuturor funcţiilor continue pe X, cu valori complexe, atunci A este o subalgebră a lui $C(X)$ uniform închisă, care separă punctele lui X şi conţine constantele, iar măsura $\mathrm{d}m$ este multiplicativă pe A.

2) Dacă privim X ca dualul grupului aditiv Z al întregilor, atunci A apare ca algebra funcţiilor continue pe dualul lui Z a căror transformată

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P. 757–801, BUCUREŞTI, 1967

Fourier (coeficienţii Fourier) se anulează pentru n negativi, iar măsura dm apare ca măsura Haar normalizată a dualului lui Z.

Aceste două moduri de a privi algebra A au dus la două dintre cele mai importante tipuri de generalizări ale teoriei funcţiilor analitice şi anume:

1′) Să alegem drept elemente de bază o subalgebră A a lui $C(X)$, unde X este un spaţiu Hausdorff compact oarecare, astfel încît A să fie uniform închisă în $C(X)$, să separe punctele lui X şi să conţină constantele, iar drept m o măsură pozitivă pe X, de masă totală 1 şi multiplicativă pe A.

2′) Dacă G este un grup abelian şi X dualul grupului discret G, atunci să luăm drept A algebra funcţiilor continue pe X a căror transformată Fourier se anulează în afara unui subsemigrup fix S al lui G, iar drept m măsura Haar normalizată pe X.

Desigur în cazul foarte general enunţat mai sus nu pot fi regăsite rezultate esenţiale din teoria funcţiilor analitice. Problema este de a găsi condiţii suplimentare care, impuse lui A, respectiv G, să ne conducă la o teorie rezonabilă de funcţii analitice. Se consideră ca teorie rezonabilă de funcţii analitice o teorie în care se regăsesc rezultate din teoria clasică a funcţiilor analitice cum ar fi teorema lui Szegö, Kolmogorov, Krein asupra aproximării în medie pătratică a lui 1 prin polinoame care se anulează în origine, teorema lui F. şi M. Riesz asupra continuităţii absolute a măsurilor ai căror coeficienţi Fourier negativi sînt zero, teorema de integrabilitate a lui log $|f|$ pentru $f \in H^1$, teoremele lui Beurling de subspaţii invariante în H^p, teoremele de factorizare etc.

Deşi lucrări cu diverse generalizări de rezultate din teoria funcţiilor analitice în cercul unitate în ambele direcţii amintite mai sus au apărut şi înainte [1], [4], [17], [24], [26] etc., totuşi lucrarea lui H. Helson şi D. Lowdenslager [21] poate fi considerată prima care a refăcut teoria funcţiilor analitice în ce are ea mai esenţial în cazul unui grup G, liniar ordonat de un subsemigrup al său S.

Aici sînt demonstrate toate rezultatele enunţate mai sus într-o formă clară, elegantă, cu metode simple de spaţii Hilbert, fapt care a contribuit esenţial la generalizările lor ulterioare.

Bochner în [10] observînd că algebra cu care lucrează H. Helson şi D. Lowdenslager este o algebră Dirichlet pe X (adică o algebră A cu proprietatea că orice funcţie reală şi continuă pe X poate fi aproximată uniform cu părţi reale de funcţii din A), a arătat că toate raţionamentele lor merg şi în cazul unei astfel de algebre.

În [28] K. Hoffman reface teoria plecînd de la o algebră logmodulară pe X, adică de la o algebră A cu proprietatea că orice funcţie reală pe X să poată fi aproximată uniform cu funcţii de forma log $|f|$, unde f este o funcţie inversabilă din A. Generalizarea lui K. Hoffman este esenţială nu numai pentru că există algebre logmodulare care nu sînt Dirichlet, dar şi pentru faptul că raţionamentele nu s-au transpus direct, ci au necesitat o tratare specială. Se pare că aici apare efectiv caracterul de algebră al teoriei, şi nu de grup.

Această lucrare expozitorie, care are la bază expunerile ţinute de mine în cadrul *Seminarului de Algebre de funcţii* de la Institutul de matematică al Academiei Republicii Socialiste România în anul 1964/1965 prezintă această teorie după lucrarea lui K. Hoffman [28] cu mici completări şi detalieri de demonstraţii. Sînt utilizate de asemenea lucrările lui E. Bishop [9], H. S. Bear [7] şi altele.

Se demonstrează, plecînd de la o algebră logmodulară pe X şi o măsură pozitivă pe X şi multiplicativă pe A, toate rezultatele enunţate la începutul acestei Introduceri, bineînţeles cu definiţii adoptate. De asemenea, se demonstrează teorema lui E. Bishop [9], asupra continuităţii absolute reciproce a măsurilor de reprezentare din aceeaşi parte Gleason şi teorema lui J. Wermer [44] asupra existenţei discurilor analitice în spaţiul idealelor maximale ale lui A.

Pentru a putea fi citită, lucrarea nu presupune cunoscute decît noţiunile fundamentale de teoria măsurii, de spaţii Hilbert şi de reprezentare Ghelfandiană a algebrelor Banach. Cunoaşterea rezultatelor fundamentale ale teoriei clasice a funcţiilor analitice şi ale claselor H^p aşa cum sînt tratate de pildă în [27] uşurează înţelegerea rezultatelor din această lucrare şi a sensului generalizărilor pe care le prezintă.

2. ALGEBRE DE FUNCŢII

2.1. *Spaţiul idealelor maximale, frontiera Şilov.* Peste tot în lucrare notăm cu X un spaţiu Hausdorff compact, iar cu $C(X)$ algebra Banach a funcţiilor continue pe X cu valori complexe normată cu

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|, \tag{2.11}$$

şi cu $C_R(X)$ algebra funcţiilor reale şi continue pe X.

DEFINIŢIA 2.1. Vom numi *algebră de funcţii pe X* sau *supnorm* algebră o subalgebră A a lui $C(X)$ cu proprietăţile :

a) A este uniform închisă,

b) A separă punctele lui X, adică pentru orice

$$x,\ y\in X,\ x\neq y,\ \text{există}\ f\in A\ \text{astfel încît}\ f(x)\neq f(y).$$

c) A conţine constantele.

Vom nota cu ReA mulţimea funcţiilor pe X care sînt părţi reale de funcţii din A, cu A^{-1} mulţimea funcţiilor din A pentru care $f^{-1}\in A$.

Algebra A fiind comutativă, cu element unitate şi cu norma verificînd

$$\|f^2\| = \|f\|^2 \tag{2.12}$$

pentru orice $f\in A$, din teoria reprezentării ghelfandiene rezultă că A poate fi considerată ca o subalgebră a lui $C(\mathfrak{M})$, unde $\mathfrak{M}$ este spaţiul idealelor maximale ale lui A cu topologia de spaţiu compact a lui Ghelfand astfel încît :

$$\|f\| = \sup_{M\in\mathfrak{M}} |f(M)|. \tag{2.13}$$

Spaţiul $\mathfrak{M}$ mai poate fi considerat şi ca mulţimea funcţionalelor nenule, liniare şi multiplicative pe A, identificarea făcîndu-se cu ajutorul nucleului funcţionalelor.

Orice funcțională nenulă, liniară și multiplicativă pe A are norma 1. În adevăr, dacă M este o astfel de funcțională avem $M(1) = 1$ și deci este suficient să arătăm că:

$$|M(f)| \leqslant \|f\| \tag{2.14}$$

pentru orice $f \in A$. Dacă (2.14) n-ar fi adevărată, ar exista $f \in A$ cu $\|f\| \leqslant 1$ și $|M(f)| > 1$. Împărțind pe f la $M(f)$ găsim o funcție g cu $\|g\| < 1$ și $M(g) = 1$. Cum $\|g\| < 1$, rezultă că $(1 - g)^{-1} \in A$ și deci avem:

$$\begin{aligned} 1 = M(1) = M[(1 - g)\,(1 - g)^{-1}] = M(1 - g)M\,[(1 - g)^{-1}] = \\ = [M(1) - M(g)]\;M[(1 - g)^{-1}] = 0 \end{aligned}$$

ceea ce nu se poate. Deci (2.14) este adevărată, adică M are norma 1.

Spațiul $\mathfrak{M}$ poate fi deci privit ca o submulțime a dualului A^* al lui A. Din definiția topologiei lui Ghelfand rezultă că $\mathfrak{M}$ este *chiar un subspațiu compact al lui* A^*.

Peste tot în această lucrare $\mathfrak{M}$ va fi privit ca mai sus.

Aplicația $x \to e_x$, unde e_x este funcțională multiplicativă pe A definită prin

$$e_x(f) = f(x) \qquad (f \in A) \tag{2.15}$$

este o scufundare continuă a lui X în $\mathfrak{M}$. Vom considera pe X ca o submulțime a lui $\mathfrak{M}$ prin această scufundare.

DEFINIȚIA 2.2. O submulțime închisă Γ a lui $\mathfrak{M}$ se numește *frontiera Șilov* a lui A dacă Γ este cea mai mică mulțime închisă din $\mathfrak{M}$ pe care orice funcție din A își atinge maximul modulului pe $\mathfrak{M}$.

TEOREMA 2.1. *Fie A o supnorm algebră pe X și $\mathfrak{M}$ spațiul idealelor maximale ale lui A. Atunci avem:*

1) *Algebra A are frontieră Șilov.*

2) *Dacă Γ este frontiera Șilov a lui A și Y o submulțime închisă a lui $\mathfrak{M}$ astfel încît $\Gamma \subset Y$, atunci un punct y_0 din Y aparține lui Γ dacă și numai dacă următoarea condiție este îndeplinită:*

(C) *pentru orice vecinătate U în Y a lui y_0 există $f \in A$ astfel încît $\|f\| = 1$ și $|f(y)| < 1$ pentru orice $y \in Y - U$.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{F}$ familia submulțimilor închise F ale lui $\mathfrak{M}$ pe care orice funcție f din A își atinge maximul modulului pe $\mathfrak{M}$. Familia $\mathcal{F}$ este inductiv ordonată în jos de incluziune. În adevăr, dacă $\{F_a\}_{a \in A}$ este o parte total ordonată a lui $\mathcal{F}$, atunci:

$$F = \bigcap_{a \in A} F_a$$

este nevidă și închisă. Fie că există $f \in A$ astfel încît $\|f\| = 1$ și $|f| < 1$ pe F. Atunci $|f| < 1$ pe o mulțime deschisă G, $F \subset G$ și cum există $a \in A$ astfel încît $F_a \subset G$, rezultă că $|f| < 1$ pe F_a ceea ce nu se poate. Deci familia $\mathcal{F}$ este inductiv ordonată.

Fie Γ un element minimal al lui $\mathcal{F}$. Vom arăta că pentru mulțimea Γ este adevărat punctul 2) din teoremă și deci Γ este singurul element minimal al lui $\mathcal{F}$, adică Γ este frontiera Șilov a lui A.

Fie deci Y o submulţime închisă a lui $\mathfrak{M}$ astfel încît $\Gamma \subset Y$ şi $y_0 \in \Gamma$. Fie

$$U = U_{y_0;\, f_1, \ldots, f_n;\, \varepsilon} = \{y \in Y : |f_i(y)| < \varepsilon\}$$

o vecinătate a lui y_0 în Y. Dacă toate funcţiile din A îşi ating maximul modulului pe mulţimea închisă $F = \Gamma - U$, atunci ar exista $F \in \mathcal{F}$ strict inclusă în Γ ceea ce contrazice minimalitatea lui Γ. Există deci $g \in A$ astfel încît $\| g \| = 1$, $|g| < 1$ pe $\Gamma - U$.

Notînd cu f o putere convenabilă a lui g avem $\| f \| = 1$ şi

$$|f| < \frac{\varepsilon}{\max\limits_i \| f_i \|} \quad \text{pe } \Gamma - U. \tag{2.16}$$

Fie acum $y \in Y$ pentru care avem $|f(y)| = 1$. Ţinînd seama de (2.16) avem :

$$|f_i(y)| = |f(y)|\,|f_i(y)| < \varepsilon$$

adică $y \in U$. Pentru y_0 este îndeplinită deci condiţia (C) din teoremă.

Invers, fie y_0 un punct din Y pentru care condiţia (C) este îndeplinită şi U o vecinătate a sa. Dacă $\Gamma \cap U = \emptyset$, atunci din condiţia (C) rezultă că există o funcţie $f \in A$ care nu-şi atinge maximul modulului pe Γ, ceea ce nu se poate deoarece $\Gamma \in \mathcal{F}$.

Deci Γ taie orice vecinătate a lui y_0 şi Γ fiind închisă, rezultă că $y_0 \in \Gamma$. Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

Să mai observăm că datorită formulei (2.13) pe X orice funcţie din A îşi atinge maximul modulului pe $\mathfrak{M}$ şi deci $\Gamma \subset X$.

2.2. *Măsuri Arens-Singer şi măsuri de reprezentare.* Prin măsură pe X vom înţelege o funcţională liniară şi continuă pe $C(X)$.

DEFINIŢIA 2.3. Vom spune că măsura pozitivă m pe X este o măsură *de reprezentare pentru* $M \in \mathfrak{M}$ dacă

$$f(M) = \int f \, \mathrm{d}m, \qquad (f \in A). \tag{2.21}$$

Măsura m se zice *Arens-Singer pentru* M dacă

$$\log |f(M)| = \int \log |f| \, \mathrm{d}m, \qquad (f \in A^{-1}). \tag{2.22}$$

Cum $M(1) = 1$, ambele tipuri de măsuri verifică

$$\int \mathrm{d}m = 1$$

şi ele fiind pozitive, avem şi $\| m \| = 1$.

TEOREMA 2.2 (Arens-Singer). *Pentru orice* $M \in \mathfrak{M}$ *există cel puţin o măsură Arens-Singer pe* X. *Orice măsură Arens-Singer pentru* M *este o măsură de reprezentare pentru* M.

Demonstraţie. Să notăm cu $\log |A^{-1}|$ submulţimea lui $C_R(X)$ definită prin :

$$\log |A^{-1}| = \{u \in C_R(X) : u = \log |f| \text{ cu } f \in A^{-1}\}.$$

Fie B subspaţiul liniar generat de $\log |A^{-1}|$ în $C_R(X)$. Definim funcţionala L pe B punînd pentru orice $g \in B$ de forma :

$$g = \Sigma\, c_i \log |f_i| \text{ cu } f_i \in A^{-1},$$

$$L(g) = \Sigma c_i \log |f(M)|. \tag{2.23}$$

Vom arăta că pentru orice $g \in B$ avem

$$|L(g)| \leqslant \|g\|, \tag{2.24}$$

de unde rezultă că L e bine definită şi continuă pe B.

Pentru aceasta fie că (2.24) nu este adevărată. Există deci $g \in B$ astfel încît :

$$|L(g)| > \|g\|. \tag{2.25}$$

Fie $g = \Sigma\, c_i \log |f_i|$ cu $f_i \in A^{-1}$. Din definiţia lui L rezultă că (2.25) rămîne adevărată modificînd suficient de puţin pe c_i. Deci putem găsi numerele raţionale r_i astfel încît $g = \Sigma r_i \log |f_i|$ să verifice (2.25) şi înmulţind cu un număr natural suficient de mare obţinem :

$$\Sigma p_i \log |M(f_i)| > \| \Sigma\, p_i \log |f_i| \| \tag{2.26}$$

cu p_i naturale. Fie

$$f = f_1^{p_1} f_2^{p_2} \ldots f_n^{p_n}$$

Atunci $f \in A^{-1}$ şi folosind multiplicativitatea lui M, (2.26) devine :

$$\log |M(f)| > \| \log |f| \|$$

ceea ce contrazice faptul că M are norma 1. Deci (2.24) este adevărată şi atunci L poate fi prelungită cu teorema lui Hahn-Banach pînă la o funcţională liniară şi mărginită de 1 pe $C_R(X)$, adică pînă la măsura m pe X. Avem deci :

$$L(u) = \int u \mathrm{d}m, \qquad (u \in B).$$

Cum $m(1) = L(1) = 1$ şi cum m este mărginită de 1, avem şi $\|m\| = 1$. De aici rezultă că m este o măsură pozitivă. În adevăr, fie :

$$m = m^+ - m^-$$

descompunerea lui m în partea sa pozitivă şi negativă. Avem :

$$1 = m(1) = m^+ (1) - m^- (1)$$

$$1 = \|m\| = |m|\, (1) = m^+ (1) + m^- (1)$$

şi prin scădere obţinem :

$$m^- (1) = 0$$

Măsura m^- fiind pozitivă, avem :

$$\|m^-\| = m^- (1) = 0$$

şi deci $m^- = 0$ ceea ce înseamnează că m este pozitivă.

Pentru orice $f \in A^{-1}$ avem :

$$\log |f(M)| = L\ (\log\ |f|) = \int \log |f|\ \mathrm{d}m$$

și deci m este o măsură Arens-Singer pentru M.

Fie acum m o măsură Arens-Singer pentru M și $f \in A$. Cum $e^f \in A^{-1}$ avem :

$$\int \operatorname{Re} f \mathrm{d}m = \int \log |\mathrm{e}^f|\ \mathrm{d}m = \log |M(\mathrm{e}^f)| = \log |\mathrm{e}^{M(f)}| = \operatorname{Re} M(f).$$

Aici am folosit liniaritatea, multiplicativitatea și continuitatea lui M. Avem deci :

$$\operatorname{Re} M(f) = \int \operatorname{Re} f \mathrm{d}m$$

$$\operatorname{Im} M(f) = \int \operatorname{Im} f \mathrm{d}m$$

și deci

$$M(f) = \int f \mathrm{d}m$$

adică m este o măsură de reprezentare pentru M. Cu acestea teorema este complet demonstrată.

2.3. *Părți Gleason.* Noțiunea de ,,parte Gleason'' introdusă de Gleason în [17] s-a dovedit foarte utilă în găsirea structurilor analitice pe $\mathfrak{M}$.

TEOREMA 2.3. *Fie M_1, M_2 din $\mathfrak{M}$. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

(i) $\|M_1 - M_2\| < 2$.

(ii) *Există $c < 1$ astfel încît pentru orice $f \in A$, $\|f\| \leqslant 1$ și $f(M_1) = 0$ să avem $|f(M_2)| \leqslant c$.*

(iii) *Pentru orice șir h_n de elemente din A cu $\|h_n\| < 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} |h_n(M_2)| = 1$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} |h_n(M_1)| = 1$.*

(iv) *Există $a > 0$ astfel încît pentru orice funcție strict pozitivă u din* ReA *să avem :*

$$1/a \leqslant u(M_1)/u(M_2) \leqslant a.$$

(v) *Există $c < 1$ și măsurile de reprezentare m_1 pentru M_1 și m_2 pentru M_2 astfel încît $cm_1 \leqslant m_2$, $cm_2 \leqslant m_1$*

Demonstrație. Fie că (ii) nu este adevărată. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $f \in A$ cu $\|f\| \leqslant 1$ și $f(M_1) = 0$ astfel încît $|f(M_2)| = 1 - \varepsilon$.

Fie L transformarea conformă a cercului $|z| \leqslant 1 - \varepsilon$ în el însuși care duce pe $f(M_2)$ în $1 - \varepsilon$ și pe 0 în $-1 + 2\varepsilon$. E clar că o astfel de transformare există. Transformarea L fiind o funcție analitică în $|z| \leqslant 1$, $g = L(f)$ este o funcție din A pentru care avem $\|g\| \leqslant 1, g(M_1) = -1 + 2\varepsilon$, $g(M_2) = 1 - \varepsilon$. Avem deci :

$$|g(M_1) - g(M_2)| = |-1 + 2\varepsilon - 1 + \varepsilon| = 2 - 3\varepsilon.$$

Şi atunci

$$\|M_1 - M_2\| = \sup\{|g(M_1) - g(M_2)|,\ g \in A,\ \|g\| \leqslant 1\} = 2$$

adică (i) este falsă. Deci implicaţia (i) → (ii) este demonstrată.

Să presupunem acum că afirmaţia (iii) nu este adevărată. Înseamnează că există $c < 1$ astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$ găsim o funcţie $g \in A$ astfel încît $\|g\| \leqslant 1$, $|g(M_2)| > 1 - \varepsilon$ şi $|g(M_1)| < c$. Fie $z_0 = g(M_1)$ şi $r = |g(M_2)|$ şi

$$L(z) = \frac{r^2(z - z_0)}{r^2 - \bar{z}_0 z}.$$

Pentru ε suficient de mic, $L(z)$ este o funcţie analitică în $|z| \leqslant 1$ şi deci $f = L(g)$ este o funcţie din A pentru care avem $\|f\| \leqslant 1$, $f(M_1) = 0$ şi $|f(M_2)| > 1 - \varepsilon$. Deci afirmaţia (ii) este falsă. Aceasta demonstrează implicaţia (ii) → (iii).

Afirmaţia (i) fiind simetrică în M_1, M_2, rezultă că afirmaţiile (ii), (iii) sînt simetrice în M_1, M_2.

Presupunem că (iii) este adevărată şi fie c, $0 < c < 1$, o constantă astfel încît există o funcţie strict pozitivă u din $\mathrm{Re}A$ care satisface $u(M_2) = 1$ şi $u(M_1) < c$. Fie v din $\mathrm{Re}A$ astfel încît $u + iv \in A$ şi

$$f = e^{-(u+iv)}.$$

Funcţia f este din A şi pentru ea avem:

$$\|f\| \leqslant 1,\ |f(M_1)| > e^{-c},\ |f(M_2)| = e^{-1} \tag{2.31}$$

Dacă c poate fi ales oricît de mic, atunci din (2.31) rezultă că putem găsi un şir f_n de funcţii din A astfel încît

$$\|f_n\| \leqslant 1,\ |f_n(M_1)| \to 1 \text{ şi } |f_n(M_2)| = e^{-1}$$

ceea ce contrazice (iii). Deci există $c, 0 < c < 1$, astfel încît pentru orice funcţie pozitivă u din $\mathrm{Re}A$ să avem $u(M_1) \geqslant cu(M_2)$. Din simetrie rezultă că există c, $0 < c < 1$, astfel încît $u(M_2) \geqslant c\,u(M_1)$ şi deci există $a > 1$ astfel încît

$$\frac{1}{a} \leqslant \frac{u(M_1)}{u(M_2)} \leqslant a$$

adică (iv) este adevărată şi deci implicaţia (iii) → (iv) este adevărată.

Presupunem acum că (iv) este adevărată. Există deci $c = a^{-1}$, $0 < c < 1$, astfel încît:

$$\begin{aligned} u(M_1) - cu(M_2) &\geqslant 0 \\ u(M_2) - cu(M_1) &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

pentru orice u pozitiv din $\mathrm{Re}A$. Definim pe $\mathrm{Re}A$ funcţionalele liniare:

$$\begin{aligned} L_1(u) &= (1 - c)^{-1}\ [u(M_1) - cu(M_2)] \\ L_2(u) &= (1 - c)^{-1}\ [u(M_2) - cu(M_1)]. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Din (2.32) rezultă că L_i $(i = 1, 2)$ sînt pozitive şi deci $|L_i(u)| \leqslant 1$ pentru $\|u\| \leqslant 1$. Cum $L_i(1) = 1$, rezultă că $\|L_i\| = 1$.

Din teorema lui Hahn-Banach există măsurile reale μ_i $(i = 1, 2)$ pe X astfel încît $\|\mu_i\| = 1$ şi

$$L_i(u) = \int u \, \mathrm{d}\, \mu_i \qquad (i = 1, 2)$$

şi cum μ_i sînt reale, rezultă că :

$$\begin{aligned} f(M_1) - cf(M_2) &= (1 - c)\int f \, \mathrm{d}\mu_1, \\ f(M_2) - cf(M_1) &= (1 - c)\int f \, \mathrm{d}\mu_2. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Cum $\|\mu_i\| = 1$ şi $\mu_i(1) = 1$, rezultă că μ_i sînt pozitive. Utilizînd (2.34) avem :

$$f(M_1) = cf(M_2) + (1 - c)\int f \, \mathrm{d}\mu_1 = c^2 f(M_1) + c(1 - c)\int f \, \mathrm{d}\mu_2 + \\ + (1 - c)\int f \, \mathrm{d}\mu_1$$

$$f(M_2) = cf(M_1) + (1 + c)\int f \, \mathrm{d}\mu_2 = c^2 f(M_2) + c(1 - c)\int f \, \mathrm{d}\mu_1 + \\ + (1 - c)\int f \, \mathrm{d}\mu_1$$

adică :

$$\begin{aligned} f(M_1) &= (1 + c)\left[c\int f \, \mathrm{d}\mu_2 + \int f \, \mathrm{d}\mu_1\right] \\ f(M_2) &= (1 - c)^{-1}\left[c\int f \, \mathrm{d}\mu_1 + \int f \, \mathrm{d}\mu_2\right]. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Dacă punem :

$$\begin{aligned} m_1 &= (1 + c)^{-1}(c\mu_2 + \mu_1) \\ m_2 &= (1 + c)^{-1}(c\mu_1 + \mu_2), \end{aligned} \tag{2.36}$$

atunci e clar că m_1 şi m_2 sînt măsuri de reprezentare pentru M_1 respectiv M_2 şi că avem :

$$cm_1 \leqslant m_2, \; cm_2 \leqslant m_1.$$

Cu aceasta implicaţia (iv) → (v) este demonstrată.

Implicaţia (v) → (iv) este evident adevărată.

Pentru a încheia demonstraţia teoremei mai arătăm că (iv) → (i). Fie pentru aceasta că (i) nu este adevărată, atunci avem : $\|M_1 - M_2\| = 2$. E clar atunci că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $f \in A$, $\|f\| < 1$, astfel încît dacă $f = u + iv$, avem $u(M_1) < -1 + \varepsilon$, $u(M_2) > 1 - \varepsilon$. Dacă punem $u_0 = u + 1$, atunci u_0 este o funcţie strict pozitivă din ReA şi avem:

$$\frac{u_0(M_1)}{u_0(M_2)} < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon},$$

ceea ce contrazice afirmaţia (iv). Deci implicaţia (iv) → (i) este adevărată şi cu aceasta teorema este complet demonstrată.

DEFINIŢIA 2.4. Fie $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$. Vom spune că M_1 şi M_2 sînt *Gleason echivalente* şi vom scrie $M_1 \sim M_2\,(G)$ dacă $\|M_1 - M_2\| < 2$.

Din teorema 2.3 rezultă că $M_1 \sim M_2\,(G)$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathfrak{M}$. Clasele de echivalenţă după această relaţie se numesc *„părţi Gleason"*.

Partea principală a teoremei 2.3 este următoarea teoremă a lui E. Bishop:

TEOREMA 2.4. *Fie $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$ şi m_1 o măsură de reprezentare pentru M_1. Dacă M_1 şi M_2 aparţin unei aceleaşi părţi Gleason, există o măsură de reprezentare m_2 pentru M_2 şi o constantă c, $0 < c < 1$, astfel încît $c\,m_1 \leqslant m_2$.*

Demonstraţie. Din teorema 2.3 (i) → (v), rezultă că există $c, 0 < < c < 1$ şi m_1', m_2' măsuri de reprezentare pentru M_1 respectiv M_2 astfel încît $cm_1' \leqslant m_2'$.

Dacă se pune:

$$m_2 = (m_2' - cm_1') + cm_1,$$

atunci e clar că m_2 este o măsură de reprezentare pentru M_2 şi avem

$$cm_1 = m_2 - (m_2' - cm_1') \leqslant m_2.$$

3. ALGEBRE LOGMODULARE

3.1. *Teoreme de unicitate.* În acest paragraf introducem noţiunea de algebră logmodulară cu care vom lucra în tot restul articolului.

DEFINIŢIA 3.1. O supnorm algebră A pe X se zice logmodulară dacă mulţimea:

$$\log|A^{-1}| = \{\log|f| \quad \text{cu} \quad f \in A^{-1}\}$$

este densă în $C_R(X)$.

A este o algebră Dirichlet pe X dacă spaţiul ReA este dens în $C_R(X)$.

Cum pentru orice $f \in A$, $e^f \in A^{-1}$ şi Re$f = \log|e^f|$, rezultă că Re$A \subset \subset \log|A^{-1}|$ şi deci orice algebră Dirichlet este logmodulară. În ultimul paragraf al lucrării vom arăta că există algebre logmodulare care nu sînt Dirichlet.

În tot restul lucrării, A va fi o algebră logmodulară pe X.

Următoarele teoreme constituie unul din rezultatele de bază ale întregei teorii.

TEOREMA 3.1. *Pentru orice $M \in \mathfrak{M}$, există o singură măsură Arens-Singer pe X. Măsura m satisface inegalitatea lui Jensen pe A:*

$$\log|f(M)| = \log\left|\int f\,\mathrm{d}m\right| \leqslant \int \log|f|\,\mathrm{d}m, \qquad (f \in A). \tag{3.11}$$

Demonstraţie. Cum două măsuri Arens-Singer pentru M coincid pe $\log|A^{-1}|$ şi cum mulţimea $\log|A^{-1}|$ este densă în $C_R(X)$ rezultă că astfel de măsuri sînt egale.

Să stabilim inegalitatea lui Jensen. Pentru $f \in A$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$, funcţia $\log(|f| + \varepsilon)$ aparţine lui $C_R(X)$ şi deci există $u \in \log|A^{-1}|$ astfel încît :

$$u - \varepsilon < \log(|f| + \varepsilon) < u + \varepsilon \tag{3.12}$$

şi ţinînd seama de partea dreaptă a relaţiei (3.12), obţinem :

$$|f|\,\mathrm{e}^{-u} < \mathrm{e}^{\varepsilon} \tag{3.13}$$

Fie $u = \log|g|$ cu $g \in A^{-1}$ şi $h = fg^{-1}$. Avem

$$|h| = |f|\,|g^{-1}| = |f|\,\mathrm{e}^{-u} < \mathrm{e}^{\varepsilon}$$

după (3.13). Deci :

$$|h(M)| < \mathrm{e}^{\varepsilon}$$

adică :

$$|f(M)|\,|g^{-1}(M)| < \varepsilon$$

şi deci

$$\log|f(M)| - \log|g(M)| < \varepsilon. \tag{3.14}$$

Dar m fiind măsură Arens-Singer şi g aparţinînd lui A^{-1} avem :

$$\log|g(M)| = \int \log|g|\,\mathrm{d}m = \int u\,\mathrm{d}m. \tag{3.15}$$

Din (3.12) obţinem :

$$\int u\,\mathrm{d}m < \varepsilon + \int \log(|f| + \varepsilon)\,\mathrm{d}m \tag{3.16}$$

şi ţinînd seama de (3.14), (3.15), (3.16), putem scrie :

$$\log|f(M)| = \log\left|\int f\,\mathrm{d}m\right| \leqslant 2\varepsilon + \int \log|f|\,\mathrm{d}m.$$

Cum ε este arbitrar, inegalitatea lui Jensen este demonstrată.

TEOREMA 3.2. *Fie A o algebră logmodulară pe X şi $M \in \mathfrak{M}$. Atunci există o singură măsură de reprezentare pentru M.*

Demonstraţie. Fie m_1, m_2 două măsuri de reprezentare pentru M. Pentru f din A^{-1} avem :

$$f(M) = \int f\,\mathrm{d}m_1, \qquad |f(M)| \leqslant \int |f|\,\mathrm{d}m_1,$$

$$f^{-1}(M) = \int f^{-1}\,\mathrm{d}m_2, \qquad |f^{-1}(M) \leqslant \int |f|^{-1}\,\mathrm{d}m_2.$$

Cum $f(M)f^{-1}(M)=1$ avem:

$$1 \leqslant \int |f|\,\mathrm{d}m_1 \int |f^{-1}|\,\mathrm{d}m_2 \tag{3.17}$$

pentru orice $f \in A^{-1}$. Cum mulţimea $\log|A^{-1}|$ este densă în $C_R(X)$, (3.17) va fi adevărată pentru orice funcţie de tipul e^u cu $u \in C_R(X)$. Avem deci:

$$1 \leqslant \int \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}m_1 \int \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}m_2. \tag{3.18}$$

Fixăm u în $C_R(X)$ şi fie pentru orice t real

$$\rho(t) = \int \mathrm{e}^{tu}\,\mathrm{d}m_1 \int \mathrm{e}^{-tu}\,\mathrm{d}m_2.$$

E clar că $\rho(t)$ este o funcţie derivabilă şi din (3.18) rezultă că $\rho(t) \geqslant 1$ pentru orice t. Cum $\rho(0)=1$, rezultă că $\rho'(0)=0$. Avem deci:

$$\rho'(0) = \int u\,\mathrm{d}m_1 - \int u\,\mathrm{d}m_2 = 0$$

adică:

$$\int u\,\mathrm{d}m_1 = \int u\,\mathrm{d}m_2$$

pentru orice $u \in C_R(X)$ şi deci $m_1 = m_2$.

Combinînd teorema 3.1 cu teorema 3.2, rezultă că pentru orice $M \in \mathfrak{M}$ există o singură măsură de reprezentare m pe X care este şi măsură Arens-Singer pentru M şi care verifică inegalitatea lui Jensen (3.11).

În cele ce urmează vom numi *măsură de reprezentare* a lui A o măsură m pe X care este măsură de reprezentare pentru un M din $\mathfrak{M}$. E clar că măsurile de reprezentare pentru A sînt măsurile pozitive pe X, de masă totală 1 şi multiplicative pe A.

Am văzut în paragraful 2.1 că dacă A este o supnorm algebră pe X, $\mathfrak{M}$ spaţiul idealelor maximale ale lui A şi Γ frontiera Şilov, atunci $\Gamma \subset X \subset \mathfrak{M}$. În cazul algebrelor logmodulare avem următoarea precizare.

TEOREMA 3.3. *Dacă A este o algebră logmodulară pe X, atunci X coincide cu frontiera Şilov Γ a lui A.*

Demonstraţie. Vom utiliza caracterizarea frontierei Şilov dată de punctul 2) din teorema 2.1. Fie deci $x \in X$ şi U o vecinătate a sa. Atunci e clar că pentru orice $\varepsilon > 0$ putem găsi o funcţie u din $C_R(X)$ cu următoarele proprietăţi: $u \geqslant 0$ pe X, $u(x)=0$, $\|u\| \leqslant \log(1+\varepsilon)$ şi $\log u < \varepsilon$ pe $X-U$. Cum mulţimea $\log|A^{-1}|$ este densă în $C_R(X)$, rezultă că se găsesc $f \in A$ astfel încît $f(x)=1$, $\|f\| < 1+\varepsilon$ şi $|f| < \varepsilon$ pe $X-U$. Deci pentru x este îndeplinită condiţia (c) din teorema 2.1 şi deci $x \in \Gamma$.

3.2. *Spaţiile H^p*. Fie A o algebră logmodulară pe X şi m o măsură de reprezentare a lui A, deci m este o măsură pozitivă pe X, multiplicativă pe A şi $m(X)=1$.

DEFINIŢIA 3.2. Pentru orice $1 \leqslant p < \infty$ vom nota cu $H^p = H^p(\mathrm{d}m)$ subspaţiul obţinut prin închiderea lui A în $L^p = L^p(\mathrm{d}m)$. Prin definiţie, $H^\infty = H^2 \cap L^\infty$.

Cum X este compact, $L^p \subset L^1$ pentru orice $p \geqslant 1$, şi deci $H^p \subset H^1$ pentru orice $p \geqslant 1$.

În cele ce urmează vom studia spaţiile H^p în analogie cu studiul claselor lui Hardy. Atenţia principală o să cadă asupra spaţiului Hilbert H^2, asupra spaţiului H^1 şi asupra algebrei H^∞.

4. SPAŢIUL H^2

4.1. *Teorema Szegö.* Problema aproximării lui 1 cu polinoame care nu se anulează în origine se rezolvă şi în cazul algebrelor logmodulare printr-o formulă de tip Szegö [30], [43].

Demonstrăm mai întîi următoarele leme privind măsurile pozitive de masă totală 1 pe X.

LEMA 4.1. *Fie m o măsură pozitivă pe X cu $m(X) = 1$. Pentru orice funcţie reală g din $L^1(\mathrm{d}m)$ avem :*

$$\int \mathrm{e}^g \,\mathrm{d}m \geqslant \exp\left[\int g \,\mathrm{d}m\right]. \tag{4.11}$$

Demonstraţie. Presupunem întîi că :

$$\int g \mathrm{d}m = 0.$$

Inegalitatea de demonstrat este în acest caz :

$$\int \mathrm{e}^g \mathrm{d}m \geqslant 1$$

care este consecinţă a inegalităţii cunoscute $\mathrm{e}^g \geqslant 1 + g$.

Dacă g este oarecare, fie :

$$h = g - \int g \,\mathrm{d}m.$$

Avem :

$$\int h \,\mathrm{d}m = 0$$

şi deci :

$$\int \mathrm{e}^h \mathrm{d}m \geqslant 1$$

adică :

$$\int \exp\left[g - \int g \mathrm{d}m\right] \mathrm{d}m = \exp\left[-\int g \mathrm{d}m\right] \int \mathrm{e}^g \mathrm{d}m \geqslant 1,$$

de unde rezultă formula (4.11).

LEMA 4.2. *Fie m o măsură pozitivă pe X, $m(X) = 1$ şi h o funcţie reală şi nenegativă din $L^1(\mathrm{d}m)$. Atunci :*

$$\exp\left[\int \log h \,\mathrm{d}m\right] = \inf_g \int \mathrm{e}^g h \mathrm{d}m \tag{4.12}$$

inferiorul luîndu-se după toate funcțiile g care verifică :

$$\int g \, \mathrm{d}m = 0$$

și aparțin :

a) *Spațiului* $L^1_R(\mathrm{d}m)$ *al funcțiilor reale din* $L^1(\mathrm{d}m)$.
b) *Spațiului funcțiilor Baire reale și mărginite pe* X.
c) *Spațiului* $C_R(X)$.

Demonstrație. Deoarece $h \in L^1(\mathrm{d}m)$ și $\log h \leqslant h$, $\log h$ va fi neintegrabilă doar în cazul cînd :

$$\int \log h \, \mathrm{d}m = -\infty .$$

În acest caz $\exp\left[\int \log h \, \mathrm{d}m\right] = 0$ prin definiție.

Fie $g \in L^1_R(\mathrm{d}m)$ cu :

$$\int g \, \mathrm{d}m = 0.$$

După lema 4.1 avem :

$$\int e^g h \, \mathrm{d}m \geqslant \exp\left[\int (g + \log h) \, \mathrm{d}m\right] = \exp\left[\int \log h \, \mathrm{d}m\right] \tag{4.13}$$

în cazul cînd $\log h$ este integrabilă. Dacă $\log h$ nu este integrabilă, inegalitatea (4.13) este evidentă deoarece h este nenegativă.

Avem deci :

$$\exp\left[\int \log h \, \mathrm{d}m\right] \leqslant \inf_g \int e^g h \, \mathrm{d}m$$

cu $g \in L^1_R(\mathrm{d}m)$ verificînd :

$$\int g \, \mathrm{d}m = 0.$$

Dacă $\log h$ este integrabilă, fie :

$$g = -\log h + \int \log h \, \mathrm{d}m.$$

Avem $g \in L^1_R(\mathrm{d}m)$,

$$\int g \, \mathrm{d}m = 0$$

și :

$$\int e^g h \, \mathrm{d}m = \int \exp\left[-\log h + \int \log h \, \mathrm{d}m\right] h \, \mathrm{d}m = \exp\left[\int \log h \, \mathrm{d}m\right] \cdot$$

Deci în acest caz (4.13) este demonstrată. Dacă $\log h$ nu este integrabilă, atunci $\log (h + \varepsilon)$ este integrabilă și deci (4.12) este adevărată pentru astfel de funcții. Tinzînd cu ε monoton la zero, obținem (4.12) pentru h.

Deci (4.12) este adevărată atunci cînd g parcurge pe $L^1_R(\mathrm{d}m)$. Vom arăta că ea este adevărată cînd înlocuim pe $L^1_R(\mathrm{d}m)$ cu spaţiul funcţiilor Baire reale şi mărginite pe X.

Fie $g \in L^1_R(\mathrm{d}m)$ cu

$$\int g\,\mathrm{d}m = 0.$$

Putem găsi un şir de funcţii Baire mărginite g_n cu :

$$\lim \int g_n = 0$$

astfel încît g_n^+ să conveargă crescător la g^+, iar g_n^- să conveargă descrescător la g^-.

După teorema convergenţei monotone (Beppo-Levi) avem :

$$\lim \int \mathrm{e}^{g_n} h\,\mathrm{d}m = \int \mathrm{e}^{g} h\,\mathrm{d}m$$

şi atunci e clar că (4.12) este adevărată cînd g parcurge spaţiul funcţiilor Baire, reale şi mărginite pe X.

Dacă g este o funcţie Baire, reală şi mărginită cu :

$$\int g\,\mathrm{d}m = 0,$$

atunci există un şir g_n de funcţii din $C_R(X)$ mărginit şi cu :

$$\int g_n \mathrm{d}m = 0$$

care converge punctual peste tot către g. Din teorema convergenţei mărginite (Lebesgue) avem :

$$\lim \int h\mathrm{d}m = \int \mathrm{e}^{g} h\,\mathrm{d}m$$

şi deci (4.12) este adevărată cu g parcurgînd pe $C_R(X)$.

Trecem acum la formularea teoremei Szegö-Kolmogorov-Krein.

Fie A o algebră logmodulară pe X şi m o măsură de reprezentare a lui A. Notăm

$$A_m = \left\{ f \in A \,;\ \int f\,\mathrm{d}m = 0 \right\}. \tag{4.14}$$

E clar că A_m este un ideal în A şi anume cel ataşat funcţionalei multiplicative M definită de m pe A. Idealul A_m va juca aici rolul mulţimii polinoamelor care se anulează în origine din cazul clasic.

Analogul teoremei lui Szegö-Kolmogorov-Krein este următoarea formulă :

$$\inf_{f \in A_m} \int |1 - f|^2 \mathrm{d}\mu = \exp\left[\int \log h\,\mathrm{d}m\right]$$

pentru orice măsură pozitivă pe X, h fiind derivata lui μ în raport cu m. Este o formulă care ne permite calcularea distanţei în $L^2(\mathrm{d}\mu)$ a lui 1 faţă de A_m.

TEOREMA 4.1. *Fie A o algebră logmodulară pe X și m o măsură pozitivă pe X. Dacă μ_a este partea absolut continuă a lui μ față de m, atunci*

$$\inf_{f \in A_m} \int |1 - f|^2 \, d\mu = \inf_{f \in A_m} \int |1 - f|^2 \, d\mu_a.$$

În particular, dacă μ este singulară în raport cu m, atunci 1 aparține închiderii lui A_m în $L^2(d\mu)$.

Demonstrație. Fie F proiecția lui 1 pe subspațiul S generat de A_m în $L^2(d\mu)$. Avem :

$$\int |1 - F|^2 \, d\mu = \inf_{f \in A_m} \int |1 - f|^2 \, d\mu. \tag{4.15}$$

Cum $F \in S$, există $f_n \in A_m$ care converge în $L^2(d\mu)$ către F. A_m fiind ideal în A, avem $(1 - f_n) f \in A_m$ pentru orice $f \in A_m$ și cum $1 - F$ este ortogonal pe S, avem :

$$\int f(1 - f_n)(1 - F) \, d\mu = 0, \qquad (f \in A_m) \tag{4.16}$$

Funcția f fiind mărginită, șirul $f(1 - f_n)$ tinde în $L^2(d\mu)$ către $f(1 - F)$ și deci (4.16) devine :

$$\int f |1 - F|^2 \, d\mu = 0, \qquad (f \in A_m). \tag{4.17}$$

Fie :

$$k = \int |1 - F|^2 \, d\mu.$$

Cum F este proiecția lui 1 pe S, vom avea $k = 0$ dacă și numai dacă $1 \in S$ în care caz teorema 4.1 este evidentă. Presupunem deci că avem $k > 0$ și fie

$$\mu_1 = k^{-1} |1 - F|^2 \mu.$$

E clar că μ_1 este o măsură pozitivă pe X cu $\mu_1(X) = 1$. Avem :

$$\int f d\mu_1 = k^{-1} \int f |1 - F|^2 \, d\mu = 0, \qquad (f \in A_m)$$

și deci :

$$\int \left[f - \int f dm \right] d\mu_1 = 0, \qquad (f \in A)$$

sau :

$$\int f d\mu_1 = \int f dm, \qquad (f \in A)$$

adică măsura μ_1 coincide pe A cu m. Datorită unicității măsurii de reprezentare avem $\mu_1 = m$, ceea ce înseamnă :

$$|1 - F|^2 \mu = km. \tag{4.18}$$

Fie $\mu = \mu_a + \mu_s$ descompunerea Lebesgue a măsurii în raport cu m. μ_a este deci absolut continuă în raport cu m, iar μ_s singulară în raport cu m. Din (4.18) rezultă că funcţia $(1 - F)$ se anulează aproape peste tot în raport cu μ_s. Avem deci:

$$\int (1-F) f \mathrm{d}\mu_a = \int (1-F) f \mathrm{d}\mu = 0, \qquad (f \in A_m). \tag{4.19}$$

Cum:

$$\int |F-f_n|^2 \mathrm{d}\mu_a \leqslant \int |f-f_n|^2 \mathrm{d}\mu,$$

rezultă că F aparţine închiderii S_a a lui A_m în $L^2(\mathrm{d}\mu_a)$. Cum din (4.19) deducem că $(1 - F_a)$ este ortogonal pe S_a, rezultă că F este proiecţia lui 1 pe S_a. Deci

$$\inf_{f \in A_m} \int |1-f|^2 \mathrm{d}\mu = \int |1-F|^2 \mathrm{d}\mu = \int |1-F|^2 \mathrm{d}\mu_a = \inf_{f \in A_m} \int |1-f|^2 \mathrm{d}\mu_a.$$

Dacă μ este singulară în raport cu m, atunci $\mu_a = 0$. Avem deci $F = 1$ μ-aproape peste tot şi deci $1 \in S$.

TEOREMA 4.2. *Fie A o algebră logmodulară pe X şi m o măsură de reprezentare a lui A. Dacă h este o funcţie nenegativă din $L^1(\mathrm{d}m)$, atunci:*

$$\inf_{f \in A_m} \int |1-f|^2 h \,\mathrm{d}m = \exp\left[\int \log h \,\mathrm{d}m\right].$$

Demonstraţie. Din lema 4.2 avem:

$$\exp\left[\int \log h \,\mathrm{d}m\right] = \inf_u \int \mathrm{e}^u h \,\mathrm{d}m \left(u \in C_R(X), \int u \mathrm{d}m = 0\right).$$

Cum mulţimea $\log(A^{-1})$ este densă în $C_R(X)$, orice funcţie $u \in C_R(X)$ este aproximată de funcţii de tipul $\log |f|^2$ cu $f \in A^{-1}$. Cum

$$\int u \mathrm{d}m = 0,$$

atunci

$$\int \log |f|^2 \mathrm{d}m$$

este aproape de zero şi cum m este o măsură Arens-Singer, rezultă că:

$$\log \left| \int f \mathrm{d}m \right|$$

este aproape de zero. Atunci e clar că avem:

$$\exp\left[\int \log h \,\mathrm{d}m\right] = \inf \int |f|^2 h \,\mathrm{d}m, \quad \left(f \in A\,;\ \int f \mathrm{d}m = 1\right).$$

Cum

$$\int f \mathrm{d}m = 1$$

rezultă că $f = 1 - g$ cu $g \in A_m$. Deci :

$$\exp\left[\int \log h \,\mathrm{d}m\right] \geqslant \inf_{g \in A_m} \int |1 - g|^2 h \,\mathrm{d}m. \tag{4.1.10}$$

Pe de altă parte, dacă $g \in A_m$, din inegalitatea lui Jensen avem :

$$\int \log |1 - g|^2 \,\mathrm{d}m \geqslant 2 \log \left|\int (1 - g) \mathrm{d}m\right| = 0$$

şi atunci aplicînd lema 4.1 obţinem :

$$\int |1 - g|^2 h \,\mathrm{d}m \geqslant \exp\left\{\int [\log |1 - g|^2 + \log h] \,\mathrm{d}m\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left[\int \log h \,\mathrm{d}m\right]. \tag{4.1.11}$$

Combinînd (4.1.10) cu (4.1.11) obţinem :

$$\exp\left[\int \log h \,\mathrm{d}m\right] = \inf_{g \in A_m} \int |1 - g|^2 h \mathrm{d}m$$

şi deci teorema 4.2 este demonstrată.

Combinînd ultimele două teoreme obţinem

TEOREMA 4.3 (Szegö-Kolmogorov-Krein). *Fie A o algebră logmodulară pe X şi m o măsură de reprezentare a sa. Dacă μ este o măsură pozitivă pe X şi $\mathrm{d}\mu = h\mathrm{d}m + \mathrm{d}\mu_s$ descompunerea Lebesgue a lui μ în raport cu m, atunci avem*

$$\inf_{f \in A_m} \int |1 - f|^2 \,\mathrm{d}\mu = \exp\left[\int \log h \,\mathrm{d}m\right].$$

4.2. *Caracterizarea funcţiilor din H^2.* În cazul clasic condiţia :

$$\frac{1}{2\pi}\int f z^n \mathrm{d}\theta = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

este o caracterizare a funcţiilor din H^2 printre cele din L^2.

În cele ce urmează vom demonstra aceeaşi caracterizare a funcţiilor din H^2 în cazul algebrelor logmodulare, locul polinoamelor trigonometrice care se anulează în origine fiind luat şi aici de funcţiile din A_m.

TEOREMA 4.4. *Fie A o algebră logmodulară pe X şi m o măsură de reprezentare a lui A. Măsura m este multiplicativă pe H^2 $(\mathrm{d}m)$ şi inegalitatea lui Jensen*

$$\log \left|\int f \mathrm{d}m\right| \leqslant \int \log |f| \,\mathrm{d}m$$

este adevărată și pentru funcțiile din $H^2(\mathrm{d}m)$. *Deci, dacă* $f \in H^2(\mathrm{d}m)$ *și :*

$$\int f \mathrm{d}m \neq 0,$$

atunci funcția $\log|f|$ *este integrabilă în raport cu* m.

Demonstrație. Multiplicativitatea măsurii m pe $H^2(\mathrm{d}m)$ rezultă din multiplicativitatea lui m pe A și densitatea lui A în $H^2(\mathrm{d}m)$.

Fie $f \in H^2(\mathrm{d}m)$. Putem găsi șirul f_n de funcții din A astfel încît f_n tinde către f în $H^2(\mathrm{d}m)$ și

$$\int f_n \, \mathrm{d}m = \int f \mathrm{d}m.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci $|f_n| + \varepsilon$ converge către $|f| + \varepsilon$ în $L^1(\mathrm{d}m)$. Se verifică ușor că atunci și $\log(|f_n| + \varepsilon)$ converge către $\log(|f| + \varepsilon)$ în $L^1(\mathrm{d}m)$. Deci :

$$\int \log(|f| + \varepsilon)\mathrm{d}m = \lim \int \log(|f_n| + \varepsilon)\mathrm{d}m \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim} \int \log|f_n|\,\mathrm{d}m \geqslant \overline{\lim} \log \left| \int f_n \mathrm{d}m \right| = \log \left| \int f \mathrm{d}m \right|$$

și cum ε este arbitrar, formula lui Jensen este demonstrată.

TEOREMA 4.5. *Fie* A *și* m *ca mai sus și* g *o funcție din* $L^1(\mathrm{d}m)$ *astfel încît*

$$\int fg \mathrm{d}m = 0$$

pentru orice $f \in A$. *Atunci :*

$$\int \log|1 - g|\,\mathrm{d}m \geqslant 0.$$

Demonstrație. Fie $f \in A^{-1}$. Avem

$$\int f \mathrm{d}m = \int f(1 - g)\,\mathrm{d}m$$

sau

$$\left| \int f \mathrm{d}m \right| \leqslant \int |f|\,|1 - g|\,\mathrm{d}m$$

și deci

$$\log \left| \int f \mathrm{d}m \right| \leqslant \log \left[\int |f|\,|1 - g|\,\mathrm{d}m \right].$$

Măsura m fiind o măsură Arens-Singer și f fiind din A^{-1},

$$\int \log|f|\,\mathrm{d}m \leqslant \log \int |f|\,|1 - g|\,\mathrm{d}m$$

sau

$$\exp\left[\int \log|f|\,\mathrm{d}m\right] \leqslant \int |f|\,|1-g|\mathrm{d}m. \tag{4.21}$$

Cum mulţimea $\log|A^{-1}|$ este densă în $C_R(X)$, formula (4.21) rămîne adevărată dacă înlocuiesc $\log|f|$ cu orice funcţie u din $C_R(X)$.

Avem deci :

$$1 \leqslant \int \mathrm{e}^u |1-g|\,\mathrm{d}m$$

pentru orice $u \in C_R(X)$ cu

$$\int u\mathrm{d}m = 0.$$

Atunci din lema 4.2 obţinem :

$$\exp\left[\int \log|1-g|\,\mathrm{d}m\right] \geqslant \mathrm{e}^u\,|1-g|\,\mathrm{d}m \geqslant 1$$

adică

$$\int \log|1-g|\,\mathrm{d}m \geqslant 0.$$

Lema 4.3. *Fie m o măsură pozitivă pe X, $m(X) = 1$. Fie că :*

$$\int \log|1-tg|\,\mathrm{d}m \geqslant 0$$

pentru orice t dintr-un interval de forma $|t| < \delta$. Atunci $g = 0$ aproape peste tot în raport cu m.

Demonstraţie. Pentru $|t| < \delta$ avem :

$$\int \log|1-tg|\,\mathrm{d}m \geqslant 0, \quad \int \log|1+tg|\,\mathrm{d}m \geqslant 0.$$

Deci

$$\int \log|1-t^2g^2|\,\mathrm{d}m \geqslant 0.$$

Fie

$$E_t = \{x \in X :\ 1 - t^2g^2(x) > 0\}\,;\quad E'_t = X - E_t.$$

Avem :

$$\int_{E_t} \log(1-t^2g^2)\,\mathrm{d}m + \int_{E'_t} \log(t^2g^2-1) \geqslant 0.$$

Ţinînd cont de inegalităţile cunoscute :

$$\log(1-y) \leqslant -y, \qquad (y < 1)$$

$$\log(y-1) \leqslant y. \qquad (y \geqslant 1).$$

Avem

$$-t^2\int_{E_t} g^2\,\mathrm{d}m + \int_{E'_t} g^2\,\mathrm{d}m \geqslant 0$$

sau :

$$-\int_{E_t} g^2 \mathrm{d}m + \int_{E'_t} g^2 \,\mathrm{d}m \geqslant 0. \tag{4.22}$$

Cum $E_t = \{ g^2 < 1/t^2 \}$ şi cum $g^2 \in L^1(\mathrm{d}m)$, avem $\lim m(E_t) = 1$ şi deci $\lim\limits_{t\to 0} m'(E'_t) = 0$ şi atunci din (4.22) obţinem

$$-\int g^2 \,\mathrm{d}m \geqslant 0,$$

adică $g = 0$ aproape peste tot în raport cu m.

Pentru o supnorm algebră A pe X notăm $\overline{A} = \{ \bar{f},\ f \in A \}$, unde $\bar{f}$ este conjugata complexă a lui f.

Teorema 4.6. *Fie A o algebră logmodulară pe X şi m o măsură de reprezentare a lui A. Atunci spaţiul $A + \overline{A}$ este dens în $L^2(\mathrm{d}m)$. Avem deci :*

$$L^2(\mathrm{d}m) = H^2(\mathrm{d}m) \oplus \overline{H^2_m}(\mathrm{d}m)$$

unde $H^2_m(\mathrm{d}m)$ este închiderea lui A_m în $L^2(\mathrm{d}m)$. În particular o funcţie g din $L^2(\mathrm{d}m)$ aparţine lui $H^2(\mathrm{d}m)$ dacă şi numai dacă :

$$\int fg \,\mathrm{d}m = 0$$

pentru orice $f \in A_m$.

Demonstraţie. Dacă spaţiul $A + \overline{A}$ nu este dens în $L^2(\mathrm{d}m)$, atunci există o funcţie nenulă din $L^2(\mathrm{d}m)$ ortogonală pe $A + \overline{A}$. Există deci o funcţie reală şi nenulă g din $L^2(\mathrm{d}m)$ ortogonală pe A. Cum tg este ortogonală pe A oricare ar fi t real, atunci din teorema 4.5 rezultă că :

$$\int \log |1 - tg| \geqslant 0, \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

Deci din lema 4.3 rezultă $g = 0$ aproape peste tot în raport cu m, ceea ce contrazice faptul că g este o funcţie nenulă din $L^2(\mathrm{d}m)$.

E clar că $A + \overline{A} = A + \overline{A}_m$ şi deci $L^2(\mathrm{d}m) = H^2(\mathrm{d}m) + \overline{H^2_m}(\mathrm{d}m)$. Cum din multiplicativitatea lui m pe $H^2(\mathrm{d}m)$ rezultă că $H^2(\mathrm{d}m)$ şi $\overline{H^2_m}(\mathrm{d}m)$ sînt ortogonale, avem chiar :

$$L^2(\mathrm{d}m) = H^2(\mathrm{d}m) \oplus \overline{H^2_m}(\mathrm{d}m).$$

Deci o funcţie g din $L^2(\mathrm{d}m)$ aparţine lui $H^2(\mathrm{d}m)$ dacă şi numai dacă:

$$\int fg \,\mathrm{d}m = 0, \qquad (f \in A_m).$$

Corolarul 4.1. *Orice funcţie reală din $H^2(\mathrm{d}m)$ este constantă aproape peste tot în raport cu m.*

4.3. *Funcţii interioare şi exterioare. Subspaţii invariante. Teorema de factorizare.* În acest paragraf vom demonstra analogul teoremei lui Beurling [9] care stabileşte forma subspaţiilor invariante din $H^2(\mathrm{d}m)$. Cu ajutorul ei vom demonstra teorema de factorizare a funcţiilor din H^2 în funcţii interioare şi exterioare.

Definiția 4.1. O funcție F din $H^2(\mathrm{d}m)$ o vom numi *interioară* dacă $|F| = 1$ aproape peste tot în raport cu m. O funcție *exterioară în* $H^2(\mathrm{d}m)$ este o funcție g din $H^2(\mathrm{d}m)$ pentru care avem :

$$\int \log|g|\,\mathrm{d}m = \log\left|\int g\,\mathrm{d}m\right| > -\infty. \tag{4.31}$$

Teorema 4.7. *Fie g o funcție din $H^2(\mathrm{d}m)$. Funcția g este exterioară în $H^2(\mathrm{d}m)$ dacă și numai dacă mulțimea $Ag = \{fg;\ f \in A\}$ este densă în $H^2(\mathrm{d}m)$.*

Demonstrație. Fie $g \in H^2(\mathrm{d}m)$ astfel încît mulțimea Ag este densă în $H^2(\mathrm{d}m)$. Rezultă că 1 aparține închiderii lui Ag în $H^2(\mathrm{d}m)$ și atunci e clar că :

$$\int g\,\mathrm{d}m \neq 0.$$

Din formula lui Jensen rezultă că avem :

$$\int \log|g| \geqslant \log\left|\int g\,\mathrm{d}m\right| > -\infty.$$

Evident, putem presupune că :

$$\int g\,\mathrm{d}m = 1$$

și atunci pentru a demonstra suficiența ne mai rămîne să arătăm că :

$$\int \log|g|\,\mathrm{d}m = 0.$$

Cum 1 aparține închiderii lui Ag în $H^2(\mathrm{d}m)$, însemnează că există un șir $f_n \in A$ cu :

$$\int f_n\,\mathrm{d}m = 1$$

astfel încît :

$$\lim_n \int |1 - f_n g|^2\,\mathrm{d}m = 0. \tag{4.32}$$

Punînd $g_n = 1 - f_n$, atunci $g_n \in A_m$ și avem :

$$\begin{aligned}\int |1 - f_n g|^2\,\mathrm{d}m &= \int |1 - (1 - g_n)\,g|^2\,\mathrm{d}m = \\ &= \int [1 - (1 - g_n)\,g]\,[1 - (1 - \bar{g}_n)\bar{g}]\,\mathrm{d}m = \\ &= 1 - \int (1 - \bar{g}_n)\bar{g}\,\mathrm{d}m + \int |1 - g_n|^2\,|g|^2 - \\ &\quad - \int (1 - g_n)\,g\,\mathrm{d}m = -1 + \int |1 - g_n|^2\,|g|^2\,\mathrm{d}m.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Am folosit multiplicativitatea lui m pe $H^2(m)$.

Deci, ţinînd seama de (4.32) rezultă că există şirul g_n de funcţii din A_m astfel încît:

$$\lim \int |1 - g_n|^2 |g|^2 \, \mathrm{d}m = 1.$$

Din teorema lui Szegö rezultă că:

$$\exp \left[\int \log |g|^2 \right] = \inf_{g \in A_m} \int |1 - g_n|^2 |g|^2 \, \mathrm{d}m = 1.$$

Avem deci:

$$\int \log |g| \, \mathrm{d}m = 0$$

şi suficienţa este demonstrată.

Fie că g este o funcţie exterioară. Atunci e clar că:

$$\int g \, \mathrm{d}m \neq 0$$

şi deci putem presupune:

$$\int g \, \mathrm{d}m = 1.$$

Din teorema lui Szegö rezultă că:

$$1 = \exp \left[\int \log |g|^2 \, \mathrm{d}m \right] = \inf_{f \in A_m} \int |1 - f|^2 |g|^2 \, \mathrm{d}m.$$

Atunci pentru orice $h \in A$ punînd $f = 1 - h$ şi refăcînd calculul (4.33) obţinem:

$$\inf_{h \in A} \int |1 - hg|^2 \, \mathrm{d}m = -1 + \inf_{f \in A_m} \int |1 - f|^2 |g|^2 \, \mathrm{d}m = 0.$$

Deci 1 aparţine închiderii lui Ag în $H^2(\mathrm{d}m)$ adică Ag este densă în $H^2(\mathrm{d}m)$.

Teorema de subspaţiu invariant a lui Beurling [9], [19] se demonstrează şi în cazul algebrelor logmodulare.

Fie S un subspaţiu închis al lui $H^2(\mathrm{d}m)$. Vom spune că subspaţiul S este invariant dacă pentru orice $f \in A$ avem $fS \subset S$.

TEOREMA 4.8. *Fie S un subspaţiu invariant al lui $H^2(\mathrm{d}m)$ astfel încît există $g \in S$ cu:*

$$\int g \, \mathrm{d}m \neq 0.$$

Atunci există o funcţie interioară F astfel încît:

$$S = FH^2(\mathrm{d}m).$$

Funcţia F este unică în afara unui factor constant de modul 1.

Demonstrație. Fie G proiecția ortogonală a lui 1 pe S. Atunci $1-G$ este ortogonal pe S și cum $fG \in S$ pentru orice $f \in A$, avem :

$$\int (1 - \overline{G}) f\, \mathrm{d}m = 0, \qquad (f \in A). \tag{4.34}$$

Dacă $f \in A_m$, e clar că $fG \in H^2_m$ și deci

$$\int fG \mathrm{d}m = 0, \qquad (f \in A_m). \tag{4.35}$$

Din (4.34) și (4.35) rezultă că :

$$\int |G|^2 f \mathrm{d}m = 0, \qquad (f \in A_m)$$

și deci

$$|G|^2 = k^2 \mathrm{d}m. \tag{4.36}$$

Rezultă că $|G|$ este constantă aproape peste tot în raport cu m. Subspațiul S fiind invariant, avem $AG \subset S$ și cum G este mărginită, rezultă că $GH^2(\mathrm{d}m) \subset S$. Rămîne să mai arătăm că $S \subset GH^2(\mathrm{d}m)$.

Fie g în S ortogonal pe $GH^2(\mathrm{d}m)$. Avem deci

$$\int \bar{f}\overline{G} g \mathrm{d}m = 0, \qquad (f \in A). \tag{4.37}$$

Cum $g \in S$, $(1 - G)$ este ortogonal pe $hg \in S$ pentru orice h din A. Deci :

$$\int (1 - \overline{G})\, hg \mathrm{d}m = 0, \qquad (h \in A).$$

și cum $h \in A_m$, avem :

$$\int hg\, \mathrm{d}m = 0 \qquad (h \in A_m)$$

rezultă că :

$$\int hg\, \overline{G}\, \mathrm{d}m = 0, \qquad (h \in A_m). \tag{4.38}$$

Adunînd (4.37) cu (4.38) obținem

$$\int (\bar{f} + h)\, \overline{G} g\, \mathrm{d}m = 0$$

pentru orice $f \in A$, $h \in A_m$. Dar din teorema 4.6 rezultă că subspațiul $A + A_m$ este dens $L^2(\mathrm{d}m)$ și deci :

$$\overline{G} g = 0 \qquad m\text{-aproape peste tot.}$$

Cum $|G|$ este constantă aproape peste tot, rezultă că avem $G = 0$ aproape peste tot sau $g = 0$ aproape peste tot. Dacă $G = 0$ aproape peste tot, atunci G fiind proiecția lui 1 pe S rezultă că 1 este ortogonal pe S adică :

$$\int g \mathrm{d}m = 0$$

pentru orice g din S, ceea ce nu se poate prin ipoteză. Deci $g = 0$ m-aproape peste tot și deci $S = GH^2(\mathrm{d}m)$.

Punînd $F = k^{-1}G$ obţinem :

$$S = FH^2\,(\mathrm{d}m)$$

cu F funcţie interioară.

Fie F_1 o altă funcţie interioară astfel încît $S = F_1H^2\,(\mathrm{d}m)$.

Avem deci $F = F_1 h$, $F_1 = Fh_1$ cu $h, h_1 \in H^2\,(\mathrm{d}m)$ şi atunci :

$$h = F\overline{F}_1 = F\overline{F}\overline{h}_1 = \overline{h}_1.$$

Deci h şi $\overline{h}$ aparţin lui $H^2\,(\mathrm{d}m)$ şi din corolarul 4.1 rezultă că h este constantă aproape peste tot în raport cu m. Cum, evident, $|h| = 1$, unicitatea lui F este complet demonstrată.

TEOREMA 4.9. *Fie f o funcţie din $H^2\,(\mathrm{d}m)$ astfel încît :*

$$\int f\,\mathrm{d}m \neq 0.$$

Atunci $f = Fg$, unde F este o funcţie interioară şi g o funcţie exterioară în $H^2\,(\mathrm{d}m)$. Factorizarea este unică în afara unui factor constant de modul 1.

Demonstraţie. Fie S subspaţiul obţinut prin închiderea lui Af în $H^2\,(\mathrm{d}m)$. E clar că S este un subspaţiu invariant pentru care există $f \in S$ astfel încît :

$$\int f\,\mathrm{d}m \neq 0.$$

După teorema 4.8 există funcţia interioară F astfel încît :

$$S = FH^2\,(\mathrm{d}m).$$

Cum $f \in S$, rezultă că $f = Fg$ cu $g \in H^2\,(\mathrm{d}m)$. Funcţia g este exterioară în $H^2\,(\mathrm{d}m)$.

În adevăr, dacă g nu este exterioară în $H^2\,(\mathrm{d}m)$, atunci din teorema 4.7 rezultă că Ag nu este densă în $H^2\,(\mathrm{d}m)$. Deci 1 nu aparţine închiderii lui Ag în $H^2\,(\mathrm{d}m)$ şi atunci F nu aparţine închiderii S a lui $AFg = Af$ în $H^2\,(\mathrm{d}m)$ ceea ce este absurd.

Fie $f = F_1 g_1$ o altă factorizare a lui f cu F_1 interioară şi g_1 exterioară în $H^2\,(\mathrm{d}m)$. Cum avem evident $S = F_1 H^2\,(\mathrm{d}m)$, din teorema 4.8 rezultă că $F_1 = kF$, unde $|k| = 1$. Avem atunci :

$$Fg = F_1 g_1 = kFg_1$$

şi deci $g = kg_1$, ceea ce demonstrează complet teorema.

Pentru uşurarea trimiterilor viitoare adunăm sub acelaşi titlu în teorema următoare mai multe fapte, unele din ele deja demonstrate.

TEOREMA 4.10. *Fie μ o măsură pozitivă pe X, astfel încît* 1 *nu aparţine închiderii S a lui A_m în $L^2\,(\mathrm{d}m)$. Fie G proiecţia lui* 1 *pe S. Atunci :*

(i) $|1 - G|^2\,\mathrm{d}\mu = k\mathrm{d}m$, *unde k este o constantă pozitivă.*

(ii) *Funcţia* $(1 - G)^{-1}$ *este exterioară în* $H^2\,(\mathrm{d}m)$.

(iii) *Dacă* $\mathrm{d}\mu = h\mathrm{d}m + \mathrm{d}\mu s$ *cu* $h \in L^1\,(\mathrm{d}m)$ *şi* μ_s *singulară în raport cu* m, *atunci funcţia* $(1 - G)h$ *aparţine lui* $L^2\,(\mathrm{d}m)$.

(iv) $k = \exp\left[\int \log h\,\mathrm{d}m\right]$.

Demonstraţie. Afirmaţiile (i) şi (iv) le-am obţinut deja în demonstraţia teoremei lui Szegö (teoremele 4.1, 4.2, 4.3). Avem deci $|1 - G|^2 h\mathrm{d}m = k\mathrm{d}m$ şi deci $(1 - G)^{-1} \in L^2(\mathrm{d}m)$. În plus pentru $f \in A_m$ avem :

$$\int f(1 - G)^{-1}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{k}\int f(1 - G)^{-1}\,|1 - G|^2\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{k}\int f(1 - \bar{G})\,\mathrm{d}\mu = 0$$

deoarece $(1 - G)$ este ortogonal pe A_m în $L^2(\mathrm{d}m)$. Din teorema 4.6 rezultă că $(1 - G)^{-1} \in H^2(\mathrm{d}m)$.

Cum

$$(1 - G)\,h\mathrm{d}m = k(1 - G)^{-1}\,\mathrm{d}m$$

şi $(1 - G)^{-1} \in L^2(\mathrm{d}m)$, rezultă că $(1 - G)^{-1}$ este o funcţie exterioară în $H^2(\mathrm{d}m)$

Avem :

$$h = k\,|1 - G|^{-2} \quad m\text{-aproape peste tot}$$

şi deci

$$\log h = \log k + 2\log|1 - G|^{-1}.$$

După (iv) avem :

$$\log k = \int \log h\mathrm{d}m$$

şi deci

$$\int \log|1 - G|^{-1}\,\mathrm{d}m = 0.$$

Pe de altă parte :

$$\int (1 - G)^{-1}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{k}\int (1 - \bar{G})\,\mathrm{d}\mu =$$

$$= \frac{1}{k}\int (1 - \bar{G})\,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{k}\int (1 - \bar{G})\,G\,\mathrm{d}\mu =$$

$$= \frac{1}{k}\int |1 - G|^2\,\mathrm{d}\mu = \int \mathrm{d}m = 1.$$

Deci

$$\int \log|1 - G|^{-1}\,\mathrm{d}m = \log\left|\int (1 - G)^{-1}\,\mathrm{d}m\right| = 0$$

adică $(1 - G)^{-1}$ este o funcţie exterioară în $H^2(\mathrm{d}m)$.

Şi cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Următoarea teoremă generalizează cunoscute rezultate clasice.

TEOREMA 4.11. *Fie h o funcţie nenegativă din $L^1(\mathrm{d}m)$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

(i) *$\log h$ este integrabilă în raport cu m.*

(ii) *$h = |f|^2$, unde $f \in H^2(\mathrm{d}m)$ cu*

$$\int f\,\mathrm{d}m \neq 0.$$

(iii) $h = |g|^2$, *unde* g *este o funcție exterioară în* $H^2(\mathrm{d}m)$.

Demonstrație. Echivalența lui (ii) cu (iii) e clară din teorema 4.9. Implicația (iii) → (i) este evidentă. Presupunem că (i) este adevărată. Fie $\mathrm{d}\mu = h\mathrm{d}m$. Deoarece $\log h$ este integrabilă, din teorema lui Szegö rezultă că 1 nu aparține închiderii S a lui A_m în $L^2(\mathrm{d}\mu)$. Fie G proiecția ortogonală a lui 1 pe S. Din teorema (4.10) rezultă că $(1-G)^{-1}$ este o funcție exterioară în $H^2(\mathrm{d}m)$ și avem :

$$h = k\,|1-G|^{-2},$$

unde :

$$k = \exp\left[\int \log h\mathrm{d}m\right].$$

Punînd $g = \sqrt{k}\,(1-G)^{-1}$, atunci g este funcție exterioară din $H^2(\mathrm{d}m)$ și avem $|g|^2 = h$ ceea ce demonstrează implicația (i) → (iii). Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

5. SPAȚIILE H^1 ȘI H^∞

5.1. *Caracterizarea funcțiilor din* H^1. Amintim că spațiul H^1 este subspațiul lui $L^1(\mathrm{d}m)$ obținut prin închiderea lui A în $L^1(\mathrm{d}m)$.

TEOREMA 5.1. *Fie* h *o funcție din* $L^1(\mathrm{d}m)$ *care verifică*

$$\int h\mathrm{d}m \neq 0, \quad \int fh\,\mathrm{d}m = 0 \qquad (f \in A_m).$$

Atunci h *este produs de funcții din* $H^2(\mathrm{d}m)$.

Demonstrație. Evident, putem presupune că :

$$\int h\mathrm{d}m = 1.$$

Fie $h = 1 - g$ cu $g \in L^1(\mathrm{d}m)$. Pentru $f \in A$ să punem

$$\lambda = \int f\mathrm{d}m.$$

Să calculăm :

$$\int fg\mathrm{d}m = \int f(1-h)\,\mathrm{d}m = \int f\mathrm{d}m - \int fh\,\mathrm{d}m = \lambda\int h\mathrm{d}m - \int fh\mathrm{d}m =$$

$$= \int (\lambda - f)\,h\,\mathrm{d}m.$$

Cum $\lambda - f \in A_m$ avem :

$$\int fg\,\mathrm{d}m = 0, \qquad (f \in A).$$

Din teorema 4.5 rezultă atunci că:

$$0 \leqslant \int \log |1 - g| \, dm = \int \log |h| \, dm.$$

Deci $\log |h| \in L^1(dm)$ şi punînd $d\mu = |h| \, dm$, teorema lui Szegö ne dă:

$$\inf_{f \in A_m} \int |1 - f|^2 \, d\mu = \exp\left[\int \log |h| \, dm\right] \geqslant 1.$$

Deci 1 nu aparţine închiderii S a lui A_m în $L^2(d\mu)$. Fie G proiecţia lui 1 pe S. Din teorema 4.10 rezultă că $(1 - G)^{-1}$ este o funcţie exterioară din $H^2(dm)$ şi că $(1 - G)|h|$ aparţine lui $L^2(dm)$. Deci $(1 - G)h \in L^2(dm)$. Avem şi

$$\int (1 - G) \, hf dm = 0, \qquad (f \in A_m).$$

În adevăr, dacă f_n este un şir din A_m care converge către G în $L^2(d\mu)$, atunci

$$\int f(1 - G) \, h \, dm = \lim \int (1 - f_n) \, h \, dm = 0.$$

Atunci din teorema 4.6 rezultă că funcţia $(1 - G)h$ aparţine lui $H^2(dm)$ şi cum:

$$h = (1 - G)^{-1} (1 - G)h$$

teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 5.2. *O funcţie h din $L^1(dm)$ aparţine lui $H^1(dm)$ dacă şi numai dacă*:

$$\int fh \, dm = 0 \tag{5.11}$$

pentru orice $f \in A_m$.

Demonstraţie. Fie $h \in H^1(dm)$ şi f_n un şir de funcţii din A care converge în $L^1(dm)$ către h. Evident, atunci ff_n converge către fh pentru orice $f \in A_m$ şi deci (5.11) este adevărată pentru h.

Reciproc, dacă h satisface (5.11), atunci putem găsi o constantă c astfel încît $(h + c)$ satisface (5.11) şi în plus:

$$\int (h + c) \, dm \neq 0.$$

Atunci din teorema 5.1 rezultă că:

$$h + c = g_1 g_2$$

cu $g_1, g_2 \in H^2(dm)$ şi deci $h + c$ este în închiderea lui A în $L^1(dm)$, adică în $H^1(dm)$ şi atunci evident $h \in H^1(dm)$.

5.2. TEOREMA DE FACTORIZARE ÎN H^1. E clar că o funcţie interioară aparţine lui H^∞ şi deci oricărui H^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Deci noţiunea de funcţie interioară este aceeaşi în orice spaţiu H^p. Evident, nu se întîmplă acelaşi lucru cu noţiunea de funcţie exterioară.

DEFINIŢIA 5.1. O funcţie *exterioară în* $H^1(\mathrm{d}m)$ este o funcţie g din $H^1(\mathrm{d}m)$ pentru care :

$$\int \log |g| \mathrm{d}m = \log \left| \int g \, \mathrm{d}m \right| > -\infty.$$

TEOREMA 5.3. *Fie f o funcţie din $H^1(\mathrm{d}m)$ astfel încît :*

$$\int f \mathrm{d}m \neq 0.$$

Atunci $f = Fg$ cu F funcţie interioară şi g funcţie exterioară în $H^1(\mathrm{d}m)$.

Demonstraţie. E clar că funcţia f îndeplineşte condiţiile din teorema 5.1. Avem deci : $f = f_1 \cdot f_2$ cu $f_1, f_2 \in H_2(\mathrm{d}m)$. Datorită multiplicativităţii lui m pe $H^2(\mathrm{d}m)$ avem :

$$\int f_1 \mathrm{d}m \neq 0, \quad \int f_2 \mathrm{d}m \neq 0$$

şi deci putem aplica teorema de factorizare a funcţiilor din $H^2(\mathrm{d}m)$ (teorema 4.9) funcţiilor f_1, f_2. Avem deci $f_1 = F_1 g_1$, $f_2 = F_2 g_2$ cu F_1, F_2 interioare şi g_1, g_2 exterioare în $H^2(\mathrm{d}m)$. Atunci e clar că $F = F_1 F_2$ este interioară şi $g = g_1 g_2$ este exterioară în $H^1(\mathrm{d}m)$ şi că avem $f = Fg$. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Următoarea teoremă ne va ajuta să demonstrăm unicitatea factorizării.

TEOREMA 5.4. *Fie g o funcţie din $H^1(\mathrm{d}m)$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

(i) *g este o funcţie exterioară în $H^1(\mathrm{d}m)$*

(ii) *Spaţiul Ag este dens în $H^1(\mathrm{d}m)$*

(iii) $\int g \, \mathrm{d}m \neq 0$; *dacă $h \in H^1(\mathrm{d}m)$ astfel încît $|h| < |g|$ atunci $h/g \in H^\infty(\mathrm{d}m)$.*

Demonstraţie. Fie g o funcţie exterioară în $H^1(\mathrm{d}m)$. E clar că :

$$\int g \, \mathrm{d}m \neq 0$$

şi aplicînd teorema 5.1, rezultă că $g = g_1 g_2$ cu g_1, $g_2 \in H^2(\mathrm{d}m)$. Cum g este exterioară în $H^1(\mathrm{d}m)$, avem

$$\int \log |g_1 g_2| \, \mathrm{d}m = \log \left| \int g_1 g_2 \, \mathrm{d}m \right|$$

şi folosind multiplicativitatea lui m pe $H^2(\mathrm{d}m)$, avem :

$$\int \log |g_1| \, \mathrm{d}m - \log \left| \int g_1 \, \mathrm{d}m \right| = \log \left| \int g_2 \, \mathrm{d}m \right| - \int \log |g_2| \, \mathrm{d}m.$$

Din inegalitatea lui Jensen rezultă că :

$$\int \log |g_1|\, \mathrm{d}m = \log \left| \int g_1\, \mathrm{d}m \right| > -\infty$$

$$\int \log |g_2|\, \mathrm{d}m = \log \left| \int g_2\, \mathrm{d}m \right| > -\infty$$

adică g_1 şi g_2 sînt funcţii exterioare în $H^2(\mathrm{d}m)$. Ţinînd seama de următoarele incluziuni :

$$[Ag]^{(1)} \supset [g_1(Ag_2)]^{(2)} \supset g_1\, [Ag_2]^{(2)} \supset [Ag_1]^{(2)},$$

unde $[\cdot]^{(1)}$, $[\cdot]^{(2)}$ însemnează închiderea în $L^1(\mathrm{d}m)$ respectiv $L^2(\mathrm{d}m)$, obţinem $1 \in [Ag]^{(1)}$ şi deci implicaţia (i) $\rightarrow$ (ii) este demonstrată.

Fie acum că $[Ag]^{(1)} = H^1(\mathrm{d}m)$. Evident, atunci

$$\int g\, \mathrm{d}m \neq 0.$$

Fie $h \in H^1(\mathrm{d}m)$ astfel încît $|h| \leqslant |g|$. Alegem $f_n \in A$ aşa încît $f_n g$ să tindă către 1 în $L^1(\mathrm{d}m)$. Pentru orice $f \in A$ avem :

$$\int f\, h/g\, \mathrm{d}m = \lim \int f f_n\, g\, h/g\, \mathrm{d}m = 0 \qquad (f \in A_m)$$

deoarece $f\, h/g$ este mărginită. Rezultă că $h/g \in H^\infty$, adică (ii) $\rightarrow$ (iii).

Presupunem acum că (iii) este adevărată. Deoarece :

$$\int g\, \mathrm{d}m \neq 0,$$

avem $g = F g_1$ cu F interioară şi g_1 exterioară în $H^1(\mathrm{d}m)$. Dar $|g| = |g_1|$, deci $g/g_1 \in H^\infty$, $g_1/g \in H^\infty$. De aici rezultă că F şi $\overline{F}$ aparţin lui $H^\infty(\mathrm{d}m) \subset H^2(\mathrm{d}m)$ şi din corolarul 4.1 rezultă că F este constantă aproape peste tot în raport cu m. Rezultă că $g = g_1$ exterioară în $H^1(\mathrm{d}m)$ şi deci (iii) $\rightarrow$ (i). Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

COROLARUL 5.1. *Dacă g şi g_1 sînt funcţii exterioare în $H^1(\mathrm{d}m)$ astfel încît $|g| = |g_1|$, atunci $g = \lambda\, g_1$ cu $|\lambda| = 1$.*

COROLARUL 5.2. *Factorizarea funcţiilor din $H^1(\mathrm{d}m)$ este unică în afara unui factor constant de modul 1.*

COROLARUL 5.3. *Dacă g este o funcţie exterioară în $H^1(\mathrm{d}m)$, atunci $g = h^2$, unde h este o funcţie exterioară în $H^2(\mathrm{d}m)$.*

Demonstraţie. Fie $\mathrm{d}\mu = |g|\, \mathrm{d}m$. Atunci 1 nu aparţine închiderii S a lui A_m în $L^2(\mathrm{d}\mu)$. (Căci $\log |g|$ este integrabil şi aplicăm teorema lui Szegö).

Fie G proiecţia lui 1 pe această închidere. Atunci $(1 - G)^{-1}$ este o funcţie exterioară în $H^2(\mathrm{d}m)$ (vezi teorema 4.10) şi

$$|1 - G|^2\, |g|\, \mathrm{d}m = k\, \mathrm{d}m,$$

unde :

$$k = \exp\, [\log |g|\, \mathrm{d}m] = \left| \int g\, \mathrm{d}m \right| \cdot$$

Deci $|g| = k(1 - G)^{-2}$ şi deoarece şi g şi $(1 - G)^{-2}$ sînt funcţii exterioare în $H^1(\mathrm{d}m)$, rezultă că $g = k^{1/2}\lambda(1 - G)^{-2}$ cu $|\lambda| = 1$.

Funcţia $h = k(1 - G)^{-1}$ verifică cerinţa teoremei.

TEOREMA 5.5. *Fie* $h \in L^1(\mathrm{d}m)$ *o funcţie nenegativă. Atunci* $h = |f|$ *cu* $f \in H^1(\mathrm{d}m)$,

$$\int f\,\mathrm{d}m \neq 0$$

dacă şi numai dacă $\log h$ *este integrabilă în raport cu* m. *O funcţie nenegativă* h *din* $L^\infty(\mathrm{d}m)$ *este de forma* $h = |f|$ *cu* f *din* $H^\infty(\mathrm{d}m)$ *şi*

$$\int f\,\mathrm{d}m \neq 0$$

dacă şi numai dacă $\log h$ *este din* $L^1(\mathrm{d}m)$.

Demonstraţie. Ştim că $\log h$ este integrabilă dacă şi numai dacă $h = |f|^2$ cu $f \in H^2(\mathrm{d}m)$ (vezi teorema 4.11). Dar, oricare ar fi $g \in H^1(\mathrm{d}m)$ cu

$$\int g\,\mathrm{d}m \neq 0,$$

avem $|g| = |f|^2 = |f|^2$ cu

$$\int f\,\mathrm{d}m \neq 0.$$

5.2′. *Algebra* H^∞. Fie A o supnorm algebră pe X şi m o măsură de reprezentare a lui A. Se ştie că $L^\infty(\mathrm{d}m)$, cu m-esenţial supnorma, este o algebră Banach comutativă, cu element unitate.

Din reprezentarea Ghelfand a algebrelor Banach rezultă că există un spaţiu compact Y astfel încît L^∞ se scufundă izometric în $C(Y)$. Cum, evident, $L^\infty(\mathrm{d}m)$ este simetrică, rezultă că $L^\infty(\mathrm{d}m)$ este chiar izomorfă izometric cu $C(Y)$.

Algebra $H^\infty(\mathrm{d}m)$ este o subalgebră a lui $L^\infty(\mathrm{d}m)$ deci a lui $C(Y)$. $H^\infty(\mathrm{d}m)$ este chiar o supnorm algebră pe Y. În adevăr, evident $H^\infty(\mathrm{d}m)$ este uniform închisă în $C(Y)$ şi conţine constantele. Separarea lui Y de către $H^\infty(\mathrm{d}m)$ rezultă din faptul $L^\infty(\mathrm{d}m)$ separă punctele lui $C(Y)$ şi din faptul că orice funcţie pozitivă din $L^\infty(\mathrm{d}m)$ este egală cu modulul unei funcţii din $H^\infty(\mathrm{d}m)$ (teorema 5.5).

TEOREMA 5.6. *Dacă* A *este o algebră logmodulară pe* X, *atunci algebra* $H^\infty(\mathrm{d}m)$ *este o algebră logmodulară pe spaţiul idealelor maximale ale lui* $L^\infty(\mathrm{d}m)$.

Demonstraţie. Dacă $u \in L^\infty(\mathrm{d}m)$, atunci $\log(\mathrm{e}^u)$ este integrabilă şi deci $\mathrm{e}^u = |f|$ cu $f \in H^\infty(\mathrm{d}m)$ şi

$$\int f\,\mathrm{d}m \neq 0.$$

Deci $u = \log|f|$ cu $f \in H^\infty(\mathrm{d}m)$ şi

$$\int f\,\mathrm{d}m \neq 0.$$

Evident, putem alege f funcţie exterioară. Aceste funcţii sînt inversabile în $H^\infty(\mathrm{d}m)$. În adevăr, putem găsi $g \in H^\infty(\mathrm{d}m)$ cu

$$\int g \,\mathrm{d}m \neq 0$$

şi $|g| = \mathrm{e}^{-u}$. Atunci $|fg| = 1$ şi deci $fg = \lambda$ cu $|\lambda| = 1$, ceea ce înseamnă că f şi g sînt inversabile. Avem deci

$$\log |(H^\infty)^{-1}| = L_R^\infty(\mathrm{d}m)$$

ceea ce demonstrează faptul că $H^\infty(\mathrm{d}m)$ este o algebră logmodulară.

5.3. TEOREMA LUI F. ŞI M. RIESZ. În acest paragraf demonstrăm analogul teoremei lui F. şi M. Riesz asupra continuităţii absolute a măsurilor analitice.

TEOREMA 5.7. *Fie* μ *o măsură complexă pe* X, *ortogonală pe* A_m, *adică* :

$$\int f \,\mathrm{d}m = 0, \qquad (f \in A_m).$$

Fie μ_a, μ_s *(respectiv partea absolut continuă şi partea singulară a lui* μ *în raport cu* m*). Atunci* μ_a *şi* μ_s *sînt separat ortogonale pe* A_m. *Mai mult,* μ_s *este ortogonală pe* 1 *şi* $\mathrm{d}\mu_a = h\,\mathrm{d}m$ *cu* $h \in H^1(\mathrm{d}m)$.

Demonstraţie. Fie $\mathrm{d}\mu_a = h\,\mathrm{d}m$ şi fie

$$\mathrm{d}\rho = (1 + |h|)\mathrm{d}m + \mathrm{d}|\mu_s|. \tag{5.31}$$

Pentru $f \in A_m$ avem :

$$\int |1 - f|^2 \mathrm{d}\rho \geqslant \int |1 - f|^2 \mathrm{d}m \geqslant \inf_{f \in A_m} |1 - f|^2 \mathrm{d}m = 1.$$

Fie G proiecţia lui 1 pe închiderea S a lui A_m în $L^2(\mathrm{d}\rho)$. Avem :

$$\int |1 - G|^2 \mathrm{d}\rho \geqslant 1.$$

Deci 1 nu aparţine lui S. Din teorema 4.10 rezultă că $(1 - G)^{-1}$ este o funcţie exterioară din $H^2(\mathrm{d}m)$ şi $(1 - G)\,(1 + |h|) \in L^2(\mathrm{d}m)$. Deci $(1 - G)h \in L^2(\mathrm{d}m)$.

Vrem să arătăm că :

$$\int (1 - G)\, f \,\mathrm{d}\mu = 0 \tag{5.32}$$

pentru $f \in A_m$. Pentru aceasta fie f_n un şir din A_m care tinde în $L^2(\mathrm{d}\rho)$ către G. Cum μ este absolut continuă în raport cu ρ şi $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\rho$ este mărginită, avem :

$$\int (1 - G)\, f \,\mathrm{d}\mu = \lim \int (1 - f_n) f \,\mathrm{d}\mu = 0$$

pentru $f \in A_m$ şi deci (5.32) este adevărată.

Din teorema (4.10) rezultă că $(1 - G) = 0$ aproape peste tot în raport cu partea singulară a lui $\mathrm{d}\rho$ relativ la m. Deci $(1 - G)$ se anulează aproape peste tot în raport cu μ_s şi deci

$$0 = \int (1 - G) f \, \mathrm{d}\mu_0 = \int (1 - G) fh \, \mathrm{d}m \qquad (f \in A_m). \tag{5.33}$$

Fie g_n un şir de elemente din A care converge către $(1 - G)^{-1}$ în $L^2(\mathrm{d}m)$. Există un asemenea şir deoarece $(1 - G)^{-1}$ este din $H^2(\mathrm{d}m)$. După (5.33) avem :

$$\int g_n f (1 - G) h \, \mathrm{d}m = 0 \tag{5.34}$$

pentru orice n. Deoarece $(1 - G) h \in L^2(\mathrm{d}m)$ şi g_n converge către $(1 - G)^{-1}$ în $L^2(\mathrm{d}m)$ putem trece la limită în (5.34) şi obţinem :

$$\int fh \, \mathrm{d}m = 0, \qquad (f \in A_m).$$

Aceasta arată că μ_a este ortogonală pe A_m şi deci şi μ_s este ortogonală pe A_m.

Din teorema lui Szegö, 1 aparţine închiderii lui A_m în $L^2(\mathrm{d}\mu_s)$. Avem deci :

$$\int \mathrm{d}\mu_s = \lim \int f_n \, \mathrm{d}\mu_s$$

cu f_n un şir din A_m care converge în $L^2(\mathrm{d}\mu_s)$ către 1. Măsura μ_s fiind ortogonală pe A_m, rezultă că

$$\int \mathrm{d}\mu_s = 0$$

şi deci μ_s este ortogonală şi pe 1. Cum $h \in L^1(\mathrm{d}m)$ şi

$$\int fh \, \mathrm{d}m = 0 \qquad (f \in A_m)$$

rezultă că $h \in H^1(\mathrm{d}m)$. Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

Cu ajutorul acestei teoreme vom demonstra densitatea lui $A + \bar{A}$ în orice $L^p(\mathrm{d}m)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

LEMA 5.1. *Fie m o măsură pozitivă pe X, $m(X) = 1$, astfel încît :*

$$\int \log |1 - tg| \, \mathrm{d}m \geqslant 0 \tag{5.35}$$

pentru orice t dintr-un interval real $|t| < \delta$. Atunci g se anulează aproape peste tot în raport cu m.

Demonstraţie. Fie $g \in L^1_R(\mathrm{d}m)$. Pentru z din semiplanul superior definim

$$u(z) = \int \log |1 - zg| \, \mathrm{d}m.$$

Se verifică ușor că $u(z)$ este armonică în semiplanul superior și că avem :

$$u(iy) = \frac{1}{2}\int \log |1 - iyg|^2 \, \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int \log (1 + y^2g^2)\mathrm{d}m.$$

Deci :

$$\frac{u(iy)}{y} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y} \log (1 + y^2g^2)\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int \frac{1}{gy} \log (1 + y^2g^2) g \, \mathrm{d}m.$$

Funcția $\frac{1}{gy} \log (1 + y^2g^2)$ este definită ca fiind egală cu 0 acolo unde $g = 0$. Atunci e clar că $\frac{1}{g \cdot y} \log (1 + y^2g^2)$ tinde către 0 cînd y tinde către 0, punctual pe X. Cum funcția $\frac{1}{2} \log (1 + x^2)$ este mărginită pe dreapta reală și g integrabilă, putem trece la limită sub semnul integrală și avem :

$$\lim_{y \to 0} \frac{u(iy)}{y} = 0.$$

Din cauza relației (5.35) avem :

$$u(x + iy) = \frac{1}{2}\int \log |1 - (x + iy)g|^2 \mathrm{d}m =$$

$$= \frac{1}{2}\int \log [(1 - xg)^2 + y^2] \, \mathrm{d}m \geqslant$$

$$\geqslant \int \log |1 - xg|^2 \, \mathrm{d}m \geqslant 0$$

pentru orice $|x| < \delta$. Deci funcția u este pozitivă în semibanda $-\delta \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \delta$ cu $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Fie

$$v(w) = u(i\delta(1 - w)) \qquad (|w| < 1)$$

E clar că v este o funcție armonică în cercul unitate și pozitivă. În plus :

$$\lim_{r \to 1} \frac{v(r)}{1 - r} = \lim_{r \to 1} \frac{u(i\delta(1 - r))}{1 - r} = \lim_{y \to 0} \frac{u(y)}{y} = 0. \tag{5.36}$$

După teorema lui Herglotz [24] o funcție armonică și pozitivă în cercul unitate se scrie :

$$v(w) = \int P_w(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \tag{5.37}$$

cu μ o măsură pozitivă și :

$$P_w(t) = \frac{e^{it} + w}{e^{it} - w} \quad \text{(nucleul lui Poisson).}$$

Se ştie că:

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}$$

şi deci:

$$\min_t P_r(t) = \frac{1 - r}{1 + r}. \tag{5.38}$$

Din (5.36) şi (5.37) rezultă că:

$$v(r) \geqslant \frac{1 - r}{1 + r} \int d\mu$$

adică:

$$\frac{1}{1 + r} \int d\mu \leqslant \frac{v(r)}{1 - r}$$

şi ţinînd seama de (5.36) obţinem:

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{1 + r} \int d\mu = 0.$$

Deci $\mu = 0$, adică $v = 0$ şi deci $u = 0$. Atunci,

$$0 = u(i) = \int \log (1 + g^2) \, dm$$

adică $g = 0$ aproape peste tot în raport cu m şi lema este demonstrată.

TEOREMA 5.8. *Fie $g \in L^1(dm)$ ortogonală pe $(A + \overline{A})$. Atunci $g = 0$ aproape peste tot în raport cu m.*

Demonstraţie. În adevăr, dacă g este ortogonală pe $A + \overline{A}$, avem:

$$\int fg dm = 0, \quad \int f\overline{g} dm = 0, \qquad (f \in A)$$

şi atunci:

$$\int f \mathrm{Re} g dm = 0, \quad \int f \mathrm{Im} g dm = 0, \qquad (f \in A).$$

Este suficient deci să arătăm că orice funcţie reală din $L^1(dm)$ ortogonală pe $A + \overline{A}$ se anulează aproape peste tot în raport cu m. Dar, dacă

$$\int fu dm = 0 \qquad (f \in A)$$

pentru o funcţie reală u, atunci:

$$\int ftu dm = 0, \qquad (f \in A)$$

pentru orice t real şi din teorema 4.5 rezultă că:

$$\int \log |1 - tu| \, dm = 0$$

pentru orice t real. Aplicînd lema 5.6 obţinem că u se anulează aproape peste tot în raport cu m.

Corolarul 5.4. *Dacă* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *atunci spațiul* $A + \overline{A}$ *este dens în* L^p (dm).

Corolarul 5.5. *Dacă* μ *este o măsură complexă ortogonală pe* $A + \overline{A}$, *atunci* μ *este singulară față de* m.

Demonstrație. După teorema fraților Riesz (teorema 5.7) dacă d$\mu = h$dm + dμ_s rezultă că h este ortogonală pe $A + \overline{A}$ și deci $h = 0$.

Următoarele consecințe ale rezultatelor precedente sînt interesante în sine.

Corolarul 5.6. *Fie* $g \in L^1$(dm) *și* L *funcțională liniară pe subspațiul* $A + \overline{A}$ *al lui* $C(X)$ *definite prin*:

$$L(f) = \int fg, \qquad (f \in A + \overline{A}).$$

Atunci L *are o singură prelungită Hahn-Banach* (*cu aceeași normă*) $\widetilde{L}$ *la* $C(X)$. *Funcționala* $\widetilde{L}$ *este dată de*

$$\widetilde{L}(f) = \int fg\mathrm{d}m, \qquad (f \in C(X)).$$

În particular:

$$\int |g|\, \mathrm{d}m = \sup_f \left| \int fg\mathrm{d}m \right|, \qquad (f \in A + \overline{A}\ \|f\| \leqslant 1).$$

Demonstrație. Fie $\widetilde{L}$ o funcțională liniară pe $C(X)$ care prelungește pe L și:

$$\|\widetilde{L}\| = \|L\| = \sup_f \left| \int fg\mathrm{d}m \right| \qquad (f \in A + \overline{A},\ \|f\| \leqslant 1).$$

Fie μ măsura complexă atașată lui $\widetilde{L}$, și d$\mu = h$dm + dμ_s descompunerea Lebesque a lui μ în raport cu m.

Cum $\widetilde{L}$ extinde pe L măsura:

$$\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}\mu - g\mathrm{d}m = (h - g)\mathrm{d}m + \mathrm{d}\mu_s,$$

este ortogonală pe $A + \overline{A}$. După teorema fraților Riesz $(h - g)$ dm este ortogonală pe $A + \overline{A}$ și dμ_s la fel. Deci $(h - g) \in L^1$ (dm) și este ortogonală pe $A + \overline{A}$, adică (teorema 5.8) $h = g$ aproape peste tot în raport cu m. Avem:

$$\|\widetilde{L}\| = \int |g| \mathrm{d}m + \|\mu_s\|.$$

Dar

$$\|L\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \left| \int fg\mathrm{d}m \right| \leqslant \left| \int g\mathrm{d}m \right| \leqslant \int |g|\, \mathrm{d}m.$$

Deci:

$$\int |g|\, \mathrm{d}m + \|\mu_s\| \leqslant \int |g|\, \mathrm{d}m.$$

Deci $\|\mu_s\| = 0$ adică $\mu_s = 0$. Urmează că

$$\tilde{L}(f) = \int fg\mathrm{d}m \qquad (f \in C(X))$$

și

$$\|L\| = \int |g|\,\mathrm{d}m.$$

COROLARUL 5.7. *Fie $g \in L^1(\mathrm{d}m)$ și L funcționala liniară pe A definită de :*

$$L(f) = \int fg\mathrm{d}m, \qquad (f \in A).$$

Atunci L are o unică prelungire Hahn-Banach $\tilde{L}$ pe $C(X)$. Funcționala $\tilde{L}$ are forma :

$$\tilde{L}(f) = \int f\tilde{g}\mathrm{d}m. \qquad (f \in C(X))$$

cu $\tilde{g} \in L^1\,(\mathrm{d}m)$.

Demonstrație. Fie $\tilde{L}$ o prelungită a lui L și fie $\mathrm{d}\mu = \tilde{g}\mathrm{d}m + \mathrm{d}\mu_s$ măsura ei. E clar că $\mathrm{d}\mu - g\mathrm{d}m$ este ortogonală pe A și din teorema fraților Riesz rezultă că $\mathrm{d}\mu_s$ este ortogonală pe A și $g - \tilde{g} \in H^1_m\,(\mathrm{d}m)$. Deci dacă $f \in A$ avem

$$\int f\mathrm{d}\mu = \int f\tilde{g}\mathrm{d}m = \int fg\mathrm{d}m.$$

Atunci :

$$\sup\left|\int f\tilde{g}\mathrm{d}m = \sup\right|\int fg\mathrm{d}m\Bigg| = \|L\|$$

superiorul fiind luat după $f \in A$ cu $\|f\| \leqslant 1$. De aici rezultă că norma lui L este egală cu norma lui $\tilde{g}$ în $L^1\,(\mathrm{d}m)$,

Dar

$$\|L\| = \|\mu\| = \|\tilde{g}\|_1 + \|\mu_s\| \leqslant \|\tilde{g}\|_1.$$

Obținem deci $\mu_s = 0$ și $\|g\|_1 = \|L\|$

E clar că o altă prelungită a lui L are reprezentarea :

$$\int f(\tilde{g} + h)\,\mathrm{d}m, \qquad (f \in C(X)),$$

unde $g \in H^1_m\,(\mathrm{d}m)$ și $\|g + h\|_1 = \|\tilde{g}\|_1$.
Dar avem :

$$\|\tilde{g}\|_1 = \sup_{\substack{f \in A \\ \|f\| \leqslant 1}} \left|\int f\tilde{g}\mathrm{d}m\right|$$

și cum în L^∞ sfera unitate este slab închisă, rezultă că există $f \in H^\infty$, $\|f\| = 1$ și

$$\left|\int f\tilde{g}\mathrm{d}m\right| = \|g\|_1.$$

Deoarece $\|f\| \leqslant 1$, atunci e clar că $fg = |g|$. Dar

$$\int f(\bar{g} + h)\,\mathrm{d}m = \int f\bar{g}\,\mathrm{d}m = \|g\|_1 = \|g + h\|_1$$

și deci $f(g + h) = |g + h|$. Rezultă că fg și $f(g + h)$ sînt nenegative, deci fh este reală. Cum $f \in H^\infty(\mathrm{d}m)$ și $h \in H^1(\mathrm{d}m)$, avem $fh \in H^1(\mathrm{d}m)$ și deci fh este constantă aproape peste tot în raport cu m. Cum

$$\int h\,\mathrm{d}m = 0,$$

obținem $fh = 0$ aproape peste tot în raport cu m. Avem deci :

$$|g| = fg = f(g + h) = |g + h|.$$

De aici rezultă că $h = 0$ aproape peste tot în raport cu m și corolarul este complet demonstrat.

6. STRUCTURI ANALITICE ÎN SPAȚIUL IDEALELOR MAXIMALE ALE LUI A

În acest paragraf demonstrăm în cazul algebrelor logmodulare echivalența părților Gleason care nu se reduc la un singur punct cu discul unitate deschis din planul complex, echivalență care transportă funcțiile din A în funcții analitice în disc.

Fie A o algebră logmodulară pe X și $\mathfrak{M}$ spațiul idealelor maximale ale lui A. Am văzut (teorema 3.3) că X coincide cu frontiera Șilov a lui A.

Definiția 6.1. Dacă m este o măsură de reprezentare a lui A, vom spune că M din $\mathfrak{M}$ este *mărginită* în $H^2(\mathrm{d}m)$ dacă există o constantă k astfel încît :

$$|f(M)| \leqslant k\left[\int |f|^2\,\mathrm{d}m\right]^{1/2}, \qquad (f \in A). \tag{6.1}$$

Dacă M este mărginită în $H^2(\mathrm{d}m)$, atunci e clar că M are o prelungită unică, o funcțională liniară și continuă pe $H^2(\mathrm{d}m)$ și această prelungită este multiplicativă pe $H^2(\mathrm{d}m)$. Vom nota tot cu M această prelungită.

Următoarea teoremă completează teorema 2.4.

Teorema 6.1. *Fie M_1, $M_2 \in \mathfrak{M}$ și m_1, m_2 măsurile lor de reprezentare. Dacă M_1 și M_2 sînt în aceeași parte Gleason, atunci M_2 este mărginită în $H^2(\mathrm{d}m)$.*

Demonstrație. Din teorema 2.4 rezultă că există o constantă k astfel încît

$$m_1 \leqslant k m_2$$

de unde rezultă evident inegalitatea (6.1).

Teorema 6.2. *Fie $M \in \mathfrak{M}$ și m măsura sa de reprezentare. Fie $M_1 \in \mathfrak{M}$ astfel încît $M_1 \neq M$ și M_1 este mărginită în $H^2(\mathrm{d}m)$. Fie G proiecția* *ortogonală a lui* 1 *pe subspaţiul generat de* M_1 *(privit ca ideal în* A*) în* $H^2\,(\mathrm{d}m)$. *Atunci* :

(i) $$\int G\mathrm{d}m = k^2$$

cu $0 < k < 1$. *Dacă punem* :

$$Z = \frac{1}{k}\,\frac{k^2 - G}{1 - G},$$

atunci avem :

(ii) Z *este o funcţie interioară în* $H^2\,(\mathrm{d}m)$.

(iii) *Măsura*

$$\mathrm{d}\mu = \frac{|1 - G|^2}{1 - k^2}\,\mathrm{d}m$$

este măsura de reprezentare a lui M_1

(iv) $ZH^2 = H^2_m = \{f \in H^2(\mathrm{d}m)\,;\ M(f) = 0\}$.

(v) *Dacă punem pentru* $f \in H^2\,(\mathrm{d}m)$

$$a_n = \int Z^{-n} f\,\mathrm{d}m$$

atunci :

$$f(M_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[f\,(M)]^4.$$

Demonstraţie. Fie S subspaţiul generat de M_1 în $H^2(\mathrm{d}m)$. M_1 fiind ideal în A_1, subspaţiul S este invariant la înmulţirea cu funcţiile din A. Cum $M_1 \neq M$, înseamnează că există $f \in A$ astfel încît $f \in M_1$ şi :

$$\int f\,\mathrm{d}m = f(M) \neq 0.$$

Deci subspaţiului S îi putem aplica teorema 4.8.

Deci $S = GH^2\,(\mathrm{d}m)$, unde G este proiecţia lui 1 pe S şi $|G| = k$ aproape peste tot în raport cu m (vezi demonstraţia la teorema 4.8). Dar $(1 - G)$ fiind ortogonal pe G, avem :

$$\int G\,(1 - \overline{G})\mathrm{d}m = 0$$

sau

$$\int G\mathrm{d}m = \int |G|^2\,\mathrm{d}m = k^2.$$

Avem :

$$k^2 = \int G\mathrm{d}m = \left|\int G\mathrm{d}m\right| \leqslant \int |G|\,\mathrm{d}m = k$$

şi deci

$$k \leqslant 1.$$

Dacă am avea $k = 1$, atunci :

$$1 = \int G \mathrm{d}m \leqslant \int |G| \,\mathrm{d}m = 1$$

şi deci $G = |G| = 1$ aproape peste tot în raport cu m. Atunci $S = H^2(\mathrm{d}m)$ şi cum M_1 este mărginită în $H^2(\mathrm{d}m)$, obţinem $M_1(f) = 0$ pentru orice funcţie $f \in A$ ceea ce nu se poate deoarece $M_1 \neq 0$. Deci punctul (i) este demonstrat.

Definim :

$$Z = \frac{1}{k} \, \frac{k^2 - G}{1 - G}.$$

Avem :

$$Z = \frac{k - \dfrac{1}{k} G}{1 - k\left(\dfrac{1}{k} G\right)}. \tag{6.2}$$

Cum $|1/k\, G| = 1$, din (6.2) rezultă că $Z \in H^2(\mathrm{d}m)$ şi $|Z| = 1$ aproape peste tot în raport cu m. Deci Z este o funcţie interioară în $H^2(\mathrm{d}m)$ ceea ce demonstrează (ii).

Fie

$$\mathrm{d}\mu = \frac{|1 - G|^2}{1 - k^2} \mathrm{d}m. \tag{6.3}$$

Pentru $f \in A$ avem

$$(1 - k^2) \int f \mathrm{d}\mu = \int (1 - G)\,(1 - \overline{G})\, \mathrm{d}m. \tag{6.4}$$

Dacă $f(M_1) = 0$, atunci $(1 - G) f$ este din S şi deci $(1 - G)$ este ortogonal pe $(1 - G) f$ şi din (6.3) rezultă că

$$\int f \mathrm{d}\mu = 0, \qquad (f \in M_1). \tag{6.5}$$

Pe de altă parte, cum G este ortogonal pe $(1 - G)$, obţinem :

$$\int |1 - G|^2 \,\mathrm{d}m = \int (1 - G)\,(1 - \overline{G})\, \mathrm{d}m = \int (1 - \overline{G}) \mathrm{d}m = 1 - k^2$$

şi deci

$$\int \mathrm{d}\mu = 1. \tag{6.6}$$

Din (6.6) şi (6.7) rezultă că μ este măsura de reprezentare pentru M_1 şi deci (iii) este demonstrată.

Cum m este multiplicativă pe $H^2(\mathrm{d}m)$.

$$\int G \mathrm{d}m = k^2 \,;$$

din relaţia

$$kZ(1 - G) = k^2 - G$$

rezultă că

(6.7) $$\int Z \mathrm{d}m = 0.$$

Ţinînd seama şi de faptul că $|Z| = 1$, obţinem $ZH^2 \subset H^2_m$. Fie $g \in H^2_m$ şi orotogonală pe ZH^2. Din faptul că g este ortogonală pe ZH^2 şi din multiplicativitatea lui m pe H^2 rezultă

(6.8) $$\int Z^n g \,\mathrm{d}m = 0, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots).$$

Din (6.2) rezultă că G se poate scrie ca o serie uniform convergentă în Z şi deci $|1 - G|^2 = (1 - G)(1 - \overline{G})$ se scrie ca o serie uniform convergentă în Z şi $\overline{Z}$. Atunci, ţinînd seama de (6.8), obţinem :

$$M_1(g) = \int g \,\mathrm{d}\mu = \int g \frac{|1 - G|^2}{1 - k^2} \mathrm{d}m = 0.$$

Adică $g \in S$ şi deci $g = Gh$ cu $h \in H^2$ (dm). Cum $|G| = k$, avem $|h| = 1/k - |g|$; atunci

$$\int |h^2| \,\mathrm{d}m = \frac{1}{k^2} \int |g|^2 \,\mathrm{d}m = \frac{1}{k^2} \int G h \overline{g} \,\mathrm{d}m.$$

Din (6.2) rezultă că $G = k^2 + Zf$ cu $f \in H^2$ şi deci

$$\int |h^2| \,\mathrm{d}m = \frac{1}{k^2} \int (k^2 + Zf) h \overline{g} \,\mathrm{d}m = \int h \overline{g} \,\mathrm{d}m + \int Z f h \overline{g} \,\mathrm{d}m$$

şi cum g este ortogonal pe ZH^2, obţinem :

(6.9) $$\int |h|^2 \,\mathrm{d}m = \int \overline{G} |h|^2 \,\mathrm{d}m.$$

Cum $|G| = k < 1$, din (6.9) rezultă că $h = 0$, adică $g = 0$. Rezultă că $H^2_m = ZH^2$ şi deci (iv) este demonstrată.

Pentru orice $f \in H^2$, $f - M(f) \in H^2_m$ şi deci $f - M(f) = Zg$ cu $g \in H^2$ (dm).

Constantele fiind ortogonale pe ZH^2, avem

(6.10) $$\int |f|^2 \,\mathrm{d}m \geqslant \int |Zg|^2 \,\mathrm{d}m = \int |g|^2 \,\mathrm{d}m.$$

Dacă definim operatorul liniar pe H^2 (dm)

$$Tf = \overline{Z}\, [f - M(f)],$$

atunci e clar că T ia valori pe H^2 (dm) şi că este mărginit de 1.

Dacă punem

$$a_n = \int \overline{Z}^n f \,\mathrm{d}m$$

se verifică uşor că pentru orice n avem :

$$f = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_{n-1} Z^{n-1} + Z^n \, (T^n f).$$

Cum $M_1(Z) = k < 1$ şi şirul $M_1(T^n f)$ fiind mărginit deoarece M_1 şi T sînt mărginite în $H^2(\mathrm{d}m)$, rezultă

$$M_1(f) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \, [M_1(Z)]^j$$

ceea ce demonstrează pe (v). Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 6.3. *Fie M, m, M_1, Z ca în teorema precedentă. Fie $M_2 \in \mathfrak{M}$ astfel încît M_2 se află în aceeaşi parte Gleason cu M. Atunci pentru orice $f \in H^2(\mathrm{d}m)$ avem :*

$$f(M_2) = \sum_{0}^{\infty} a_n \, [M_2(Z)]^n.$$

Demonstraţie. Dacă $M_2 = M$, afirmaţia este evidentă. Dacă $M_2 \neq M$ aplicăm teorema precedentă pentru M şi M_2. Obţinem o funcţie $Z_1 \in H^2$, interioară, astfel încît $H^2_m = Z_1 H^2$ şi

$$M_2(f) = \sum a'_n \, [M_2(Z_1)]^n$$

cu a'_n corespunzători.

Din unicitatea scrierii subspaţiilor invariante rezultă că Z_1 diferă de Z printr-un factor constant de modul 1. Atunci e clar din definiţia lui a_n şi a'_n că

$$M_2(f) = \sum a_n \, [M_2(Z)]^n$$

Următoarea teoremă este rezultatul enunţat la începutul acestui paragraf.

TEOREMA 6.4. *Fie Δ o parte Gleason a lui $\mathfrak{M}$ care nu se reduce la un singur punct. Atunci există o aplicaţie injectivă τ a discului unitate $D = \{z ; |z| < 1\}$ în $\mathfrak{M}$ astfel încît τ este continuă şi*

(a) $$\tau(D) = \Delta$$

(b) *Pentru orice $f \in A$, funcţia $F(z) = f[\tau(z)]$ este analitică în D.*

Demonstraţie. Fixăm M_1 şi M_2 în Δ, $M_1 \neq M_2$ şi construim pe Z ca în teorema 6.2. Avem, deci, conform teoremei 6.3,

$$f(M) = \sum a_n \, [M(Z)]^n \tag{6.11}$$

pentru orice $f \in A$ şi $M \in \Delta$. Definim pe Δ funcţia θ prin :

$$\theta(M) = M(Z).$$

Cum $|Z(M)| < 1$, rezultă că θ ia valori în D. Dacă $\theta(M) = \theta(M')$, din (6.11) rezultă că $M = M'$ şi deci θ este biunivocă. Vom arăta că θ aplică Δ pe D. Fie f, $g \in A$ şi

$$a_n = \int \overline{Z}^n f \, \mathrm{d}m, \qquad b_n = \int \overline{Z}^n g \, \mathrm{d}m.$$

Atunci

$$f = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n + h_1 Z^{n+1}$$

$$g = b_0 + b_1 Z + \ldots + b_n Z^n + h_2 Z^{n+1}$$

cu $h_1, h_2 \in H^2(\mathrm{d}m)$, h_1, h_2 mărginite. De aici, printr-un simplu calcul, rezultă că dacă punem

$$c_n = \int \overline{Z}^n (f g)\, \mathrm{d}m,$$

atunci :

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 \\ c_1 &= a_0 b_0 + a_1 b_0 \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{6.12}$$

Fie acum $\lambda \in D$. Definim :

$$M(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n,$$

unde

$$a_n = \int \overline{Z}^n f\, \mathrm{d}m.$$

E clar atunci că M astfel definit este o funcţională liniară pe A şi din (6.12) rezultă că M este multiplicativă.

Dacă pentru $f \in A$, avem

$$\int |f|^2 \mathrm{d}m < \varepsilon^2 ;$$

atunci $|a_n| < \varepsilon$ şi deci :

$$|M(f)| < \frac{\varepsilon}{1 - |\lambda|}.$$

Deci M este mărginită în $H^2(\mathrm{d}m)$. Din teorema 6.2 punctul (iii) rezultă că $M \in \Delta$. Cum e clar că $\theta(M) = \lambda$, rezultă că θ aplică biunivoc partea Gleason Δ a lui $\mathfrak{M}$ pe D.

Fie $\tau = \theta^{-1}$ aplicaţia inversă a lui θ. Funcţia aplică discul D biunivoc pe Δ. Pentru orice $f \in A$ avem :

$$F(\lambda) = f(\tau(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n,$$

unde a_n este şirul mărginit

$$a_n = \int \overline{Z}^n f\, \mathrm{d}m .$$

Rezultă că F este o funcţie analitică în D şi că τ este continuă. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

7. EXEMPLE

Exemplul 1. Exemplul standard este cel al algebrei funcţiilor continue pe $X = \{z : |z| = 1\}$ care admit prelungire analitică în interior. Algebra A este o algebră Dirichlet pe X. Spaţiul idealelor maximale ale lui A este omeomorf cu $\overline{D}$, unde $D = \{z : |z| < 1\}$. Măsura de reprezentare a idealului maximal dat de λ cu $\lambda \in D$ este

$$m_\lambda = \frac{1}{2\pi}\, p_\lambda(t)\, \mathrm{d}t,$$

unde p_λ este nucleul lui Poisson.

În acest caz regăsim toate rezultatele clasice observînd că restricţiile de tipul

$$\int f\, \mathrm{d}m \neq 0$$

se ridică prin faptul că orice funcţie din A care se anulează în λ se poate scrie sub forma $(z - \lambda)\, h(z)$ cu $h \in A$, $h(\lambda) \neq 0$.

Exemplul 2. Algebra H^∞ a funcţiilor analitice şi mărginite pe D. Utilizînd teorema clasică a lui Fatou se poate identifica H^∞ cu algebra $H^\infty(\mathrm{d}m)$ ca în punctul 5 al lucrării plecînd de la A din exemplul precedent cu $m = 1/2\pi\, \mathrm{d}t$. H^∞ este deci o algebră logmodulară pe spaţiul X al idealelor maximale ale lui $L^\infty(\mathrm{d}t)$. Se arată că această algebră nu este Dirichlet pe X. Această algebră este bine studiată de K. Hoffman în [27].

Exemplul 3. Fie G un subgrup netrivial al grupului aditiv R al numerelor reale. Fie X dualul grupului discret G şi A_G algebra funcţiilor continue pe X a căror transformată Fourier se anulează pe partea negativă a lui G. Atunci A_G este o algebră Dirichlet pe X.

Cînd $G = R$, atunci X este compactificarea Bohr a lui R, şi A_G este algebra funcţiilor analitice şi aproape periodice în semiplanul superior.

Dacă G este grupul numerelor de forma $m + n\gamma$ cu m şi n întregi şi γ iraţional, atunci X este omeomorf cu torul şi A_G este algebra funcţiilor pe tor a căror coeficienţi Fourier

$$a_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int \mathrm{e}^{-imt}\, \mathrm{e}^{-in\varphi}\, f(t, \varphi)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\varphi$$

se anulează în afara semigrupului $m + n\gamma \geqslant 0$.

Primită la redacţie la 10 decembrie 1966

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Arens R., *The boundary integral of log | Φ | for generalized analytic functions.* Trans. Amer. Math. Soc., **86**, 57—69 (1957).
2. Arens, R. Calderon, A., *Analytic functions of several Banach algebra elements.* Ann. of. Math.,, **62**, 204—216 (1955).
3. Arens, R., Singer, I. M., *Function values as boundary integrals.* Proc. Amer. Math. Soc., **5**, 735—745 (1954).
4. — *Generalized analytic functions.* Trans. Amer. Math. Soc., **81**, 379—395 (1956).

5. Bear, H. S., *Complex function algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., **90** 383—393 (1959).
6. — *A strong maximum modulus theorem for maximal functions algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., **92**, 465—469 (1959).
7. — *A geometric characterization of Gleason Parts.* Proc. Amer. Math. Soc., **16**, 407—412 (1965).
8. Beurling, A., *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space.* Acta math., **81**, 239—255 (1949).
9. Bishop, E., *Representing measures for points in a uniform algebra.* Bull. Amer. Math. Soc., **70**, 121—122 (1964).
10. Bochner, S., *Generalized conjugate and analytic functions without expansions.* Proc. Nat. Acad. Sci., **45**, 855—857 (1959).
11. Bohr, H., *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen III. Dirichletentwicklung analytischer Funktionen.* Acta Math., **47**, 237—281 (1926).
12. Bourbaki, N. *Eléments de mathématique, Livre VI, Intégration,* Hermann et C-ie, Act. Sci. et Ind. 1175, Paris, 1952.
13. Dunford, N., Schwartz J., *Linear Operators.* Interscience, New York, 1958, Part. I.
14. Foiaş, C. *Măsuri spectrale şi semispectrale.* St. cerc. mat., **18**, *1*, 7—56 (1966).
15. — Suciu, I. *Szegö measures and spectral theory in Hilbert spaces.* Rev. Roum. de math. pures et appl., **XI**, 2, 147—159 (1966).
16. Gelfand, I. M., Raikov, D., Silov, G., *Commutativnie normirovanniie kolţa.* Fizmatigiz, Moskva, 1960.
17. Gleason, A., *Function Algebras, Seminars on Analytic Functions Institute for Advanced Study.* Princeton, 1957.
18. — , Whitney, H., *The extension of linear functionals defined on H^∞.* Pacific J. Math., **12**, 163—182 (1962).
19. Halmos, P., *Shifts on Hilbert spaces.* J. Reine Angew. Math., **208**, 102—112 (1961).
20. Helson, H., *Lectures on invariant subspaces,* Academic Press, New York, 1964.
21. — , Lowdenslager D.,, *Prediction theory and Fourier series in several variables.* Acta Math., **99**, 165—202 (1958).
22. — , — , *Invariant subspaces.* Proc. Internat. Symp. Linear Spaces 1960 (pp. 251—262), Macmillan Pergamon, New York, 1961.
23. — , — , *Prediction theory and Fourier series in several variables. II.* Acta Math., **106**, 175—213 (1961).
24. — , Quigley, F., *Maximal algebra of continuous functions,* Proc. Amer. Math. Soc., **8**, 111—114 (1957).
25. Herglotz, G., *Über. Potenzreihen mit positivem, reellem Teil im Einheitskreis.* Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. phys. Klasse, **63**, 501—511 (1911).
26. Hoffman, K., *Boundary behaviour of generalized analytic functions.* Trans. Amer. Math. Soc., **87**, 447—466 (1958).
27. — *Banach spaces of Analytic Functions.* Preentice Hall, Englewood Cliffs, 1962.
28. — *Analytic functions and logmodular Banach algebras,* Acta Math., **108** (1962).
29. — Singer, I. M., *Maximal algebras of continuous functions.* Acta Math., **103** (1960).
30. Kolmogoroff, A. N., *Stationary sequences in Hilbert Space.* Bull. M.G.U., **II** (1941).
31. Lax, P., *Translation invariant subspaces.* Acta Math., **101**, 163—178 (1959).
32. Loomis, L., *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis.* Von Nostrand, New York, 1953.
33. Masani, P., *Shift invariant spaces and prediction theory.* Acta Math., **107**, 275—290 (1962).
34. Nevanlinna, R., *Eindeutige Analytische Funktionen.* Berlin, 1936.
35. Newmann, D. J., *Some remarks on the maximal ideal structure of H.* Ann. of Math., *3* (1959).
36. Nicolescu, M., *Analiză Matematică,* vol. III, Ed. tehnică Bucureşti, 1960.
37. Riesz, F., Riesz, M., *Über die Randwerte einer analytischen Funktion.* Quatrième Congrès de Math. Scand., **1916**.
38. Riesz, F., Nagy, B. Sz., *Leçon d'analyse fonctionnelle.* Budapest, 1953.
39. Rudin, W., *Fourier Analysis on Groups.* Interscience, New York, 1962.
40. Stoilow, S., *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă,* vol. II, Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1958.
41. Suciu, I., *Algebre Banach analitice,* St. cerc. mat., **15**, *1*, 55—76 (1964).
42. — *Şiruri de interpolare în spaţiul idealelor maximale ale lui H^∞.* St. cerc. mat. **18**, *1*, 1 029—1 038 (1966).
43. Szegö, G., *Beiträge zur Theorie der toeplitzen Formen (Erste Mitteilung).* Math. Z., **6**, 167—202, (1920).
44. Wermer, J., *Dirichlet algebras.* Duke J. Math., **27** 373—382 (1960).
45. — *Banach Algebras and Analytic Functions. Advances in Mathematics.* Academic Press, New York, 1961.

R

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR * DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT * 1883

1967 JUN - 7

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.
ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.
N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.
S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 352 p., 18,50 lei.
SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10.50 lei.
O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.
S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 5, P. 647—802, BUCUREŞTI, 1967

I. P. „Informaţia" — c. 5170

43 831

Lei 12.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI
MATEMATICE

6

TOMUL 19
1967

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

TOM. 19, Nr. 6
1967

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

C. ANGHEL, Familii epimorfice şi topologia canonică 805

RADU DIACONESCU, Sume directe în categoria laticilor . . . 817

HORIA I. ENE, Asupra metodei lui A. B. Tayler 825

IOAN FILIMON, Mişcări circulatorii în jurul unui profil dat. Metoda corectă a lui Ciaplîghin 831

S. IANUŞ, Asupra unor spaţii fără torsiune 845

GEORGE ISAC, Elemente Ω'-idempotente în algebre universale . 853

M. JALOBEANU, Asupra compatibilităţii operaţiei de grup cu relaţia de ordonare parţială 859

FLORICA MUNTEANU PASCAL, Restul în formula de cvadratură a lui Shovelton 865

FLORICA MUNTEANU PASCAL, Metoda dreptelor în rezolvarea unor probleme referitoare la o ecuaţie cu derivate parţiale de tip parabolic 871

ALEX. PETCU, Definirea algebrelor booleene şi a semilaticilor cu ajutorul a două axiome-identităţi 891

MARIUS I. STOKA, Determinarea subgrupurilor grupului transformărilor afine din plan 897

IOAN TOMESCU, Proprietăţi ale funcţiei caracteristice a unui multipol 927

IONEL ŢEVY, O generalizare a noţiunii de continuitate în sensul lui Florin Vasilescu 935

ELENA UNGUREANU, Influenţa temperaturii asupra unor mişcări plane staţionare în medii poroase 945

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 803–954, BUCUREŞTI, 1967

MŰSZAKI 1967

FAMILII EPIMORFICE ŞI TOPOLOGIA CANONICĂ

DE

C. ANGHEL

În această lucrare se obţine rezultatul că topologia canonică pentru un $U-$sit (C, τ) este topologia generată de pretopologia pentru care Cov (X) este mulţimea familiilor epimorfice efectiv universale pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, C$.

1. Definiţia 1.1. Fie C o categorie. Admitem că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, C$ s-a dat o familie $J(X)$ de ciururi peste X pentru care avem îndeplinite axiomele :

T_1: Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, C$, $J(X) \neq \emptyset$.

T_2 : Pentru orice $R \in J(X)$ şi orice $f: Y \to X$ morfism din C, $(R:f) \in J(Y)$.

T_3 : Dacă R_1 şi R_2 sînt ciururi ale lui X, $R_1 \in J(x)$ şi $(R_2:f) \in J(Y)$ pentru orice $(Y, f) \in R_1$, atunci $R_2 \in J(X)$.

Spunem că asocierea $X \to J(X)$ dă o topologie Grothendieck pe C sau simplu o topologie. Vom nota cu (C, τ) perechea formată dintr-o categorie C şi τ o topologie pe ea.

Definiţia 1.2. Fie C o categorie. O pretopologie pe C se obţine prin a se da pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, C$ un ansamblu Cov (X) de familii de morfisme quarabile de adresă X pentru care avem axiomele:

PT_1 : Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, C$ şi orice familie $\{X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X\}_{\alpha \in I}$ din Cov (X) şi orice morfism $f: Y \to X$ din C, familia $\{X_\alpha \times_X Y \to Y\}_{\alpha \in I}$ canonic construită este în Cov (Y).

PT_2 : Dacă $\{X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X\}_{\alpha \in I} \in$ Cov (X) şi dacă pentru orice $\alpha \in I$, $\{X_{\beta_\alpha} \xrightarrow{f_{\beta_\alpha}} X_\alpha\}_{\beta_\alpha \in I_\alpha}$ este în Cov (X_α), atunci familia $\{X_{\beta_\alpha} \xrightarrow{g_{\beta_\alpha}} X\}$ cu $g_{\beta_\alpha} = f_\alpha \circ f_{\beta_\alpha}$ este în Cov (X).

PT_3 : Familia $\{1_X\}$ este în Cov (X) pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, C$.

Definiţia 1.3. Fie C o categorie. Topologia cea mai fină pentru care toate prefasciculele reprezentabile sînt fascicule, se numeşte topologia canonică. O familie de morfisme quarabile care generează un ciur acoperitor în topologia canonică se numeşte familie epimorfică efectiv universală.

Propoziţia 1. 4. *O familie* $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ *de morfisme quarabile este epimorfică efectiv universală dacă şi numai dacă pentru orice* $Z \in \mathrm{Ob}\, C$ *avem îndeplinite condiţiile :*

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 805–815, BUCUREŞTI, 1967

1. $\operatorname{Hom}(U,Z)\to\prod_i\operatorname{Hom}(U_i,Z)\rightrightarrows\prod_{(i,j)}\operatorname{Hom}(U_i\times_U U_j,Z)$ *este exactă, ceea ce este echivalent cu faptul că* $\{U_i\to U\}$ *este epimorfic efectivă.*

2. *Pentru orice* $V\to U$, *morfism în* C *familia* $\{U_i\times_U V\to V\}_{i\in I}$ *canonic construită este epimorfic efectivă, adică, verifică condiția 1.*

Demonstrație. Fie $\{U_i\to U\}$ epimorfică efectiv universală şi fie $R\in J(U)$ ciurul acoperitor generat de această familie în topologia canonică. Deci pentru orice prefasciul reprezentabil $F\simeq\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\ ,Z)$, aplicația $\operatorname{Hom}(U,F)\to\operatorname{Hom}(R,F)$ este o bijecție de mulțimi.

Dar $R=\varinjlim U_i$ (propoziția 2.1 [3]) privind pe R ca un prefasciul. Avînd îndeplinite condițiile propoziției 1.40 [2] pentru 1, rezultă diagrama exactă:

$$\varprojlim F(U_i)\xrightarrow{\sim}\operatorname{Ker}\Big(\prod_i F(U_i)\rightrightarrows\prod_{i,j}F(U_i\times_U U_j)\Big)$$

dar

$$\varprojlim F(U_i)\simeq\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(\varinjlim U_i,F)\simeq\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R,F).$$

Deci avem diagrama exactă:

$$F(U)\to\prod_i F(U_i)\rightrightarrows\prod_{i,j}F(U_i\times_U U_j).$$

Cum $F(U)\simeq\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(U,Z)$, rezultă diagrama exactă:

$$\operatorname{Hom}(U,Z)\to\prod_i\operatorname{Hom}(U_i,Z)\rightrightarrows\prod_{i,j}\operatorname{Hom}(U_i\times_U U_j,Z)$$

deci condiția 1.

Pentru demonstrarea condiției 2, fie $V\xrightarrow{f}U$ un morfism în C. Să arătăm că avem diagrama exactă:

$$\operatorname{Hom}(V,Z)\to\prod_i\operatorname{Hom}(U_i\times_U V,Z)\rightrightarrows\prod_{i,j}\operatorname{Hom}((U_i\times_U V)\times_V(U_j\times_U V),Z)$$

pentru orice $Z\in\operatorname{Ob}C$.

Pentru aceasta este suficient să arătăm că familia $\{U_i\times_U V\to V\}$ generează ciurul $(R:f)$ care este acoperitor în topologia canonică conform axiomei T_2 din definiția 1.1. Aceasta rezultă din diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "h_i"'] \arrow[d, "g"] \arrow[ddl, "g_i"] \\
U_i\times_U V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, "f"] \\
U_i \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

cu $(W,g)\in(R:f)$ deci $(W,f\circ g)\in R$, deci există $g_i\colon W\to U_i$ cu $f_i\circ g_i=f\circ g$. Din definiția produsului fibrat rezultă un morfism unic h_i, tocmai ceea ce doream.

Reciproca este evidentă ţinînd cont de definiţia fasciculului.

2. Definiţia 2.1. Fie C o categorie; familia $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ de morfisme din C se numeşte epimorfică dacă morfismul canonic
$\mathrm{Hom}\,(U, Z) \to \prod\limits_i \mathrm{Hom}\,(U_i, Z)$ este o injecţie pentru orice $Z \in \mathrm{Ob}\, C$

Familia $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ se numeşte epimorfică universală dacă morfismele familiei sînt quarabile şi pentru orice $U' \to U$ morfism din C, familia $\{U_i \times_U U' \to U'\}_{i\in I}$ este epimorfică.

Vom folosi următoarele proprietăţi ale familiilor epimorfice:

Propoziţia 2.2. 1) *Dacă* $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ *este epimorfică şi pentru orice* $i \in I$, $\{U_{ij} \to U_i\}_{j\in I}$ *este epimorfică, atunci* $\{U_{ij} \to U\}_{(i,j)\in I\times J}$ *este epimorfică* (*stabilitatea la compunere*).

2) *Familiile epimorfice universale sînt stabilite la compunere.*

3) *Dacă* $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i\in I}$ *şi* $\{V_j \xrightarrow{g_j} {}_jV\}_{j\in J}$ *sînt două familii epimorfice universale şi* $U \times V$ *există, atunci* $U_i \times V_j$ *există şi familia* $\{U_i \times V_j \xrightarrow{f_i\times g_j} U \times V\}_{(i,j)\in I\times J}$ *este epimorfică universală.*

Demonstraţie. 1) rezultă din diagrama

$$\mathrm{Hom}\,(U, Z) \to \prod_i \mathrm{Hom}\,(U_i, Z) \to \prod_{i,j} \mathrm{Hom}\,(U_{i_j}, Z)$$

ţinînd cont de faptul că produsul direct este exact la stînga.

2) rezultă din 1) şi din diagrama

$$\begin{tikzcd}
U_{ij} \times_U U' \arrow[r] \arrow[d] & U_i \times_U U' \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[d] \\
U_{ij} \arrow[r] & U_i \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

3) rezultă din 2) şi din diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & U & & V_j \arrow[dr, "g_j"] & \\
U_i \arrow[ur, "f_i"] & & U \times V_j \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dr, "1\times g_j"] & & V \\
 & U_i \times V_j \arrow[ul] \arrow[ur, "f_i\times 1"] \arrow[rr] & & U \times V \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

unde $U \times V_j = (U \times V) \times_V V_j$ şi există, deoarece $\{g_j\}$ este quarabilă şi în plus familia $\{1 \times g_j\}$ este epimorfică universală; analog $U_i \times V_j = (U \times V_j) \times_U U_i$ şi $\{f_i \times 1\}$ este o familie epimorfică universală.

Propoziţia 2.3. *Fie* C *o categorie,* $S \in \mathrm{Ob}\, C$ *oarecare,* C/S *— categoria obiectelor de adresă* S şi $f_* : C/S \to C$ *functorul canonic* $f_*(A \to S) = A$.

Dacă $\{f_i : U_i \to U\}$ *cu* f_i *din* C/S *este epimorfică* (*epimorfică universală, epimorfică efectivă, epimorfică efectivă universală*) *în* C, *rezultă că* $\{f_i\}$ *este la fel* C/S.

Reciproca este adevărată dacă S este quarabil.

Demonstrație. Fie $\{f_i : U_i \to U\}$ cu $f_i \in C/S$, deci avem diagramele comutative :

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & U \arrow[d, "g"] \\
 & S
\end{tikzcd}$$

Dacă $f_* (f_i)$ este epimorfică (ep. univ., ep. ef., ep. ef. univ.) în C, rezultă evident că $\{f_i\}$ este la fel în C/S.

Reciproc, avem o corespondență biunivocă între morfismele $U \to Z$ şi morfismele $U \to S \times Z$ dată de diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & Z \\
S & S\times Z \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Fie diagrama

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & U \arrow[r, shift left, "\theta_1"] \arrow[r, shift right, "\theta_2"'] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[dl, "r"] \\
 & S & S\times Z \arrow[l, "p_S"] \arrow[u, "p_Z"']
\end{tikzcd}$$

Să arătăm deci că dacă Hom $((U, g), (Z, r)) \to \prod\limits_i$ Hom $((U_i, g_i), (Z, r))$ este monomorfism în C/S, atunci Hom $(U, Z) \to \prod\limits_i$ Hom (U_i, Z) este monomorfism în C. Fie $\theta_1, \theta_2 : U \to Z$ cu $\theta_1 f_i = \theta_2 f_i$ şi fie $\theta_1', \theta_2' : U \to S \times Z$ morfismele corespunzătoare prin corespondența bijectivă de mai sus. Atunci $\theta_1' f_i = \theta_2' f_i$ din proprietatea de universalitate a produsului direct și deci prin ipoteză $\theta_1' = \theta_2'$.

Rezultă : $\theta_1 = p_2 \theta_1' = p_2 \theta_2' = \theta_2$.

PROPOZIȚIA 2.4. *Dacă* $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ *este epimorfică efectiv universală și pentru fiecare* $i \in I$, $\{U_{ij} \to U_i\}_{j \in J}$ *este epimorfică efectiv universală, atunci* $\{U_{ij} \to U\}_{(i,j) \in I \times J}$ este *epimorfică efectiv universală.*

Demonstraţie. Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(U,Z) \arrow[r, "a"] & \prod_i \mathrm{Hom}(U_i, Z) \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] \arrow[d, "b"] & \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(U_i \times_U U_j, Z) \arrow[d, "\rho"] \\
& \prod_{i,k} \mathrm{Hom}(U_{ik}, Z) \arrow[r, shift left, "\alpha'"] \arrow[r, shift right, "\beta'"'] \arrow[d, shift right, "\alpha''"'] \arrow[d, shift left, "\beta''"] & \prod_{i,j,k,l} \mathrm{Hom}(U_{ik} \times_U U_{jl}, Z) \arrow[dl, "\theta"] \\
& \prod_{i,k,l} \mathrm{Hom}(U_{ik} \times_{U_i} U_{il}, Z) &
\end{tikzcd}$$

care este comutativă; prima linie şi prima coloană sînt exacte prin ipoteză; ρ rezultă indus din diagramele comutative

$$\begin{tikzcd}
U_{ik} \times_U U_{jl} \arrow[rr] \arrow[dr, "\rho_{kl}"'] \arrow[dd] & \omega_2 & U_{jl} \arrow[d, "f_{jl}"] \\
\omega_1 & U_i \times_U U_j \arrow[r] \arrow[d] & U_j \arrow[d, "f_j"] \\
U_{ij} \arrow[r, "f_{ik}"'] & U_i \arrow[r, "f_i"'] & U
\end{tikzcd}$$

$\rho_{kl} = f_{ik} \times {}_U f_{jl} = f_{ik} \times f_{jl}$ în C/S şi cum aici $\{f_{ik}\}$ sînt epimorfice efectiv universale, conform propoziţiei 2.2, $\{\rho_{kl}\}$ formează o familie epimorfică universală, deci morfismul

$$\mathrm{Hom}\ (U_i \times {}_U U_j\ Z) \to \prod_{k,l} \mathrm{Hom}\ (U_{ik} \times {}_U U_{jl}, Z)$$

este o injecţie şi mai departe, morfismul

$$\prod_{i.j} \mathrm{Hom}\ (U_i \times {}_U U_j, Z) \xrightarrow{\rho} \prod_{i,j,k,l} \mathrm{Hom}\ (U_{ik} \times {}_U U_{jl}, Z)$$

este injecţie căci produsul este un functor exact la stînga.

Din comutativitatea pătratelor ω_1 şi ω_2 rezultă

$$\rho_0\, \alpha = \alpha_0'\, b, \qquad \rho_0\, \beta = \beta_0'\, b.$$

θ este indus de diagramele comutative

$$\begin{tikzcd}
U_{ik} \times_{U_i} U_{il} \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, "\theta_i"] & & U_{il} \arrow[dd] & \\
& U_{ik} \times U_{il} \arrow[ur, "\Omega_2"] \arrow[dl, "\Omega_1"'] & & \\
U_{ik} \arrow[rr] & & U_i \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

Pentru i fixat avem morfismul, construit canonic,

$$\prod_{k,l} \mathrm{Hom}\,(U_{ik} \times_U U_{il}, Z) \xrightarrow{\theta_{kl}} \prod_{k,l} \mathrm{Hom}\,(U_{ik} \times_{U_i} U_{il}, Z)$$

de unde rezultă morfismul unic

$$\prod_{i,k,l} \mathrm{Hom}\,(U_{ik} \times_U U_{il}, Z) \xrightarrow{\theta_{ikl}} \prod_{i,k,l} \mathrm{Hom}\,(U_{ik} \times_{U_i} U_{il}, Z).$$

Luăm $\theta = \theta_{ikl} \circ p_j$, p_j fiind proiecţia

$$\prod_{i,j,k,l} \mathrm{Hom}\,(U_{ik} \times_U U_{jl}, Z) \xrightarrow{p_j} \prod_{i,k,l} \mathrm{Hom}\,(U_{ik} \times_U U_{il}, Z).$$

Din comutativitatea triunghiurilor Ω_1 şi Ω_2 rezultă

$$\theta\, \alpha' = \alpha'', \qquad \theta\, \beta' = \beta''.$$

Ţinînd cont că ρ este monomorfism, rezultă diagrama exactă

$$\mathrm{Hom}\,(U, Z) \xrightarrow{b \circ a} \prod_{i,k} \mathrm{Hom}\,(U_{ik}, Z) \rightrightarrows \prod_{i,j,k,l} \mathrm{Hom}\,(U_{ik} \times_U U_{jl}, Z)$$

adică $\{U_{ik} \to U\}$ este epimorfic efectivă.

Faptul că familia $\{U_{ik} \to U\}$ este universală, rezultă din demonstraţia de mai sus şi din diagrama:

$$\begin{tikzcd}
U_{ik} \times_U U' \arrow[r, "f_{ik}"] \arrow[d] & U_i \times_U U' \arrow[r, "f_i'"] \arrow[d] & U' \arrow[d] \\
U_{ik} \arrow[r, "f_{ik}"] & U_i \arrow[r, "f_i"] & U
\end{tikzcd}$$

ţinînd cont că $\{f_{ik}'\}$ şi $\{f_i'\}$ sînt efective, proprietatea de a fi efectivă păstrîndu-se prin schimbarea bazei.

PROPOZIŢIA 2.5. *Orice izomorfism este epimorfism efectiv universal.*

Demonstraţie. Fie $A \xrightarrow{u} B$ un izomorfism oarecare şi considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd} A\times_B A \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

despre care vrem să arătăm că este exactă.

Evident, $u\circ p_1 = u\circ p_2$ de unde $p_1 = p_2$, u fiind izomorfism. Fie $f : A \to X$ cu $f\circ p_1 = f\circ p_2$; atunci $g = f\circ u^{-1}$ realizează egalitatea $g\circ u = f$ şi g este unic cu această proprietate, u fiind epimorfism.

Deci orice izomorfism este epimorfism efectiv. Cum desantul unui izomorfism este izomorfism, rezultă că u este epimorfism efectiv universal.

Propoziţiile 2.4 şi 2.5 ne dau următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 2.6. *Fie C o categorie. Familiile epimorfisme efectiv universale $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ pentru orice $U \in \mathrm{Ob}\, C$ definesc o pretopologie pe C.*

Observaţie. În topologia generată de această pretopologie, orice prefascicul reprezentabil este un fascicul.

PROPOZIŢIA 2.7. *Topologia generată de această pretopologie este cea mai fină topologie dintre topologiile pentru care toate prefasciculele reprezentabile sînt fascicule.*

Demonstraţie. Fie categoria C şi τ o topologie pentru care toate prefasciculele reprezentabile sînt fascicule.

Fie R un ciur acoperitor, $R \in J(X)$, $R = \varinjlim X_\alpha$. Familia $\{X_\alpha \to X\}$ generează pe R.

Familia $\{X_\alpha \to X\}$ este epimorfică efectiv, universală. Pentru aceasta nu avem decît să retranscriem prima parte a demonstraţiei propoziţiei 1.4.

Observaţie. Topologia şi pretopologia în care Cov (X), pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, C$, este formată din familiile epimorfisme efectiv universale, este chiar topologia canonică a cărei definiţie am dat-o la începutul lucrării.

DEFINIŢIA 2.8. Fie $C = \mathrm{Ens}$. O familie $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i\in I}$ se numeşte surjectivă dacă $U = \bigcup_{i\in I} f_i(U_i)$.

PROPOZIŢIA 2.9. *Fie $C = \mathrm{Ens}$. Familiile surjective sînt epimorfice şi reciproc. Orice familie epimorfică este epimorfică efectiv universală (în particular acoperirile sînt familii surjective, deci epimorfice efectiv universale).*

Demonstraţie. Prima parte directă este evidentă. Reciproc: fie $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i\in I}$ epimorfică, deci avem injecţia

$$\mathrm{Hom}\,(U, Z) \to \prod_i \mathrm{Hom}\,(U_i, Z) \simeq \mathrm{Hom}\,(\bigoplus_i U_i, Z)$$

deci surjecţia $\bigoplus_i U_i \xrightarrow{\theta} U$; θ face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "g_i"'] & U \\
\bigoplus_i U_i \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

Fie $u \in U$, deci există $i \in I$ şi $u_i \in U_i$ cu $f_i(u_i) = u$, deci $U \subset \bigcup_{i\in I} f_i(U_i)$; cum incluziunea inversă este evidentă, rezultă $U \bigcup_{i\in I} = f_i(U_i)$. Partea a doua este evidentă.

PROPOZIŢIA 2. 10. *Fie* $C =$ Ens *şi topologia canomică pe* Ens, *adică pentru care acoperirile* $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}$ *sînt familiile surjective. Atunci orice fascicul* F *de mulţimi este un functor reprezentabil şi anume* $F(U) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(U, F(e))$, *unde e este un obiect final în* Ens, *adică o mulţime formată dintr-un singur punct.*

Demonstraţie. Fie F un fascicul şi luăm pentru o mulţime U acoperirea formată din toate elementele u_i ale lui U. Evident, $U = \bigcup_{u_i \in U} \{u_i\}$ Cum F este fascicul, avem şirul exact:

$$F(U) \to \prod_{u_i \in U} F(u_i) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} F(u_i \cap u_j).$$

Însă $u_i \cap u_j = \emptyset$ dacă $i \neq j$ şi deci $F(u_i \cap u_j)$ este obiect final în Ens pentru $i \neq j$, căci F este fascicul.

Dacă e este obiect final, $X \times e \simeq X \times_e e \simeq X$. Deci

$$\prod_{i,j} F(u_i \cap u_j) \simeq \prod_i F(u_i) \text{ şi deci } \alpha = \beta.$$

Rezultă atunci $F(U) \simeq \prod_{u_i \in U} F(U_i) = \prod_U F(u_0) = \mathrm{Hom}(U, F(u_0))$ căci obiectele finale sînt izomorfe între ele şi deci $F(u_i) \simeq F(u_0)$

3. Fie $C =$ Ab. Vom demonstra următorul rezultat:

PROPOZIŢIA 3.1. *Familiile epimorfice într-o categorie abeliană cu* AB4) *sînt epimorfice efectiv universale.*

Pentru aceasta folosim următoarele rezultate:

PROPOZIŢIA 3. 2. *Orice epimorfism într-o categorie abeliană este efectiv.*

Demonstraţie. Fie $u : A \to B$ un epimorfism. Avem diagrama exactă

$$0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{u} B \to 0, \quad \text{unde } \alpha = \mathrm{Ker}\ u.$$

Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \times_B A \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dl, shift right, "\gamma"'] & A \arrow[d, "u"] \\
A' \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, shift right, "\beta"'] & A \arrow[r, "u"'] & B
\end{tikzcd}$$

Luînd morfismul nul $A' \xrightarrow{0} A$, avem $u\circ\beta = u\circ\alpha$, de unde rezultă un morfism unic β cu $p_1\circ\beta = \alpha$ şi $p_2\circ\beta = 0$.

De asemenea din $u\circ p_1 = u\circ p_2$ rezultă $u\circ(p_1 - p_2) = 0$, deci avem un morfism unic γ cu $\alpha\circ\gamma = p_1 - p_2$.

Deci $\alpha\circ\gamma\circ\beta = (p_1 - p_2)\circ\beta = \alpha$. Cum α este monomorfism, rezultă $\gamma\circ\beta = 1_{A'}$. Deci diagrama

$$A \times {}_B A \xrightarrow{p_1 - p_2} A \xrightarrow{u} B$$

este exactă căci

$$u = \text{Coker }(\alpha) = \text{Coker }(\alpha\circ\gamma) = \text{Coker }(p_1 - p_2)$$

căci γ este epimorfism.

PROPOZIŢIA 3.3. Dată diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_1 \times_A A_2 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\partial"'] & A_1 \arrow[d, "\alpha"] \\
A_2 \arrow[r, "\beta"] & A
\end{tikzcd}$$

cu β epimorfism, rezultă b epimorfism.

Demonstraţie. Considerăm diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
 & & A_2 \arrow[d, "q_2"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \times_A A_2 \arrow[r, "\delta"] & A_1 \times A_2 \arrow[r, "\beta_0 p_1 - \alpha_0 p_2"] & A
\end{tikzcd}$$

unde p_1, p_2 sînt proiecţiile canonice de la produsul direct $A_1 \times A_2$ pe componentele sale, iar q_1, q_2 injecţiile canonice în produsul direct. Cum β este epimorfism, rezultă că $\beta\circ p_1 - \alpha\circ p_2$ este epimorfism. Deci avem şirul exact $0 \to A_1 \times {}_A A_2 \xrightarrow{\delta} A_1 \times A_2 \xrightarrow{\beta\circ p_1 - \alpha\circ p_2} A \to 0$. Vom arăta că b este epimorfism. Pentru aceasta fie $\gamma : A_1 \to B$ cu $\gamma\circ b = 0$, dar $b = p_1\circ\delta$, deci $(\gamma\circ p_1)\circ\delta = 0$. Rezultă un morfism unic c de sursă A cu proprietatea că

$$c\circ(\beta\circ p_1 - \alpha\circ p_2) = \gamma\circ p_1.$$

Deci

$$c\circ\beta = c\circ(\beta\circ p_1 - \alpha\circ p_2)\circ q_2 = \gamma\circ p_1\circ q_2 = 0.$$

Deci $c = 0$, căci β este epimorfism; deci $\gamma\circ p_1 = 0$, deci $\gamma = 0$ căci p_1 este epimorfism.

Demonstrația propoziției 3.1. Fie $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ o familie epimorfică, adică avem morfismul surjectiv

$$\bigoplus_i U_i \to U.$$

Vrem să arătăm că diagrama

$$\bigoplus_{i,j} (U_i \times_U U_j) \rightrightarrows \bigoplus_i U_i \to U$$

construită canonic este exactă.

Cum functorul sumă directă este exact, conform lui A B 4) avem:

$$\bigoplus_i (U_i \times_U U_j) = \bigoplus_i \operatorname{Ker}(U_i \times U_j \rightrightarrows U) = \operatorname{Ker}(\bigoplus_i (U_i \times U_j) \rightrightarrows U) =$$

$$= \operatorname{Ker}(\bigoplus_i U_i \times \bigoplus_i U_i \rightrightarrows U) = (\bigoplus_i U_i) \times_U (\bigoplus_i U_i).$$

Dar diagrama

$$(\bigoplus_i U_i) \times_U (\bigoplus_i U_i) \rightrightarrows \bigoplus_i U_i \to U$$

este exactă conform propoziției 3.2, deci familia $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ este efectivă.

Pentru a demonstra că este universală, folosim propoziția 3.3. și demonstrația de mai sus.

Observație. Rezultă că o pretopologie pe $C = \mathrm{Ab}$ cu AB4) este dată de familiile epimorfice;

PROPOZIȚIA 3.4. *Orice ciur în* $C = \mathrm{Ab}$ *cu* AB4) *generat de o familie epimorfică, este un ciur principal și reciproc.*

Demonstrație. Fie $\{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U\}_{\alpha\in I}$ o familie epimorfică și R ciurul generat de acesta, adică

$$R = \{Y \xrightarrow{f} U \mid \text{ există } g_\alpha : Y \to U_\alpha \text{ cu } f_\alpha\circ g_\alpha = f\}.$$

Considerăm morfismul $h = \bigoplus_\alpha f_\alpha : \bigoplus_\alpha U_\alpha \to U$ canonic construit și din diagrama

$$\begin{tikzcd}
\oplus U_\alpha \arrow[d, shift left, "p_\alpha"] \arrow[rd] & Y \arrow[l, "g"'] \arrow[ld, "q_\alpha"] \arrow[d, "f"] \\
U_\alpha \arrow[u, shift left, "i_\alpha"] \arrow[r, "f_\alpha"] & U
\end{tikzcd}$$

rezultă:

$$f = f_\alpha\circ g_\alpha = (\bigoplus_\alpha f_\alpha)\circ i_\alpha\circ g_\alpha = (\bigoplus_\alpha f_\alpha)\circ g.$$

Reciproc, din $f = (\bigoplus_{\alpha} f_{\alpha}) \circ g$, rezultă $f = f_{\alpha} \circ (p_{\alpha} \circ g)$ pentru orice $\alpha \in I$, deci R coincide cu ciurul generat de morfismul

$$\bigoplus_{\alpha} f_{\alpha} : \bigoplus_{\alpha} U_{\alpha} \to U$$

Primită la redacţie 13 decembrie 1966

Facultatea de chimie Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. N. Popescu, *Elemente de teoria fasciculelor*. St. cerc. mat., **18**, *2* (1966).
2. N. Popescu, *Elemente de teoria fasciculelor*. St. cerc. mat., **18**, *3*, (1966).
3. J. L. Verdier, *Seminaire*, 1964.

SUME DIRECTE ÎN CATEGORIA LATICILOR

DE

RADU DIACONESCU

Scopul lucrării de faţă este de a dovedi că în categoria laticelor cu prim şi ultim element există limite inductive oarecare (existenţa limitelor proiective este uşor de identificat).

Fie $\mathcal{L}(0,1)$ categoria laticilor cu prim şi ultim element în care morfismele sînt aplicaţii $\varphi : L_1 \to L_2$

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b),$$

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b),$$

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\varphi(1) = 1.$$

În această categorie există nucleu de săgeată dublă, limite proiective oarecari şi produse fibrate[1]. În cele ce urmează vom stabili existenţa noţiunilor duale acestora în categoria $\mathcal{L}(0,1)$.

1. Fie u_1, $u_2 : L \to L'$. Pentru a stabili conucleul de săgeată dublă al acestor două morfisme, să considerăm următoarea relaţie de echivalenţă :

$x \sim y$ dacă $x = y$ sau

$\exists a \in L$, $x = u_1(a)$ şi $y = u_2(a)$ sau invers.

Fie $R = \bigcap\limits_{R' \supset \sim} R'$ cea mai mică relaţie de echivalenţă care o include şi este compatibilă cu structura de latice, adică din $x R x'$ şi $y R y'$ se deduce $x \vee y \, R \, x' \vee y'$ şi $x \wedge y \, R \, x' \wedge y'$. În mulţimea $L'/R = L''$ introducem o structură de latice în mod canonic :

$$\dot{x} \wedge \dot{y} = \dot{\widehat{x \wedge y}}$$

$$\dot{x} \vee \dot{y} = \dot{\widehat{x \vee y}}.$$

---

[1] Construcţia acestora se face ca în Ens, iar structura de latice se obţine în mod canonic.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 817–824, BUCUREŞTI, 1967

Buna definire a operaţiilor este asigurată de compatibilitatea relaţiei de echivalenţă cu structura de latice.

Fie $u : L' \rightarrow L''$, $u(x) = \dot{x}$, epimorfismul canonic. Perechea (u, L'') verifică definiţia conucleului de săgeată dublă :

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & L' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] & L''=L'/R \arrow[dl, dashed, "w"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

$$uu_1(x) = \dot{\widehat{u_1 (x)}}$$

$uu_2 (x) = \dot{\widehat{u_2 (x)}}$ dar $u_1 (x) \, R \, u_2 (x)$ deci $\dot{\widehat{u_1 (x)}} = \dot{\widehat{u_2(x)}}$ deci $uu_1 = uu_2$.

Fie $v : L' \rightarrow X$ un morfism oarecare cu proprietatea că $vu_1 = vu_2$; atunci definim $w : L'' \rightarrow X$ astfel : $w(\dot{x}) = v(x)$. Aplicaţia este bine definită, căci dacă $\dot{x} = \dot{x}'$, adică $x \, R \, x'$, înseamnă că $\exists \, a \in L$, $x = u_1 (a)$ şi $x' = u_2 (a)$. În acest caz $v (x) = v (u_1(a)) = v (u_2(a)) = v(x')$, adică independenţa de reprezentanţi .w este în mod evident morfism de latice şi face comutativă diagrama de mai sus. Unicitatea morfismului w rezultă din faptul că u este epimorfism.

2. Fie L_1 şi $L_2 \in$ Ob $\mathcal{L} \, d(0,1)$, $\mathcal{L} \, d(0,1)$ categoria laticilor distributive cu prim şi ultim element. J. Riguet a introdus în [3] noţiunea de produs tensorial de latici 2). Vom arăta că suma directă a laticilor L_1 şi L_2 este produsul lor tensorial $L_1 \otimes L_2$.

Definim morfismele canonice $L_i \xrightarrow{u_i} L_1 \otimes L_2$:

$$u_1 (x) = x \otimes 1$$
$$u_2 (x) = 1 \otimes x.$$

Fie acum $f_i : L_i \rightarrow L$, unde L este o latice oarecare şi fie $v_i : L_i \rightarrow L_1 \times L_2$ astfel definite :

$v_1 (x) = (x,1)$

$v_2 (x) = (1,x)$ (s-a notat cu $L_1 \times L_2$ produsul cartezian).

---

2) $L_1 \otimes L_2$ se obţine ca laticea cît a laticei libere generate de mulţimea $L_1 \times L_2$ printr-o relaţie de echivalenţă compatibilă cu structura de latice şi care în plus satisface relaţiile :

$$(a_1 \vee b_1, \; a_2) \equiv (a_1, \; a_2) \vee (b_1, \; a_2) ; \; (a_1, \; a_2 \vee b_2) \equiv (a_1, \; a_2) \vee (a_1, \; b_2)$$

$$(a_1 \wedge b_1, \; a_2) \equiv (a_1, \; a_2) \wedge (b_1, \; a_2) ; \; (a_1, \; a_2 \wedge b_2) \equiv (a_1, \; a_2) \wedge (a_1, \; b_2).$$

Există atunci o funcţie $f : L_1 \times L_2 \to L$ aşa ca diagrama următoare să fie comutativă :

$$\begin{tikzcd}
& L_1 \arrow[dl, "v_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
L_1 \times L_2 \arrow[rr, "f"] & & L \\
& L_2 \arrow[ul, "v_2"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$$f(a_1,a_2) = f_1(a_1) \wedge f_2(a_2)$$
$$f(v_1(a_1)) = f(a_1,1) = f_1(a_1) \wedge f_2\ (1) = f_1(a_1).$$

Aplicaţia f are următoarele proprietăţi :

$$f(a_1 \vee b_1, a_2) = f(a_1, a_2) \vee f(b_1, a_2),$$
$$f(a_1 \wedge b_1, a_2) = f(a_1, a_2) \wedge f(b_1, a_2),$$
$$f(a_1, a_2 \vee b_2) = f(a_1, a_2) \vee f(a_1, b_2),$$
$$f(a_1, a_2 \wedge b_2) = f(a_1, a_2) \wedge f(a_1, b_2).$$

Vom demonstra, de exemplu, prima dintre aceste proprietăţi :

$$f(a_1 \vee b_1, a_2) = f_1(a_1 \vee b_1) \wedge f_2(a_2) = [f_1(a_1) \vee f_1(b_1)] \wedge f_2(a_2) =$$
$$= [f_1(a_1) \wedge f_2(a_2)] \vee [f_1(b_1) \wedge f_2(a_2)] = f(a_1,a_2) \vee f(b_1,a_2).$$

Se vede aici necesitatea introducerii distributivităţii.

Conform teoremei de universalitate a produsului tensorial, există şi este unic un morfism $\theta : L_1 \otimes L_2 \to L$, aşa că diagrama de mai jos este comutativă

$$\begin{tikzcd}
L_1 \times L_2 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & L_1 \otimes L_2 \arrow[dl, "\theta"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

$$\theta\,(\vee((m_1^1 \otimes m_2^1) \wedge \ldots \wedge (m_1^p \otimes m_2^p))) = \vee\ ((fm_1^1, m_2^1) \wedge \ldots \wedge f(m_1^p, m_2^p)).$$

Rezultă de aici că $L_1 \otimes L_2$ satisface proprietatea de universalitate a sumei directe

$$\begin{tikzcd}
L_i \arrow[rr, "u_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & & L_1 \otimes L_2 \arrow[dl, "\theta"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

adică existenţa unui morfism unic θ aşa fel ca diagrama precedentă să fie comutativă.

3. Conform unei teoreme generale din teoria categoriilor, (N. Popescu [2]), în $\mathcal{L}d\,(0,1)$ există limite inductive finite deoarece există conucleul de săgeată dublă și sume directe finite.

4. Conform aceleiași teoreme în $\mathcal{L}d\ (0,1)$, există și suma fibrată a doua latici L_1 și L_2 peste L, ea construindu-se ca suma directă a obiectelor (f_1, L_1) și (f_2, L_2) din $L/\mathcal{L}d(0,1)$.

Fie

$$\begin{tikzcd} & L_1 \\ L \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & L_2 \end{tikzcd}$$

Să considerăm și

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[dr, "u_1"] & \\ & L_1\otimes L_2 \\ L_2 \arrow[ur, "u_2"'] & \end{tikzcd}$$

Definim $L_1\amalg_L L_2$ ca Coker $(u_1\circ f_1,\ u_2\circ f_2)$; în felul acesta $L_1\amalg_L L_2$ este laticea cît a lui $L_1\otimes L_2$ printr-o relație de echivalență prin care

$$f_1(x)\otimes 1 \sim 1\otimes f_2(x).$$

5. În categoria $\mathcal{L}\ (0,1)$ există limite inductive filtrante. Să considerăm o mulțime parțial ordonată filtrantă la dreapta (pentru orice $i, j\in I$ există $k\in I$ așa că $i, j\leqslant k$). I se poate organiza în mod canonic ca o categorie în care $\mathrm{Hom}_I\ (i,\ j)$ conține un singur morfism dacă și numai dacă $i\leqslant j$.

Fie functorul $F: I\to\mathcal{L}\ (0,1)$:

$$F(i) = L_i$$

$$F(i\to j) = u_{ji},\ \text{unde}\ u_{ji}\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_{(0,1)}}(L_i, L_j).$$

Considerăm $L_0 = \bigcup\limits_{i\in I} L_i$ și definim pe L_0 o relație de echivalență astfel: $x,\ y\in L_0 \Rightarrow i,\ j\in I,\ \ x\in L_i\ \ y\in L$: I fiind filtrantă la dreapta, există $k\in I$ astfel ca $i\leqslant k$ și $j\leqslant k$; vom spune că $x\sim y$ dacă $u_{ki}(x) = u_{kj}\,(y)$ pentru orice $k\geqslant i, j$.

Se verifică ușor că aceasta este o relație de echivalență.

Fie acum $L = L_0/\!\sim$ mulțimea factor prin această relație. În L se poate introduce o structură de latice:

$$\dot{x},\ \dot{y}\in L\Rightarrow x,\ y\in L_0\Rightarrow \exists_{ij}\in I,\ \ x\in L_i,\ \ y\in L_j,\ \ x\in\dot{x},\ \ y\in\dot{y}.$$

Fie $k\geqslant i, j$, $\quad \dot{x}\vee\dot{y} = u_{ki}\,(x)\vee_k u_{kj}(y)$ și

$$\dot{x}\wedge\dot{y} = u_{ki}\,(x)\wedge_k u_{kj}(y),$$

unde $\vee_k$ şi $\wedge_k$ sînt operaţiile ce definesc structura de latice pe L_k. Cele două operaţii sînt definite independent de alegerea reprezentanţilor. Într-adevăr, dacă $x' \in \dot{x}$ şi $y' \in \dot{y}$, există $i', j' \in I$, $x \in L_{i'}$, $y \in L_{j'}$ aşa fel încît există $n \geqslant i, i'$ şi $m \geqslant j, j'$ cu proprietatea că

$$u_{nj'}(x) = u_{ni'}(x')$$

$$u_{mj'}(y) = u_{mj'}(y')$$

iar $\dot{x} \vee \dot{y} = u_{k'i'}(x') \vee_{k'} u_{k'j'}(y')$.

Pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in I$ avem proprietatea că

$$\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \Rightarrow u_{\gamma\beta} \circ u_{\beta\alpha} = u_{\gamma\alpha}.$$

Dacă $p \in I$, $p \geqslant m, n, k, k'$, atunci

$$(u_{pk} \circ u_{ki})(x) = u_{pi}(x) = (u_{pn} \circ u_{ni})(x)$$

$$(u_{pk'} \circ u_{k'i'})(x') = u_{pi'}(x') = (u_{pn} \circ u_{ni'})(x')$$

$$(u_{pk} \circ u_{kj})(y) = u_{pj}(y) = (u_{pm} \circ u_{mj})(y)$$

$$(u_{pk'} \circ u_{k'j'})(y') = u_{pj'}(y') = (u_{pm} \circ u_{mj'})(y')$$

şi din

$$u_{ni}(x) = u_{ni'}(x')$$

$$u_{mj}(y) = u_{mj'}(y'),$$

rezultă că

$$(u_{pk} \circ u_{ki})(x) = (u_{pk'} \circ u_{k'i'})(x')$$

$$(u_{pk} \circ u_{kj})(y) = (u_{pk'} \circ u_{k'j'})(y').$$

Deci

$$u_{pk}(u_{ki}(x) \vee_k u_{kj}(y)) = u_{pk'}(u_{k'i'}(x') \vee_{k'} u_{k'j'},(y'))$$

adică

$$x \vee_k y \sim x' \vee_{k'} y'.$$

Laticea L şi morfismele $u_i : L_i \to L$, $u_i(x) = \dot{x}$ constituie limita inductivă filtrantă a functorului F.

Diagrama

$$\begin{tikzcd}
L_i \arrow[rd, "v_i"] \arrow[d, "u_{ji}"'] & \\
L_j \arrow[r, "v_j"'] & L
\end{tikzcd}$$

este comutativă căci $\dot{x} = \dot{\widehat{u_{ji}(x)}}$. Într-adevăr, $x \sim u_{ji}(x)$ pe baza

$$I_{L_j}(u_{ji}(x)) = u_{ji}(x).$$

Fie $L' \in \text{Ob}\,\mathcal{L}\,(0,1)$ şi $v_i : L_i \rightarrow L$ astfel ca diagramele de tipul

$$\begin{tikzcd}
L_i \arrow[rrd, "u_i"] \arrow[dd, "u_{ji}"] & & \\
& & L' \\
L_j \arrow[rru, "u_j"] & &
\end{tikzcd}$$

să fie comutative. Atunci există şi este unic un morfism $\theta : L \rightarrow L'$ astfel definit :

$$\theta\,(\dot{x}) = v_i\,(x), \text{ unde } x \in L_i \text{ şi } x \in \dot{x}$$

care face comutative diagramele de tipul

$$\begin{tikzcd}
L_i \arrow[rrd, "u_i"] \arrow[rrddd, "v_i"] \arrow[dd, "u_{ji}"] \arrow[dddd, bend right, "u_{ki}"'] & & \\
& & L \arrow[dd, dashed, "\theta"] \\
L_j \arrow[rru, "u_j"] \arrow[rrd, "v_j"] \arrow[dd, "u_{kj}"] & & \\
& & L' \\
L_k \arrow[rruuu, "u_k"] \arrow[rru, "v_k"] & &
\end{tikzcd}$$

Mai întîi θ este bine definit, căci dacă $y \in \dot{x}$ cu $y \in L_j$, atunci $\theta\,(\dot{x}) = v_j\,(y)$, dar pentru $i,\ j \in I$ există $k \in I$ aşa fel ca

$$u_{ki}\,(x) = u_{kj}\,(y)$$

(deoarece $y,\ x \in \dot{x}$). De aici rezultă că

$$v_i\,(x) = v_k \circ u_{ki}\,(x) = v_k \circ u_{kj}\,(y) = v_j\,(y).$$

Din felul cum a fost definit θ, se vede că este un morfism de latice cu prim şi ultim element. Să presupunem că există şi morfismul $\theta' : L \rightarrow L'$ astfel încît pentru orice $i \in I$, $v_j = \theta \circ u_i$ şi există $\dot{x} \in L$ aşa ca $\theta\,(\dot{x}) \neq \theta'\,(\dot{x}')$

$\dot{x} \in L$ implică existenţa lui $x \in L$ cu $u_i\,(x) = \dot{x}$, deci

$$\theta\,(\dot{x}) = \theta\,(u_i\,(x)) = v_i\,(x)$$

$$\theta'\,(\dot{x}) = \theta'\,(u_i\,(x)) = v_i\,(x).$$

În concluzie morfismul θ este unic.

6. În $\mathcal{L}d\ (0,1)$, subcategorie a lui $\mathcal{L}\ (0,1)$, există sume directe oarecari.

Fie $\{L_i\}_{i \in I}$ o familie de latici distributive cu prim şi ultim element şi $\alpha \in \mathcal{F}(I)$ unde $\mathcal{F}(I)$ este mulţimea părţilor finite ale lui I. $\mathcal{F}(I)$ este o mulţime parţial ordonată dirijată la dreapta de relaţia de incluziune.

Să considerăm functorul

$$F : \mathcal{F}(I) \to \mathcal{L}d(0,1)$$

$$F(\alpha) = \bigsqcup_{i \in \alpha} L_i = \bigotimes_{i \in \beta} L_i$$

$$F(\alpha \to \beta) = u_{\beta\alpha}, \quad u_{\beta\alpha} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{L}_{d(0,1)}}\big(\bigsqcup_{i \in \alpha} L_i,\ \bigsqcup_{i \in \beta} L_i\big) \text{ cînd } \alpha \subset \beta.$$

Morfismele $u_{\beta\alpha}$ sînt de tipul următor : fie $\alpha = (i, j)$, $\beta = (i, j, k)$:

$$u_{\beta\alpha} : L_i \otimes L_j \to L_i \otimes L_j \otimes L_k$$

$$u_{\beta\alpha}(m_i \otimes m_j) = m_i \otimes m_j \otimes 1.$$

Functorul F admite o limită inductivă filtrantă care este chiar suma directă a obiectelor L_i. Fie L această limită ; morfismele structurale vor fi

$$L_i \xrightarrow{u_i} \bigotimes_{j \in \alpha \supset \{i\}} L_j \xrightarrow{u_\alpha} L$$

$$v_i = u_\alpha \circ u_i$$

compunerea morfismelor structurale ale sumei directe finite cu morfismele structurale ale limitei inductive filtrante.

Să considerăm familia de morfisme $w_i : L_i \to L'$:

$$\begin{tikzcd}
L_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[rrd, "w_i"'] & \bigotimes\limits_{j \in \alpha \supset \{i\}} L_j \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[rd, "\theta_\alpha"] & L \arrow[d, "\theta"] \\
 & & L'
\end{tikzcd}$$

Conform proprietăţii de universalitate a sumei directe pentru fiecare $\alpha \in \mathcal{F}(I)$, există un morfism unic $\theta_\alpha : \bigsqcup_{j \in \alpha} L_j \to L'$ aşa fel ca diagrama să fie comutativă. Din proprietatea de universalitate a limitei inductive rezultă existenţa unui morfism unic $\theta : L \to L'$ aşa încît diagrama de mai sus să fie comutativă.

7. În categoria $\mathcal{L}d\ (0,1)$ există limite inductive oarecari şi sume fibrate oarecari deoarece există conucleu de săgeată dublă şi sume directe oarecari, aceasta conform teoremei aplicată la 3.

Primită la redacţie la 13 ianuarie 1967

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti,
str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. G. Birchoff, *Latice Theory*. Издательство иностранной литературы. Москва, 1952,
2. N. Popescu, *Elemente de teoria fasciculelor*. St. cerc. mat., **18**, *2, 3, 4* (1966).
3. J. Riguet, *Produit tensoriel de lattices*. C.R., **226**, 40–41 (1948).

ASUPRA METODEI LUI A. B. TAYLER

DE

HORIA I. ENE

Problema mişcării unui fluid perfect compresibil, nelimitat, în jurul unui cilindru eliptic este rezolvată cu ajutorul metodei de aproximaţie directă a lui A. B. Tayler [5]. Rezultatul este comparat cu cel obţinut de I. Imai şi T. Aihara [2]. Folosind procedeul din [5], se rezolvă problema pentru cilindrul eliptic şi profilul Jukovski.

Se constată, comparînd rezultatul cu cel din [2], că metoda lui A. B. Tayler asigură o bună aproximaţie, lucru constatat de noi şi referitor la o altă problemă [6] şi că această metodă permite şi o rezolvare mai comodă, ajungîndu-se la rezultate relativ simple.

1. Mişcarea subsonică a unui fluid perfect compresibil în jurul unui cilindru eliptic sau a unui profil Jukovski a fost studiată cu ajutorul metodelor de aproximaţie directe sau hodografice.

Dintre metodele de aproximaţie directe, cea mai recentă este a lui A. B. Tayler [5], metodă pe care noi am expus-o şi am aplicat-o la o mişcare în canale în jurul unui cilindru cvasicircular [6]. Am văzut atunci [6] că din compararea rezultatului obţinut în acea problemă cu rezultatele obţinute [4] cu ajutorul metodelor Ciaplîghin-Demtchenko, Kármán-Tsien şi Caius Iacob [3], rezultă că această metodă asigură o bună aproximaţie a mişcărilor peste obstacole. Vom vedea şi în această lucrare că metoda asigură o bună aproximaţie şi atunci cînd este aplicată la un alt tip de probleme. Deci putem spune că în general metoda lui A.B. Tayler dă rezultate care se pot compara cu rezultatele obţinute anterior cu ajutorul unor metode deja verificate.

Pe de altă parte, vom vedea că metoda lui A. B. Tayler permite o rezolvare, cel puţin în aproximaţia de ordinul întîi, mult mai comodă, ajungîndu-se la rezultate relativ simple.

2. Vom rezolva problema mişcării unui fluid perfect compresibil, nelimitat ,în jurul unui cilindru eliptic, fluidul fiind animat la infinit de o mişcare de translaţie cu viteza V_∞, care face unghiul η_0 cu axa Ox.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 825–829, BUCUREŞTI, 1967

Rezultatele le vom compara cu cele obţinute de către I. Imai şi T. Aihara [2] cu ajutorul metodei lui Imai-Lamla [2] [3].

Se ştie că în metoda lui A. B. Tayler [5], efectuînd transformarea

$$\vec{s} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \frac{\vec{v}}{c_0},$$

şi notînd

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2} = e^{\sigma},$$

unde ρ este densitatea, c_0 viteza sunetului, $\vec{v}$ viteza, $n = 1/2$ o constantă, iar σ un parametru care este funcţie de noua viteză $\vec{s}$, şi cunoscînd potenţialul mişcării incompresibile φ_0, avem $\vec{s}_1 = \text{grad}\ \varphi_1$, cu $\Delta\ \varphi_1 = 0$. Rezultă prima aproximaţie sub forma

$$\varphi_1 = \frac{M_\infty}{V_\infty}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right)^{-[n/(\gamma-1)+1/2]} \varphi_0 .$$

Deci vitezele se vor scrie:

$$s_1^2 = M_\infty^2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{-[2n/(\gamma-1)+1]}\left(\frac{V_0}{V_\infty}\right)^2, \tag{1}$$

$$\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 = \frac{s_1^2\, e^{4n\sigma_1}}{M_\infty^2}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right), \tag{2}$$

unde V_0 este viteza fluidului incompresibil, iar σ_1 este dat ca funcţie de s_1^2 de următoarea dezvoltare rezultată din legea lui Bernoulli:

$$\sigma_1 = \frac{s_1^2}{4} + \frac{s_1^4}{16}(4n + \gamma - 1) - \frac{s_1^6}{48}[30n^2 + 15n(\gamma-1) + 2(\gamma-1)^2] + \ldots \tag{3}$$

În toate aceste relaţii se va lua $n = 1/2$.

Folosind (1) avem din (2), mărginindu-ne la termenii în s_1^4 daţi de (3):

$$\frac{V}{V_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{n/\gamma-1}\left(\frac{V_0}{V_\infty}\right) + \frac{M_\infty^2}{4}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{-[n/(\gamma-1)+1]}\left(\frac{V_0}{V_\infty}\right)^3 + \frac{2\gamma+3}{32} M_\infty^4\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{-[n/(\gamma-1)+2]}\left(\frac{V_0}{V_\infty}\right)^5.$$

Dacă efectuăm toate dezvoltările şi ne mărginim la termenii în M_∞^2 (de fapt facem acest lucru pentru a putea compara rezultatul cu cel al lui I. Imai şi T. Aihara [2]) avem:

$$\frac{V}{V_\infty} = \frac{V_0}{V_\infty} + \frac{M_\infty^2}{4}\left(\frac{V_0}{V_\infty}\right)\left[\left(\frac{V_0}{V_\infty}\right)^2 - 1\right] + M^4(\ldots). \tag{4}$$

Pentru a putea compara rezultatul pe care-l vom obţine cu cel obţinut de I. Imai şi T. Aihara, să luăm pentru raportul $\frac{V_0}{V_\infty}$ exact expresia folosită în [2]:

$$\frac{V_0}{V_\infty} = -\frac{\sqrt{2}\, e^{\xi_0} \sin(\eta - \eta_0)}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta}}, \tag{5}$$

unde $\zeta = \xi + i\eta$ este definit de transformarea $z = c \operatorname{ch} \zeta$, semiaxele elipsei fiind $a = c \cdot \operatorname{ch} \xi_0$ şi $b = c \cdot \operatorname{sh} \xi_0$, $\xi = \xi_0$ reprezentînd conturul elipsei, iar η_0 unghiul pe care-l face viteza la infinit cu axa Ox.

Folosind (5) în (4) avem:

$$\frac{V}{V_\infty} = -\frac{\sqrt{2}\, e^{\xi_0} \sin(\eta - \eta_0)}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta}} -$$

$$- \frac{\sqrt{2}\, M_\infty^2 e^{\xi_0} \sin(\eta - \eta_0)}{4\sqrt{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta}} \left[\frac{2e^{2\xi_0} \sin^2(\eta - \eta_0)}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta} - 1 \right] + M^4(\ldots). \tag{6}$$

Pentru a evita funcţiile hiperbolice vom nota $e^{-\xi_0} = \tau \; (0 < \tau < 1)$.

a) Cazul vitezei paralele cu axa mare a elipsei se obţine dacă în formula (6) facem $\eta_0 = 0$:

$$\frac{V}{V_\infty} = -\frac{2 \sin\eta}{\sqrt{1 - 2\tau^2 \cos 2\eta + \tau^4}} - \frac{M_\infty^2 (1 - \tau^2) \sin\eta}{2\sqrt{1 - 2\tau^2 \cos 2\eta + \tau^4}} \times$$

$$\times \frac{1 + \tau^2 - 2\cos 2\eta}{1 - 2\tau^2 \cos 2\eta + \tau^4}. \tag{7}$$

Deosebirea dintre formula (7) şi cea corespunzătoare din [2] este că numărătorul ultimei fracţii în soluţia din [2] mai conţine în plus $1 - \frac{1}{\tau^2}$.

b) Cazul vitezei paralele cu axa mică a elipsei se obţine făcînd $\eta_0 = \pi/2$ în formula (6):

$$\frac{V}{V_\infty} = -\frac{2 \cos\eta}{\sqrt{1 - 2\tau^2 \cos 2\eta + \tau^4}} + \frac{M_\infty^2 (1 + \tau^2) \cos\eta}{2\sqrt{1 - 2\tau^2 \cos 2\eta + \tau^4}} \times$$

$$\times \frac{1 - \tau^2 + 2\cos 2\eta}{1 - 2\tau^2 \cos 2\eta + \tau^4}. \tag{8}$$

Deosebirea dintre formula (8) şi cea corespunzătoare din [2] este că numărătorul ultimei fracţii în soluţia din [2] conţine în plus termenul $1 + \frac{1}{\tau^2}$.

Vedem deci că metoda lui A. B. Tayler [5] asigură în acest caz o bună aproximaţie, avînd în vedere că rezultatele din [2] coincid bine cu cele din [1].

3. a) Aceeaşi problemă a mişcării în prezenţa unui cilindru eliptic se poate rezolva şi direct cu metoda indicată chiar de A. B Tayler [5].

Transformarea

$$\zeta = z + \frac{q^2}{z},$$

ne duce de la cercul $|z| = a$ din planul (z) la elipsa din planul (ζ) de ecuaţie :

$$\frac{\xi^2}{\left(a + \frac{q^2}{a}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(a - \frac{q^2}{a}\right)^2} = 1.$$

Ştiind că potenţialul complex al mişcării în planul (z) este

$$F(z) = V_\infty\left(z + \frac{a^2}{z}\right),$$

notînd cu

$$h = M_\infty^2\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right)^{-[2n/(\gamma - 1) + 1]}, \tag{9}$$

avem pentru s_1^2 expresia :

$$s_1^2 = \frac{h}{V_\infty^2} \frac{dF}{d\zeta} \frac{d\overline{F}}{d\overline{\zeta}}. \tag{10}$$

Deci în cazul nostru concret vom avea

$$s_1^2 = h\,\frac{(z^2 - a^2)(\overline{z}^2 - a^2)}{(z^2 - q^2)(\overline{z}^2 - q^2)}.$$

Cunoscînd pe s_1^2, expresia (2) ne dă imediat $\frac{V}{V_\infty}$.

b) Transformarea

$$\zeta = z - \beta + \frac{1}{z - \beta},$$

ne conduce la un profil Jukovski disimetric ca imagine a cercului $|z| = r$ unde $r = |1 + \beta|$, β fiind un număr complex.

Menţinînd notaţia (9) şi aplicînd (10) în cazul acestei transformări, vom obţine în final :

$$s_1^2 = h\,\frac{(z^2 - r^2)(\overline{z}^2 - r^2)}{z^2\overline{z}^2} \cdot \frac{(z - \beta)^2(\overline{z} - \beta)^2}{[(z - \beta)^2 - 1][\overline{z} - \beta)^2 - 1]}.$$

Se vede deci că metoda lui A. B. Tayler asigură şi o rezolvare mai comodă a problemelor, cu o aproximaţie destul de bună.

La fel cum s-a rezolvat problema pentru profilul Jukovski sau pentru cilindrul eliptic, problema poate fi abordată şi pentru o clasă mai generală de profile care se obţin printr-o transformare $\zeta = f(z)$ dintr-un cerc $|z| = r$, unde $f(z)$ este o funcţie raţională.

Primită la redacţie la 17 ianuarie 1967 .

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. C. Kaplan, N.A.C.A. Teh. Rep., *624* (1938).
2. I. Imai—T. Aihara, Reports of the Aeronautical Research Institute, Tokyo University, **XV**, *194* (1940).
3. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Bucarest—Paris, 1959.
4. Simona Popp, Com. Acad. R.P.R., **IX**, *3*, 223—229 (1959).
5. A. B. Tayler, Proc. Roy. Soc., **A 225**, 101—113 (1960).
6. Horia I. Ene, St. cerc. matem., **18**, *10*, 1567—1571 (1966).

MIŞCĂRI CIRCULATORII ÎN JURUL UNUI PROFIL DAT. METODA CORECTĂ A LUI CIAPLÎGHIN

DE

IOAN FILIMON

Se aplică în mod corect metoda aproximativă a lui Ciaplîghin la studiul mişcărilor plane, subsonice, ciclice, în jurul unor profile de formă dată. Extinzînd procedee deja utilizate în [3], [4], [5], se stabileşte problema la limită neliniară, pentru care este posibilă demonstrarea existenţei soluţiei. Studiul la două cazuri particulare, profilul simetric şi profilul circular, permite să se dea mai multe detalii în legătură cu problema la limită considerată.

NOTAŢII :

ρ	densitatea locală a gazului.
ρ_0	densitatea gazului în repaus.
ρ_∞	densitatea gazului în punctul de la infinit.
p	presiunea locală a gazului.
p_0	presiunea gazului în repaus.
q	mărimea vitezei locale în mişcarea gazoasă.
$\overline{q}$	mărimea vitezei locale în mişcarea lichidă asociată.
q_∞	mărimea vitezei la infinit în mişcarea gazoasă.
$\overline{q}_\infty$	mărimea vitezei la infinit în mişcarea lichidă asociată.
c	mărimea locală a vitezei sunetului în gaz.
c_0	mărimea vitezei sunetului în gazul în repaus.
M_∞	Numărul Mach la infinit în mişcarea gazoasă

I. GENERALITĂŢI

§1. După cum este bine cunoscut, metoda hodografică a lui S. A Ciaplîghin constă în înlocuirea mişcării unei gaz real în jurul unui profil’ cu mişcarea unui gaz fictiv în jurul aceluiaşi profil pentru care legea adiabatică este înlocuită cu relaţia :

$$\rho = \overline{\rho}_0 (1 + aq^2)^{-1/2}, \tag{1}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 831–844, BUCUREŞTI, 1967

unde $\overline{\rho}_0$ este densitatea gazului fictiv în punctul de viteză nulă iar a o anumită constantă.

Din punct de vedere fizic această aproximare revine la înlocuirea curbei adiabatice din planul *presiune — volum specific* printr-o dreaptă (Busemann — Th. von Kármán). În funcție de alegerea acestei drepte se deduc relații între stările gazului fictiv de aproximare și de asemenea se deduce valoarea constantei a[1]).

În cele ce urmează se va adopta varianta Ciaplîghin — Demtchenko care constă în înlocuirea curbei adiabatice prin tangenta sa în punctul de viteză nulă. În acest caz starea în repaus a gazului fictiv va coincide cu starea în repaus a gazului real.

Starea locală a gazului fictiv ce înlocuiește gazul real va fi caracterizată de relațiile:

$$\rho = \rho_0 (1 + c_0^{-2} q^2)^{-1/2}$$

$$p = p_0 + \rho_0 c_0^2 (1 - \rho_0 \rho^{-1}).$$

Dacă se consideră mișcarea gazului fictiv în jurul profilului (P) din planul $z = x + iy$, se poate stabili o corespondență între această mișcare și o mișcare lichidă de comparare în jurul unui profil (P_0) dintr-un plan auxiliar $\zeta = \xi + i\eta$, cele două mișcări fiind legate prin relația lui C. Iacob [1] — H. S. Tsien [2]:

$$\text{(2)} \qquad dz = (1 - \mu)\, d\zeta + \mu\, \overline{q}_\infty^{-2}\, \overline{f'^2(\zeta)\, d\zeta}.$$

Aici $f(\zeta)$ este potențialul complex al mișcării lichide în jurul lui (P_0), $\overline{q}_\infty$ viteza asimptotică a acestei mișcări, iar μ o constantă ce are valoarea:

$$\text{(3)} \qquad \mu = 2^{-1}(1 - \rho_0 \rho_\infty^{-1}) = -4^{-1} M_\infty^2 + \ldots$$

În ambele mișcări vitezele asimptotice sînt presupuse paralele cu axa reală. În plus, conform alegerii variantei Ciaplîghin-Demtchenko, avem:

$$\text{(4)} \qquad q_\infty = \overline{q}_\infty.$$

De obicei procedeul lui Ciaplîghin se aplică pornind de la mișcarea lichidă în jurul lui (P_0) și construind *a posteriori* mișcarea gazoasă fictivă în jurul profilului (P), a cărui alură apropiată de cea a lui (P_0) se stabilește prin intermediul formulei (2).

Problema inversă aceleia a determinării profilului (P_0) în așa fel încît profilul (P) să aibă alură prestabilită, este mult mai complicată și conduce la rezolvarea unei probleme la limită neliniare. Acest ultim mod de a aborda chestiunea a fost considerat de noi într-o serie de lucrări [3], [4], [5], cu care ocazie am indicat un procedeu de determinare a soluției prin dezvoltarea ei în serie după puterile numărului M_∞^2.

---

[1]) Pentru detalii în legătură cu această problemă a se vedea : C. Iacob, *Introduction mathematique à la mécanique des fluides*. Ed. de l'Ac. de la Rep. Pop. Roumanie et Gauthier — — Villars, Bucarest — Paris, 1959.

§2. O extindere esențială a relației (2) a fost dată de C. C. Lin [6].

Dacă se renunță la unele dintre proprietățile corespondenței deduse din metoda lui Ciaplîghin, C. C. Lin a arătat că între cele două mișcări asociate se poate stabili o relație de corespondență de forma :

$$\mathrm{d}z = (1-\mu)h(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \mu\overline{q}_{\infty}^{-2}\overline{f'^{2}(\zeta)h^{-1}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}. \tag{5}$$

Prin această ultimă corespondență se poate atașa mișcării lichide circulatorii în jurul lui (P) o mișcare a gazului fictiv în jurul lui (P_0), cu aceiași circulație ca și în mișcarea lichidă.

Funcția $h(\zeta)$ care apare în relația (5) este supusă condițiilor :

— este olomorfă și fără zerouri în exteriorul lui (P_0);

— reziduul la infinit este astfel ales încît să avem

$$\oint_{P_0} \{(1-\mu)\,h(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \mu\overline{q}_{\infty}^{-2}\overline{f'^{2}(\zeta)h^{-1}(\zeta)\mathrm{d}\zeta}\} = 0 \tag{6a}$$

și :

$$|h^{-1}(\zeta)f'(\zeta)| < [-\mu^{-1}(1-\mu)]^{1/2}\overline{q}_{\infty}. \tag{6b}$$

Relația (6a) reprezintă condiția de închidere pentru profilul (P) în timp ce inegalitatea (6b) reprezintă o condiție necesară de biunivocitate pentru transformarea punctuală (5) și asigură în același timp validitatea vitezelor pe profilul (P).

Un procedeu de uniformizare datorat lui J. Leray [7] permite o remarcabilă extindere a proprietăților corespondenței lui Ciaplîghin : funcția $h(\zeta)$ fiind dată și considerînd că profilul (P_0) din planul mișcării lichide este chiar cercul $|\zeta| = a$, funcția :

$$Z = \int \{(1-\mu)\,h(\zeta) + \mu\overline{q}_{\infty}^{-2}f'^{2}(\zeta)\,h^{-1}(\zeta)\}\,\mathrm{d}\zeta$$

definește o transformare conformă $Z = Z(\zeta)$ între cercul $|\zeta| = a$ și un anumit profil (C_0) din planul $Z = X + iY$, în jurul căruia se definește în continuare o mișcare lichidă de potențial $f\,[Z(\zeta)]$. Între mișcarea gazoasă în jurul lui (P_0) ales în funcție de $h(\zeta)$ și cea lichidă în jurul lui (C_0), se pot stabili relații care generalizează cunoscutele relații ale lui Ciaplîghin din teoria mișcărilor aciclice.

Prezintă interes și alte lucrări relative la această problemă, printre care menționăm pe cele ale lui Hristianovici — Yuriev [8], A. Gelbart [9], W. Müller — H. Richter [10] etc.

Amintim, în fine, că alte metode de aproximație au fost ulterior adaptate la cazul mișcărilor circulatorii de C. Iacob [11] iar o aplicație a metodei aproximațiilor succesive preconizată de C. Iacob a fost aplicată de noi înșine la cazul profilului cvasicircular [12].

În prezenta lucrare ne propunem să extindem rezultatele obținute de noi în lucrările deja menționate, la studiul mișcării gazoase circulatorii în jurul unui profil a cărui formă este prestabilită.

II. PROBLEMA LA LIMITĂ

§ 1. *Altă formă a relației (5).* Să considerăm mişcarea plană permanentă şi irotaţională cu circulaţie în regim subsonic a unui gaz supus relaţiei densitate-viteză (1) în jurul unui profil (P), din planul $z = x + iy$, profil presupus convex şi avînd curbură variind în mod continuu. Viteza asimptotică q_∞ este presupusă paralelă cu axa reală.

Revenind la relația (5) şi la modalitatea de a studia mişcarea gazoasă în jurul lui (P) cu ajutorul acestei relaţii, este de menţionat faptul că asemenea cazului aciclic, metodele preconizate de autorii citaţi mai sus constau în determinarea *à posteriori* a profilului (P) în funcţie de alegerea convenabilă a funcţiei h (ζ), pornind de la o mişcare circulatorie lichidă în jurul unui profil (P_0) dat dinainte.

Invers, dacă se consideră dat dinainte profilul (P) din planul mişcării gazoase, vom arăta că funcţia $h(\zeta)$ nu mai joacă rol în problema la limită.

Să considerăm :

$$\zeta(Z) = \lambda e^{-i\alpha} Z + \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^{-k} (\lambda \text{ real pozitiv}, \alpha \text{ real}) \tag{7}$$

funcţia prin intermediul căreia se face transformarea conformă a exteriorului domeniului (P_0) pe exteriorul cercului unitate din planul $Z = X + iY$, astfel ca punctele de la infinit în cele două plane să fie omoloage.

Aşa fiind, mişcării lichide din jurul profilului (P_0) îi va corespunde, prin intermediul transformării conforme considerate, o mişcare lichidă în jurul cercului unitate de potenţial complex :

$$F(Z) = \lambda \overline{q}_\infty [Z e^{-i\alpha} + (Z e^{-i\alpha})^{-1}] + (2\pi i)^{-1} \Gamma \log Z. \tag{8}$$

Γ este circulaţia comună pentru cele două mişcări asociate.

Vom scrie relaţia de corespondenţă (5) sub forma :

$$dz = (1 - \mu) H(Z) \zeta'(Z) dZ + \mu \overline{q}_\infty^{-2} \overline{F'^2(Z) H^{-1}(Z) \zeta'^{-1}(Z) dZ}, \tag{9}$$

unde $H(Z)$ este transformata funcţiei $h(\zeta)$ prin intermediul transformării conforme (7).

Avînd în vedere proprietăţile transformării conforme precum şi proprietatea (6a) a funcţiei $h(\zeta)$, sîntem îndreptăţiţi să considerăm funcţia :

$$\Omega(Z) = \Theta + iT = - i \log [\lambda^{-1} H(Z) \zeta'(Z)] \tag{10}$$

olomorfă în domeniul $|Z| > 1$, funcţiile Θ şi T fiind ca atare armonice în acest domeniu.

Dacă se are în vedere că după cîteva transformări elementare $F'(Z)$ ia forma :

$$F'(Z) = 2\lambda \overline{q}_\infty i Z^{-1} \{ [e^{-i\alpha} Z - e^{i\alpha} Z^{-1}] (2i)^{-1} - \varepsilon \}, \tag{11}$$

unde s-a notat :

$$\varepsilon = (4\pi \lambda q_\infty)^{-1} \Gamma, \tag{12}$$

relația de corespondență (9) ia forma definitivă:

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{d}z = \lambda\,\{(1-\mu)\mathrm{e}^{i\Omega(Z)}\mathrm{d}Z + \mu\,\overline{[(Z\mathrm{e}^{-i\alpha} - Z^{-1}\mathrm{e}^{i\alpha})(2i)^{-1} - \varepsilon]}^{2}\mathrm{e}^{i\overline{\Omega(Z)}}\mathrm{d}(\overline{Z}^{-1})\}.$$

§ **2**. *Distribuția vitezelor și a unghiurilor acestora pe profilul* (*P*). Fie θ, θ_0 unghiurile pe care le fac vitezele în mișcarea gazoasă în jurul lui (*P*), respectiv în mișcarea lichidă în jurul lui (P_0), cu direcțiile pozitive ale axelor reale.

Dintre relațiile lui Ciaplîghin adaptate mișcărilor circulatorii punem în evidență două, de mare utilitate în cele ce urmează:

$$\text{(14a)} \qquad \theta = \theta_0 + \arg\{h(\zeta)\},$$

$$\text{(14b)} \qquad q^{-1} = (1-\mu)\,|h(\zeta)|\,\overline{q}^{-1} + \mu\overline{q}_{\infty}^{-2}|h(\zeta)|^{-1}\,\overline{q}.$$

Aceste relații vor fi calculate pe profilul (*P*) și vor primi o formulare în funcție de valorile lui Θ și T pe circumferința $|Z| = 1$. Dacă se pune viteza complexă a mișcării lichide în jurul lui (P_0) sub forma:

$$\text{(15)} \qquad \{f'(\zeta)\}_{P_0} = \overline{q}\mathrm{e}^{-i\theta_0},$$

se deduce imediat:

$$\theta_0 = \mathrm{Im}\,\{\log f'^{-1}(\zeta)\}_{P_0}$$

și în continuare:

$$\text{(16)} \qquad \theta_0 = \mathrm{Im}\,\{\log\,[F'^{-1}(Z)\,\zeta'(Z)]\}_{|Z|=1}.$$

De asemenea să observăm că putem scrie:

$$\text{(17)} \qquad \arg\{h(\zeta)\}_{P_0} = \mathrm{Im}\,\{\log H(Z)\}_{|Z|=1}$$

astfel încît relația (16) se pune succesiv sub forma:

$$\theta = \theta_0 + \arg\{h(\zeta)\} = \mathrm{Im}\,\{\log\,[F'^{-1}(Z)\zeta'(Z)] + \log H(Z)\}_{|Z|=1}$$

$$\theta = \mathrm{Im}\,\{\log\,[H(Z)\zeta'(Z)] - \log F'(Z)\}_{|Z|=1}$$

$$\text{(18)} \qquad \theta = \mathrm{Im}\,\{i\,\Omega(Z) - \log F'(Z)\}_{|Z|=1}.$$

Dacă se notează $Z = \mathrm{e}^{i\sigma}$ valoarea lui Z pe cercul unitate, un calcul imediat conduce la:

$$\text{(19)} \qquad \{F'(Z)\}_{|Z|=1} = 2\lambda\overline{q}_{\infty}\,[\sin(\sigma-\alpha) - \varepsilon]\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}-\sigma\right)}$$

și ca atare se obține forma definitivă a distribuției unghiurilor vitezei pe profilul (*P*)

$$\text{(20)} \qquad \theta = \Theta + \sigma - \pi/2.$$

Pentru determinarea distribuției vitezelor pe (*P*) vom proceda analog.

Avem:

$$\overline{q} = |f'(\zeta)|_{P_0} = \{|F'(Z)\,\zeta'^{-1}(Z)|\}_{|Z|=1}$$

şi în conformitate cu relaţia (19):

$$\overline{q} = 2\lambda \overline{q}_\infty |\sin(\sigma - \alpha) - \varepsilon| |\zeta'^{-1}(Z)|_{|Z|=1}. \tag{21}$$

Revenind la relaţia (14b) şi înlocuind valoarea lui $\overline{q}$ astfel determinată se va obţine în continuare:

$$q = 2\overline{q}_\infty |\sin(\sigma - \alpha) - \varepsilon| |\lambda^{-1} H(Z)\zeta'(Z)|^{-1} \{1 - \mu + \\ + 4\mu [\sin(\sigma - \alpha) - \varepsilon]^2 |\lambda^{-1} H(Z)\zeta'(Z)|^{-2}\}.$$

Pe de altă parte, avem:

$$|\lambda^{-1} H(Z)\zeta'(Z)| = \mathrm{e}^{-T} \tag{22}$$

astfel că formula care dă distribuţia vitezelor pe profilul (P_0) ia forma definitivă:

$$q = 2\overline{q}_\infty |\sin(\sigma - \alpha) - \varepsilon| \Phi^{-1}(T, \lambda, \alpha), \tag{23}$$

unde pentru simplificarea notaţiei s-a pus:

$$\Phi(T, \lambda, \alpha) = (1 - \mu)\mathrm{e}^{-T} + 4\mu [\sin(\sigma - \alpha) - \varepsilon]^2 \mathrm{e}^{T}. \tag{24}$$

§ 3. *Formularea problemei la limită.* Vom începe prin a calcula elementul de arc pe profilul (P), prin mijlocirea relaţiei (13). Deoarece pe circumferinţa $|Z| = 1$ avem:

$$|\mathrm{d}Z| = |\mathrm{d}\overline{Z}^{-1}| = \mathrm{d}\sigma$$

din relaţia sus-amintită se deduce pentru elementul de arc $\mathrm{d}s$ al profilului (P) valoarea:

$$\mathrm{d}s = \lambda \Phi(T, \lambda, \alpha)\, \mathrm{d}\sigma. \tag{25}$$

De asemenea să presupunem că este dată curbura $\mathcal{K}$ a profilului (P) ca funcţie de θ sau, ceea ce este, conform relaţiei (20), acelaşi lucru:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Theta). \tag{26}$$

Cu aceste precizări, din formula (20) a distribuţiei unghiurilor vitezei pe profilul (P) se obţine:

$$\mathrm{d}\theta = \left(1 + \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\sigma}\right) \mathrm{d}\sigma. \tag{27}$$

Pe de altă parte, Θ şi T fiind armonic conjugate avem:

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\sigma} = -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n}, \tag{28}$$

unde $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n}$ este derivata normală a funcţiei T dirijată spre exteriorul circumferinţei $|Z| = 1$.

Folosind acum relaţiile (25), (27), (28) rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \left(1 - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n}\right) \Phi^{-1}(T, \lambda, \alpha)$$

sau:

$$\mathcal{K}(\Theta) = \left(1 - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n}\right) \Phi^{-1}(T, \lambda, \alpha) \tag{29}$$

şi de aici:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} = 1 - \lambda\Phi(T, \lambda, \alpha)\, \mathcal{K}(\Theta) \text{ pe } |Z| = 1. \tag{30}$$

La această condiţie de frontieră pentru funcţiile armonic conjugate Θ şi T se adaugă condiţia de închidere pentru profilul (P), condiţie care acum capătă forma:

$$\int_0^{2\pi} \Phi(T, \lambda, \alpha)\, e^{i(\Theta + \sigma)}\, \mathrm{d}\sigma = 0 \tag{31}$$

şi care este echivalentă cu condiţiile:

$$\int_0^{2\pi} \Phi(T, \lambda, \alpha) \cos(\Theta + \sigma)\, \mathrm{d}\sigma = 0 \tag{32a}$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi(T, \lambda, \alpha) \sin(\Theta + \sigma)\, \mathrm{d}\sigma = 0. \tag{32b}$$

Aşadar, problema la limită capătă următoarea formulare:

Să se determine funcţia $\Omega(Z) = \Theta + i\, T$ olomorfă în exteriorul circumferinţei $|Z| = 1$, constantele reale λ, α (λ pozitiv), în aşa fel încît condiţiile (30), (32a), (32b) să fie îndeplinite.

La aceasta se adaugă condiţia:

$$\Phi(T, \lambda, \alpha) > 0 \tag{33}$$

care pe profilul (P) este echivalentă condiţiei (6b) de validitate a vitezelor şi care pentru îndeplinirea ei atrage o limitare superioară a numărului lui Mach M_∞, în mişcarea considerată.

Vom remarca în continuare faptul că problema la limită este echivalentă cu o ecuaţie funcţională de tipul acelora la care în anumite condiţii de limitare a parametrului μ, se poate demonstra existenţa soluţiei prin aplicarea metodelor de punct fix.

Fără a intra în amănunte, urmînd un raţionament deja făcut pe o problemă analoagă [2]) se poate stabili, în ipoteza că parametrii λ şi α sînt ficşi, echivalenţa între probleme la limită şi o ecuaţie integro-funcţională neliniară, rezultată prin aplicarea formulei lui Dini pentru problema Neumann relativă la domeniul circular.

Vom demonstra în continuare posibilitatea aplicării teoremelor de punct fix la problema enunţată.

---

[2]) C. Iacob, Mathematica, Cluj, **17**, 10 (1941).

Pentru aceasta demonstrăm că mulţimea soluţiilor eventuale ale problemei la limită şi implicit a ecuaţiei integro-funcţionale echivalente, este mărginită.

Funcţia T fiind armonică, îşi atinge maximul pe circumferinţa $|Z| = 1$; fie σ_M abscisa curbilinie a punctului unde acest maxim este atins. În acest punct vom avea, după cum se ştie:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n}(\sigma_M) < 0$$

şi dacă înlocuim funcţia $\Phi(T, \lambda, \alpha)$ cu valoarea sa:

$$(34) \quad 1-\lambda(1-\mu)\,\mathcal{K}(\sigma_M)e^{-T_{\max}}-4\lambda\mu\,[\sin(\sigma_M-\alpha)-\varepsilon]^2\,\mathcal{K}(\sigma_M)\,\mathrm{e}^{T_{\max}} < 0$$

şi cu atît mai mult:

$$(35) \quad 1-\lambda(1-\mu)K\mathrm{e}^{-T_{\max}} < 0,$$

unde prin K s-a notat maximul curburii profilului (P).

De aici rezultă următoarea limitare superioară pentru T:

$$(36) \quad T_{\max} < \log\,[\lambda(1-\mu)K].$$

Fie acum σ_m abscisa curbilinie a punctului de minim pentru T. În acest punct avem:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} > 0$$

şi de aici:

$$(37) \quad 1-\lambda(1-\mu)\,\mathcal{K}(\sigma_m)\,\mathrm{e}^{-T_{\min}}-4\lambda\mu[\sin(\sigma_m-\alpha)-\varepsilon]^2\,\mathcal{K}(\sigma_m)\,\mathrm{e}^{T_{\min}} > 0.$$

Dar pentru $\varepsilon > 0$ avem:

$$(38) \quad [\sin(\sigma-\alpha)-\varepsilon]^2 \leqslant (1+\varepsilon)^2.$$

Notînd de asemenea prin k minimul curburii profilului (P), inegalitatea (37) se ameliorează prin următoarea:

$$(39) \quad 1-\lambda(1-\mu)k\,\mathrm{e}^{-T_{\min}}-4\lambda\mu(1+\varepsilon)^2K\mathrm{e}^{-T_{\min}} > 0$$

ceea ce atrage:

$$(40) \quad T_{\min} > \lg\frac{-1+[1-16\mu(1-\mu)\lambda^2(1+\varepsilon)^2\,k\,K]^{1/2}}{-8\mu\lambda(1+\varepsilon)^2K}.$$

Rezultă definitiv:

$$(41) \quad \lg\frac{-1+[1-16\,\mu(1-\mu)\lambda^2(1+\varepsilon^2)\,k\,K]^{1/2}}{-8\mu\lambda(1+\varepsilon)^2K} < T < \lg[\lambda(1-\mu)K]$$

deci ansamblul eventualelor soluţii ale problemei la limită este mărginit şi evident acestea sînt egal continue datorită condiţiilor de regularitate pe care le verifică nucleul ecuaţiei integro-funcţionale.

În plus pentru $\mu = 0$ se obţine problema analoagă pentru mişcarea incompresibilă în jurul profilului (P_0), problemă ce admite soluţie unică, cu menţiunea că limitele de variaţie a lui T vor fi acum :

$$\lg \lambda k < T < \lg \lambda K. \tag{42}$$

Prin urmare pentru λ şi α ficşi, problema la limită considerată admite cel puţin o soluţie.

Validitatea vitezelor pe profil. Aşa cum s-a menţionat anterior, pentru a obţine soluţii acceptabile din punct de vedere fizic este necesar ca :

$$\Phi(T, \lambda, \alpha) = (1-\mu)e^{-T} + 4\mu\,[\sin(\sigma-\alpha)-\varepsilon]^2 e^T > 0, \tag{43}$$

inegalitate care asigură o distribuţie de viteze a căror mărime este pozitivă pe profilul (P).

Folosind în continuare inegalităţile (36), (38) stabilite în paragraful precedent, se obţine succesiv :

$$(1-\mu)e^{-T_{\max}} + 4\mu\,(1+\varepsilon)^2\, e^{T_{\max}} > 0$$

$$1-\mu + 4\mu\,(1+\varepsilon)^2 e^{2T_{\max}} > 0$$

$$e^{T_{\max}} < 2^{-1}(1+\varepsilon)^{-1}\,[-\mu(1-\mu)]^{1/2}$$

$$\lambda\,(1+\varepsilon) < (2K)^{-1}\,[-\mu\,(1-\mu)]^{-1/2}$$

şi de aici, avînd de asemenea în vedere valoarea lui ε :

$$\lambda < (2K)^{-1}\,[-\mu\,(1-\mu)]^{-1/2} - (4\pi\overline{q}_\infty)^{-1}\Gamma \tag{44}$$

Evident, eventuala soluţie în λ a sistemului (32a), (32b) va trebui să satisfacă în egalitatea precedentă, ceea ce atrage o limitare superioară a lui $-\mu$ şi implicit o limitare superioară a numărului Mach în mişcarea considerată.

Totuşi demonstrarea existenţei şi unicităţii soluţiei pentru problema la limită în ansamblu se loveşte de dificultăţi deosebite. Există cazuri particulare pentru care asemenea dificultăţi pot fi parţial înlăturate. Aceste cazuri vor fi studiate în continuare.

III. CAZURI PARTICULARE REMARCABILE

§1. *Profil admiţînd o axă de simetrie.* Dacă profilul (P) admite o axă de simetrie perpendiculară pe direcţia de unghi α, condiţia de închidere (32a) se verifică de la sine.

În adevăr, în puncte simetrice faţă de această axă, unghiurile vitezelor satisfac egalitatea :

$$\theta(\sigma-\alpha) = -\,\theta\,[\pi - (\sigma-\alpha)] \tag{45}$$

şi în conformitate cu relaţia (20), rezultă de asemenea :

$$\Theta(\sigma-\alpha) = -\,\Theta\,[\pi - (\sigma-\alpha)] \tag{46}$$

iar de aici:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n}(\sigma-\alpha)=\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n}[\pi-(\sigma-\alpha)]. \tag{47}$$

Pe de altă parte în virtutea aceleiași simetrii avem:

$$\mathcal{K}(\sigma-\alpha)=\mathcal{K}[\pi-(\sigma-\alpha)]. \tag{48}$$

și *a fortiori*:

$$\Phi(\sigma-\alpha)=\Phi[\pi-(\sigma-\alpha)] \tag{49}$$

ceea ce fizic se interpretează prin faptul că mărimile vitezelor sînt egale în puncte simetrice.

Să scriem acum condiția (32a) sub forma:

$$\int_0^{2\pi}\cdot\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\,\mathrm{d}\sigma_1+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cdot\,\mathrm{d}\sigma_2+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\cdot\,\mathrm{d}\sigma_3+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cdot\,\mathrm{d}\sigma_4 \tag{50}$$

și să ținem seama de relațiile de simetrie precedente, precum și de faptul că pe circumferința $|Z|=1$, funcțiile $\Theta(\sigma)$ și $T(\sigma)$ sînt periodice de perioadă 2π.

După schimburile de variabilă:

$$\sigma_1=\sigma-\alpha;\ \sigma_2=\pi-(\sigma-\alpha);\ \sigma_3=\sigma-\alpha;\ \sigma_4=2\pi+\pi-(\sigma-\alpha)$$

relația precedentă capătă forma:

$$\int_0^{2\pi}\cdot\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}*\,\mathrm{d}\sigma+\int_{\alpha+\frac{\pi}{2}}^{\alpha}*\,\mathrm{d}\sigma+\int_{\alpha+\pi}^{\alpha+\frac{3\pi}{2}}*\,\mathrm{d}\sigma+\int_{\alpha+\frac{3\pi}{2}}^{\alpha+\pi}*\,\mathrm{d}\sigma=0.$$

În ceea ce privește relația (32b), aceasta devine, după cîteva calcule,

$$\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\right\}\Phi(T,\lambda,\alpha)\sin(\Theta+\sigma)\,\mathrm{d}\sigma=0. \tag{51}$$

În această situație, alegerea parametrului λ rămîne arbitrară, iar alegerea lui α se va face cu verificarea relației (51).

În continuare vom alege pe λ în așa fel încît vitezele asimptotice ale celor două mișcări asociate să fie egale:

$$q_\infty=\overline{q}_\infty.$$

Pentru aceasta vom stabili în prealabil relația care leagă mărimile vitezelor asimptotice în cele două mișcări asociate.

Vom relua relația (14b):

$$q^{-1}=(1-\mu)\,|h(\zeta)|\,\overline{q}^{-1}+\mu\,\overline{q}_\infty^{-2}\,|h(\zeta)|^{-1}\,\overline{q},$$

unde prin trecerea la planul (Z) avem :

$$\overline{q} = |F'(Z)\,\zeta'^{-1}(Z)|\,. \tag{52}$$

Relaţia precedentă se transformă în :

$$q^{-1} = (1-\mu)\,|F'(Z)|^{-1}|\,H(Z)\,\zeta'(Z)| + \mu\overline{q}_\infty^{-2}|\,F'(Z)|\;|H(Z)\,\zeta'(Z)|^{-1} \tag{53}$$

şi deoarece avem de asemenea :

$$|\,F'(Z)|_\infty = \lambda\overline{q}_\infty$$
$$|\,H(Z)\,\zeta'(Z)|_\infty = \lambda e^{-T(\infty)},$$

după efectuarea înlocuirillor se obţine relaţia căutată :

$$q_\infty^{-1} = [(1-\mu)e^{-T(\infty)} + \mu e^{T(\infty)}]\,\overline{q}_\infty^{-1}. \tag{54}$$

Se vede imediat că egalitatea vitezelor asimptotice ale celor două mişcări antrenează egalitatea :

$$(1-\mu)e^{-T(\infty)} + \mu e^{T(\infty)} = 1 \tag{55}$$

care este satisfăcută o dată cu verificarea relaţiei :

$$T(\infty) = 0. \tag{56}$$

Rezultă în definitiv că determinarea parametrului λ se va face prin verificarea relaţiei precedente.

Însă se poate arăta că avem :

$$T(\infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T\,\mathrm{d}\sigma \tag{57}$$

şi prin urmare parametrul λ va fi determinat de ecuaţia :

$$\int_0^{2\pi} T\,\mathrm{d}\sigma = 0. \tag{58}$$

Revenind acum la limitările (36), (40), se observă că dacă :

$$\lambda\,(1-\mu)\,K < 1$$

deci dacă :

$$\lambda < [(1-\mu)K]^{-1}, \tag{59}$$

atunci $T_{\max} < 0$ şi în consecinţă avem :

$$\int_0^{2\pi} T\,\mathrm{d}\sigma < 0. \tag{60}$$

De asemenea, dacă :

$$\frac{-1 + [1 - 16\,\mu(1-\mu)\lambda^2(1+\varepsilon)^2 kK]^{1/2}}{-8\mu\lambda(1+\varepsilon)^2 K} > 1 \tag{61}$$

inegalitate care după înlocuirea lui ε cu valoarea sa dată de relația (12), antrenează pentru λ inegalitatea:

$$\lambda < \frac{\pi\overline{q}_\infty - 2\mu\Gamma + \{(\pi\overline{q}_\infty - 2\mu\Gamma)^2 - \mu\Gamma^2[(1-\mu)k + 4\mu K)]\}^{1/2}}{2\pi\overline{q}_\infty[(1-\mu)k + 4\mu K]}, \tag{62}$$

atunci $T_{\min} > 0$ și de asemenea:

$$\int_0^{2\pi} T\,\mathrm{d}\sigma > 0. \tag{63}$$

În consecință dacă λ rămîne cuprins în intervalul:

$$[(1-\mu)K]^{-1} < \lambda < \frac{\pi\overline{q}_\infty - 2\mu\Gamma + \{(\pi\overline{q}_\infty - 2\mu\Gamma)^2 - \mu\Gamma^2[(1-\mu)k + 4\mu K]\}^{1/2}}{2\pi\overline{q}_\infty[(1-\mu)k + 4\mu K]} \tag{64}$$

atunci $\int_0^{2\pi} T\,\mathrm{d}\sigma$ variază în mod continuu de la valori negative la valori pozitive, deci ecuația în raport cu λ:

$$\int_0^{2\pi} T\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

admite cel puțin o rădăcină în intervalul considerat.

§2. *Obstacolul circular*. Problema la limită capătă o formulare mult mai simplă în ipoteza că profilul (P) este circumferința cu raza egală cu unitatea.

În acest caz particular condițiile de închidere se verifică de la sine și în plus este ușor de demonstrat unicitatea soluției problemei la limită pentru λ și α ficși.

În adevăr, dacă:

$$\mathcal{K}(\Theta) = 1, \tag{65}$$

atunci din condiție la limită și din relația (28) se obține:

$$\Phi(T, \lambda, \alpha) = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} - 1\right] = -\frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}(\Theta + \sigma) \tag{66}$$

în așa fel încît condițiile de închidere (32a), (32b) devin acum:

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi} \cos(\Theta + \sigma)\ \mathrm{d}(\Theta + \sigma) = 0 \tag{67a}$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi} \sin(\Theta + \sigma)\mathrm{d}(\Theta + \sigma) = 0 \tag{67b}$$

relații evident verificate avînd în vedere periodicitatea pe circumferința $|Z| = 1$ a funcției armonice Θ.

Pentru demonstrarea unicităţii soluţiei vom presupune existenţa a două soluţii T_1, T_2 $(T_2 - T_1 = \tau \neq 0)$ pentru problema la limită:

$$(68a)\qquad \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}n} = 1 - \lambda\{(1-\mu)e^{-T_1} + 4\mu[\sin(\sigma-\alpha) - \varepsilon]^2 e^{T_1}\} \text{ pe } |Z| = 1$$

$$(68b)\qquad \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}n} = 1 - \lambda\{(1-\mu)e^{-T_2} + 4\mu[\sin(\sigma-\alpha) - \varepsilon]^2 e^{T_2}\} \text{ pe } |z| = 1$$

şi de aici se obţine prin scădere şi apoi prin aplicarea formulei de medie:

$$(69)\qquad \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}n} = \lambda\{(1-\mu)e^{-\tau_1} - 4\mu[\sin(\sigma-\alpha) - \varepsilon]^2 e^{\tau_2}\}\tau \text{ pe } |Z| = 1.$$

În continuare se aplică inegalitatea lui Green:

$$\int_0^{2\pi} \tau \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma = \lambda \int_0^{2\pi} \{(1-\mu)e^{-\tau_1} - 4\mu[\sin(\sigma-\alpha) - \varepsilon]^2 e^{\tau_2}\}\tau^2\,\mathrm{d}\sigma \leqslant 0 \text{ pe } |Z| = 1$$

care antrenează în mod necesar $\tau = 0$ deoarece:

$$\{(1-\mu)e^{-\tau_1} - 4\mu[\sin(\sigma-\alpha) - \varepsilon]^2 e^{\tau_2}\}\tau^2 \geqslant 0.$$

Teorema de existenţă şi de unicitate pentru problema la limită fiind demonstrată, constantele λ, α se vor alege convenabil.

În acest caz este indicat să se ia $\alpha = 0$ pentru a asigura aceeaşi direcţie a vitezei asimptotice în mişcarea din planul (z) ca şi a vitezei asimptotice din planul (z).

De asemenea λ se va alege în aşa fel încît $q_\infty = \overline{q}_\infty$ deci prin condiţia:

$$T(\infty) = 0.$$

Se poate demonstra în plus că soluţia în λ a ecuaţiei precedente există şi este unică, dacă λ aparţine unui interval a cărui determinare este posibilă. În plus trebuie să se ţină cont de intervalul în care este cuprins λ în aşa fel încît să se asigure existenţa soluţiei pentru ecuaţia $T(\infty) = 0$. De asemenea trebuie să fie asigurată validitatea vitezelor pe circumferinţă. Aceasta atrage în mod evident o limitare a parametrilor ce intervin în problemă.

Detaliile relative la această problemă vor constitui obiectul unei lucrări viitoare.

Primită la redacţie la 15 ianuarie 1967

Institutul de construcţii
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. C. Jacob, Portugaliae Mathematica Lisabonne, **1**, 246 (1939).
2. H. S. Tsien, Journal of the Aeronautical Sciences, **7**, 399 (1939).
3. I. Filimon, Comptes rendus. Ac. Sci. Paris, **244**, 2133 (1957).
4. — Studii şi cercetări matematice, **8**, 467 (1957).
5. — Bull. Scient. de la Soc. de Math. Phys. R.P.R., **1** (**49**), 269 (1957).
6. C. C. Lin, Quarterly of Applied Math, **4**, 291 (1946).
7. J. Leray, Journal de Math. pures et appliquees 9-e série **28** 181 (1949).
8. S. A. Hristianovici — J. M. Jouriev, Pricladnaia Mat. i Mehanica **11**, 105 (1947).
9. A. Gelbart, Tehnical Notes NACA, **1170** (1947).
10. W. Müller, H. Richter, Zeitschrift für angew. Math. und. Mech., **35**, 1 (1955).
11. C. Iacob, Com. Acad. R.P.R., **1**, 741 (1951).
12. I.Filimon, Revista Universităţii „C. I. Parhon'', **2**, 38 (1953).

ASUPRA UNOR SPAȚII FĂRĂ TORSIUNE

DE

S. IANUȘ

Lucrarea se referă la spațiile fără torsiune introduse de G. Vrănceanu în 1930 [10]. Se precizează unele rezultate cunoscute din teoria spațiilor relativiste fără torsiune și se dau cîteva generalizări.

§**1**. *Introducere.* În 1923, Ricci [7] a găsit condițiile necesare și suficiente ca un spațiu al lui Riemann V_n cu metrică pozitiv definită să fie scufundat într-un spațiu euclidian $E_N (N \geqslant n)$ ca o generalizare a ecuațiilor de rigiditate ale unei suprafețe date de Gauss și Codazzi. Numărul $N-n$ se numește clasa spațiului. În 1930, G. Vrănceanu a regăsit ecuațiile de scufundare [1], [10], [11] pe o cale directă, precizînd semnificațiile lor geometrice.

Fie un spațiu Riemann V_n cu metrică pozitiv definită scufundat într-un spațiu euclidian E_N și $(x^1, \ldots, x^n)$ un sistem de coordonate locale pe V_n. Considerînd $N-n$ variabile noi $x^\alpha \, (\alpha = n+1, \ldots, N)$ și y^a_α cosinușii directori a $N-n$ direcții ortogonale de-a lungul lui V_n, G. Vrănceanu a arătat [10] că metrica lui E_N se poate scrie sub forma :

$$1.1. \qquad \mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}s^2 - 2x^\alpha \varphi_\alpha + 2x^\alpha \mathrm{d}x^\beta \tau_{\alpha\beta} + x^\alpha x^\beta \varphi_{\alpha\beta} + \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\alpha,$$

unde $\mathrm{d}s^2$ este metrica lui V_n, φ_α sînt $N-n$ *forme fundamentale de categoria a II-a*, $\tau_{\alpha\beta}$ au fost denumite *torsiunile* lui V_n, iar $\varphi_{\alpha\beta}$ sînt forme pătratice în $\mathrm{d}x^i$ care se pot exprima algebric cu ajutorul formelor φ_α, $\tau_{\alpha\beta}$ și a tensorului fundamental.

Denumirea de ,,torsiuni'' dată formelor $\tau_{\alpha\beta}$ liniare în $\mathrm{d}x^i$, a fost justificată [10] de faptul că în cazul unui spațiu Riemann de dimensiune V_1 se obține :

$$\tau_{32} = -\tau_{23} = \frac{1}{T}\mathrm{d}s,$$

unde T este torsiunea curbei V_1.

Plecînd de la formula (1.1) se obțin ecuațiile de scufundare ale unui spațiu Riemann V_n scufundat într-un spațiu euclidian $E_N (N \geqslant n)$.

§ 2. *Teorema de scufundare. Spaţii fără torsiune.* L. Eisenhart a extins [1] ecuaţiile de scufundare la un spaţiu Riemann V_n cu metrică nedefinită. Să considerăm un spaţiu Riemann V_n cu metrică nedefinită

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \qquad i, j = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

şi să notăm cu R_{ijkl} componentele covariante ale tensorului de curbură.

TEOREMA 2.1. *Un spaţiu Riemann V_n cu metrică nedefinită poate fi scufundat într-un spaţiu pseudoeuclidian $E_N(N \geqslant n)$, dacă şi numai dacă există funcţiile simetrice $b_{\alpha ij}$ $(\alpha = n+1, \ldots, N)$, şi funcţiile strîmb simetrice $a_{\alpha\beta i} = -a_{\beta\alpha i}$ care să verifice următoarele ecuaţii ale lui Gauss, Codazzi şi Ricci-Kühne:*

$$e_\alpha(b_{\alpha ik}\, b_{\alpha jl} - b_{\alpha il}\, b_{\alpha jk}) = R_{ijkl} \tag{2.2}$$

$$b_{\alpha ij,k} - b_{\alpha ik,j} = e_\beta(b_{\beta ij}\, a_{\beta\alpha k} - b_{\beta ik}\, a_{\beta\alpha j}) \tag{2.3}$$

$$a_{\alpha\beta j,k} - a_{\alpha\beta k,j} = g^{il}(b_{\alpha ik}\, b_{\beta jl} - b_{\alpha ij}\, b_{\beta kl}), \tag{2.4}$$

unde $e_\alpha = \pm 1$, $i, j, k, l = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta = n+1, \ldots, N$ şi virgula înseamnă derivata covariantă în raport cu conexiunea lui Levi Civita ataşată metricii.

În cazul că V_n este cu metrică pozitiv definită, ecuaţiile de scufundare se obţin din (2.2), (2.3) şi (2.4) punînd $e_\alpha = +1$ [10], [11].

Spaţiile care au proprietatea că torsiunile sînt nule $(a_{\alpha\beta i} = -a_{\beta\alpha i} = 0)$ se numesc *spaţii fără torsiune* [10].

În legătură cu aceste spaţii, G. Vrănceanu a demonstrat [10], [11] următoarea teoremă:

Teorema 2.2. *Un spaţiu Riemann V_n cu metrică pozitiv definită este fără torsiune dacă şi numai dacă sînt satisfăcute ecuaţiile*

$$g^{rs}(b_{\alpha rl}\, b_{\beta sk} - b_{\alpha rk}\, b_{\beta sl}) = 0 \qquad l, k = 1, \ldots, n \tag{2.5}$$

unde g^{rs} sînt minorii algebrici normalizaţi ai determinantului $|a_{ij}|$ ataşat metricii, iar $b_{\alpha ij}$ sînt componentele tensorilor corespunzători formelor fundamentale de categoria a II-a.

Se arată uşor [6] că aceste ecuaţii sînt valabile şi în cazul metricii nedefinite.

După cum se vede din ecuaţiile (2.5), cercetarea spaţiilor fără torsiune este strîns legată de tensorul fundamental de categoria II-a $b_{\alpha ij}$ şi, mai precis, de ecuaţiile lui Gauss (2.2) şi Codazzi (2.3). În legătură cu această chestiune, vom demonstra următorul rezultat:

TEOREMA 2.3. *Spaţiile Riemann de clasă 2 care au proprietatea că tensorul de curbură are toate componentele cu cel puţin trei indici distincţi nule, iar cele cu doi indici diferiţi, verifică condiţia:*

$$R_{ij\,ij}\, R_{kl}\, R_{kl} - R_{ik\,ik}\, R_{jl\,jl} \neq 0 \tag{2.6}$$

sînt spaţii fără torsiune.

Demonstraţie. Teorema, sub o altă formă, a fost demonstrată [3] pentru unele spaţii relativiste $(n = 4)$ şi se poate extinde imediat pentru o dimensiune oarecare (atît pentru metrici pozitiv definite, cît şi pentru cele nedefinite).

Într-adevăr, să considerăm un grup de patru indici diferiţi din mulţimea indicilor $(1,2,\ldots, n)$ pe care să-i notăm cu (a_1, a_2, a_3, a_4). Indicii latini vor lua una din aceste valori. Pentru uşurinţa calculelor vom face notaţia

$$b_{\alpha ijpq} = b_{\alpha ip}\, b_{\alpha jq} - b_{\alpha iq}\, b_{\alpha jp} \tag{2.7}$$

şi astfel ecuaţiile lui Gauss se scriu

$$e_{n+1}\, b_{(n+1)ijpq} + e_{n+2}\, b_{(n+2)ijpq} = R_{ijpq} \qquad i \neq j \ \text{ şi } \ p \neq q, \tag{2.8}$$

unde $e_{n+1} = \pm 1$, $e_{n+2} = \pm 1$.

În cazul $i = j$ sau $p = q$, ecuaţiile sînt identic satisfăcute.

Înmulţim (2.8) cu $(-1)^{p+q} b_{(n+1)ik\overline{pq}}$, unde $\overline{pq}$ înseamnă complementara mulţimii pq în sensul că dacă $\overline{pq} = rs$, atunci $(pqrs)$ este o permutare a mulţimii de indici (a_1, a_2, a_3, a_4) şi $(p-q)(r-s) > 0$. Vom avea:

$$\begin{aligned} e_{n+1} \sum_{p<q} (-1)^{p+q}\, b_{(n+1)ijpq}\, b_{(n+1)jk\overline{pq}} + e_{n+2} \sum_{p<q} (-1)^{p+q}\, b_{(n+2)ijpq}\, b_{(n+1)ik\overline{pq}} = \\ = \sum_{p<q} (-1)^{p+q}\, R_{ijpq}\, b_{(n+1)ik\overline{pq}} \qquad i \neq j,\ p \neq q. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Se constată uşor că primul termen se anulează făcînd sumarea, iar membrul doi este diferit de zero numai dacă $p = i$ şi $q = j$, conform ipotezei. Prin urmare obţinem:

$$e_{n+2} \sum_{p<q} (-1)^{p+q}\, b_{(n+2)ijpq}\, b_{(n+1)ik\overline{pq}} = (-1)^{i+j}\, R_{ijij}\, b_{(n+1)ik\overline{ij}} \qquad i \neq j \quad p \neq q, \quad k \neq i. \tag{2.10}$$

În mod similar avem

$$e_{n+1} \sum_{p<q} (-1)^{p+q}\, b_{(n+1)ikpq}\, b_{(n+2)ij\overline{pq}} = (-1)^{i+k}\, R_{ikik}\, b_{(n+2)ij\overline{ik}} \qquad i \neq j,\ k \neq i \ p \neq q \tag{2.11}$$

Înmulţind relaţiile (2.10) şi (2.11) respectiv cu e_{n+1} şi e_{n+2} şi comparîndu-le rezultă:

$$(-1)^{j}\, e_{n+1}\, R_{ijij}\, b_{(n+1)ik\overline{ij}} = (-1)^{k}\, e_{n+2}\, R_{ikik}\, b_{(n+2)ij\overline{ik}}, \qquad i \neq j,\ i \neq k \tag{2.12}$$

considerînd indicii i, j, k, l diferiţi între ei, rezultă următoarea relaţie:

$$(-1)^{j}\, e_{n+1}\, R_{ijij}\, b_{(n+1)ikkl} = (-1)^{k}\, e_{n+2}\, R_{ikik}\, b_{(n+2)ijjl}\,. \tag{2.13}$$

Analog avem relaţia

$$(-1)^{j}\, e_{n+1}\, R_{jljl}\, b_{(n+1)lkki} = (-1)^{k}\, e_{n+2}\, R_{klkl}\, b_{(n+2)ljji} \tag{2.14}$$

care este echivalentă cu relaţia:

$$(-1)^{j}\, e_{n+1}\, R_{jljl}\, b_{(n+1)ikkl} = (-1)^{k}\, e_{n+2}\, R_{klkl}\, b_{(n+2)ijjl}\,. \tag{2.15}$$

Înmulţind relaţia (2.13) cu R_{ekek} şi (2.15) cu R_{ikik} prin scădere obţinem:

$$(R_{ijij}\, R_{klkl} - R_{jljl}\, R_{ikik})\, b_{(n+1)ikkl} = 0. \tag{2.16}$$

Ţinînd cont de ipoteză rezultă:

$$b_{(n+1)ikkl} = 0. \tag{2.17}$$

Dacă schimbăm i cu k rezultă:

$$b_{(n+1)kiil} = 0. \tag{2.18}$$

Relaţiile (2.17) şi (2.18) scrise dezvoltat ne dau sistemul:

$$\begin{aligned} b_{(n+1)ik}\, b_{(n+1)kl} - b_{(n+1)il}\, b_{(n+1)kk} &= 0 \\ b_{(n+1)ii}\, b_{(n+1)kl} - b_{(n+1)il}\, b_{(n+1)ik} &= 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Să arătăm că acest sistem are soluţii banale, considerînd ca necunoscute $b_{(n+1)kl}$ şi $b_{(n+1)il}$.

Pentru aceasta mai putem considera un sistem analog înlocuind $(n+1)$ cu $(n+2)$. Putem forma cu coeficienţii sistemului expresia:

$$e_{n+1}\, b_{(n+1)ikik} + e_{n+2}\, b_{(n+2)ikik} = R_{ikik} \neq 0. \tag{2.20}$$

Rezultă că cel puţin una din cantităţile $b_{(n+1)ikik}$ şi $b_{(n+2)ikik}$ este nenulă. Dacă ambele sînt nenule, atunci avem în mod evident soluţiile banale:

$$b_{(n+1)il} = b_{(n+1)kl} = b_{(n+2)il} = b_{(n+2)kl} = 0, \qquad i \neq k \neq l. \tag{2.21}$$

Să presupunem că $b_{(n+1)ik} = 0$ şi $b_{(n+2)ik} \neq 0$.

Atunci facem o transformare de normale

$$\begin{aligned} \overline{Y}^a_{n+1} &= \cos\alpha\, Y^a_{n+1} + \sin\alpha\, Y^a_{n+2} \\ Y^a_{n+2} &= -\sin\alpha\, Y^a_{n+1} + \cos\alpha\, Y^a_{n+2} \end{aligned}$$

şi astfel $b_{\alpha ij}$ suferă transformarea:

$$\begin{aligned} \overline{b}_{(n+1)ij} &= \cos\alpha\, b_{(n+1)ij} + \sin\alpha\, b_{(n+2)ij} \\ \overline{b}_{(n+2)ij} &= -\sin\alpha\, b_{(n+1)ij} + \cos\alpha\, b_{(n+2)ij} \end{aligned}$$

de unde rezultă că $\overline{b}_{(n+1)ij}$ şi $\overline{b}_{(n+2)ij}$ sînt nenule pentru $\alpha \neq 0$, deci că avem

$$\overline{b}_{(n+1)il} = \overline{b}_{(n+1)kl} = \overline{b}_{(n+2)il} = \overline{b}_{(n+2)kl} = 0 \qquad i \neq k \neq l \tag{2.22}$$

Datorită continuităţii funcţiilor $b_{\alpha ij}$, relaţiile (2.22) se menţin şi pentru $\alpha = 0$. Consideraţiile sînt valabile pentru toate valorile indicilor a_1, a_2, a_3, a_4. Prin urmare tensorul are forma diagonală

$$b_{\alpha ij} = 0, \qquad i \neq j \qquad \begin{array}{l} \alpha = n+1, \ldots, N \\ i, j = 1, \ldots, n. \end{array} \tag{2.23}$$

Relaţiile (2.5) sînt satisfăcute identic pentru $b_{\alpha ij}$ de forma (2.23) şi astfel am demonstrat teorema.

§ 3. *Spaţii relativiste.* Vom considera acum o clasă de spaţii relativiste cu simetrie sferică care prezintă o importanţă deosebită. Se ştie că un spaţiu-timp cu simetrie sferică are metrica de forma [2]

$$-\,\mathrm{d}s^2 \equiv A\,\mathrm{d}r^2 + B(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) - C\,\mathrm{d}t^2 \tag{3.1}$$

în care r, θ, φ, t sînt coordonatele sferice polare și timpul iar A și C sînt funcții de r și t cu valori pozitive.

Un astfel de spațiu-timp se notează cu S_I sau S_{II} după cum B este egal cu r^2 sau este o constantă [9]. O clasă importantă de spații relativiste cu simetrie sferică sînt spațiile S_I în care A și C sînt funcții numai de r și verifică relația :

$$AC = 1. \tag{3.2}$$

Punînd $C(r) = f(r) = f$ și $A(r) = (f(r))^{-1} = f^{-1}$ aceste spații au metrica de forma :

$$-\mathrm{d}s^2 = f^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) - f\mathrm{d}t^2. \tag{3.3}$$

Simbolii lui Cristoffel de a doua speță, pentru această metrică, au valorile :

$$\begin{gathered}
\left|\begin{matrix}1\\11\end{matrix}\right| = -\frac{1}{2}f^{-1}f', \left|\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right| = -rf, \left|\begin{matrix}1\\33\end{matrix}\right| = -rf\sin\theta\\
\left|\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}2\\21\end{matrix}\right| = r^{-1}, \left|\begin{matrix}3\\13\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}3\\31\end{matrix}\right| = r^{-1}, \left|\begin{matrix}1\\33\end{matrix}\right| = -rf\sin^2\theta\\
\left|\begin{matrix}2\\33\end{matrix}\right| = -\sin\theta\cos\theta, \left|\begin{matrix}3\\23\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}3\\32\end{matrix}\right| = \operatorname{ctg}\theta, \left|\begin{matrix}4\\14\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}1\\41\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}f^{-1}f',
\end{gathered} \tag{3.4}$$

unde $f' = \mathrm{d}f/\mathrm{d}r$ iar ceilalți sînt toți nuli.

Tensorul de curbură [11] are toate componentele cu cel puțin trei indici diferiți nule, iar cele cu doi indici diferiți sînt date de formulele :

$$\begin{gathered}
R_{1212} = \frac{1}{2}rf^{-1}f', \quad R_{1313} = R_{1212}\sin^2\theta\\
R_{2424} = -\frac{1}{2}ff'r, \quad R_{3434} = R_{2424}\sin^2\theta\\
R_{1414} = -\frac{1}{2}f'', \qquad R_{2323} = r^2(1-f)\sin^2\theta.
\end{gathered} \tag{3.5}$$

După o teoremă a lui Eisland [2], aceste spații pot fi cel mult de clasă doi. Dacă funcția $f(r)$ satisface ecuația diferențială

$$-\frac{2f''}{f'^2} + \frac{1}{f(1+f')} + \frac{1}{f} = 0 \tag{3.6}$$

spațiile cu metrica (3.3) sînt de clasă unu, ceea ce se verifică ușor aplicînd o teoremă dată de Takeno [9].

Un exemplu important de spațiu cu simetrie sferică de clasă unu este spațiul lui De Sitter [5] a cărui metrică este de forma (3.3), unde

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \quad (R \text{ este o constantă}). \tag{3.7}$$

Se verifică imediat că în acest caz particular ecuaţia (3.6) este satisfăcută.

Spaţiile care au metrica (3.3) cu $f(r)$ ce nu verifică (3.6) sînt de clasă doi.

Prin urmare spaţiile relativiste definite de metrica (3.3) sînt de clasă unu sau doi, după cum funcţia $f(r)$ verifică sau nu ecuaţia diferenţială (3.6).

Ca exemple de spaţii cu metrica de forma (3.3) care nu verifică ecuaţia (3.6) şi deci sînt de clasă doi avem spaţiile lui Schwarzschild şi Reissner-Weyl ce corespund cazurilor cînd f (r) ia respectiv valorile :

$$f_1(r) = 1 - \frac{2m}{r} \quad \text{şi} \quad f_2(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2} \tag{3.8}$$

determinate de sarcina e_0 şi masa m_0 iar $e = e_0 \sqrt{k/2c}$ şi $m = m_0 k$ reprezentînd sarcina electrică totală şi masa gravifică totală metrizate (k constanta gravifică einsteiniană, c viteza luminii în cîmp).

Scufundările acestor spaţii au fost studiate amănunţit şi în cazul scufundării staţionare ($b_{\alpha ij}$ independent de timp) s-au obţinut soluţii explicite [3], [4].

Urmînd procedeul din teorema 3.2, se demonstrează că componentele tensorului $b_{\alpha ij}$ cu doi indici distincţi sînt nule, afară de componenta $b_{\alpha 14}$ care poate fi nenulă.

O proprietate remarcabilă a acestor spaţii, care a jucat un rol important în determinarea formulelor de scufundare, este că ele sînt fără torsiune [3], [5]. Această proprietate se menţine şi în cazul spaţiilor relativiste cu metrica generală (3.3). Demonstraţia este analogă cazurilor lui Schwarzschild şi Reissner-Weyl. Cele cu metrica de clasă 1 sînt evident fără torsiune, deoarece funcţiile $a_{\alpha\beta i}$ sînt strîmb simetrice în α şi β. Prin urmare putem enunţa următoarea teoremă :

Teorema 3.1. *Spaţiile relativiste cu simetrie sferică care au metrica de forma* (*3.3*) *sînt fără torsiune.*

Pe baza acestei teoreme rezultă ca o consecinţă a ecuaţiilor lui Gauss şi Codazzi (pentru $n = 4$) că scufundarea este staţionară dacă şi numai dacă $b_{\alpha 41} = 0$ şi funcţia $f(r)$ nu este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$(f')^2 = 2(1-f)f''. \tag{3.9}$$

Notînd $b^k_{\alpha i} = g^{kj} b_{\alpha ij}$, ecuaţiile netriviale ale lui Gauss şi Codazzi în cazul scufundării staţionare se scriu sub forma :

$$\text{3.10} \qquad \begin{cases} 2e_\alpha\, b^1_{\alpha 1}\, b^4_{\alpha 4} = f'' \\ 2e_\alpha\, b^1_{\alpha 1}\, b^2_{\alpha 2} = f'\, r^{-1} \\ 2e_\alpha\, b^2_{\alpha 2}\, b^4_{\alpha 4} = f'\, r^{-1} \\ e_\alpha\, b^2_{\alpha 2}\, b^2_{\alpha 2} = (1-f) r^{-2} \\ b^2_{\alpha 2} = b^3_{\alpha 3} \end{cases}$$

$$\text{3.11} \qquad \begin{cases} \partial_1\, b^4_{\alpha 4} = \dfrac{1}{2} f^{-1} f' (b^1_{\alpha 1} - b^4_{\alpha 4}) \\ \partial_1 b^2_{\alpha 2} = r^{-1} (b^1_{\alpha 1} - b^2_{\alpha 2}) \\ \partial_2\, b^i_{\alpha k} = \partial_3\, b^i_{\alpha k} = 0 \quad \text{oricare ar fi } i \text{ şi } k. \end{cases}$$

TEOREMA 3.2. *Componentele tensorului al doilea fundamental* $b_{\alpha ij}$ ($\alpha = 5,6$; $ij = 1, \ldots, 4$) *în cazul scufundării staționare* ($b_{\alpha ij}$ *nu depinde de timp*), *sînt soluțiile ecuațiilor* (3.10) *și* (3.11).

Primită la redacţie la 3 ianuarie 1967

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti,
str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. L. P. EISENHART, *Rieman geometry.* Princeton, 1949.
2. J. EISLAND, *The groups of motions of an Einstein space.* Trans. Amer. Math. Soc., **27**, 213–245 (1925).
3. T. FUJITANI, M. IKEDA, M. MATSUMATO, *Ob the imbedding of the Schwarzschild space-time.* Jour of Math. Kyoto University, 43–61 (1961).
4. S. IANUŞ, *Scufundarea metricii Reissner Weyl.* Com. Acad. R.P.R.. Tom, VIII, 10 (1963), p. 857–862.
5. S. IANUŞ, *Asupra spaţiului De Sitler.* St. cerc. mat. **17**, *7*, 1161–1168 (1965).
6. S. IANUŞ, N. NEDIŢĂ, L. NICOLESCU, *Asupra scufundării spaţiilor Einstein.*
7. RICCI, *Sulla classificajione della forme aifferenziali quadratiche.* Rend. du Lincei **IV**, 203.
8. D. SMARANDA, *Sur les geodesiques du champs electrigravifique Reissner-Weyl.* Revu Roum. de Math. Pures et Appl., **IX**, *5*, 449–453 (1946).
9. H. TAKENO, *Theory of the spherically symetric space-times III,* Jour. Science, Hiroshima, Univ. **16**, 291–298 (1952).
10. G. VRĂNCEANU, *Sulle condizioni di rigidita di una in un* S_n. Rendiconti della Academia Linces, **XI**, 375–389 (1930).
11. G. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială* vol. I. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962.
12. G. VRĂNCEANU, *Variétès differentiable sans torsion* (va apare).

ELEMENTE Ω'-IDEMPOTENTE ÎN ALGEBRE UNIVERSALE

DE

GEORGE ISAC

Se introduce noţiunea de element Ω'-idempotent cu ajutorul căruia se construieşte produsul lexicografic de algebre universale ordonate. Se dă o condiţie necesară şi suficientă ca produsul lexicografic al unei familii de Ω-algebre reticulate să fie reticulat. Dacă familia de Ω-algebre este o familie de grupuri abeliene, se obţine o teoremă cunoscută [7] în teoria grupurilor abeliene ordonate de funcţii reale definite pe un spaţiu topologic compact.

1. Numim signatură [6] o mulţime $\Omega = \{\omega, \varphi, \psi \ldots\}$ reprezentată sub forma de reuniune de mulţimi disjuncte

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_n \cup \ldots$$

dintre care unele pot fi vide.

Dacă $\omega \in \Omega_n$, atunci n se numeşte ponderea lui ω şi se înseamnă $n = p(\omega)$.

Mulţimea $G = \{a, b, \ldots\}$ se numeşte algebră cu signatura Ω (sau Ω-algebră) dacă fiecărui $\omega \in \Omega_n$ $(n > 0)$ şi fiecărei secvenţe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cu $a_i \in G$ $(\forall i)$ $(i \in [1, n])$ îi punem în corespondenţă elementul $a_1 a_2 \ldots a_n \omega = \overset{\omega}{\underset{i}{\sum}} a_i \in G$, iar pentru fiecare $\omega_0 \in \Omega_0$ se defineşte un element $c_{\omega_0} \in G$ pe care îl vom însemna

$$c_{\omega_0} = a\omega_0 = \overset{\omega_0}{\sum} a \qquad (\forall a)(a \in G).$$

Noţiunile de subalgebră, izomorfism şi omomorfism sînt cele din [2].

2. Fie dată o Ω-algebră G şi să considerăm o submulţime nevidă $\Omega' \subseteq \Omega$

DEFINIŢIA 1. Un element $u \in G$ se numeşte Ω'-idempotent dacă $(\forall \omega)$ $(\omega \in \Omega')$ rezultă că $\overset{\omega}{\sum} u = u$.

Exemple: i) Ω-algebra G este un grup:

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$$

unde

$$\Omega_0 = \{\omega_0\},\ c_{\omega_0} = e \text{ (unitatea grupului)},$$
$$\Omega_1 = \{\omega_1\},\ a\omega_1 = a^{-1},$$
$$\Omega_2 = \{\omega_2\},\ ab\,\omega_2 = a \cdot b.$$

Elementul c_{ω_0} este Ω-idempotent.

ii) Ω-algebra G este un Λ-modul stîng

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$$

unde Ω_0 şi Ω_2 sînt mulţimile din exemplul i) iar

$$\Omega_1 = \{\omega_1,\ (\omega_1^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\},\ a\omega_1^\lambda = \lambda a\ (\forall a)(a \in G)$$
$$a\,\omega_1 = -a.$$

Elementul unitate al structurii de grup al lui G este element Ω-idempotent.

iii) Ω-algebra G este un inel unitar:

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$$

unde

$$\Omega_1 = \{\omega_1\},\ a\omega_1 = -a$$
$$\Omega_2 = \{\omega_2,\ \varphi_2\},\ ab\omega_2 = a + b\ ;\ ab\varphi_2 = a \cdot b$$
$$\Omega_0 = \{\omega_0,\ \varphi_0\},\ a\omega_0 = 0\ \ (\forall a)\ (a \in G)$$
$$a\varphi_0 = 1\ (\forall a)\ \ (a \in G).$$

Elementul 0 este Ω'-idempotent, unde $\Omega' = \{\omega_0\} \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ în timp ce 1 este Ω'-idempotent pentru $\Omega' = \{\varphi_0\} \cup \{\varphi_2\}$.

Observaţie. Este posibil ca pentru un element $u \in G$ Ω'-idempotent să existe o operaţie $\omega_0 \in \Omega_0$ astfel ca $c_{\omega_0} = u$.

Dar ţinînd cont de definiţia operaţiei de pondere zero rezultă că nu poate exista decît cel mult o operaţie ω_0 cu proprietatea de mai sus.

3. Fie dată o mulţime total ordonată I, şi să considerăm o familie de Ω-algebre ordonate:

$$\{\mathcal{G}_i = (G_i,\ \Omega,\ < C^i_\omega\ ;\ \gamma_1^\omega, \ldots, \gamma_{n(\omega)}^\omega >_{\omega\in\Omega})\}_{i\in I},$$

unde C^i_ω reprezintă domeniul de monotonie, iar γ_j^ω tipul de monotonie, [5].

În [5] se arată că produsul $\mathcal{G} = \prod\limits_{i\in I} \mathcal{G}_i$ este o Ω-algebră ordonată cu aceeaşi signatură ca a fiecărui factor şi aceleaşi tipuri de monotonie

$$\mathcal{G} = (G,\ \Omega,\ < C_\omega\ ;\ \gamma_1^\omega, \ldots, \gamma_{n(\omega)}^\omega >_{\omega\in\Omega}),$$

unde $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ iar $C_\omega = \prod\limits_{i\in I} C^i_\omega$.

Presupunem că fiecare Ω-algebră din familia dată are cîte un element Ω'-idempotent conţinut în domeniul de monotonie al oricărei operaţii $\omega \in \Omega'$ şi pe care îl însemnăm u_i.

DEFINIŢIA 2. Fie $a = (a_i)_{i\in I}$, $a \in \prod_{i\in I} G_i$; vom numi Ω'-suportul lui a, submulţimea lui I definită prin:

$$\Omega'\text{-sup } a = \{i \mid i\in I,\ a_i \neq u_i\}.$$

Se observă că dacă $\omega \in \Omega'$ şi $p(\omega) = n$, atunci oricare ar fi secvenţa $a^1,\ldots,a^n \in \mathcal{G}$ avem relaţia:

$$\Omega'\text{-sup } a^1\ldots a^n\omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Omega'\text{-sup } a^i .$$

În cele ce urmează presupunem că toate operaţiile din Ω' au tipurile de monotonie strictă.

4. PROPOZIŢIE. *Fie I o mulţime total ordonată. Pentru orice familie de Ω-algebre ordonate*

$$\{\mathcal{G}_i = (G_i, \Omega, < C^i_\omega ; \gamma^\omega_1, \ldots, \gamma^\omega_{n(\omega)} >_{\omega\in\Omega}\}_{i\in I}$$

cu proprietatea că fiecare Ω-algebră $\mathcal{G}_i$ are un element Ω'-idempotent $u_i \in C^i_\omega$ $(\forall\omega)\,(\omega\in\Omega')$, există Ω'-produsul lexicografic.

Demonstraţie. Considerăm produsul ordonat $\mathcal{G} = \prod_{i\in I} \mathcal{G}_i$, unde

$$\mathcal{G} = (G,\ \Omega, < C_\omega ; \gamma^\omega_1 \ldots \gamma^\omega_{n(\omega)} >_{\omega\in\Omega}),\ G = \prod_{i\in I} G_i,\ C = \prod_{i\in I} C^i_\omega .$$

Definim submulţimea $\overline{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G}$ astfel:

$$\overline{\mathcal{G}} = \{a \mid a\in\mathcal{G},\ \Omega'\text{-sup } a = \text{mulţime bine ordonată}\}.$$

Vom însemna această mulţime prin $\overline{\mathcal{G}} = \Gamma_{\Omega'}\mathcal{G}_i$.

Mulţimea $\overline{\mathcal{G}}$ este o Ω'-algebră. În adevăr, operaţiile din Ω' sînt definite în $\overline{\mathcal{G}}$ ca în $\mathcal{G}$ şi în plus $\overline{\mathcal{G}}$ este stabilă faţă de operaţiile din Ω', deoarece $(\forall\omega)\,(\omega\in\Omega')$, ω este finitară; orice reuniune finită de submulţimi bine ordonate ale unei mulţimi total ordonate este bine ordonată şi orice submulţime a unei mulţimi bine ordonate este bine ordonată.

Definim în $\overline{\mathcal{G}}$ următoarea relaţie de ordine:
$a, b \in \overline{\mathcal{G}}$; $a<b$ dacă şi numai dacă $a_{i_0} < b_{i_0}$, unde $i_0 \in (\Omega'\text{-sup } a \cup \Omega'\text{-sup } b)$ este primul element cu proprietatea $a_{i_0} \neq b_{i_0}$.

Se verifică uşor că relaţia introdusă este o relaţie de ordine.

Acum vom proba că orice operaţie $\omega \in \Omega'$ are în $\overline{\mathcal{G}}$ acelaşi tip de monotonie ca în fiecare factor $\mathcal{G}_i$.

Pentru orice operaţie $\omega \in \Omega'$ definim domeniul de monotonie în $\overline{\mathcal{G}} = \Gamma_{\Omega'}\mathcal{G}_i$ prin $\overline{C}_\omega = \Gamma_{\Omega'} C^i_\omega$.

Evident, $\overline{C}_\omega \subseteq \overline{\mathcal{G}}$ şi ordinea pe $\overline{C}_\omega$ este ordinea indusă.

Să presupunem că operaţia $\omega\in\Omega'$ $(p(\omega) = n)$ are în fiecare Ω-algebră $\mathcal{G}_i$ tipurile de monotonie $\gamma^\omega_1, \gamma^\omega_2, \ldots, \gamma^\omega_n$.

Fie γ^ω_i un tip de monotonie a lui ω pentru care presupunem că $\gamma^\omega_i = \uparrow$.

Dacă $\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_{i-1},\ldots,\overline{x}_n \in \overline{C}_\omega$ şi dacă $\overline{x}_i, \overline{y}_i \in \overline{\mathcal{G}}$ astfel încît $\overline{x}_i < \overline{y}_i$, atunci există un indice $k \in I$ astfel încît $x_i^k < y_i^k$ şi $x_i^j = y_i^j$ $(\forall j)$ $(j\in I\ \&\ j < k)$.

Avem de asemenea

$$\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_i \ldots \overline{x}_n \omega = (x_1^j \ldots x_i^j \ldots x_n^j \omega)_{j \in I}$$

$$\overline{x}_1 \ldots \overline{y}_i \ldots \overline{x}_n \, \omega = (x_1^j \ldots y_i^j \ldots x_n^j \omega)_{j \in I}$$

ținînd cont de definiția relației de ordine din $\overline{\mathcal{G}}$ și de faptul că operația ω are pe poziția i în fiecare algebră $\mathcal{G}_i$, $\gamma_i^\omega = \uparrow$, rezultă că

$$\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_i \ldots \overline{x}_n \omega < \overline{x}_1 \ldots \overline{y}_i \ldots \overline{x}_n \, \omega$$

ceea ce termină demonstrația.

Dacă mulțimea I este bine ordonată, atunci mulțimea subiacentă a lui $\overline{\mathcal{G}} = \Gamma_{\Omega'} \, \mathcal{G}_i$ coincide cu $\prod\limits_{i \in I} \mathcal{G}_i$.

Observație. Dacă se dă o familie de Ω-algebre ordonate cu aceeași signatură, avem atîtea produse lexicografice, în general distincte, cîte elemente Ω-idempotente care îndeplinesc condițiile propoziției de mai sus avem.

Prin aceasta se explică de ce produsul lexicografic al unei familii de inele unitare ordonate nu este un inel unitar și că avem două produse lexicografice.

DEFINIȚIA 3. O Ω-algebră universală ordonată

$$(G, \Omega, < C_\omega ; \gamma_1^\omega, \ldots, \gamma_{n(\omega)}^\omega >_{\omega \in \Omega})$$

spunem că este reticulată dacă $(\forall a)(\forall b)$ $(a, b \in G)$ există $a_1 \wedge a_2$ și $a_1 \vee a_2$ în G.

TEOREMA 1. *Fie dată o mulțime total ordonată I cu ultim element și o familie de Ω-algebre universale $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ reticulate, cu aceeași signatură și care au elemente Ω'-idempotente conținute în fiecare domeniu de monotonie al oricărei operații din Ω' și sînt comparabile cu orice element din algebra respectivă. Presupunem de asemenea că*

$$(\exists \, \omega)(\omega \in \Omega', \; p(\omega) = 1, \; \gamma^\omega = \downarrow)$$

$$(\exists \, \omega)(\omega \in \Omega', \; p(\omega) = n, \; n \geqslant 2, \; \gamma_i^\omega = \uparrow, \; C_\omega^j = G_j) \text{ și}$$

$\underbrace{a \ldots}_{j-1} u_j \ldots a\omega = a$, *unde a este un element oarecare al lui $\mathcal{G}_j$ iar u_j elementul Ω'-idempotent al lui $\mathcal{G}_j$.*

Atunci produsul lexicografic $\Gamma_{\Omega'} \, \mathcal{G}_i$ este reticulat dacă și numai dacă $(\forall i)$ $(i \in I)$ $(i \neq$ ultim element$)$ Ω-algebra $\mathcal{G}_i$ este total ordonată.

Demonstrație. Să observăm mai întîi că oricare ar fi $i \in I$, $\mathcal{G}_i$ nu are prim și ultim element.

În adevăr, fie u_i elementul Ω'-idempotent al algebrei $\mathcal{G}_i$; u_i nu poate fi nici prim nici ultim element, deoarece dacă $u_i < a$ sau $a < u_i$, unde $a \in G_i$, aplicînd operația ω cu $p(\omega) = 1$, obținem $a\omega < u_i \, \omega = u_i$ sau $u_i = u_i\omega < a\omega$, ceea ce nu se poate. Să presupunem că $\mathcal{G}_i$ ar avea prim element; fie acesta e. Rezultă că $(\forall a, a \in G_i)$ $e \leqslant a$ deci în particular $e < u_i$; de aici aplicînd operația ω cu $p(\omega) \geqslant 2$, din ipoteză, obținem

$$e \ldots e\omega < \underbrace{e \ldots e}_{i-1} \, u_i \, e \ldots e\omega = e$$

ceea ce contrazice definiția lui e.

Suficienţa rezultă imediat, aşadar vom demonstra numai necesitatea. Presupunem că $\overline{\mathcal{G}} = \Gamma_{\Omega'} \mathcal{G}_i$ este reticulat şi vom arăta că oricare ar fi $i \in I$, diferit de ultimul element al lui I, algebra $\mathcal{G}_i$ este total ordonată.

Să presupunem că $(\exists\, \lambda)$ $(\lambda \in I)$ astfel încît λ nu este ultimul element al lui I şi că $\mathcal{G}_\lambda$ nu este total ordonată. Notăm prin u_λ elementul Ω'-idempotent din $\mathcal{G}_\lambda$.

Fie $\overline{a}_\lambda$, $\overline{b}_\lambda \in \mathcal{G}_\lambda$, astfel încît $\neg(\overline{a}_\lambda \leqslant \overline{b}_\lambda)$ şi $\neg\,(\overline{b}_\lambda \leqslant \overline{a}_\lambda)$. Se poate presupune că $u_\lambda < \overline{a}_\lambda$ şi $u_\lambda < \overline{b}_\lambda$.

Dacă am avea $u_\lambda < \overline{a}_\lambda$, $u_\lambda > \overline{b}_\lambda$ sau $u_\lambda > \overline{a}_\lambda$, $u_\lambda < \overline{b}_\lambda$, ar rezulta că $\overline{a}_\lambda$ şi $\overline{b}_\lambda$ sînt comparabile, ceea ce nu se poate. Dacă $u_\lambda > \overline{a}_\lambda$, $u_\lambda > \overline{b}$, dualizăm demonstraţia de mai jos.

Definim elementele $a = (a_j)$, $b = (b_j)$ astfel:

$$a_j = b_j = u_j \text{ dacă } j \neq \lambda$$

$$a_\lambda = \overline{a}_\lambda,\ b_\lambda = \overline{b}_\lambda\,.$$

Să descriem mulţimea tuturor elementelor $c = (c_j)$ care urmează după a şi b.

Presupunem că π este primul element al Ω'-sup c; dacă $\pi < \lambda$, atunci $c_\pi > u_\pi$, iar dacă $\pi = \lambda$, atunci $c_\lambda \geqslant a_\lambda \vee b_\lambda$.

Arătăm acum că mulţimea tuturor elementelor c nu are cel mai mic element.

Fie $c \geqslant a$, $c \geqslant b$; vom defini un element $c' = (c'_i)$ astfel încît $c > c'$, $c' \geqslant a$, $c' \geqslant b$.

Pentru orice indice $i \in I$, $i \leqslant \lambda$, punem $c'_i = c_i$.

În cazul în care $c_i = u_i$ pentru orice $i > \lambda$, considerăm un indice oarecare $k \in I$ astfel încît $\lambda < k$ (aceasta există deoarece λ nu este ultimul element) şi definim $c'_k < u_k$ în $\mathcal{G}_k$, $c'_i = u_i$ pentru orice $i \in I$ astfel încît $\lambda < i$, $i \neq k$.

În al doilea caz unde μ este primul indice astfel încît $\mu > \lambda$, $c_\mu \neq u_\mu$, vom pune $c'_\mu < c_\mu$ în $\mathcal{G}_\mu$; acest lucru este posibil deoarece $\mathcal{G}_\mu$ nu are prim element şi $c'_i = u_i$ pentru orice $i \in I$, $\lambda < i$, $i \neq \mu$.

Rezultă că elementul c' construit îndeplineşte condiţiile cerute, prin urmare $\overline{\mathcal{G}} = \Gamma_{\Omega'} \mathcal{G}_i$ nu este reticulat, ceea ce contrazice presupunerea făcută.

Observaţie. α) Toate rezultatele obţinute sînt adevărate în particular pentru Ω-ineloide şi Ω-inele. În acest caz submulţimea $\Omega' \sqsubseteq \Omega$ conţine şi operaţia de semigrup, deoarece dacă un element al unui Ω-ineloid sau Ω-inel este Ω'-idempotent, atunci el este şi Ω''-idempotent, unde $\Omega'' = \Omega' \cup \{\pi\}$ din cauza axiomei k.4 şi k.4″ [6] respectiv (am însemnat prin π operaţia de semigrup).

β) Dacă Ω-algebrele considerate aparţin la aceeaşi clasă primitivă Λ, atunci produsul lexicografic este o Ω'-algebră de clasă primitivă Λ'. Am însemnat prin Λ' mulţimea de egalităţi obţinută în acelaşi mod ca şi Λ, dar folosind algebra cuvintelor în care intervin numai operaţiile din Ω'.

Primită la redacţie la 20 iulie 1966

Centrul de Calcul al Universităţii
din Bucureşti, Str. Şt. Furtună nr. 125

BIBLIOGRAFIE

1. G. BIRKHOFF, *On the structure of abstract algebras*. Proc. Cambr. Phil. Soc., **31**, 433–454 (1935).
2. N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique*, livre I ch. 3, livre II ch. 1.
3. Л. Д. КУРОШ, Лекции по общей алгебре. Москва, 1962.
4. L. FUCHS, *Partially ordered algebraic systems*. Pergamon press, Oxford-London-New York-Paris, 1963.
5. L. FUCHS, *On partially ordered algebras*, Colloquium Math. **XIV** (1966).
6. Я. В. ХИОН, Ω-кольцоиды, Ω-кольца и их представления, Труды московского математического общества, **14** (1966).
7. P. RIBENBOIM, *Théorie des groupes ordonnés*. Bahia Blanca 1964.

ASUPRA COMPATIBILITĂȚII OPERAȚIEI DE GRUP CU RELAȚIA DE ORDONARE PARȚIALĂ[1]

DE

M. JALOBEANU

(Cluj)

Se consideră două generalizări a noțiunii de grup parțial ordonat, grupul semiomogen și grupul cvasiomogen, și se studiază legătura dintre acestea. Se demonstrează că un grup cvasiomogen cu o singură componentă strictă este parțial ordonat dirijat, iar un grup cvasiomogen cu două componente stricte este semiomogen. Se dau condiții necesare și suficiente pentru ca un grup să fie semiomogen.

Fie S un semigrup între elementele căruia s-a introdus o relație de ordonare parțială.

DEFINIȚIA 1. Elementul $x \in S$ păstrează ordonarea pentru mulțimea $A \subseteq S$, dacă $\forall a, b \in A$, $a \leqslant b$, implică $xa \leqslant xb$ și $ax \leqslant bx$. Elementul $y \in S$ inversează ordonarea pentru $A \subseteq S$, dacă $\forall a, b \in A$, $a \leqslant b$, implică $xa \geqslant xb$ și $ax \geqslant bx$.

DEFINIȚIA 2. Elementele $a, b \in S$ se numesc elemente legate, dacă există un șir finit de elemente $x_i \in S$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$, astfel ca x_i să fie comparabil cu x_{i-1} ($x_i \leqslant x_{i-1}$, sau $x_i \geqslant w_{i-1}$) pentru $i = 1, \ldots, n$.

Convenim să notăm $L(a, b)$ numărul minim de elemente care leagă pe a de b, astfel ca $a \leqslant b$ implică $L(a, b) = 1$. $L(a, b)$ este o pseudometrică.

DEFINIȚIA 3. Mulțimea $A \subseteq S$ se numește mulțime legată, dacă $\forall a, b \in A$, a și b sînt elemente legate. O mulțime legată maximală în S se numește componentă a lui S.

DEFINIȚIA 4. Semigrupul S este parțial ordonat, dacă $\forall x \in S$ păstrează ordonarea pentru S.

DEFINIȚIA 5. Semigrupul S este semiomogen, dacă $S = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, astfel că $\forall x \in A$ păstrează ordonarea și $\forall y \in B$ inversează ordonarea.

---

[1] Lucrare prezentată la cea de a doua sesiune științifică a tineretului din 20. V. 1966, București.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 859–863 BUCUREȘTI, 1967

DEFINIȚIA 6. Semigrupul S este cvasiomogen, dacă pentru fiecare componentă K a lui S, fiecare element $x \in S$ păstrează ordonarea pentru K, sau inversează ordonarea pentru K.

Observația 1. Un semigrup cvasiomogen cu o singură componentă este semiomogen.

DEFINIȚIA 7. Elementele a, $b \in S$ sînt de același tip față de A, dacă păstrează, sau inversează, simultan ordonarea pentru A.

DEFINIȚIA 8. Elementele a, $b \in S$ legate sînt strict legate (A), dacă toate elementele x_i care leagă pe a de b sînt de același tip față de A.

DEFINIȚIA 9. O mulțime este strict legată (A), dacă oricare două elemente ale sale sînt strict legate (A). O mulțime strict legată (A), maximală în S, se numește componentă strictă (A) a lui S. Într-un semigrup S cvasiomogen, o componentă strictă față de fiecare componentă a lui S se numește componentă strictă.

TEOREMA 1. *Un grup G cvasiomogen cu o singură componentă strictă este parțial ordonat dirijat.*

LEMA 1. *Un semigrup cvasiomogen S cu o singură componentă strictă este parțial ordonat.*

Demonstrație. Fie C singura componentă strictă a lui S și fie K componenta lui S care conține pe C. Presupunem că în S mai există o componentă K'. Va exista atunci $x \in S$, astfel încît sau $xK \subseteq K'$, sau $xK' \subseteq K$. Dar, xC este mulțime strict legată și atunci în K' există o componentă strictă $C' \neq C$, lucru ce contrazice ipoteza. Dacă $xK' \subseteq K$, $xK \cap C$ este o mulțime strict legată, de unde rezultă că în K' există o componentă strictă $C' \neq C$, contradicție ce demonstrează că S are o singură componentă. Elementele lui C păstrează ordonarea pentru K. În adevăr, dacă elementele lui C inversează ordonarea pentru K, (S este cvasiomogen), atunci pentru orice $a \in C$, aC este o mulțime strict legată și elementele sale păstrează ordonarea pentru K ($\forall b \in C$, $x \leqslant y$, $x, y \in K$ implică $bx \geqslant by$. Cum K este singura componentă a lui S, bx, $by \in K$ și $abx \leqslant aby$. Comparînd prima relație cu ultima, rezultă că ab păstrează ordonarea pentru K). Există atunci în S o componentă strictă care conține aC și care diferă de C, concluzie ce contrazice ipoteza.

Fie acum $y \in S - C$. Presupunem că y inversează ordonarea pentru K. Dar în acest caz, yC este o mulțime strict legată și elementele sale inversează ordonarea pentru K, de unde din nou concluzia că C nu ar fi unica componentă strictă a lui S. Orice element din S păstrează ordonarea.

LEMA 2. *Un cvasigrup S parțial ordonat cu o singură componentă este legat.*

Demonstrație. Fie $x \in S$ și fie $a \leqslant b$, a, $b \in S$. Prin ipoteză $xa \leqslant xb$. Fie acum z soluția ecuației $z(xa) = x$. Atunci $z(xa) \leqslant z(xb)$, adică $x \leqslant z(xb)$ și cum S are o singură componentă C, rezultă x și $z(xb) \in C$. Am arătat astfel că $S \subseteq C$ și cum totdeauna avem și $C \subseteq S$, urmează $S = C$.

LEMA 3. *Un grup G parțial ordonat legat este dirijat.*

Demonstrație. Fie $a, b \in G$ legate prin c și $d \in G$ și fie un prim caz I. $a \leqslant c$, $c \geqslant d$, $d \leqslant b$.

Dacă e este element unitate în G, atunci avem:

$x = ca^{-1} \geqslant e$, $y = cd^{-1} \geqslant e$, $z = bd^{-1} \geqslant e$ și de aici $b = zd$, $d = y^{-1}c$, $c = xa$, adică $b = zy^{-1}xa$, sau $ba^{-1} = zy^{-1}x \geqslant y^{-1}$, deci $b \geqslant y^{-1}a$. Pe de altă parte, $y \geqslant e$ implică $y^{-1} \leqslant e$ și de aici $a \geqslant y^{-1}a$. Elementul $y^{-1}a = dc^{-1}a$ este în acest caz o margine inferioară comună pentru a și b.

În aceleași ipoteze fie acum:

II. $a \geqslant c$, $c \leqslant d$, $d \geqslant b$. Notînd în acest caz $x = ac^{-1}$, $y = dc^{-1}$, $z = db^{-1}$ vom avea $x \geqslant e$, $y \geqslant e$, $z \geqslant e$, $b = z^{-1}d$, $d = yc$, $c = x^{-1}a$, sau $b = z^{-1}yx^{-1}a$ și de aici $ab^{-1} = xy^{-1}z \geqslant y^{-1}$, adică $a \geqslant y^{-1}b$ și cum $y^{-1} \leqslant e$, avem și $b \geqslant y^{-1}b$, de unde rezultă că $y^{-1}b = dc^{-1}b$ este o margine inferioară comună pentru a și b.

Celelalte cazuri posibile sînt:

III. $a \leqslant c \leqslant d$, $d \geqslant b$.

IV. $a \geqslant c \geqslant d$, $d \leqslant b$.

V. $a \leqslant c$, $c \geqslant d \geqslant b$.

VI. $a \geqslant c$, $c \leqslant d \leqslant b$.

VII. $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$.

VIII. $a \geqslant c \geqslant d \geqslant b$.

În toate aceste cazuri a și b admit o margine superioară sau inferioară comună. Dar existența marginii superioare în cazurile III și V implică existența marginii inferioare. În adevăr, dacă $a \leqslant c$, $c \geqslant b$, atunci $ac^{-1} \leqslant e$, $c^{-1}b \leqslant e$ și deci $ac^{-1}b \leqslant a$, $ac^{-1}b \leqslant b$. Cu alte cuvinte, dacă c este o margine superioară comună pentru a și b, atunci $ac^{-1}b$ este o margine inferioară comună pentru a și b.

Am arătat astfel că dacă a și b sînt legate prin alte două elemente, atunci ele admit o margine inferioară comună.

Fie acum $a, b \in G$ legate prin $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Pe baza celor demonstrate mai sus, cum a și x_3 sînt legate prin x_1, x_2, rezultă că există $y_1 \in G$, astfel ca $a \geqslant y_1$, $x_3 \geqslant y_1$. Atunci a și x_4 sînt legate prin y_1, x_3 și există $y_2 \in G$, astfel ca $a \geqslant y_2$, $x_1 \geqslant y_2$. Pas cu pas ajungem astfel la concluzia că a și b sînt legate prin y_{n-2} și x_n. Există atunci un element $y \in G$, astfel ca $a \geqslant y$ și $b \geqslant y$, ceea ce demonstrează că pentru orice pereche de elemente din grupul G parțial ordonat legat există o margine inferioară comună. Cum existența marginei inferioare într-un grup implică și existența marginei superioare pentru orice pereche de elemente, grupul G va fi dirijat.

Demonstrația teoremei 1 rezultă imediat din cele trei leme.

Din demonstrația lemei 3 rezultă următorul

COROLAR. *Dacă două elemente din grupul G parțial ordonat sînt legate, atunci ele admit o margine inferioară comună.*

Cu alte cuvinte, într-un grup parțial ordonat $L(a, b) \leqslant 2$, pentru orice pereche a, b pentru care $L(a, b)$ are sens.

TEOREMA 2. *Grupul G este semiomogen, dacă și numai dacă G admite un subgrup normal de indice 2, parțial ordonat.*

Demonstrație. Fie G semiomogen. Vom demonstra că mulțimea elementelor din G care păstrează ordonarea pentru G, formează un subgrup normal de indice doi, parțial ordonat. Să notăm această mulțime cu N. Fie $a, b \in N$. Pentru orice $x, y \in G$, $x \leqslant y$ implică $ax \leqslant ay$. Dar, ax și $ay \in G$, iar $a^{-1}ax = x \leqslant y = a^{-1}ay$ ceea ce demonstrează că $a^{-1} \in N$. Cum $x \leqslant y$ implică și $bx \leqslant by$ iar $bx, by \in G$, rezultă $a^{-1}bx \leqslant a^{-1}by$, prin urmare $a^{-1}b \in N$. Fie acum $h \in G$ și $h \notin N$. Atunci $x \leqslant y$ implică $hx \geqslant hy$, iar de aici pentru orice $a \in N$, $ahx \geqslant ahy$. În plus $h \notin N$ implică $h^{-1} \notin N$ (căci $h^{-1} \in N$ atrage $(h^{-1})^{-1} = h \in N$) și atunci $h^{-1}ahx \leqslant h^{-1}ahy$, adică $h^{-1}ah \in N$. Rămîne să mai arătăm că $G = N \cup hN$, pentru $h \notin N$.

Fie atunci $x \in G$. Dacă x păstrează ordonarea $x \in N$, cînd x inversează ordonarea, trebuie să arătăm că $x \in hN$. În adevăr, în G există a astfel ca $x = ha$. Dacă $a \notin N$, rezultă că a inversează ordonarea și atunci ha păstrează ordonarea, ceea ce nu este posibil. Cum $a \in N$, implică $x \in hN$, N are indice doi. Evident, N este parțial ordonat căci dacă elementele lui N păstrează ordonarea pentru G, cu atît mai mult o vor păstra pentru N.

Invers, fie N un subgrup normal de indice doi, parțial ordonat. Fie $h \in G$, $h \notin N$. Avem atunci $G = N \cup hN$. Introducem în mulțimea hN o ordonare parțială prin: $x \leqslant y$ dacă și numai dacă $h^{-1}x \geqslant h^{-1}y$ în N. Cum h poate fi orice element din G care nu aparține lui N, putem lua $x \leqslant y$ dacă și numai dacă $e \geqslant x^{-1}y$. Pentru orice $a \in N$ și pentru orice $x \leqslant y$, $x, y \notin N$, avem $ax \leqslant ay$ pentru că $e \geqslant x^{-1}a^{-1}ay$. Dacă $z \notin N$, atunci $zx \geqslant zy$, așa cum $e \geqslant x^{-1}z^{-1}zy$ deoarece zx, $zy \in N = zxN$. Dacă $a \leqslant b$, $a, b \in N$, atunci $za \leqslant zb$. Din toate acestea rezultă că elementele lui N păstrează ordonarea, iar elementele lui hN inversează ordonarea pentru G, adică grupul G este semiomogen.

Observație. Teorema se poate enunța pentru N subgrup normal de indice mai mic sau egal cu doi și se include atunci cazul particular G-parțial ordonat.

TEOREMA 3. *Într-un grup G semiomogen, dacă $c \leqslant a \leqslant b$ și dacă b, c sînt de același tip, atunci și a este de același tip cu b și c.*

Demonstrație. Să presupunem că b, c inversează ordonarea, iar a păstrează ordonarea pentru G. În acest caz avem:

$$ac \leqslant a^2 \leqslant ab,\ bc \geqslant ba \geqslant b^2,\ c^2 \geqslant ca \geqslant cb,$$

$$ca \leqslant a^2 \leqslant ba,\ cb \geqslant ab \geqslant b^2,\ c^2 \geqslant ac \geqslant bc,$$

de unde prin tranzitivitate $ab \geqslant a^2 \geqslant ac \geqslant bc \geqslant ba \geqslant a^2 \geqslant ca \geqslant cb \geqslant ab$ și de aici $a = b = c$, în contradicție cu presupunerea. În ipoteza că b, c păstrează ordonarea, iar a inversează ordonarea pentru G, se modifică doar sensul inegalităților de mai sus.

Observație. Teorema 3 se mai poate enunța în forma:

Într-un grup semiomogen, sau toate elementele care păstrează ordonarea sînt mai mici decît toate elementele care inversează ordonarea, sau toate elementele care păstrează ordonarea sînt mai mari decît toate elementele care inversează ordonarea, sau nici un element care păstrează ordonarea nu se poate compara cu un element care inversează ordonarea.

TEOREMA 4. *Un grup G cvasiomogen cu două componente stricte este semiomogen.*

Demonstrație. Fie C_e componenta strictă care conține elementul unitate e și fie K_e componenta care include pe C_e. Elementele lui C_e păstrează ordonarea odată cu e pentru orice componentă din G. Am arătat deja (demonstrația teoremei 2) că dacă a păstrează ordonarea pentru G, atunci și a^{-1} o păstrează. Cum pentru orice $a, b \in C_e$, avem a strict legat de b, deci $a^{-1}b$ strict legat de e, rezultă C_e subgrup al grupului G.

Fie C cealaltă componentă strictă și fie K o componentă a lui G, astfel ca $C \subseteq K$. Presupunem că în G există cel puțin un element x care inversează ordonarea pentru K_e. Cum xC_e este o mulțime strict legată, avem sau $xC_e \subseteq C_e$, sau $xC_e \subseteq C$. Primul caz conduce la $x = xe \in C_e$ și trebuie exclus. În al doilea caz $x \in C$ și prin urmare toate elementele lui

C inversează ordonarea pentru K_e. Am arătat astfel că orice element x care inversează ordonarea pentru K_e, aparține lui C. Pe de altă parte, oricare ar fi un element $g \in G$ care păstrează ordonarea pentru K_e, și pentru orice $a \in C_e$, obținem ag strict legat de g, adică g aparține unei componente stricte și aceasta nu poate fi decît C_e. Grupul G fiind cvasiomogen, orice element al său păstrează, sau inversează, ordonarea pentru componenta K_e și am arătat că toate elementele care păstrează ordonarea pentru K_e fac parte din C_e, iar toate elementele care inversează ordonarea pentru K_e fac parte din C, prin urmare, $G = C_e \cup C$. Este necesar să mai arătăm că elementele lui C inversează ordonarea și pentru C. Fie atunci $a \in C_e$, $g \in C$ și x soluția ecuației $xg = a$. Pentru orice b, c din C_e, $b \leqslant c$ implică $ab \leqslant ac$, sau $xgb \leqslant xgc$ și cum $gb \geqslant gc$, iar gb și gc fac parte din $gC_e \subseteq C$, rezultă că x inversează ordonarea pentru toate elementele lui C, grupul fiind cvasiomogen, și teorema este complet demonstrată.

Primită la redacție la 20 iulie 1966

I.F.A. – Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. J. F. Andrus, A. T. Butson, *Ordered groups*. Amer. Math. Monthly, **70** 619–628 (1963).
2. L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems*. Perg. Press, London, 1963.
3. P. G. Kantorovici, A. I. Kokorin, *Ob odnom tipe ciasticino uporeadocenîh grup*. Mat. Zap. Ural. Univ., **3** (3), 39–44 (1962).

RESTUL ÎN FORMULA DE CVADRATURĂ A LUI SHOVELTON

DE

FLORICA MUNTEANU PASCAL

În lucrare se dă pentru formula de cvadratură a lui Shovelton expresia restului precum şi o delimitare a lui în cazul funcţiilor de clasa C^6. Comparîndu-se cu restul din formula lui Côtes, de acelaşi grad de exactitate, se constată că în formula lui Shovelton coeficientul restului este mult mai mic decît în formula lui Côtes, fapt care indică avantajul aplicabilităţii acesteia în practică.

La calculul unei integrale definite pentru care funcţia primitivă nu poate fi exprimată prin funcţii elementare, se aplică o anumită formulă de cvadratură adecvată funcţiei de integrat şi preciziei cerută de problema în care intervine integrala respectivă.

Multă vreme în aplicaţiile practice s-au aplicat formule de cvadratură la care nu era precizată expresia restului şi prin urmare nu se cunoştea eroarea cu care rezultatul aproximativ reprezenta valoarea reală a integralei. Cu timpul însă prin diverse metode s-a elucidat problema restului la formulele de cvadratură cunoscute şi s-au elaborat noi formule complet determinate.

Un rol de seamă în această direcţie îl au lucrările prof. D. V. Ionescu care, folosind metoda de integrare prin părţi generalizată, a reuşit să elaboreze un procedeu elegant şi prodigios cu ajutorul căruia a determinat restul la multe formule de cvadratură şi totodată a creat noi formule de cvadratură care răspund la diverse deziderate în legătură cu precizia cerută şi cu natura funcţiei de integrat. Dintre multe lucrări ale D-sale vom face referire numai la cartea *Cvadraturi numerice* [1] în care este clar expus procedeul amintit şi aplicat cu succes la multe formule de cvadratură.

În lucrarea de faţă folosind acest procedeu, se dă expresia restului în formula de cvadratură a lui Shovelton, formulă expusă de către H. Mineur în lucrarea [2] fără a indica expresia restului. Totodată lucrarea conţine şi o delimitare a restului din formula de cvadratură a lui Shovel-

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 865–870, BUCUREŞTI, 1967

ton, precum şi o comparaţie între restul acestei formule şi restul formulei lui Côtes cu acelaşi grad de exactitate.

Formula de cvadratură a lui Shovelton este următoarea:

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_{10}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5h}{126}\Big\{ & 8\,[f(x_0)+f(x_{10})]+ \\
& +35\,[f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)+f(x_9)] \\
& +f(x_5) \\
& +15\,[f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)+f(x_8)]\Big\}+R
\end{aligned} \tag{1}
$$

în care nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_{10}$ sînt echidistante de pas h.

Datorită faptului că această formulă conţine trei grupe de coeficienţi egali între ei, ea prezintă avantagii la aplicaţiile practice, calculele putînd fi cu uşurinţă programate la maşini de calcul.

Pentru aplicarea procedeului sus amintit de determinare a restului, vom găsi în prealabil gradul de exactitate al formulei. Înlocuind în formula (1) pe $f(x)$ pe rînd cu $1, x, x^2, \ldots, x^6$ se observă că restul R este nul pentru orice polinom de gradul cinci şi diferit de zero pentru x^6 şi prin urmare formula lui Shovelton are gradul de exactitate cinci. În acest caz, conform procedeului folosit de D. V. Ionescu, se ataşează fiecărui interval $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\ldots 10)$ cîte o funcţie $\varphi_i(x)$ definită de ecuaţia diferenţială

$$\varphi_i^{(6)}(x) = 1, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 10) \tag{2}$$

şi de condiţiile

$$
(3_1)\quad \begin{cases} \varphi_1^{(k)}(x_0) = 0 \\ \varphi_i^{(k)}(x_i) = \varphi_{i+1}^{(k)}(x_i), \quad (i = 1, 2, \ldots 9) \\ \varphi_{10}^{(k)}(x_{10}) = 0 \end{cases}
$$

$$(3) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

$$
(3_2)\quad \begin{cases}
-\varphi_1^{(5)}(x_0) = \varphi_{10}^{(5)}(x_{10}) = \dfrac{20}{63}h \\[2mm]
\varphi_1^{(5)}(x_1) - \varphi_2^{(5)}(x_1) = \varphi_9^{(5)}(x_9) - \varphi_{10}^{(5)}(x_9) = \dfrac{175}{126}h \\[2mm]
\varphi_2^{(5)}(x_2) - \varphi_3^{(5)}(x_2) = \varphi_8^{(5)}(x_8) - \varphi_9^{(5)}(x_8) = \dfrac{75}{126}h \\[2mm]
\varphi_3^{(5)}(x_3) - \varphi_4^{(5)}(x_3) = \varphi_7^{(5)}(x_7) - \varphi_8^{(5)}(x_7) = \dfrac{175}{126}h \\[2mm]
\varphi_4^{(5)}(x_4) - \varphi_5^{(5)}(x_4) = \varphi_6^{(5)}(x_6) - \varphi_7^{(5)}(x_6) = \dfrac{75}{126}h \\[2mm]
\varphi_5^{(5)}(x_5) - \varphi_6^{(5)}(x_5) = \dfrac{90}{63}h.
\end{cases}
$$

Problemele la limită puse de condițiile (3) asupra ecuațiilor diferențiale (2) conțin cu șase mai multe condiții decît numărul constantelor pe care le conțin soluțiile generale ale acestor ecuații, de aceea existența soluțiilor cerute de condițiile (3) nu este asigurată. Totuși, aceste soluții există, și în cele ce urmează vom da efectiv expresiile lor.

Pentru integrarea ecuațiilor (2) se va folosi prima dată numai condițiile (3_1), găsindu-se pe rînd funcțiile $\varphi_i(x)$ în ordinea următoare: se determină întîi funcția $\varphi_1(x)$, soluție a ecuației $\varphi_1^{(6)}(x) = 1$ și care satisface la cele cinci condiții inițiale din punctul x_0, (3_1). Cu valorile lui $\varphi_1(x)$ și ale primelor patru derivate în punctul x_1, se determină $\varphi_2(x)$, de asemenea cu cinci condiții inițiale. Cu ajutorul valorilor lui $\varphi_2(x)$ și a primelor patru derivate în punctul x_2, se determină $\varphi_3(x)$ apoi în mod analog $\varphi_4(x)$ și $\varphi_5(x)$. În felul acesta la fiecare integrare rămîne cîte o constantă arbitrară. Pentru determinarea celorlalte cinci funcții se începe cu $\varphi_{10}(x)$ și cu condițiile inițiale din punctul x_{10}, (3_1), apoi $\varphi_9(x)$, $\varphi_8(x)$, $\varphi_7(x)$ și, în sfîrșit, $\varphi_6(x)$. Avînd la fiecare integrare numai cinci condiții inițiale, vor apare și de data aceasta cinci constante arbitrare. Determinînd în felul acesta funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{10}$, am folosit din condițiile (3_1) cele din punctele x_0, $x_1, \ldots, x_4$, $x_6, \ldots, x_{10}$ în afară de cele cinci condiții din punctul x_5. Funcțiile găsite mai conțin în total zece constante arbitrare pe care le determinăm din cele zece condiții (3_2), excluzînd iarăși condiția din punctul x_5. În urma acestor calcule funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{10}$ sînt complet determinate și ele sînt reprezentate de următoarele polinoame de gradul șase:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)^6}{6!} - \frac{20}{63} h \frac{(x-x_0)^5}{5!}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)^6}{6!} - \frac{20}{63} h \frac{(x-x_0)^5}{5!} - \frac{175}{126} h \frac{(x-x_1)^5}{5!}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_0)^6}{6!} - \frac{20}{63} h \frac{(x-x_0)^5}{5!} - \frac{175}{126} h \frac{(x-x_1)^5}{5!} - \frac{75}{126} h \frac{(x-x_2)^5}{5!}$$

$$\varphi_4(x) = \frac{(x-x_0)^6}{6!} - \frac{20}{63} h \frac{(x-x_0)^5}{5!} - \frac{175}{126} h \frac{(x-x_1)^5}{5!} - \frac{75}{126} h \frac{(x-x_2)^5}{5!} -$$

$$(4) \qquad - \frac{175}{126} \frac{(x-x_3)^5}{5!}$$

$$\varphi_5(x) = \frac{(x-x_0)^6}{6!} - \frac{20}{63} h \frac{(x-x_0)^5}{5!} - \frac{175}{126} h \frac{(x-x_1)^5}{5!} - \frac{75}{126} h \frac{(x-x_2)^5}{5!} -$$

$$- \frac{175}{126} h \frac{(x-x_3)^5}{5!} - \frac{75}{126} h \frac{(x-x_4)^5}{5!}$$

$$\varphi_6(x) = \frac{(x-x_{10})^6}{6!} + \frac{20}{63} h \frac{(x-x_{10})^5}{5!} + \frac{175}{126} h \frac{(x-x_9)^5}{5!} + \frac{75}{126} h \frac{(x-x_8)^5}{5!} +$$

$$+ \frac{175}{126} h \frac{(x-x_7)^5}{5!} + \frac{75}{126} h \frac{(x-x_6)^5}{5!}$$

$$\varphi_7(x) = \frac{(x-x_{10})^6}{6\,!} + \frac{20}{63}h\frac{(x-x_{10})^5}{5!} + \frac{175}{126}h\frac{(x-x_9)^5}{5\,!} + \frac{75}{126}h\frac{(x-x_8)^5}{5\,!} +$$

$$(4) \qquad + \frac{175}{126}h\frac{(x-x_7)^5}{5\,!}$$

$$\varphi_8(x) = \frac{(x-x_{10})^6}{6\,!} + \frac{20}{63}h\frac{(x-x_{10})^5}{5!} + \frac{175}{126}h\frac{(x-x_9)^5}{5\,!} + \frac{75}{126}h\frac{(x-x_8)^5}{5!}$$

$$\varphi_9(x) = \frac{(x-x_{10})^6}{6\,!} + \frac{20}{63}h\frac{(x-x_{10})^5}{5!} + \frac{175}{126}h\frac{(x-x_9)^5}{5!}$$

$$\varphi_{10}(x) = \frac{(x-x_{10})^6}{6\,!} + \frac{20}{63}h\frac{(x-x_{10})^5}{5!}.$$

Printr-un calcul direct se arată că funcţiile $\varphi_5(x)$ şi $\varphi_6(x)$ date mai sus verifică şi cele şase condiţii din punctul x_5, şi prin urmare problemele la limită puse de condiţiile (3) asupra ecuaţiilor (2) au soluţiile date de funcţiile (4).

Notînd cu $\varphi(x)$ funcţia care pe intervalele $[x_{i-1}, x_i]$ este identică cu funcţiile $\varphi_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,10)$ şi ţinînd seama de ecuaţiile (2) se obţine pentru $\int_{x_0}^{x_{10}} f(x)\,\mathrm{d}x$ reprezentarea

$$\int_{x_0}^{x_{10}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_{10}} \varphi^{(6)}(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

care se mai scrie sub forma

$$\int_{x_0}^{x_{10}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{10} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(6)}(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aplicînd integralelor din membrul doi formula de integrare prin părţi generalizată, se obţine, ţinînd seama de condiţiile (3), formula

$$(5) \quad \int_{x_0}^{x_{10}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5h}{126}\{8[f(x_0) + f(x_{10})] + 35\,[f(x_1) f(x_3) + f(x_5) + $$

$$+ f(x_7) + f(x_9)] + f(x_5) + 15\,[f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)]\} +$$

$$\int_{x_0}^{x_{10}} \varphi(x) f^{(6)}(x)\,\mathrm{d}x$$

ceea ce dovedeşte că restul din formula lui Shovelton se scrie sub forma

$$(6) \qquad R = \int_{x_0}^{x_{10}} \varphi(x) f^{(6)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pentru a găsi o evaluare a restului R dat de formula (6) vom studia semnul funcţiei $\varphi(x)$ pe intervalul $[x_0, x_{10}]$, făcînd în prealabil observaţia că funcţia $\varphi(x)$ prezintă simetrie faţă de dreapta $x = x_5$. Cercetînd fiecare funcţie $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ pe intervalul ei de definiţie, se constată că graficul funcţiei $\varphi(x)$ are forma din figura 1, funcţia $\varphi(x)$ avînd cîte un minim în intervalele (x_2, x_3) şi (x_7, x_8) şi cîte o rădăcină $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ în intervalul (x_4, x_5) şi (x_5, x_6). Pe intervalele $(x_0, \overline{x}_1)$ şi $(\overline{x}_2, x_{10})$ funcţia este negativă, iar pe intervalul $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ pozitivă. Rădăcina $\overline{x}_1$ a funcţiei $\varphi(x)$ este cuprinsă în intervalul $\left(x_4 + \frac{h}{2}, \ x_4 + \frac{3h}{2}\right)$.

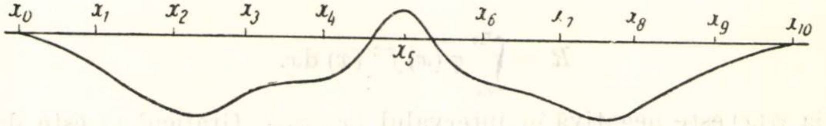


Fig. 1

DELIMITAREA RESTULUI ÎN FORMULA DE CVADRATURĂ A LUI SHOVELTON

Vom da o delimitare a restului din formula (6), în felul următor:

$$|R| \leqq \int_{x_0}^{x_{10}} |\varphi(x)| \, |f^{(6)}(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Notînd

$$M_6 = \sup_{[x_0, x_{10}]} |f^{(6)}(x)|$$

şi

$$K = 2\int_{x_0}^{x_5} |\varphi(x)| \, \mathrm{d}x$$

avem

$$|R| \leqq M_6 K.$$

Pentru calculul coeficientului K ţinem seama de semnul funcţiei $\varphi(x)$ pe intervalul $[x_0, x_5]$. Deoarece nu cunoaştem valoarea exactă a rădăcinii funcţiei $\varphi(x)$ din intervalul $[x_4, x_5]$, vom face o nouă majorare:

$$K < 2\left\{-\int_{x_0}^{x_4+\frac{h}{2}} \varphi(x)\, \mathrm{d}x + \int_{x_4+\frac{3h}{2}}^{x_5} \varphi(x)\, \mathrm{d}x + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{10}\left[\varphi_5\left(x_4 + \frac{3h}{5}\right) - \varphi_5\left(x_4 + \frac{h}{2}\right)\right]\right\},$$

de unde printr-un calcul direct obţinem

(8) $$K < 0{,}03454 \ h^7$$

iar pentru restul R avem delimitarea:

(9) $$|R| < 0{,}03454 \ M_6 h^7.$$

COMPARAȚIE DINTRE FORMULA LUI SHOVELTON ȘI FORMULA LUI CÔTES CU GRADUL DE EXACTITATE CINCI

Să considerăm acum formula lui Côtes cu gradul de exactitate cinci [1]

$$\int_{x_0}^{x_{10}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5h}{144}\{19\,[f(x_0)+f(x_{10})] + 75\,[f(x_2)+f(x_8)] + 50\,[f(x_4)+f(x_6)]\} + R \tag{10}$$

unde

$$R = \int_{x_0}^{x_{10}} \varphi(x)\, f^{(6)}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Funcția $\varphi(x)$ este negativă în intervalul (x_0, x_{10}). Graficul ei este dat în figura 2, și avem

$$\int_{x_0}^{x_{10}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{550}{189}h^7.$$

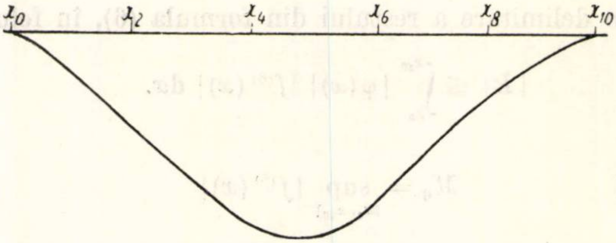


Fig. 2

Pentru formula lui Côtes putem da următoarea delimitare a restului

$$|R| < 2{,}92\ M_6 h^7, \tag{12}$$

unde M_6 are aceeași semnificație ca și mai sus.

Din compararea delimitărilor (9) și (12) pentru resturile din formulele lui Shovelton și Côtes, se vede că formula lui Shovelton prezintă avantagii, din acest punct de vedere, față de formula lui Côtes.

Deoarece formula lui Shovelton are coeficienții numere raționale mici și coeficientul K este de asemenea mic, socotim că formula lui Shovelton poate fi aplicată cu succes în practică.

Primită la redacție la 1 martie 1966

Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *Cvadraturi numerice*. Editura tehnică, București, 1957.
2. H. Mineur, *Techniques de Calcul numérique*. Paris. Libraire Politechnique Gh. Beranger, 1. 52, Chapitre X, p. 244.

METODA DREPTELOR ÎN REZOLVAREA UNOR PROBLEME REFERITOARE LA O ECUAȚIE CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP PARABOLIC

DE

FLORICA MUNTEANU PASCAL

În lucrare se reduce rezolvarea unor probleme referitoare la ecuația cu derivate parțiale de tip parabolic cu coeficienții variabili, la integrarea unor sisteme de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți, folosindu-se în acest scop o formulă de derivare numerică dată în primul paragraf al lucrării. Se demonstrează apoi cîteva proprietăți ale unui sistem de ecuații diferențiale pe baza cărora se găsește o delimitare a erorii cu care soluția sistemului de ecuații diferențiale aproximează pe anumite drepte soluția ecuației cu derivate parțiale.

Vom considera ecuația cu derivate parțiale de forma

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

cu anumite condiții la limită și inițiale care depind de natura problemei studiate. Funcția $\rho(x)$ este pozitivă în intervalul în care se studiază fenomenul.

Deoarece coeficienții ecuației (1) depind numai de variabila spațială x, este avantajos ca pentru rezolvarea aproximativă a acestei ecuații să se folosească metoda dreptelor în care, înlocuind derivata secundă prin valori ale funcției pe anumite noduri, se reduce problema la integrarea unui sistem de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți.

Este cunoscut sistemul de ecuații diferențiale precum și evaluarea erorii cu care soluția acestui sistem aproximează soluția ecuației (1) în cazul cînd condițiile la limită și inițiale sînt de forma

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \psi_1(t) \\ u(l,t) &= \psi_2(t) \\ u(x,0) &= g(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &t > 0 \\ &0 \leqslant x \leqslant l \end{aligned}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 871–890. BUCUREȘTI, 1967

În lucrarea de față vom construi sistemele de ecuații diferențiale din metoda dreptelor corespunzător ecuației (1) și condițiilor la limită și inițiale de forma

$$(2)\quad \begin{array}{ll} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\psi_1(t) & \\ & 0<t \\ u(l,t)=\psi_2(t) & \\ & ; \\ u(x,0)=g(x) & 0\leqslant x\leqslant l \end{array} \qquad (3)\quad \begin{array}{ll} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\psi_1(t) & \\ & ;\ t>0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\psi_2(t) & \\ u(x,0)=g(x), & 0\leqslant x\leqslant l \end{array}$$

și vom evalua de asemenea eroarea cu care soluția sistemului de ecuații diferențiale aproximează soluția acestor probleme.

La construirea sistemelor de ecuații diferențiale vom utiliza o formulă de derivare numerică, pentru derivata de ordinul doi, adecvată condițiilor la limită. Această formulă o vom determina în primul paragraf al lucrării.

§ 1. O FORMULĂ DE DERIVARE NUMERICĂ

1. Considerăm funcția $f(x)$ definită pe intervalul $[x_0, x_3]$ și avînd pe acest interval derivate continue pînă la ordinul patru inclusiv. Luăm în intervalul (x_0, x_3) nodurile $x_1 < x_2$ care împart intervalul în trei părți egale, de lungime h. Vom determina o formulă de derivare numerică de forma

$$(3)\qquad f''(x_1)=Af'(x_0)+B_1f(x_1)+B_2f(x_2)+B_3f(x_3)+R$$

folosind același procedeu ca în lucrarea [2].

Atașăm fiecărui interval $[x_{i-1}, x_i]$, $(i=1, 2, 3)$, cîte o funcție $\varphi_i(x)$ care satisface la ecuația diferențială $\varphi_i^{IV}(x)=0$ și notăm cu $\varphi(x)$ funcția ce coincide pe intervalele $[x_{i-1}, x_i]$ cu funcțiile $\varphi_i(x)$. Aplicînd formula de integrare prin părți generalizată integralei $\int_{x_0}^{x_3}\varphi^{IV}(x)f(x)\,\mathrm{d}x$, obținem

$$(4)\qquad \begin{aligned} \int_{x_0}^{x_3}\varphi^{IV}(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{3}\{[\varphi_i'''(x)f(x)-\varphi_i''(x)f'(x)+\\ +\varphi_i'(x)f''(x)-\varphi_i(x)f'''(x)]_{x_{i-1}}^{x_i}+\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i(x)f^{IV}(x)\,\mathrm{d}x\}. \end{aligned}$$

Este ușor de observat că din (4) deducem o formulă de forma (3) dacă punem asupra funcțiilor $\varphi_i(x)$ următoarele condiții

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\varphi_1(x_0)=\varphi_1'(x_0)=\varphi_1'''(x_0)=0\\ &\varphi_1(x_1)=\varphi_2(x_1),\quad \varphi_1''(x_1)=\varphi_2''(x_1) \end{aligned}$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\varphi_2(x_2)=\varphi_3(x_2),\quad \varphi_2'(x_2)=\varphi_3'(x_2),\quad \varphi_2''(x_2)=\varphi_3''(x_2)\\ &\varphi_3(x_3)=\varphi_3'(x_3)=\varphi_3''(x_3)=0. \end{aligned}$$

Ținînd seama de condițiile (5) și de ecuațiile diferențiale la care satisfac funcțiile $\varphi_i(x)$ obținem din formula (4) următoarea :

$$\begin{aligned}\varphi_1''(x_0)f'(x_0) + [\varphi_1'''(x_1) - \varphi_2'''(x_1)]f(x_1) + [\varphi_1'(x_1) - \\ - \varphi_2'(x_1)]f''(x_1) + [\varphi_2'''(x_2) - \varphi_3'''(x_2)]f(x_2) + \\ + \varphi_3'''(x_3)f(x_3) = -\int_{x_0}^{x_3} \varphi(x) f^{IV}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6}$$

Din (6) se observă că atît coeficienții cît și restul formulei de derivare numerică sînt determinați de funcția $\varphi(x)$.

2. Pentru determinarea funcției $\varphi(x)$ observăm că polinoamele de gradul trei

$$\begin{aligned}\varphi_3(x) &= \frac{(x_3-x)^3}{3!}\\ \varphi_2(x) &= \frac{(x_3-x)^3}{3!} + \lambda\frac{(x_2-x)^3}{3!}\\ \varphi_3(x) &= \frac{(x_3-x)^3}{3!} + \lambda\frac{(x_2-x)^3}{3!} + \mu\frac{(x_1-x)^3}{3!} + \nu(x_1-x)\end{aligned} \tag{7}$$

satisfac și ecuațiile diferențiale și condițiile din punctele x_3, x_2, x_1. Scriind că funcția $\varphi_1(x)$ satisface condițiile din punctul x_0, obținem pentru determinarea parametrilor λ, μ și ν sistemul de ecuații

$$\begin{aligned}27h^2 + 8\lambda h^2 + \mu h^2 + 6\nu &= 0\\ 9h^2 + 4\lambda h^2 + \mu h^2 + 2\nu &= 0\\ 1 + \lambda + \mu &= 0\end{aligned}$$

a cărui soluție este $\lambda = 1$, $\mu = -2$, $\nu = -\frac{11}{2}h^2$. Înlocuind aceste valori în funcțiile (7) obținem

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \frac{(x_3-x)^3}{3!} + \frac{(x_2-x)^3}{3!} - 2\,\frac{(x_1-x)^3}{3!} - \frac{11}{2}h^2(x_1-x)\\ \varphi_2(x) &= \frac{(x_3-x)^3}{3!} + \frac{(x_2-x)^3}{3!}\\ \varphi_3(x) &= \frac{(x_3-x)^3}{3!}\end{aligned} \tag{8}$$

iar formula (6) devine

$$f''(x_1) = \frac{2}{11h^2}\,[-3hf'(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] + R, \tag{9}$$

unde

$$R = -\frac{2}{11h^2}\int_{x_0}^{x_3} \varphi(x) f^{IV}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

3. Pentru determinarea termenului rest din formula (9) vom studia semnul funcţiei $\varphi(x)$ pe intervalul $[x_0, x_3]$. Din definiţia funcţiei $\varphi_3(x)$ se vede că ea este pozitivă pe intervalul $[x_2, x_3)$ iar din definiţia funcţiei $\varphi_2(x)$ rezultă că şi aceasta este pozitivă în intervalul $[x_1, x_2]$. Referitor la funcţia $\varphi_1(x)$ observăm că ea este un polinom de grad efectiv doi a cărei derivată este pozitivă pe intervalul (x_0, x_1). Deoarece $\varphi_1(x_0)=0$ şi $\varphi_1(x_1)=\frac{3}{2}h^3$, rezultă că şi $\varphi_1(x)$ este pozitivă pe intervalul $(x_0, x_1]$, ceea ce demonstrează că $\varphi(x)$ este de asemenea pozitivă pe intervalul (x_0, x_3) şi graficul ei este dat în figura 1.

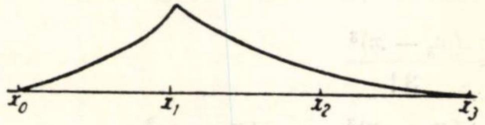


Fig 1

Faptul că $\varphi(x)$ păstrează semn constant pe (x_0, x_3) ne permite să aplicăm integralei din (10) formula mediei, obţinînd

$$R=-\frac{2f^{IV}(\xi)}{11\,h^2}\int_{x_0}^{x_3}\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad x_0<\xi<x_3.$$

Pentru calculul integralei $\int_{x_0}^{x_3}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ vom folosi chiar formula (9) înlocuind în ea pe $f(x)$ prin funcţia $\frac{1}{4!}(x-x_1)^3(x-x_3)$. Obţinem în felul acesta

$$\int_{x_0}^{x_3}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\frac{29}{24}h^4$$

şi prin urmare

$$R=-\frac{29}{132}h^2 f^{IV}(\xi). \tag{11}$$

Notînd $M_4=\max\limits_{[x_0,\, x_3]}|f^{IV}(x)|$, obţinem pentru rest următoarea delimitare

$$|R|\leqq\frac{29}{132}h^2 M_4. \tag{12}$$

Formula de derivare numerică (9) şi delimitarea (12) a restului ei le vom folosi în cele ce urmează.

§ 2. CONSTRUIREA SISTEMULUI DE ECUAŢII DIFERENŢIALE REFERITOR LA ECUAŢIA (1) ŞI CONDIŢIILE LA LIMITĂ (2)

Considerăm că în ecuaţia (1) şi condiţiile la limită (2), x ia valori în intervalul $[0,1]$, fapt care nu restrînge generalitatea, deoarece schimbarea de variabilă $x = \frac{\xi}{l}$ transformă ecuaţia (1) într-o ecuaţie de aceeaşi formă. Funcţia $\rho(x)$ este pozitivă în intervalul $[0,1]$ şi anume $\rho(x) \geqq m > 0$ iar funcţiile $f(x, t)$ $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $g(x)$ şi $\rho(x)$ sînt astfel încît să asigure existenţa, unicitatea şi derivabilitatea soluţiei problemei (1), (2) pînă la ordinul patru în raport cu x şi de primul ordin în raport cu t în domeniul $D: 0 < x < 1$, $t > 0$.

Împărţim intervalul $[0,1]$ în $n + 1$ părţi egale de lungime $h = \frac{1}{n+1}$ prin punctele $x_i = ih$, $(i = 1,2,\ldots,n)$, şi notăm $u(x_i, t) = u_i(t)$, $\rho(x_i) = \rho_i$, $f(x_i, t) = f_i(t)$, $g(x_i) = g_i$. Cu aceste notaţii ecuaţia (1) în punctele x_i se scrie sub forma:

$$u_i'(t) = \rho_i \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} + f_i(t), \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{13}$$

Vom înlocui derivata de ordinul doi din (13) în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prin diferenţa divizată de ordinul doi

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} = \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{h^2} + R_i, \tag{14}$$

unde

$$R_i = -\frac{h^2}{12} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^4}\right|_{x=\xi_i}, \quad (i-1)h < \xi_i < (i+1)h$$

iar în punctul x_1 prin formula dedusă din (9),

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_1} = \frac{2}{11h^2}\left[-3\psi_1(t) - 2u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)\right] + R_1,$$

unde

$$R_1 = -\frac{29}{132} \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=\xi_1}, \quad 0 < \xi_1 < 3h. \tag{15}$$

În urma acestor înlocuiri sistemul (13) devine

$$\mu_1' = \frac{2\rho_1}{11h^2}(-2u_1 + u_2 + u_3) - \frac{6\rho_1}{11h}\psi_1(t) + f_1(t) + \rho_1 R_1$$

$$u_i' = \frac{\rho_i}{h^2}(\mu_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + f_1(t) + \rho_i R_i, (i = 2,3,\ldots,n-1) \tag{16}$$

$$u_n' = \frac{\rho_n}{h^2}(\mu_{n-1} - 2u_n) + \frac{\rho_n}{h}\psi_2(t) + f_n(t) + \rho_n R_n$$

cu condiţiile iniţiale deduse din (2)

$$u_i(0)=g_i, \qquad (i=1,2,\dots,n). \tag{16'}$$

Soluţia sistemului (16) cu condiţiile (16′) reprezintă valorile soluţiei ecuaţiei (1) cu condiţiile (2) pe dreptele de ecuaţii $x = x_i$, $(i = 1,2,\dots, n)$.

Dacă în sistemul (16) neglijăm termenii ce conţin resturile $R_1, R_2, \dots, R_n$, obţinem sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţii constanţi :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{u}_1' = \frac{2\rho_1}{11h^2}(-2\widetilde{u}_1+\widetilde{u}_2+\widetilde{u}_3)-\frac{6\rho_1}{11h^2}\psi_1+f_1\\
&\widetilde{u}_i' = \frac{\rho_i}{h^2}(\widetilde{u}_{i-1}-2\widetilde{u}_i+\widetilde{u}_{i+1})+f_i, \quad (i=2,3,\dots,n-1)\\
&\widetilde{u}_n' = \frac{\rho_n}{h^2}(u_{n-1}-2u_n)+\frac{\rho_n}{h^2}+f_n
\end{aligned} \tag{17}$$

cu condiţiile $\widetilde{u}_i(0) = g_i$, $(i = 1,2,\dots,n)$, a cărui soluţie aproximează pe dreptele $x = x_i$ soluţia problemei (1), (2). Mai departe vom evalua eroarea acestei aproximaţii şi vom arăta că pentru h tinzînd la zero, soluţia sistemului (17) tinde spre soluţia ecuaţiei (1) cu condiţiile (2).

Dacă notăm $\gamma_i(t) = u_i(t) - \widetilde{u}_i(t)$ şi scădem din ecuaţiile sistemului (16) ecuaţiile corespunzătoare ale sistemului (17), obţinem pentru determinarea erorilor $\gamma_i(t)$ sistemul

$$\begin{aligned}
&\gamma_1' = \frac{2\rho_1}{11h^2}(-2\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)+R_1\rho_1\\
&\gamma_i' = \frac{\rho_i}{h^2}(\gamma_{i-1}-2\gamma_i+\gamma_{i+1})+R_i\rho_i, \quad (i=2,3,\dots,n-1)\\
&\gamma_n' = \frac{\rho_n}{h^2}(\gamma_{n-1}-2\gamma_n)+R_n\rho_n
\end{aligned} \tag{18}$$

şi condiţiile iniţiale $\gamma_i(0) = 0$.

Pentru evaluarea funcţiilor $\gamma_i(t)$ vom face în prealabil anumite observaţii asupra sistemului de ecuaţii (18), care ne vor permite totodată să cunoaştem unele proprietăţi ale soluţiei sistemului (17) care este de aceeaşi formă ca şi (18).

§ 3. SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE DE TIP MONOTON

Considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$Y' = AY + F, \tag{19}$$

unde matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{este constantă,}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{este matricea funcţiilor necunoscute}$$

iar în matricea

$$F = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{funcţiile } f_i(x)\ (i, = 1,2, \ldots n) \text{ sînt definite}$$

pe un interval $[a, b]$.

DEFINIŢIE. Vom numi sistemul (19) de tip monoton pe intervalul $[x_0, X] \in [a, b]$ dacă condiţiile $f_i(x) \geqq 0$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ şi $y_i(0) \geqq 0$ implică $y_i(x) \geqq 0$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ pentru $x \in [x_0, X]$.

În cele ce urmează vom indica condiţii suficiente puse asupra coeficienţilor unui sistem de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi pentru ca sistemul să fie de tip monoton. Astfel următoarea teoremă va constitui un criteriu de monotonie pentru sistemul (19).

TEOREMA 1. *Dacă funcţiile* $f_i(x)$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ *sînt continue pe intervalul* $[x_0, X]$ *şi dacă elementele matricei A satisfac condiţiile*:

$$\text{(20)} \qquad 1^\circ \quad a_{ii} < 0 \qquad (i = 1,2, \ldots, n)$$

$$a_{ij} \geqq 0 \quad \text{pentru} \quad i \neq j\ (i, j = 1,2, \ldots, n)$$

$$\text{(21)} \qquad 2^\circ \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \leqq 0 \qquad (k = 1,2, \ldots, n)$$

atunci sistemul (19) este de tip monoton.

Demonstraţie. Să presupunem că în intervalul $[x_0, X]$ există puncte x în care anumite funcţii $y_i(x)$ $i \in [1,2, \ldots, n]$ sînt negative, şi să notăm cu M mulţimea acestor puncte. Deoarece mulţimea M este mărginită inferior de x_0, ea va avea un infimum pe care-l vom nota cu $\overline{x}$. Conform celor de mai sus, $\overline{x} \geqq x_0$ şi deoarece $y_i(x_0) \geqq 0$ $(i = 1,2, \ldots, n)$, rezultă că în punctele $x \in M$ suficient de apropiate de $\overline{x}$, funcţiile y_i care sînt negative au derivatele de asemenea negative. Fie x^* un astfel de punct și $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_s}$ funcțiile care sînt negative în acest punct; atunci, în conformitate cu definiția lui x^*, avem de asemenea $y'_{i_1}(x^*) < 0$, $y'_{i_2}(x^*) < 0, \ldots, y'_{i_s}(x^*) < 0$. Dacă considerăm ecuațiile sistemului (19) ce conțin aceste derivate și ținem seama de faptul că $f_i(x) \geqq 0$ în intervalul $[x_0, X]$, atunci au loc inegalitățile:

$$
\begin{aligned}
&a_{i_1 1} y_1(x^*) + a_{i_1 2} y_2(x^*) + \ldots + a_{i_1 n} y_n(x^*) \leqq 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{i_s 1} y_1(x^*) + a_{i_s 2} y_2(x^*) + \ldots + a_{i_s n} y_n(x^*) \leqq 0.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Adunînd aceste inegalități, obținem

$$
\begin{aligned}
&[a_{i_1 1} + a_{i_2 1} + \ldots + a_{i_s 1}) y_1(x^*) + \ldots + (a_{i_1 i_1} + a_{i_2 i_1} + \ldots + \\
&+ a_{i_s i_1}) y_{i_1}(x^*) + \ldots + (a_{i_1 n} + a_{i_2 n} + \ldots + a_{i_s n}) y_n(x^*) < 0.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Observăm că în inegalitatea (23) coeficienții funcțiilor $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_s}$ conțin elemente ale matricei cu indici egali, iar coeficienții celorlalte funcții conțin numai elemente cu indici diferiți. Atunci, ținînd seama de condițiile 1° și 2°, funcțiile negative în x^* se înmulțesc cu coeficienți nepozitivi, iar funcțiile nenegative se înmulțesc cu coeficienți nenegativi, de unde rezultă că partea stîngă a inegalității (23) este nenegativă, ceea ce contrazice inegalitatea însăși. Contradicția la care s-a ajuns arată că nu pot exista puncte în care funcțiile negative să fie descrescătoare. Dar cum funcțiile $y_i(x)$ nu pot fi negative pe intervalul $[x_0, X]$ decît descrescînd, de la valorile $y_i(x_0) \geqq 0$, rezultă că pe tot intervalul acesta funcțiile $y_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ sînt nenegative, ceea ce demonstrează teorema.

Observație. Dacă în loc de inegalitatea $f_i(x) \geqq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ impunem funcțiilor $f_i(x)$ condiții mai restrictive, atunci vom obține pentru nenegativitatea soluției sistemului (19) condiții suficiente mai puțin restrictive referitoare la coeficienții sistemului.

În felul acesta se obține următorul criteriu de nenegativitate a soluției sistemului (19).

TEOREMA 2. *Dacă funcțiile* $f_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ *sînt continue și nenegative pe intervalul* $[x_0, X]$ *și în fiecare punct al acestui interval cel puțin o funcție* $f_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ *este pozitivă și dacă coeficienții matricei* A *satisfac condițiile*

$$
\begin{aligned}
&a_{ii} < 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \\
&a_{ij} > 0 \quad i \neq j \quad (j = 1,2,\ldots,n)
\end{aligned} \tag{24}
$$

atunci soluția sistemului (19) care satisface la condițiile $y_i(x_0) \geqq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ *este nenegativă pe intervalul* $[x_0, X]$.

Demonstrație. Presupunem că există puncte în $[x_0, X]$ în care o anumită funcție $y_i(x)$ este negativă și fie M_i mulțimea acestor puncte. Deoarece M_i este o mulțime mărginită inferior de x_0, ea va avea un infimum x_i^*. Pe baza continuității funcțiilor $y_i(x)$ pe intervalul $[x_0, X]$, în x_i^* va avea loc relația $y_i(x_i^*) \leqq 0$. Dacă $x_i^* = x_0$, atunci $y_i(x^*) = 0$, iar dacă $x_i^* > x_0$, atunci în punctele $x \in [x_0, x_i^*]$, $y_i(x) \geqq 0$, de unde rezultă, pe baza continuității funcției $y_i(x)$, că $y_i(x_i^*) \geqq 0$. Din cele două rezultate asupra funcției $y_i(x)$ în punctul x_i^* rezultă că $y_i(x_i^*) = 0$. Pe de altă parte, deoarece $y_i(x)$ trece prin punctul x_i^* de la valori nenegative la valori negative, în acest punct derivata ei este negativă sau nulă, adică $y_i'(x_i^*) \leqq 0$.

Fie acum $y_j^* = \min\ [x_1^*,\ x_2^*, \ldots, x_n^*]$; atunci $y_j(x_j^*) = 0$, $y_j'(x_j^*) \leqq 0$, iar $y_k(x_j^*) \geqq 0$ pentru $k \neq j$. Din ecuația de ordinul j a sistemului (19) deducem că în punctul x_j^* are loc relația

$$a_{j1}y_1(x_j^*) + a_{j2}y_2(x_j^*) + \ldots + a_{jj}y_j(x_j^*) + \ldots + \\ + a_{nj}y_n(x_j^*) + f_j(x_j^*) \leqq 0. \tag{25}$$

Ținînd seama de condițiile la care satisfac coeficienții sistemului (19) și funcțiile $f_i(x)$, rezultă că inegalitatea poate avea loc numai pentru $y_i(x_j^*) = 0$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ și $f_j(x_j^*) = 0$. În acest caz avem, conform celor arătate mai sus, $y_j'(x_j^*) \leqq 0$ și ecuația de ordinul i a sistemului arată că $f_i(x_j^*) = 0$ pentru $i = 1,2, \ldots, n$, ceea ce contrazice ipoteza pusă asupra funcțiilor. În concluzie mulțimile M_i sînt toate vide și deci funcțiile $y_i(x)$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ sînt nenegative pe intervalul $[x_0, X]$ ceea ce demonstrează teorema 2.

Observație. Teoremele 1 și 2 rămîn adevărate și dacă se consideră intervalul $[X, x_0]$.

Din teorema 1 se poate deduce și alte proprietăți ale soluției sistemului (19). Astfel, se poate demonstra următoarea teoremă:

TEOREMA 3. *Dacă $f_i'(x)$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ sînt continue și nenegative pe intervalul $[x_0, X]$ și $y_i(0) = 0$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ și dacă elementele matricei A satisfac condițiile din teorema 1, atunci funcțiile $y_i(x)$ sînt nedescrescătoare.*

Demonstrație. Notînd $y_i'(x) = v_i(x)$, atunci funcțiile $v_i(x)$ satisfac sistemul de ecuații

$$V' = AV + F', \tag{26}$$

care se obține din (19) prin derivare, și condițiile inițiale

$$v_i(x_0) = b_i(x_0),\ (i = 1,2, \ldots, n). \tag{27}$$

Dar sistemul (26) conform teoremei 1 este de tip monoton, prin urmare soluția lui $v_i(x)$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ este nenegativă, ceea ce conduce la concluzia că $y_i'(x) \geqq 0$ pentru $x \in [x_0, X]$ și deci funcțiile $y_i(x)$ sînt nedescrescătoare pe intervalul $[x_0, X]$. Să considerăm acum, alături de sistemul (19), sistemul

$$Z' = AZ + L$$

unde

$$Z = \begin{pmatrix} z(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(n) \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad L = \begin{pmatrix} l_1(x) \\ l_2(x) \\ \vdots \\ l_n(x) \end{pmatrix}, \tag{28}$$

atunci se poate demonstra următoarea teoremă:

TEOREMA 4. *Dacă funcțiile $f_i(x)$ și $l_i(x)$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ sînt continue pe intervalul $[x_0, X]$ și pe acest interval sînt îndeplinite inegalitățile*

$f_i(x) \leqq l_i(x)$ *și* $y_i(x_0) \leqq Z_i(x_0)$ $\qquad (i = 1,2, \ldots, n)$

și dacă

$$a_{ii} < 0 \qquad (i = 1,2, \ldots, n)$$

$$a_{ij} \geqq 0 \quad i \neq j \qquad (j = 1,2, \ldots, n) \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \leqq 0 \qquad (k = 1,2, \ldots, n),$$

atunci

$$y_i(x) \leqq z_i(x) \, (i = 1,2, \ldots, n) \quad \textit{pentru} \quad x \in [x_0, X]. \tag{30}$$

Demonstrația acestei teoreme se deduce din teorema 1 aplicată sistemului ce se obține prin scăderea lui (19) din (28).

Proprietățile demonstrate prin teoremele 1, 3 și 4 referitoare la soluția sistemului (19) și (28) vor fi utilizate în cele ce urmează pentru evaluarea erorilor $\gamma_i(t)$. Observăm în primul rînd că coeficienții sistemului (18) satisfac la condițiile suficiente de monotonie din teorema 1.

§ 4. EVALUAREA ERORII

Să revenim la sistemul (18) și să considerăm alături de acest sistem următorul:

$$\Omega_1' = \frac{2\rho_1}{11 h^2}(-2\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3) + \rho_1 \frac{30}{132} h^2 M_4$$

$$\Omega_i' = \frac{\rho_i}{h^2}(\Omega_{i-1} - 2\Omega_i + \Omega_{i+1}) + \rho_i \frac{h^2}{12} M_4, \quad (i = 2, \ldots, n-1) \tag{31}$$

$$\Omega_n' = \frac{\rho_n}{h^2}(\Omega_{n-1} - 2\Omega_n) + \rho_n \frac{h^2}{12} M_4$$

cu condiția inițială $\Omega_i(0) = 0$, $(i = 1,2, \ldots, n)$, unde

$$M_4 = \max_D \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|.$$

Conform formulelor (14), (15) și teoremei 4 avem

$$\gamma_i(t) \leqq \Omega_i(t), \qquad (i = 1,2, \ldots, n). \tag{32}$$

Dacă în (31) înlocuim $\Omega_i = -\omega_i$, avem sistemul

$$\omega_1' = \frac{2\rho_1}{11 h^2}(-2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) - \rho_1 \frac{30}{132} h^2 M_4$$

$$\omega_i' = \frac{\rho_i}{h^2}(\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}) - \frac{\rho_i h^2}{12} M_4$$

$$\omega_n' = \frac{\rho_n}{h^2}(\omega_{n-1} - 2\omega_n) - \frac{\rho_n}{12} M_4$$

și

$$\omega_i(0) = 0$$

a cărui soluţie, conform formulelor (14) şi (15) precum şi teoremei 4, satisface inegalităţile

$$\omega_i(t) \leqq \gamma_i(t), \qquad (i = 1,2, \ldots, n) \tag{32'}$$

Din (32), (32′) şi definiţia lui $\omega_i(t)$ deducem

$$|\gamma_i| \leqq \Omega_i, \qquad (i = 1,2, \ldots, n). \tag{33}$$

Pentru rezolvarea sistemului (31) observăm că soluţia lui este de forma

$$\Omega_i = \alpha_{i1} C_1 e^{r_1 t} + \alpha_{i2} C_2 e^{r_2 t} + \ldots + \alpha_{in} C_n e^{r_n t} + \overline{\Omega}_i, \tag{34}$$

unde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sînt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$D_n(h^2 r) = \begin{vmatrix} \frac{11}{2\rho_1} h^2 r + 2 & -1 & -1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -1 & \frac{h^2 r}{\rho_2} + 2 & -1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{h^2 r}{\rho_3} + 2 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{h^2 r}{\rho_{n-1}} + 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & \frac{h^2 r}{\rho_n} + 2 \end{vmatrix} = 0$$

iar α_{ik} $(i, k = 1,2, \ldots, n)$ se determină din sistemele

$$\begin{gathered} \left(\frac{11}{2\rho_1} h^2 r_i + 2\right) \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \alpha_{i_3} = 0 \\ -\alpha_{i_1} + \left(\frac{h^2 r_i}{\rho_2} + 2\right) \alpha_{i_2} - \alpha_{i_3} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\alpha_{i,n-2} + \left(\frac{h^2 r_i}{\rho_{n-1}} + 2\right) \alpha_{i,n-1} - \alpha_{i,n} = 0 \\ -\alpha_{i,n-1} + \left(\frac{h^2 r_i}{\rho_n} + 2\right) \alpha_{i,n} = 0 \end{gathered}$$

$$(i = 1,2, \ldots, n)$$

Vom nota pentru simplificare $h^2 r = \beta$. Dezvoltînd determinantul (35) după ultima coloană, observăm că pentru $n > 3$ are loc formula de recurenţă

$$D_n(\beta) = \left(\frac{\beta}{\rho_n} + 2\right) D_{n-1}(\beta) - D_{n-2}(\beta). \tag{36}$$

Pentru $n=2$ avem

$$D_2(\beta)=\frac{1}{2\rho_1\rho_2}[11\beta^2+2(11\rho_2+2\rho_1)\beta+6\rho_1\rho_2]=0 \tag{37}$$

iar pentru $n=3$

$$D_3(\beta)=\frac{1}{2\rho_1\rho_2\rho_3}[11\beta^3+2(11\rho_3+11\rho_2+2\rho_1)\beta^2+(33\rho_2\rho_3+ \\ +8\rho_1\rho_3+6\rho_1\rho_2)\beta+6\rho_1\rho_2\rho_3]=0. \tag{38}$$

Vom arăta că în anumite condiţii rădăcinile ecuaţiilor (37) şi (38) sînt reale negative şi se separă.

Rădăcinile ecuaţiei (37) sînt negative şi anume

$$\beta_1^{(2)}=\frac{1}{11}[-11\rho_2-2\rho_1-\sqrt{(11\rho_2-2\rho_1)^2+22\rho_1\rho_2}]. \tag{39}$$

$$\beta_2^{(2)}=\frac{1}{11}[-11\rho_2-2\rho_1+\sqrt{(11\rho_2-2\rho_1)^{12}+22\rho_1\rho_2}].$$

Înlocuind valorile lui $\beta_1^{(2)}$ şi $\beta_2^{(2)}$ în $D_3(\beta)$, obţinem

$$D_3(\beta_2^{(2)})=\frac{1}{2\rho_1}[11\rho_2-4\rho_1+\sqrt{(11\rho_2-2\rho_1)^2+22\rho_1\rho_2}],$$

$$D_3(\beta_1^{(2)})=\frac{1}{2\rho_1}[11\rho_2-4\rho_1-\sqrt{(11\rho_2-2\rho_1)^2+22\rho_1\rho_2}].$$

Pentru $(11\rho_2-2\rho_1)^2+22\rho_1\rho_2>(11\rho_2-4\rho_1)^2$, adică

$$\rho_2>\frac{2}{11}\rho_1 \tag{40}$$

avem

$$D_3(\beta_2^{(2)})>0 \quad \text{iar} \quad D_3(\beta_1^{(2)})<0. \tag{41}$$

Condiţia (40) se realizează pentru h suficient de mic avînd în vedere faptul că $\rho(x)$ este o funcţie continuă.

Din inegalităţile (41) şi din faptul că $D_3(0)=3$, se constată că $D_3(\beta)$ are trei rădăcini reale negative $\beta_1^{(3)}<\beta_2^{(3)}<\beta_3^{(3)}$ şi că avem inegalităţile

$$\beta_1^{(3)}<\beta_1^{(2)}<\beta_2^{(3)}<\beta_2^{(2)}<\beta_3^{(3)}<0.$$

Vom arăta mai departe că are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 5. *Dacă* $\rho_1<\frac{11}{2}\rho_2$, *atunci rădăcinile polinoamelor* $D_n(\beta)$, $n=2,3,\ldots$ *sînt reale negative şi se separă, adică dacă notăm cu* $\beta_1^{(k-1)}<\beta_2^{(k-1)}<\ldots<\beta_{k-1}^{(k-1)}$ *rădăcinile polinomului* $D_{k-1}(\beta)$ *şi cu* $\beta_1^{(k)}<\beta_2^{(k)}<\ldots<\beta_k^{(k)}$ *cele ale polinomului* $D_k(\beta)$, *avem*

$$\beta_1^{(k)}<\beta_1^{(k-1)}<\beta_2^{(k)}<\beta_2^{(k-1)}<\ldots<\beta_{k-1}^{(k-1)}<\beta_k^{(k-1)}.$$

Demonstrație. Proprietatea enunțată de teorema 5 este adevărată referitor la polinoamele $D_2(\beta)$ și $D_3(\beta)$. Pe de altă parte reiese din calcul că $D_2(0) = D_3(0) = 3$, iar din formula de recurență (36) deducem că $D_n(0) = 3$ pentru $n = 2,3,\ldots$ Presupunem, acum, că polinoamele $D_2(\beta)$, $D_3(\beta), \ldots, D_{k-1}(\beta)$ au toate rădăcinile reale negative și se separă; atunci notînd cu $\beta_1^{(k-1)}, \beta_2^{(k-1)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(k-1)}$ rădăcinile polinomului $D_{k-1}(\beta)$ în ordine crescătoare, avem

$$D_{k-2}(\beta_i^{(k-1)})\, D_{k-2}(\beta_{i+1}^{(k-1)}) < 0 \tag{42}$$

pentru $i = 1,2,\ldots,\ k-1$.

Înlocuind în formula de recurență (36) pe β cu rădăcinile polinomului $D_{k-1}(\beta)$ avem

$$D_k(\beta_i^{(k-1)}) = -\, D_{k-2}(\beta_i^{k-1}), \qquad (i = 1,2,\ldots,k-1)$$

și conform cu (42)

$$D_k(\beta_i^{(k-1)}) D_k(\beta_{i+1}^{(k-1)}) < 0, \qquad (i = 1,2,\ldots,k-2). \tag{43}$$

Din (43) se constată că $D_k(\beta)$ prezintă $k-2$ schimbări de semn în rădăcinile lui $D_{k-1}(\beta)$ și deci are $k-2$ rădăcini reale distincte cuprinse între cele ale lui $D_{k-1}(\beta)$. Pe de altă parte deoarece $D_k(0) = 3$ și $D_k(\beta_{k-1}^{(k-1)}) = -\, D_{k-2}(\beta_{k-1}^{(k-1)}) < 0$ rezultă că $D_k(\beta)$ mai are o rădăcină între $\beta_{k-1}^{(k-1)}$ și 0. Să arătăm că $D_k(\beta)$ se mai anulează odată la stînga rădăcinii $\beta_1^{(k-1)}$. Într-adevăr, din (36) deducem că $D_k(\beta_1^{(k-1)}) = -\, D_{k-2}(\beta_1^{(k-1)})$ dar deoarece polinoamele $D_k(\beta)$ și $D_{k-2}(\beta)$ au gradul de aceeași paritate și coeficientul lui β la puterea cea mai mare este pozitiv, rezultă că ele au același semn pentru $\beta \to -\infty$ și deci $D_k(\beta)$ se mai anulează odată la stînga lui $\beta_1^{(k-1)}$. În concluzie $D_k(\beta)$ are k rădăcini reale negative și care se separă cu ale polinomului $D_{k-1}(\beta)$.

Din cele demonstrate rezultă că toate rădăcinile ecuației caracteristice (35) sînt reale și negative.

Să determinăm acum o soluție particulară a sistemului (31), de forma $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$, unde K_i sînt constante ce se determină din sistemul

$$\begin{aligned} &2K_1 - K_2 - K_3 = \frac{15}{12}\, h^4 M_4 \\ &-K_{i-1} + 2K_i - K_{i+1} = \frac{1}{12}\, h^4 M_4, \qquad (i = 2,\ldots,n-2) \\ &-K_{n-1} + 2K_n = \frac{1}{12}\, h^4 M_4. \end{aligned} \tag{44}$$

Determinantul sistemului este $D_3(0) = 3$ și deci soluția lui este dată de formula

$$K_i = \frac{h^4 M_4}{36}\, \Delta_n^{(i)}, \qquad (i = 1,2,\ldots,n), \tag{45}$$

unde

$$\Delta_n^{(i)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & \overset{i}{15} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Dezvoltînd acest determinant după primele i linii obţinem pentru $i > 1$

$$\Delta_n^{(i)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \ldots & 0 & 15 \\ -1 & 2 & -1 \ldots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \ldots & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

sau

$$\Delta_n^{(i)} = (n-i+1)\,\Gamma_i + 3\Lambda_{n-i},$$

unde

$$\Gamma_i = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \ldots & 0 & 15 \\ -1 & 2 & -1 \ldots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \ldots & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{iar} \quad \Lambda_{n-i} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Se observă că au loc relaţiile

$$\Gamma_i = 3 + \Gamma_{i-1} \quad \text{şi} \quad \Lambda_{n-i} = n - i + \Lambda_{n-i-1}$$

de unde deducem

$$\Gamma_i = 3i + 11 \quad \text{și} \quad \Lambda_{n-i} = \frac{1}{2}(n-i+1)(n-i)$$

iar pentru $\Delta_n^{(i)}$ obținem

$$\Delta_n^{(i)} = \frac{1}{2}(3\,n^2 - 3i^2 + 25\,n - 19\,i + 22). \tag{46}$$

Dacă $i=1$, obținem printr-un calcul direct $\Delta_n^{(1)} = \frac{1}{2}(3\,n^2 + 25\,n)$, de unde se observă că formula (46) este valabilă și pentru $i=1$. Din (45) avem

$$k_i = \frac{h^4 M_4}{72}(3n^2 - 3i^2 + 25\,n - 19\,i + 22).$$

Cu acestea am demonstrat că soluția sistemului (31), cu condițiile inițiale nule, este de forma

$$\Omega_i = C_1 \alpha_{i1} e^{r_1 t} + C_2 \alpha_{i2} e^{r_2 t} + \ldots + C_n \alpha_{in} e^{r_n t} + \\ + \frac{h^4 M_4}{72}(3n^2 - 3i^2 + 25\,n - 19\,i + 22),$$

unde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sînt numere reale negative.

Deoarece însă sistemul (31) satisface condițiile din teorema 3, rezultă că soluția lui este formată din funcții nedescrescătoare și prin urmare

$$\Omega_i(t) \leqq \lim_{t\to\infty} \Omega_i(t) = \frac{h^4}{72} M_4 (3n^2 - 3i^2 + 25\,n - 19\,i + 22).$$

Pe de altă parte din (34) avem de asemenea

$$|\gamma_i| \leqq \frac{h^4}{72} M_4 (3n^2 - 3i^2 + 25\,n - 19\,i + 22)$$

sau

$$|\gamma_i| \leqq \frac{h^4}{72} M_4 (3n^2 + 25\,n). \tag{47}$$

Din definiția lui h avem $h = \frac{1}{n+1}$ și atunci (47) devine

$$|\gamma_i| \leqq \frac{h^2}{72}(3 + 19\,h - 22\,h^2)\,M_4, \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{48}$$

iar pentru $h \leqq \frac{1}{5}$ avem următoarea delimitare

$$|\gamma_i| < \frac{h^2}{12} M_4, \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{49}$$

Această ultimă delimitare (49) ne arată că eroarea cu care soluţia sistemului (17) aproximează pe dreptele de ecuaţii $x = x_i$, soluţia problemei (1), (2) nu depăşeşte, în cazul cînd $h \leqq \frac{1}{5}$, eroarea cu care s-au aproximat ecuaţiile (13).

Delimitarea (48) ne demonstrează de asemenea că pentru $h \to 0$, soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale (17) tinde spre soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale (1) şi condiţiile (2).

Pe de altă parte, din faptul că rădăcinile ecuaţiei caracteristice (35) sînt negative, rezultă că soluţia ecuaţiei (1) cu condiţiile (2) este mărginită pentru $t \geqq 0$ dacă funcţiile $f(x, t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ sînt mărginite.

Pentru determinarea unei valori aproximative a funcţiei în punctul $x = 0$ se poate folosi un polinom de interpolare pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, luînd ca valori ale funcţiei $u(x,t)$, în aceste puncte, valorile aproximative date de sistemul (17).

§ 5. CONSTRUIREA SISTEMULUI DE ECUAŢII DIFERENŢIALE REFERITOR LA ECUAŢIA (1) ŞI CONDIŢIILE (3)

În acest paragraf vom considera problema rezolvării ecuaţiei

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{1}$$

cu condiţiile

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} &= \psi_1(t) \\ &\qquad ; \quad t > 0 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} &= \psi_2(t) \\ u(x, 0) = g(x) \quad &; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{aligned} \tag{3}$$

unde $\rho(x) \geqq m > 0$ pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$. Presupunem din nou că problema (1), (3) are soluţie unică şi că derivatele soluţiei care intră în consideraţiile ulterioare există.

Pentru construirea sistemului de ecuaţii diferenţiale procedăm ca în § 2, folosind aceleaşi notaţii. Deoarece în cazul de faţă condiţiile la limită ne dau derivata funcţiei $u(x, t)$ la ambele capete ale intervalului de variaţie a lui x, vom folosi pentru $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x = x_n}$ o formulă de derivare numerică adecvată, dedusă din formula (9). Dacă în formula (9) considerăm nodurile în ordine descrescătoare, adică luăm în loc de h, $-h$ şi schimbăm notarea nodurilor, obţinem :

$$f''(x_2) = \frac{2}{11 h^2} [3h f'(x_3) - 2 f(x_2) + f(x_1) + f(x_0)] + \overline{R}, \tag{50}$$

unde $\overline{R}$ are delimitarea dată de formula (12).

Din formula (50) deducem pentru $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_n}$ următoarea

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_n} = \frac{2}{11h^2}\left[3h\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} - 2u(x_n,t) + u(x_{n-1},t) + u(x_{n-2},t)\right] + R_n \tag{51}$$

unde

$$R_n = -\frac{29}{132}h^2\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=\xi_2}; \quad 1-3h < \xi_2 < 1 \tag{51'}$$

Înlocuind în (13) $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_i}$ $(i=2,3,\ldots,n-1)$ prin diferenţa divizată de ordinul doi dată în (13'), $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_1}$ prin formula dată în (13''), iar $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_n}$ prin (51), ecuaţia (1) şi condiţiile (3) se transformă în sistemul

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{2\rho_1}{11h^2}(-2u_1+u_2+u_3) - \frac{6\rho_1}{11h}\psi_1(t) + f_1(t) + \rho_1 R_1 \\ u_i' &= \frac{\rho_i}{h^2}(u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}) + f_i(t) + \rho_i R_i, (i=2,3,\ldots,n-1) \\ u_n' &= \frac{2\rho_n}{11h^2}(u_{n-2}+u_{n-1}-2u_n) + \frac{6\rho_n}{11h}\psi_2(t) + f_n(t) + \rho_n R_n \end{aligned} \tag{52}$$

şi condiţiile iniţiale

$$u_i(0) = g_i, \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{53}$$

Neglijînd termenii ce conţin resturile R_i din sistemul (52), obţinem pentru determinarea unor valori aproximative ale soluţiei problemei (1), (3) pe dreptele $x=x_i\,(i=1,2,\ldots,n)$, sistemul

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1' &= \frac{2\rho_1}{11h^2}(-2\tilde{u}_1+\tilde{u}_2+\tilde{u}_3) - \frac{6\rho_1}{11h}\psi_1 + f_1 \\ \tilde{u}_i' &= \frac{\rho_i}{h^2}(\tilde{u}_{i-1}-2\tilde{u}_i+\tilde{u}_{i+1}) + f_i, \qquad (i=2,3,\ldots,n) \\ \tilde{u}_n' &= \frac{2\rho_n}{11h^2}(u_{n-2}+\tilde{u}_{n-1}-2\tilde{u}_n) + \frac{6\rho_n}{11h}\psi_2 + f_n \end{aligned} \tag{54}$$

cu condiţiile iniţiale

$$\tilde{u}_i(0) = g_i, \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

§ 6. EVALUAREA ERORII ÎN PROBLEMA (1), (3)

Notînd diferenţa dintre soluţia exactă a problemei (1), (3) şi cea aproximativă dedusă din (54) prin $\eta_i(t) = u_i(t) - \widetilde{u}_i(t)$, rezultă prin scăderea din ecuaţiile (52) ecuaţiile corespunzătoare ale sistemului (54) că $\eta_i(t)\ (i = 1,2,\ldots,n)$ satisface sistemul

$$\begin{aligned} \eta_1' &= \frac{2\rho_1}{11h^2}(-2\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) + \rho_1 R_1 \\ \eta_i' &= \frac{\rho_i}{h^2}(\eta_{i-1} - 2\eta_i + \eta_{i+1}) + \rho_i R_i \qquad (i = 2,3,\ldots,n-1) \\ \eta_n' &= \frac{2\rho_n}{h^2}(\eta_{n-2} + \eta_{n-1} - 2\eta_n) + \rho_n R_n \end{aligned} \tag{55}$$

şi condiţiile iniţiale

$$\eta_i(0) = 0, \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Ţinînd seama de expresiile resturilor $R_i\ (i = 1,2,\ldots,n)$ date în formulele (15), (14) şi (51′), vom considera alături de sistemul (55) următorul sistem:

$$\begin{aligned} \chi_1' &= \frac{2\rho_1}{11h^2}(-2\chi_1 + \chi_2 + \chi_3) + \frac{2\rho}{132}\rho M_4 h^2 \\ \chi_i' &= \frac{\rho_i}{h^2}(\chi_{i-1} - 2\chi_i + \chi_{i+1}) + \frac{29}{132}\rho M_4 h^2 \\ \chi_n' &= \frac{2\rho_n}{11h^2}(\chi_{n-2} + \chi_{n-1} - 2\chi_n) + \frac{29}{132}\rho M_4 h^2 \end{aligned} \tag{56}$$

cu condiţiile iniţiale $\chi_i(0) = 0$, unde $\rho = \max\limits_{[0,1]} \rho(x)$.

Pe de altă parte, teoremele din § 3 referitoare la sistemul (19) îşi păstrează valabilitatea şi pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale din paragraful de faţă cu deosebiri neesenţiale în demonstraţii. Atunci pe baza acestor teoreme între soluţiile sistemelor (55) şi (56) avem următoarele inegalităţi:

$$|\eta_i| < \chi_i, \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Dar deoarece soluţia sistemului (56) cu condiţiile iniţiale nule este

$$\chi_i = \frac{29}{132}\rho M_4 h^2 t, \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

avem pentru η_i delimitarea

$$|\eta_i| < \frac{29}{132}\rho M_4 h^2 t, \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{57}$$

Din delimitarea găsită reiese că soluţia sistemului (52) tinde, pentru h tinzînd la zero, spre soluţia problemei (1), (3) şi prin urmare schema propusă este convergentă. Totodată se vede că delimitarea erorii depinde de t, fapt care s-ar putea datora metodei de lucru şi nu erorii în sine.

Pe de altă parte, observăm că ecuaţia caracteristică a sistemului (52) adică

$$\begin{vmatrix} \frac{11}{2\rho_1}h^2r+2 & -1 & -1 & \ldots\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{h^2r}{\rho_2}+2 & -1 & \ldots\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{h^2r}{\rho_3}+2 & \ldots\ 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots\ . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots -1 & \frac{h^2r}{\rho_{n-1}}+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots -1 & -1 & \frac{11h^2r}{2\rho_n}+2 \end{vmatrix} = 0$$

are o soluţie nulă iar toate celelalte $r_2, r_3, \ldots, r_n$ reale negative. (Demonstraţia acestei afirmaţii este analoagă cu cea dată în § 4 la ecuaţia caracteristică a sistemului (17)). Datorită acestui fapt soluţia sistemului (52) va fi de forma :

$$\widetilde{u}_i(t) = C_1 + \alpha_{i2}C_2 e^{r_2 t} + \ldots + \alpha_{in}C_n e^{r_n t} + U_i(t), \quad (i = 1,2,\ldots, n)$$

unde constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $\alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \ldots, \alpha_{in}$ şi funcţiile $U_i(t)$ depind de datele problemei. Din cauza rădăcinii nule a ecuaţiei caracteristice, de data aceasta nu putem ca în cazul problemei (1), (2) să facem afirmaţii asupra mărginirii soluţiei.

Sistemele de ecuaţii (17) şi (52) avînd coeficienţi constanţi şi care prezintă o anumită simetrie, rezolvarea lor se poate programa cu uşurinţă la maşini analogice de calcul, obţinîndu-se în felul acesta valori aproximative ale soluţiilor problemelor considerate pe dreptele de ecuaţii $x = x_i$ $(i = 1,2,\ldots, n)$.

Pentru a obţine o funcţie care să aproximeze soluţia ecuaţiei (1) cu condiţiile (2) sau (3) în domeniul D, se poate construi un polinom de interpolare pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ în cazul problemei (2) şi pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în cazul problemei (3), folosind ca valori ale soluţiei în aceste puncte valorile aproximative date de sistemele de ecuaţii diferenţiale.

Primită la redacţie la 1 martie 1966

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. I. S. Berezin, N. L. Jidkov, *Metodî vîcislenii*, vol. II, Moscova, 1962.

2. D. V. Ionescu, *Aplicarea formulelor de derivare numerică la integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale*. St. cerc. mat., Cluj **10**, *2*, 259–315 (1959).

3. Lamberto Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*. Berlin, 1959.

DEFINIREA ALGEBRELOR BOOLEENE ȘI A SEMILATICILOR CU AJUTORUL A DOUĂ AXIOME-IDENTITĂȚI

DE

ALEX. PETCU

În această lucrare se caracterizează algebrele booleene cu ajutorul a două axiome-identități, folosind o operație binară ,,$\cup$'' și o operație unară ,,$-$''; de asemenea, se caracterizează semilaticile cu ajutorul a două axiome-identități. În § 2 autorul studiază independența unui sistem de axiome dat de S. Rudeanu pentru algebrele booleene.

INTRODUCERE

În § 1 al notei de față vom caracteriza algebrele booleene numai cu ajutorul a două axiome-identități, folosind o operație binară (notată ,,$\cup$'') și o operație unară (notată ,,$-$''). Tot în § 1 se vor defini semilaticile, utilizînd două axiome-identități. Iar în § 2, vom studia independența sistemului de axiome dat de S. Rudeanu [1] (cap. V, § 2, p. 82) pentru algebrele booleene.

Privind problema caracterizării algebrelor booleene cu ajutorul a două axiome-identități, menționăm că B. A. Bernstein în [2] și [3] a dat sisteme de cîte două axiome-identități pentru algebrele booleene, folosind însă operația $x \mid y = \overline{x} \cap \overline{y}$.

Mai subliniem aici faptul că în demonstrația teoremelor 1 și 2 din prezenta notă, vom folosi lema lui Iu. I. Sorkin [4], lemă care i-a permis lui Iu. I. Sorkin să caracterizeze laticile generale în [4] cu ajutorul a trei axiome-identități.

Dăm mai jos această lemă, cu o ușoară adaptare a enunțului la necesitățile de aici.

LEMĂ. *Fie o mulțime înzestrată cu o operație binară ,,$\cup$'' și eventual cu alte operații, satisfăcînd*

$$x \cup x = x \tag{1}$$

$$t \cup A = A' \cup t, \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 891–895, BUCUREȘTI, 1967

în care A și A' sînt expresii formate prin suprapuneri ale operațiilor date; A și A' neconținînd variabila t. Atunci sistemul $\{(1), (2)\}$ implică

$$A = A'. \tag{*}$$

Într-adevăr, luînd $t = A'$ și aplicînd (1), din (2) obținem

$$A' \cup A = A' \cup A' = A';$$

analog, pentru $t = A$, avem

$$A' \cup A = A \cup A = A,$$

de unde se deduce (*).

§ 1. În acest paragraf vom demonstra următoarele rezultate:

TEOREMA 1. *O mulțime B, în care s-au definit o operație binară (notată „$\cup$") și o operație unară (notată „—"), este o algebră booleană dacă și numai dacă sînt satisfăcute axiomele:*

I. $$x \cup x = x$$

II. $$[(x \cup y) \cup z] \cup [\overline{\bar{t} \cup \bar{u}} \cup \overline{\bar{t} \cup u}] = t \cup [x \cup (y \cup z)].$$

Sistemul de axiome $\{$I, II$\}$ este independent.

TEOREMA 2. *O mulțime S, în care s-a definit o operație binară (notată „$\cup$"), este o $\cup$-semilatice dacă și numai dacă sînt satisfăcute axiomele:*

I. $$x \cup x = x$$

III. $$[(x \cup y) \cup z] \cup t = t \cup [x \cup (y \cup z)].$$

Sistemul de axiome $\{$I, III$\}$ este independent.

Demonstrație. Mai întîi vom pune în evidență o lemă și anume:

LEMA (L). *Fie o mulțime înzestrată cu o operație binară „$\cup$" și eventual cu alte operații, satisfăcînd sistemul:*

I. $$x \cup x = x$$

$$A_2 \cup A_1 = t \cup A_2', \tag{3}$$

în care A_1, A_2, A'_2 sînt expresii formate prin suprapuneri ale operațiilor date; expresiile A_2 și A'_2 conținînd numai operația „$\cup$" și variabile diferite de t și de variabilele care apar în expresia A_1. Atunci: sistemul $\{I, (3)\}$ este independent și implică identitățile:

$$A_1 = t \tag{4}$$

$$x \cup t = t \cup x \tag{5}$$

$$A_2 = A'_2. \tag{6}$$

Demonstrația lemei (L). Egalînd toate variabilele care apar în A_2 și A'_2 cu una din ele, fie aceasta x, și aplicînd I, relația (3) devine

$$x \cup A_1 = t \cup x \tag{3'}$$

de unde, în virtutea lemei lui Sorkin, rezultă (4). Ținînd seama de (4), relațiile (3) și (3′) devin respectiv

$$A_2 \cup t = t \cup A'_2 \tag{3''}$$

și (5). Aplicînd lema lui Sorkin relației (3″), obținem (6).

Independenţa sistemului $\{$I, (3)$\}$ rezultă din modelele :

M_1. Mulţimea $\{0,1\}$, $x\cup y=0$ şi celelalte operaţii arbitrare.

M_2. Mulţimea $\{0,1\}$, $x\cup y=x$ şi celelalte operaţii arbitrare.

Observaţie. Din (4) rezultă că dacă t nu apare în A_1, sistemul $\{$I, (3)$\}$ *este contradictoriu.*

După această pregătire trecem la demonstraţia teoremelor 1 şi 2.

Demonstraţia teoremei 1. Luînd $A_1=\overline{\bar t\cup\bar u}\cup\overline{\bar t\cup u}, A_2=(x\cup y)\cup z$ şi $A'_2=x\cup(y\cup z)$, relaţia (3) se reduce la identitatea II, iar (4) şi (6) se scriu

$$\overline{\bar t\cup\bar u}\cup\overline{\bar t\cup u}=t \tag{4'}$$

$$(x\cup y)\cup z=x\cup(y\cup z). \tag{6'}$$

Presupunînd acum satisfăcut sistemul $\{$I, II$\}$, conform lemei (L) avem (4'), (5) şi (6'), însă, în lucrarea [5], E. V. Huntington caracterizează algebrele booleene prin sistemul de postulate $\{$I, (4'), (5), (6')$\}$, şi cu aceasta condiţia suficientă a teoremei 1 este dovedită. Condiţia necesară rezultă în mod evident, deoarece din $\{$I, (4'), (5), (6')$\}$ se deduce sistemul $\{$I , II$\}$. Independenţa sistemului $\{$I, II$\}$ rezultă din lema (L).

Demonstraţia teoremei 2. Cu $A_1=t$ şi A_2, A'_2 aceiaşi ca mai sus, relaţia (3) se reduce la identitatea III. Presupunînd verificat sistemul $\{$I, III$\}$, conform lemei (L), obţinem identităţile (5) şi (6'). De aici rezultă că $\{$I, II$\}$ implică $\{$I, (5), (6')$\}$, adică tocmai definiţia semilaticilor. Pe de altă parte, din $\{$I, (5), (6')$\}$ se deduce în mod evident sistemul $\{$I, III$\}$. Independenţa sistemului de postulate $\{$I, III$\}$ rezultă din lema (L).

§ 2. În lucrarea [1] (cap. V, § 2, p. 82), S. Rudeanu caracterizează algebrele booleene ca mulţimi înzestrate cu o operaţie binară „$\cup$”, o operaţie unară „—” şi un element distins „0”, satisfăcînd sistemul de axiome :

$$x\cup 0=x \tag{IV.}$$

$$\bar{\bar x}=x \tag{V.}$$

$$x\cup\bar x=\bar 0 \tag{VI.}$$

$$\overline{x\cup\overline{y\cup z}}=\overline{x\cup\bar y}\cup\overline{x\cup\bar z} \tag{VII.}$$

$$x\cup y=y\cup x. \tag{VIII.}$$

În [1] se arată că postulatele IV, V, VI şi VII sînt independente şi se pune întrebarea dacă identitatea VIII este sau nu o consecinţă a celorlalte.

Prin teorema care urmează, dăm răspuns afirmativ acestei întrebări.

TEOREMA 3. $\{$IV, V, VI, VII$\}$ *este un sistem complet de axiome pentru algebrele booleene.*

Demonstraţie. Prin definiţie luăm

$$x\cap y=\overline{\bar x\cup\bar y} \tag{d_1}$$

$$1=\bar 0. \tag{d_2}$$

Din (d_2) şi V avem

$$\bar 1=0. \tag{7}$$

Din (d_1) şi V avem

$$\overline{x\cup y}=\overline{x}\cap\overline{y} \tag{8}$$

Din (d_1) şi V avem

$$\overline{x\cap y}=\overline{x}\cup\overline{y}. \tag{9}$$

Din (d_1), VII, (8) şi V avem succesiv

$$x\cap(y\cup z)=\overline{\overline{x}\cup\overline{y\cup z}}=\overline{\overline{x}\cup\overline{y}}\cup\overline{\overline{x}\cup\overline{z}}=(\overline{\overline{x}}\cap\overline{\overline{y}})\cup(\overline{\overline{x}}\cap\overline{\overline{z}})=(x\cap y)\cup(x\cap z)$$

adică

$$x\cap(y\cup z)=(x\cap y)\cup(x\cap z). \tag{10}$$

Din (d_1), V, VII, V şi (d_1) avem succesiv

$$x\cup(y\cap z)=x\cup\overline{\overline{y}\cup\overline{z}}=\overline{\overline{x\cup\overline{\overline{y}\cup\overline{z}}}}=\overline{\overline{x\cup\overline{y}}\cup\overline{x\cup\overline{z}}}=\overline{\overline{x\cup y}\cup\overline{x\cup z}}=$$
$$=(x\cup y)\cap(x\cup z)$$

adică

$$x\cup(y\cap z)=(x\cup y)\cap(x\cup z). \tag{11}$$

Din V, VI şi (d_2) avem succesiv

$$\overline{x}\cup x=\overline{x}\cup\overline{\overline{x}}=\overline{0}=1$$

adică

$$\overline{x}\cup x=1. \tag{12}$$

Din (d_1), V, (12) şi (7) avem succesiv

$$x\cap\overline{x}=\overline{\overline{x}\cup\overline{\overline{x}}}=\overline{\overline{x}\cup x}=\overline{1}=0$$

adică

$$x\cap\overline{x}=0. \tag{13}$$

Din IV, (13), (d_1), V, VII, V, VI, V, IV şi V avem succesiv

$$x=x\cup 0=x\cup(x\cap\overline{x})=x\cup\overline{\overline{x}\cup\overline{\overline{x}}}=\overline{\overline{x\cup\overline{\overline{x}\cup x}}}=\overline{\overline{x\cup\overline{\overline{x}}}\cup\overline{x\cup\overline{x}}}=$$
$$=\overline{\overline{x\cup x}\cup\overline{x\cup\overline{x}}}=\overline{\overline{x\cup x}\cup\overline{1}}=\overline{\overline{x\cup x}\cup 0}=\overline{\overline{x\cup x}}=x\cup x$$

adică

$$x\cup x=x. \tag{14}$$

Din (d_1), (14) şi V avem succesiv

$$x\cap x=\overline{\overline{x}\cup\overline{x}}=\overline{\overline{x}}=x$$

adică

$$x\cap x=x. \tag{15}$$

Din (d_1), (7), IV şi V avem succesiv

$$x\cap 1=\overline{\overline{x}\cup\overline{1}}=\overline{\overline{x}\cup 0}=\overline{\overline{x}}=x$$

adică

$$x\cap 1=x. \tag{16}$$

Din (13), (15), (10), (12) şi (16) avem succesiv

$$0\cup x=(x\cap\overline{x})\cup x=(x\cap\overline{x})\cup(x\cap x)=x\cap(\overline{x}\cup x)=x\cap 1=x$$

adică

$$0\cup x=x. \tag{17}$$

Din (d_1), (7), (17) şi V avem succesiv

$$1\cap x=\overline{\overline{1}\cup\overline{x}}=\overline{0\cup\overline{x}}=\overline{\overline{x}}=x$$

adică

$$1\cap x=x. \tag{18}$$

În [6] (cap. X, corolarul teoremei 4) G. Birkhoff demonstrează că sistemul de axiome {IV, VI, (10), (11), (13), (14), (17), (18)}, caracterizează algebrele booleene.

Cu aceasta teorema 3 este demonstrată.

Primită la redacţie la 13 septembrie 1966

Institutul de petrol, gaze
şi geologie, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. S. Rudeanu, *Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene*, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1963.
2. B. A. Bernstein, *A Set of Four Independent Postulates for Boolean Algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. **17**, 50–52 (1916).
3. — *Simplification of the Set of Four Postulates for Boolean Algebras in Terms of Rejection.* Bull. Amer. Math. Soc., **39**, 783–787 (1933).
4. Ю. И. Соркин, *Задание структур тремя аксиомами-тождествами.* Учен. Зап. Моск. Гос. пед. ин-та, 8, 61–66 (1962).
5. E. V. Huntington, *New Sets of Independent Postulates for the Algebras of Logic, with Special Reference to Whitehead and Russel's Principia Mathematica.* Trans. Amer. Math. Soc., **35**, 274–304 (1933).
6. G. Birkhoff, *Lattice Theory.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., New York, 1948.

DETERMINAREA SUBGRUPURILOR GRUPULUI TRANSFORMĂRILOR AFINE DIN PLAN

DE

MARIUS I. STOKA

În această lucrare se determină toate subgrupurile grupului transformărilor afine din plan, subgrupuri distincte din punct de vedere afin.

S. Lie a determinat subgrupurile grupului proiectiv din plan [2], însă din cauza faptului că nu a făcut distincția dintre variabilele reale și cele complexe, o serie de subgrupuri au fost considerate ca echivalente cu alte subgrupuri. Ulterior G. Kowalewski a reluat problema determinînd toate aceste subgrupuri [1]. Unele dintre acestea sînt subgrupuri ale grupului afin nu însă toate, pentru că anumite subgrupuri ale grupului afin care sînt echivalente cu alte subgrupuri prin transformări proiective nu sînt echivalente prin transformări afine.

În această lucrare vom determina toate subgrupurile, distincte din punct de vedere afin, ale grupului transformărilor afine din plan.

Fie R_2 spațiul cu două dimensiuni de coordonate x, y și

$$(1)\qquad X_1 f = xp,\quad X_2 f = yp,\quad X_3 f = p,\quad X_4 f = xq,\quad X_5 f = yq,\quad X_6 f = q,$$

transformările infinitezimale ale grupului G_6 al transformărilor afine din plan, $\left(p = \frac{\partial f}{\partial x},\quad q = \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Pentru a determina subgrupurile cu un parametru ale grupului (1), să considerăm operatorul

$$Yf = a_i X_i f, \qquad (i = 1, \ldots, 6)$$

și să facem diverse presupuneri asupra constantelor a_i.

1) $a_1 = \ldots = a_5 = 0$. De aici rezultă $a_6 \neq 0$ și printr-o schimbare de parametri putem presupune $a_6 = 1$ și deci avem subgrupul

$$G_1^1 \equiv [q].$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 897–925 BUCUREŞTI, 1967

2) $a_1 = \ldots a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem considera că $a_5 = 1$ şi prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x, \quad \overline{y} = y + a_6,$$

subgrupul se reduce la

$$G_1^2 \equiv [yq].$$

3) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$. Făcînd o schimbare de parametri obţinem $a_4 = 1$. Dacă $a_5 = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x + a_6, \quad \overline{y} = y,$$

obţinem subgrupul

$$G_1^3 \equiv [xq].$$

Dacă $a_5 \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x, \quad \overline{y} = x + a_5 y + a_6,$$

regăsim subgrupul G_1^2.

4) $a_1 = a_2 = 0, a_3 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri luăm $a_3 = 1$. În acest caz, dacă $a_4 = a_5 = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = -a_6 x + y, \quad \overline{y} = x,$$

obţinem subgrupul G_1^1.

Dacă $a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = a_5 x, \quad \overline{y} = a_5 y + a_6,$$

obţinem subgrupul

$$G_1^4 \equiv [p + yq].$$

Dacă $a_4 \neq 0$, $a_5 = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x + \frac{a_6}{a_4}, \quad \overline{y} = \frac{y}{a_4}$$

deducem subgrupul

$$G_1^5 \equiv [p + xq],$$

iar dacă $a_4 \neq 0$, $a_5 \neq 0$, prin schimbarea

$$\overline{x} = a_5 x, \quad \overline{y} = a_4 a_5 x + a_5 y + a_4 + a_5 a_6,$$

regăsim subgrupul G_1^4.

5) $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem lua $a_2 = 1$

Dacă $a_3 = \ldots = a_6$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = y, \quad \overline{y} = x,$$

obţinem subgrupul G_1^3.

Dacă $a_3 = a_4 = a_5 = 0$, $a_6 \neq 0$ obţinem subgrupul G_1^5 prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = \frac{1}{a_6} y, \quad \overline{y} = \frac{1}{a_6} x.$$

Dacă $a_3 = a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$, $a_6 = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = - a_5 x + y, \quad \overline{y} = y,$$

regăsim subgrupul G_1^2, iar dacă $a_3 = a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$, $a_6 \neq 0$, regăsim subgrupul G_1^4 prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = - \frac{a_5^2}{a_6} x + \frac{a_5}{a_6} \overline{y}, \quad \overline{y} = y + \frac{a_6}{a_5} \cdot$$

Dacă $a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$, $a_5 = 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = a_4 x + a_6, \quad \overline{y} = \sqrt{|a_4|}\, y,$$

deducem subgrupul

$$G_1^6 \equiv [yp \pm xq].$$

În cazul în care $a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$, $a_5 \neq 0$, $a^2{}_5 + 4a_4 > 0$, obţinem subgrupul

$$G_1^7 \equiv [xp + \lambda yq],$$

prin schimbarea de variabile

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{x} &= \frac{- a_6 + \sqrt{a_5^2 + 4a_4}}{2} x + y - \frac{2a_6}{a_5 + \sqrt{a_5^2 + 4a_4}} \cdot \\ \overline{y} &= \frac{- a_5 - \sqrt{a_5^2 + 4\, a_4}}{2} x + y - \frac{2a_6}{a_5 - \sqrt{a_5^2 + 4a_4}} . \end{aligned} \right.$$

Dacă $a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$, $a_5 \neq 0$, $a_5^2 + 4a_4 = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = - \frac{a_5}{2} x + y + \frac{2a_6}{a_5}, \quad \overline{y} = y$$

obţinem subgrupul

$$G'_1 \equiv [xp + (x + y)\, q].$$

În sfîrşit, dacă $a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$, $a_5 \neq 0$, $a_5^2 + 4a_4 < 0$, făcînd schimbarea

$$\overline{x} = a_4 y - \frac{a_5}{a_4} + \frac{a_6}{a_5}, \quad \overline{y} = a_5 \left(a_4 x + a_5 y - \frac{a_6}{a_4} \right)$$

găsim subgrupul

$$G_1^8 \equiv [yp + \lambda\ (x + y)q].$$

Dacă $a_3 \neq 0$, obținem subgrupurile G_1^6, G_1^7, G_1^8 sau G_1'.

6) $a_1 \neq 0$. În acest caz printr-o schimbare de parametri putem presupune că $a_1 = 1$.

Dacă $a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = x + a_3$$

regăsim subgrupul $G_1{}^2$

Dacă $a_2 = a_4 = a_5 = 0$, $a_6 \neq 0$, făcînd schimbarea

$$\bar{x} = \frac{1}{a_6} y, \bar{y} = x + a_3,$$

deducem subgrupul G_1^4.

În cazul în care $a_2 = a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$, regăsim subgrupul G_1^7 prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x + a_3, \quad \bar{y} = a_5 y + a_6.$$

Dacă $a_2 = 0$, $a_4 \neq 0$, $a_5 = 0$, $a_6 = a_3 a_4$, obținem subgrupul G_1^2 prin schimbarea

$$\bar{x} = a_4 x - y, \quad \bar{y} = x + a_3.$$

Dacă $a_2 = 0$, $a_4 \neq 0$, $a_5 = 0$, $a_6 \neq a_3 a_4$, prin schimbarea de variabile

$$x = \frac{a_4}{a_3 a_4 - a_6} x - \frac{1}{a_3 a_4 - a_6} y, \quad \bar{y} = x + a_3,$$

regăsim subgrupul G_1^4.

Dacă $a_2 = 0$, $a_4 \neq 0$, $a_5 \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \bar{x} = a_4 a_5 x + a_5 (a_5 - 1) y + a_3 a_4 + a (a_5 - 1), \\ y = a_5 y + a - a_3 a_4, \end{cases}$$

obținem subgrupul

$$G_1^9 \equiv [xp + \lambda (x + y) q],$$

care conține subgrupul G_1' pentru $\lambda = 1$.

În cazul în care $a_2 \neq 0$, $a_4 = a_5 = a_6 = 0$, regăsim subgrupul G_1^2 prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = x + a_2 y + a_3.$$

Dacă $a_2 \neq 0$, $a_4 = a_5 = 0$, $a_6 \neq 0$, regăsim subgrupul G_1^4 prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \frac{1}{a_6} y, \quad \bar{y} = x + a_2 y + a_2 a_6 + a_3.$$

Dacă $a_2 \neq 0$, $a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$, obținem subgrupul G_1^9 făcînd schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \bar{x} = (1 - a_5) x + a_2 y + a_3 (1 - a_5) + a_2 a_6, \\ \bar{y} = a_5 x + a_3 a_5 - a_2 a_6. \end{cases}$$

În sfîrşit, dacă $a_2 \neq 0$, $a_4 \neq 0$, regăsim subgrupurile G_1^6, G_1^7, G_1^8 sau G_1^9.

Avem deci teorema

Subgrupurile cu un parametru ale grupului transformărilor afine din plan se pot reduce la una din formele

$$G_1^1 \equiv [q],\ G_1^2 \equiv [yq],\ G_1^3 \equiv [xq],\ G_1^4 \equiv [p + yq],$$

$$G_1^5 \equiv [p + xq],\ G_1^6 \equiv [yp + xq],\ G_1^7 \equiv [xp + \lambda yq],\ (\lambda \neq 0),$$

$$G_1^8 \equiv [yp + \lambda (x + y)q],\ (\lambda \neq 0),\ G_1^9 \equiv [xp + \lambda (x + y) q],\ (\lambda \neq 0).$$

Să considerăm acum doi operatori

$$Y_1 f = a_i X_i f,\quad Y_2 f = b_i X_i f, \qquad (i = 1, \ldots, 6)$$

şi să facem diverse presupuneri asupra constantelor a_i şi b_i.

1) $b_1 = \ldots = b_5 = 0$. De aici rezultă $b_6 \neq 0$ şi printr-o schimbare de parametri putem lua $b_6 = 1$ şi $a_8 = 0$. Scriind că operatorii $Y_1 f$ şi $Y_2 f$ formează grup, obţinem $a_2 = 0$.

Dacă $a_1 = a_3 = a_4 = 0$, rezultă $a_5 \neq 0$, şi putem lua $a_5 = 1$, avînd subgrupul

$$G_2^1 \equiv [q, yq].$$

Dacă $a_1 = a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$, printr-o schimbare de parametri putem considera că $a_4 = 1$. În acest caz, dacă $a_5 = 0$, avem subgrupul

$$G_2^2 \equiv [q, xq],$$

iar dacă $a_5 \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = x + a_5 y,$$

regăsim subgrupul G_2^1.

Dacă $a_1 = 0$, $a_3 \neq 0$, putem lua $a_3 = 1$. În acest caz, dacă $a_4 = a_5 = 0$, avem subgrupul

$$G_2^3 \equiv [p, q].$$

Dacă $a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = a_5 x, \quad \bar{y} = y,$$

obţinem subgrupul

$$G_2^4 \equiv [q,\ p + yq],$$

iar dacă $a_4 \neq 0$, $a_5 = 0$, obţinem subgrupul

$$G_2^5 \equiv [q,\ p \pm xq]$$

prin schimbarea

$$\bar{x} = \sqrt{|a_4|}\, x, \quad \bar{y} = y.$$

În sfîrşit, dacă $a_4 \neq 0$, $a_5 \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = a_4 x + a_5 y + a_4,$$

regăsim subgrupul G_2^4.

Dacă $a_1 \neq 0$, printr-o schimbare de parametri putem lua $a_1 = 1$. În cazul $a_4 = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x + a_3, \quad \bar{y} = y,$$

găsim subgrupul

$$G_2^6 \equiv [q, \; xp + \lambda yq].$$

Dacă $a_4 \neq 0$, $a_5 = 0$, regăsim subgrupul G_2^6 cu $\lambda = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x + a_3, \quad \bar{y} = a_4 x - y.$$

Dacă $a_4 \neq 0$, $a_5 = 1$, făcînd schimbarea

$$\bar{x} = x + a_3, \quad \bar{y} = x + \frac{1}{a_4} y$$

obţinem subgrupul

$$G_2^7 \equiv [q, \quad xp(x + y)q],$$

iar dacă $a_4 \neq 0$, $a_5 \neq 0, 1$, regăsim subgrupul G_2^6 prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x + a_3, \quad \bar{y} = y + \frac{a_5 - 1}{a_4} y + \frac{a_3}{a_5}.$$

2) $b_1 = \ldots = b_4 = 0$, $b_5 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $b_5 = 1$ şi $a_5 = 0$.

Dacă $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, rezultă $a_6 \neq 0$ şi regăsim subgrupul G_2^1.

Dacă $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$, putem presupune că $a_4 = 1$ şi prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x + a_6, \quad \bar{y} = y + b_6,$$

obţinem subgrupul

$$G_2^8 \equiv [xq, \; yq].$$

Dacă $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, putem lua $a_3 = 1$ şi punînd condiţia ca operatorii Y_1 şi Y_2 să formeze grup, obţinem $a_4 = a_6 = 0$. Făcînd acum schimbarea de variabile

$$\bar{x} = y + b_6, \quad \bar{y} = x,$$

regăsim subgrupul G_2^6 cu $\lambda = 0$.

Dacă $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, luăm $a_2 = 1$ şi scriind că operatorii Y_1 şi Y_2 formează grup, deducem $a_4 = a_6 = 0$, $b = a_3$. Făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y + a_3,$$

obţinem subgrupul

$$G_2^9 \equiv [yp, \; yq].$$

În sfîrșit, dacă $a_1 \neq 0$, luăm $a_1 = 1$ și scriind că paranteza (Y_1, Y_2) se exprimă cu operatorii Y_1 și Y_2, rezultă $a_2 = a_4 = a_6 = 0$ și prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x + a_3, \quad \bar{y} = y + b_6$$

deducem subgrupul

$$G_2^{10} \equiv [xp, yq].$$

3) $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_4 \neq 0$. În acest caz printr-o schimbare de parametri putem presupune că $b_4 = 1$, $a_4 = 0$.

Dacă $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 \neq 0$, rezultă $a_6 \neq 0$ și sîntem în cazul 1).

Dacă $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_5 \neq 0$, regăsim cazul 2).

Dacă $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, putem lua $a_3 = 1$ și scriind că operatorii Y_1, Y_2 formează grup, deducem $a_5 = 0$, $a_6 = -\frac{1}{b_5}\cdot$ Prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x + b_5 y + b_5 b_6 \;, \quad \bar{y} = x,$$

regăsim subgrupul G_2^6 cu $\lambda = 0$.

Dacă $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, operatorii Y_1, Y_2 nu formează grup.

În sfîrșit, să considerăm cazul în care $a_1 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem lua $a_1 = 1$ și punînd condiția ca operatorii Y_1 și Y_2 să formeze grup, obținem următoarele cazuri:

I) $a_5 = a_6 = 0 \;, \; b_5 = a_2 \neq 0, \; b_6 = a_3;$

II) $a_2 = 0, a_5 = 1, a_3 = b_6 - a_6 b_5, \; b_5 \neq 0;$

III) $a_2 = b_5 = 0, \; a_3 = b_6.$

În cazul I), prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x + a_3 \;, \quad \bar{y} = x + b_5 y + a_3 + a_6 b_5,$$

obținem subgrupul G_2^{10}.

În cazul II), regăsim subgrupul G_2^9 prin schimbarea

$$\bar{x} = x \;, \quad \bar{y} = x + a_2 y + a_3.$$

În cazul III), dacă $a_5 = a_6 = 0$, regăsim subgrupul G_2^9 prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = y \;, \quad \bar{y} = x + a_3.$$

Dacă $a_5 = 0$, $a_6 \neq 0$, făcînd schimbarea

$$\bar{x} = x + a_3 \;, \quad \bar{y} = \frac{1}{a_6} y,$$

obținem subgrupul

$$G_2^{11} \equiv [xp + q, \; xq],$$

iar dacă $a_6 \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$x = a_5 y + a_6, y = x + a_3,$$

găsim subgrupul

$$G_2^{12} \equiv [yp\ ,\ \lambda xp + yq]\ (\lambda \neq 0).$$

4) $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem presupune că $b_3 = 1$, $a_3 = 0$.

4.1) $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$. Rezultă $a_6 \neq 0$ și regăsim cazul 1).
4.2) $a_1 = a_2 = a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$. Regăsim cazul 2).
4.3) $a_1 = a_2 = 0$, $a_4 \neq 0$. Regăsim cazul 3).
4.4) $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_2 = 1$ și scriind că operatorii Y_1 și Y_2 formează grup, obținem condițiile

$$\text{I)}\quad a_4 = b_4 = 0,\quad b_5 \neq 0,\quad a_5 = -\,b_6,\ a_6 = -\,\frac{b_6^2}{b_5}.$$

sau

$$\text{II)}\quad b_4 = b_5 = 0,\quad a_4 = b_6\,(b_6 - a_5).$$

În cazul I), dacă $b_6 = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = b_5\, y\quad ,\quad \overline{y} = x,$$

regăsim subgrupul G_2^{11}, iar dacă $b_6 \neq 0$, obținem același subgrup prin schimbarea

$$\overline{x} = b_5\, y + b_6\, ,\quad \overline{y} = b_5\, x.$$

În cazul II), dacă $a_5 = a_6 = b_6 = 0$, schimbînd variabilele între ele obținem subgrupul G_2^2.

Dacă $a_5 = b_6 = 0$, $a_6 \neq 0$, regăsim subgrupul G_2^5 cu semnul + prin schimbarea

$$\overline{x} = y\quad ,\quad \overline{y} = -\,a_6\, x.$$

Dacă $a_5 = b_6 \neq 0$, $a_6 = 0$, obținem subgrupul G_2^1 prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = -\,b_6\, x + y\quad ,\quad \overline{y} = y.$$

Dacă $a_5 = b_6 \neq 0$, $a_6 \neq 0$, deducem subgrupul G_2^4 făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = \frac{b_6}{a_6}(b_6\, x - y)\quad ,\quad \overline{y} = y.$$

Dacă $a_5 = 2\, b_6 \neq 0$, făcînd schimbarea

$$\overline{x} = -\,b_6\, x + y - \frac{a_6}{b_6}\, ,\quad \overline{y} = y$$

regăsim subgrupul G_2^7.

În sfîrșit, dacă $a_5 \neq b_6$, $2b_6$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = -\,b_6\, x + y + \frac{a}{b_6 - a_5}\, ,\quad y = (b_6 - a_5)\, x + y,$$

obținem subgrupul G_2^6.

4.5) $a_1 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem lua $a_1 = 1$ şi punînd condiţia ca operatorii Y_1 şi Y_2 să formeze grup, obţinem una din soluţiile

$$\text{I)}\ a_2, b_4 \neq 0,\ a_5 = a_2a_4,\ b_5 = a_2b_4,\ a_6 = -\frac{(a_2a_4+1)^2}{a_2^2b_4},\ b_6 = -\frac{a_2a_4+2}{a_2};$$

$$\text{II)}\ a_2 = b_4 = b_5 = 0,\ a_4 = b_6(1-a_5);$$

$$\text{III)}\ a_2 = b_5 = 0,\ b_4 \neq 0,\ a_5 = 2,\ a_4 = -b_6;$$

$$\text{IV)}\ b_4 = b_5 = 0,\ a_2 \neq 0,\ a_4 = b_6(a_2b_6 - a_5 + 1).$$

În cazul I), făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = \frac{1}{a_2}x + y - \frac{a_2a_4+1}{a_2^2b_4},\ \overline{y} = a_2b_4x$$

obţinem subgrupul G_2''.

În cazul II), dacă $a_5 = a_6 = 0$, obţinem subgrupul G_2^1 prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = b_6x - y,\ \overline{y} = x.$$

Dacă $a_5 = 0$, $a_6 \neq 0$, făcînd schimbarea

$$\overline{x} = -\frac{b_6}{a_6}x + \frac{1}{a_6}y,\ \overline{y} = x,$$

regăsim subgrupul G_2^4.

Dacă $a_5 \neq 0$, prin schimbarea

$$\overline{x} = b_6x - y - \frac{a_6}{a_5},\ \overline{y} = x,$$

deducem subgrupul G_2^6.

În cazul III), dacă $b_4 = b_6 = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = 2y + a_6,\ \overline{y} = x,$$

obţinem subgrupul G_2^6, iar dacă $b_4 = 0$, $b_6 \neq 0$, obţinem acelaşi subgrup prin schimbarea

$$\overline{x} = b_6x - y - a_6,\ \overline{y} = x.$$

Dacă $b_4 = 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = b_4x,\ \overline{y} = b_4(-b_6x + y + a_6)$$

deducem subgrupul

$$G_2^{13} \equiv [p + xq,\ xp + 2yq].$$

În cazul IV), dacă $a_5 = -1$, $a_6 = 0$, $b_6 = -\dfrac{1}{a_2}$ obţinem subgrupul G_2^2 făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x + a_2y,\ \overline{y} = x.$$

Dacă $a_5 = a_2 b_6$, $a_6 = 0$, $b_6 \neq -\frac{1}{a_2}$, regăsim subgrupul G_2^1 făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = b_6 x - y, \quad \bar{y} = x + a_2 y.$$

Dacă $a_5 = -1$, $a_6 \neq 0$, $b_6 = -\frac{1}{a_2}$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = b_6 x - y, \quad \bar{y} = -a_6 y,$$

regăsim subgrupul G_2^5 cu semnul +.

Dacă $a_5 = a_2 b_6$, $a_6 \neq 0$, $b_6 \neq -\frac{1}{a_2}$, făcînd schimbarea

$$\bar{x} = \frac{a_2 b_6 + 1}{a_6}(-b_6 x + y), \quad \bar{y} = x + a_2 y,$$

deducem subgrupul G_2^4.

Dacă $a_5 \neq -1$, $b_6 = -\frac{1}{a_2}$, obținem subgrupul G_2^6 cu $\lambda = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x + a_2 y + \frac{a_2 a_6}{a_5 + 1}, \quad \bar{y} = a_5 x - a_2 y$$

Dacă $a_5 = 2a_2 b_6 + 1$, $b_6 \neq -\frac{1}{a_2}$, făcînd schimbarea

$$\bar{x} = -b_6 x + y + \frac{a_6}{a_2 b_6 + 1}, \quad \bar{y} = \frac{1}{a_2} x + y$$

regăsim subgrupul G_2^7.

În sfîrșit, dacă $a_5 \neq a_2 b_6$, $a_5 \neq 2a_2 b_6 + 1$, $b_6 \neq -\frac{1}{a_2}$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = -b_6 x + y + \frac{a_6}{a_5 - a_2 b_6}, \quad \bar{y} = (a_2 b_6 - a_5 + 1)x + y,$$

rezultă subgrupul G_2^6.

5) $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem considera că $b_2 = 1$, $a_2 = 0$.

5.1) $a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Rezultă $a_6 \neq 0$ și regăsim cazul 1).

5.2) $a_1 = a_3 = a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$. Regăsim cazul 2).

5.3) $a_1 = a_3 \neq 0$, $a_4 \neq 0$. Regăsim cazul 3).

5.4) $a_1 = 0$, $a_3 \neq 0$. Regăsim cazul 4.4).

5.5) $a_1 \neq 0$. Putem lua $a_1 = 1$ și punînd condiția ca operatorii Y_1 și Y_2 să formeze grup, obținem soluțiile

$$\text{I)}\ a_4 = 0,\ a_5 = 1,\ b_3 = a_6,\ b_6 = a_3 b_4 + a_6 b_5\,;$$

$$\text{II)}\ a_5 = \frac{1}{2},\ a_6 = \frac{2\,a_3 a_4 + b_3}{2},\ b_5 = 3a_4,\ b_4 = -2a_4^2\,;$$

$$\text{III)}\ a_5 \neq 1, \frac{1}{2},\ \ a_6 = a_3 a_4 + a_5 b_3 b_4 = -\frac{a_4^2 a_5}{1-a_5},\ b_5 = \frac{a_4\,(1 + a_5)}{1-a_5},$$

$$b_6 = \frac{a_4\,b_3\,(1-a_5^2) - a_3 a_4^2 a_5}{(1-a_5)^2}.$$

În cazul I), dacă $b_5^2 + 4b_4 > 0$, prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x} = (-b_5 + \sqrt{b_5^2 + 4b_4})\ \ (x + a_3) + 2\ (y + a_6)\,, \\ \overline{y} = (-b_5 - \sqrt{b_5^2 + 4b_4})\ (x + a_3) + 2\ (y + a_6)\,, \end{cases}$$

obținem subgrupul G_2^{10}.

Dacă $b_5^2 + 4b_4 = 0$, făcînd schimbarea

$$\overline{x} = x + a_3,\ \overline{y} = b_5\,(x + a_3) - 2\,(y + a_6)$$

deducem subgrupul G_2^{12} cu $\lambda = 1$.

Dacă $b_5^2 + 4b_4 < 0$, prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x} = \sqrt{-b_5^2 - 4b_4}\ (x + a_3), \\ \overline{y} = -\,b_5\,(x + a_3) + 2\ (y + a_6), \end{cases}$$

găsim subgrupul

$$G_2^{14} \equiv [xp + yq,\ yp - xq].$$

În cazul II), dacă $b_6 = 0$ obținem subgrupul G_2^{12} cu $\lambda = 2$ prin schimbarea de variabile.

$$\overline{x} = x + a_3,\ \overline{y} = 2a_4\,x - y + 2a_3a_4 - b_3,$$

iar dacă $b_6 \neq 0$, obținem subgrupul G_2^{13} prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = -2a_4x + y - 2a_3a_4 + b_3,\ \overline{y} = b_6(x + a_3).$$

În cazul III), dacă $a_5 = 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = a_4\,x - y + a_3\,a_4 - b_3\ \ ,\ \ \overline{y} = y + b_3,$$

regăsim subgrupul G_2^8, iar dacă $a_5 \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = a_4\ (x + a_3) + (a_5 - 1)\ (y + b_3),\ \overline{y} = x + a_3,$$

deducem subgrupul G_2^{12}.

6) $b_1 \neq 0$. În acest caz, printr-o schimbare de parametri putem presupune că $b_1 = 1$, $a_1 = 0$.

6.1) $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Rezultă $a_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1).

6.2) $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$. Regăsim cazul 2).

6.3) $a_2 = a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$. Regăsim cazul 3).

6.4) $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$. Regăsim cazul 4.5).

6.5) $a_2 \neq 0$. Regăsim cazul 5.5).

Avem deci teorema

Subgrupurile cu doi parametri ale grupului transformărilor afine din plan se pot reduce la una din formele

$$G_2^1 \equiv [q, yq]\ ,\ G_2^2 \equiv [q,\ xq]\ ,\ G_2^3 \equiv [p,\ q],\ G_2^4 \equiv [q,\ p + yq],$$

$$G_2^5 \equiv [q, p + xq]\ ,\ G_2^6 \equiv [q, xp + \lambda yq]\ ,\ G_2^7 \equiv [q, xp + (x + y)\, q]$$

$$G_2^8 \equiv [xq, yq]\ ,\ G_2^9 \equiv [yp,\ yq]\ ,\ G_2^{10} \equiv [xp,\ yq],\ G_2^{11} \equiv [xp + q,\ xq]$$

$$G_2^{12} \equiv [yp, \lambda xp + yq]\ ,\ (\lambda \neq 0)\ ,\ G_2^{13} \equiv [p + xq, xp + 2yq],$$

$$G_2^{14} \equiv [xp + yq,\ yp - xq].$$

Să considerăm acum trei operatori

$$Y_1 f = a_i X_i f\ ,\ Y_2 f = b_i X_i f\ ,\ Y_3 f = c_i X_i f, \qquad (i = 1, \ldots, 6).$$

1) $c_1 = \ldots = c_5 = 0$. În acest caz rezultă $c_6 \neq 0$ şi printr-o schimbare de parametri putem presupune că $c_6 = 1$, $a_6 = b_6 = 0$.

1.1) $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$. Rezultă $b_5 \neq 0$ şi putem considera că $b_5 = 1$, $a_5 = 0$. Punînd condiţia ca operatorii Y_1, Y_2, Y_3 să formeze grup, obţinem soluţiile

I) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 1$;

II) $a_2 = a_4 = 0$.

În cazul I) avem subgrupul

$$G_3^1 \equiv [q, xq, yq].$$

În cazul II), dacă $a_1 = 0$ avem subgrupul

$$G_3^2 \equiv [p, q, yq],$$

iar dacă $a_1 \neq 0$, putem presupune $a_1 = 1$ şi prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x + a_3\ ,\quad \overline{y} = y,$$

obţinem subgrupul

$$G_3^3 \equiv [q, xp, yq].$$

1.2) $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_4 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem considera că $b_4 = 1$, $a_4 = 0$. Scriind că cei trei operatori formează grup rezultă soluţiile

I) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$;

II) $a_2 = b_5 = 0$;

III) $a_2 = 0$, $a_5 = a_1$.

În cazul I) rezultă $a_5 \neq 0$ și regăsim subgrupul G_3^1.

În cazul II), dacă $a_1 = a_3 = 0$, rezultă $a_5 = 0$ și obținem subgrupul G_3^1.

Dacă $a_1 = 0$, $a_3 \neq 0$, luăm $a_3 = 1$ și obținem subgrupul

$$G_3^4 \equiv [q, p + \lambda\, yq, xq].$$

Dacă $a_1 \neq 0$, luăm $a_1 = 1$ și prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x + a_3 \quad , \quad \overline{y} = y,$$

deducem subgrupul

$$G_3^5 \equiv [q, xq, xp + \lambda yq].$$

În cazul III), dacă $a_1 = 0$, $a_3 \neq 0$, luăm $a_3 = 1$ și regăsim subgrupul G_3^4 cu $\lambda = 0$, iar dacă $a_1 \neq 0$, luăm $a_1 = 1$ și prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x + a_3 \quad , \quad \overline{y} = y,$$

obținem subgrupul G_3^5 cu $\lambda = 1$.

1.3) $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri luăm $b_3 = 1$ $a_3 = 0$.

1.3.1) $a_1 = a_2 = a_4 = 0$. Rezultă $a_5 \neq 0$ și putem lua $a_5 = 1$, $b_5 = 0$ și regăsim cazul 1.1

1.3.2) $a_1 = a_2 = 0$, $a_4 \neq 0$. În acest caz luăm $a_4 = 1$, $b_4 = 0$ și condiția ca operatorii Y_1, Y_2. Y_3 să formeze grup se scrie

$$a_5\, b_5 = 0.$$

Dacă $a_5 = 0$, avem subgrupul G_3^4, iar dacă $a_5 \neq 0$, $b_5 = 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x \quad , \quad \overline{y} = x + a_5 y,$$

obținem subgrupul G_2^3.

1.3.3) $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem considera că $a_2 = 1$ și condiția ca cei trei operatori să formeze grup ne dă $b_4 = b_5 = 0$. În acest caz dacă $a_5^2 + 4a_4 > 0$, prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x} = (\sqrt{a_5^2 + 4a_4} - a_5)\, x + 2y, \\ \overline{y} = (\sqrt{a_5^2 + 4a_4} + a_5)\, x - 2y, \end{cases}$$

obținem subgrupul

$$G_3^6 \equiv [p, q, xp + \lambda\, yq].$$

Dacă $a_4 = a_5 = 0$, prin schimbarea variabilelor între ele obținem subgrupul G_3^4 cu $\lambda = 0$.

Dacă $a_4 = -\dfrac{a_5^2}{4} \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = a_5\, x - 2y \quad , \quad \overline{y} = -a_5\, y,$$

obținem subgrupul

$$G_3^7 \equiv [p, q, xp + (x + y)\, q].$$

Dacă $a_5 = 0$, $a_4 < 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \sqrt{-a_4}\, x \quad , \quad \bar{y} = y,$$

găsim subgrupul

$$G_3^8 \equiv [p, q, yp - xq]$$

iar dacă $a_5 \neq 0$, $a_5^2 + 4a_4 < 0$, prin schimbarea

$$\bar{x} = a_5 x - y \quad , \quad \bar{y} = -a_5 x,$$

deducem subgrupul

$$G_3^9 \equiv [p, q, \lambda yp + (x + y) q], \quad \left(\lambda < -\frac{1}{4}\right).$$

1.3.4) $a_1 \neq 0$. Făcînd o schimbare de parametri, putem lua $a_1 = 1$ iar condiția ca operatorii Y_1, Y_2, Y_3 să formeze grup, ne conduce la unul din cazurile:

I) $a_2 = b_5 = 0$, $a_5 = 2$, $b_4 \neq 0$;

II) $b_4 = b_5 = 0$.

În cazul I), obținem subgrupul

$$G_3^{10} \equiv [q, p + xq, xp + 2yq].$$

În cazul II), dacă $a_2 = a_4 = 0$, avem subgrupul G_3^6.
Dacă $a_2 = a_5 = 0$, $a_4 \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = a_4 x \quad , \quad \bar{y} = y$$

găsim subgrupul

$$G_3^{11} \equiv [p, q, xp + xq].$$

Dacă $a_2 = 0$, $a_4 \neq 0$, $a_5 \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = a_4 x \quad , \quad \bar{y} = a_5 y,$$

obținem subgrupul

$$G_3^{12} \equiv [p, q, \lambda xp + (x + y) q].$$

Dacă $a_2 \neq 0$, $(a_2 - 1)^2 + 4a_2 a_5 > 0$, obținem subgrupul G_3^6 prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \bar{x} = [1 - a_5 + \sqrt{(1 - a_5)^2 + 4a_2 a_4}]\, x + 2a_2 y, \\ \bar{y} = [1 - a_5 - \sqrt{(1 - a_5)^2 + 4a_2 a_4}]\, x + 2a_2 y. \end{cases}$$

Dacă $a_2 \neq 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 1$, regăsim subgrupul G_3^{12} cu $\lambda = 1$, dacă facem schimbarea de variabile

$$\bar{x} = a_2 y \quad , \quad \bar{y} = x.$$

Dacă $a_2 \neq 0$, $a_5 = -1$, $a_4 = -\dfrac{1}{a_2}$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x} = x - a_2 y \quad , \quad \bar{y} = y,$$

deducem subgrupul G_3^4 cu $\lambda = 0$.

Dacă $a_2 \neq 0$, $a_4 \neq 0$, $a_5 \neq -1$, $(a_5-1)^2 + 4a_2 a_4 = 0$, regăsim subgrupul G_3^7, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = (1-a_5)\,x + 2a_2 y \quad , \quad \overline{y} = (1+a_3)\,x.$$

Dacă $a_2 \neq 0$, $a_5 = -1$, $a_2 a_4 < -1$, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = \sqrt{-a_2 a_4 - 1}\,x, \; \overline{y} = x + a_2 y,$$

obţinem subgrupul G_3^8.

În sfîrşit, dacă $a_2 \neq 0$, $a_5 \neq -1$, $(a_5-1)^2 + 4\,a_2 a_4 < 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = (a_2 a_4 - a_5)\,x \quad , \quad \overline{y} = (1+a_5)\,x + a_2 y$$

găsim subgrupul G_3^9 cu $\lambda < -1$.

1.4.) $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $b_2 = 1$, $a_2 = 0$.

1.4.1) $a_1 = a_3 = a_4 = 0$. Rezultă $a_5 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1).

1.4.2) $a_1 = a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2).

1.4.3.) $a_1 = 0$, $a_3 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2).

1.4.4) $a_1 \neq 0$. În acest caz condiţia ca operatorii Y_1, Y_2, Y_3 să formeze grup, ne conduce la o relaţie imposibilă.

1.5) $b_1 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem considera că $b_1 = 1$, $a_1 = 0$.

1.5.1) $a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Rezultă $a_5 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1).

1.5.2) $a_2 = a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2).

1.5.3) $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$. Regăsim cazul 1.3).

1.5.4) $a_2 \neq 0$. Regăsim cazul 1.4).

2) $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, $c_5 \neq 0$. Făcînd o schimbare de parametri putem presupune că $c_5 = 1$, $a_5 = b_5 = 0$.

2.1) $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$. Rezultă $b_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1).

2.2) $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_4 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem considera că $b_4 = 1$, $a_4 = 0$.

2.2.1) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Rezultă $a_6 \neq 0$ şi regăsim subgrupul G_3'.

2.2.2) $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$. Cu aceste valori, operatorii Y_1, Y_2, Y_3 nu formează grup.

2.2.3) $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$. În acest caz condiţia ca operatorii Y_1, Y_2, Y_3 să formeze grup ne conduce la o relaţie imposibilă.

2.2.4) $a_1 \neq 0$. Luăm $a_1 = 1$, şi scriind că cei trei operatori formează grup, obţinem $a_2 = a_6 = 0$, $b_6 = a_3$. Cu aceste valori, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x + a_3, \; \overline{y} = y + c_6,$$

găsim subgrupul

$$G_3^{13} \equiv [xp,\; xq,\; xq].$$

2.3) $b_1 \neq b_2 = 0$, $b_3 \neq 0$. Făcînd o schimbare de parametri putem presupune că $b_3 = 1$, $a_3 = 0$.

2.3.1) $a_1 = a_2 = a_4 = 0$. Rezultă $a_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1).

2.3.2) $a_1 = a_2 = 0$, $a_4 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2).

2.3.3) $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$. Luăm $a_2 = 1$ şi scriind că cei trei operatori formează grup, obţinem $a_4 = a_6 = b_4 = b_6 = 0$. Făcînd acum schimbarea de variabile

$$\overline{x} = y + c_6, \ \overline{y} = x,$$

deducem subgrupul G_3^5 cu $\lambda = 0$.

2.3.4) $a_1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_1 = 1$ şi punînd condiţia ca operatorii Y_1, Y_2, Y_3 să formeze grup, obţinem $a_2 = a_4 = a_6 = b_4 = b_6 = 0$. Cu aceste valori şi prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = y + c_6, \ \overline{y} = x,$$

găsim subgrupul G_3^3

2.4) $b_1 = 0, b_2 \neq 0$. Luăm $b_2 = 1$, $a_2 = 0$.

2.4.1) $a_1 = a_3 = a_4 = 0$. Rezultă $a_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1).

2.4.2) $a_1 = a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.3).

2.4.3) $a_1 = 0, a_3 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.3).

2.4.4) $a_1 \neq 0$. Luăm $a_1 = 1$ şi din condiţia ca operatorii Y_1, Y_2, Y_3 să formeze grup, deducem $a_4 = a_6 = b_4 = b_6 = 0$, $c_6 = b_3$. Făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = y + b_3, \ \overline{y} = x + a_3.$$

obţinem subgrupul G_3^{13}.

2.5) $b_1 \neq 0$. În acest caz putem lua $b_1 = 1$, $a_1 = 0$.

2.5.1) $a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Rezultă $a_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1).

2.5.2) $a_2 = a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.4).

2.5.3) $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.4).

2.5.4) $a_2 \neq 0$. Regăsim cazul 2.4.4).

3) $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $c_4 \neq 0$. Făcînd o schimbare de parametri obţinem $c_4 = 1$, $a_4 = b_4 = 0$.

3.1) $b_1 = b_2 = b_3 = b_5 = 0$. Rezultă $b_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.2).

3.2) $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2).

3.3) $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 \neq 0$. Luăm $b_3 = 1$, $a_3 = 0$.

3.3.1) $a_1 = a_2 = a_5 = 0$. Rezultă $a_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.2).

3.3.2) $a_1 = a_2 = 0$, $a_5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.2).

3.3.3) $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$. Cu aceste valori, operatorii Y_1, Y_2, Y_3 nu formează grup.

3.3.4) $a_1 \neq 0$. Luăm $a_1 = 1$ şi scriind condiţia ca cei trei operatori să formeze grup, obţinem una din soluţiile

$$\text{I)}\ a_2 = b_5 = 0,\ a_5 = 1, c_5 \neq 0,\ c_6 = a_6\, c_5,\ b_6 = -\frac{1}{c_5};$$

$$\text{II)}\ a_5 = b_5 = 0,\ a_2 = c_5 \neq 0,\ c_6 = a_6\, c_5,\ b_6 = -\frac{1}{c_5}.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x + c_5 y + a_6\, c_5, \ \overline{y} = x.$$

obţinem, în cazul I), subgrupul G_3^3, iar în cazul II) subgrupul G_3^5 cu $\lambda = 0$.

3.4) $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$. Luăm $b_2 = 1$, $a_2 = 0$.

3.4.1) $a_1 = a_3 = a_5 = 0$. Rezultă $a_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.2).

3.4.2) $a_1 = a_3 = 0$, $a_5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2).

3.4.3) $a_1 = 0$, $a_3 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3).

3.4.4) $a_1 \neq 0$. Putem considera că $a_1 = 1$ şi scriind că cei trei operatori să formeze grup, obţinem

I) $a_3 = b_5 = b_6 = c_5 = c_6 = 0,\ a_5 = -1,\ a_6 = -b_3$;

II) $a_3 = 0,\ a_5 = 1,\ c_5 \neq 0,\ a_6 = b_3,\ b_5 = -\dfrac{1}{c_5} b_6 = -\dfrac{b_3}{c_5},\ c_6 = b_3 c_6$.

În cazul I), făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} \equiv x,\ \overline{y} = y + b_3$$

găsim subgrupul

$$G_3^{14} = [yp,\ xq,\ xp - yp],$$

iar în cazul II) obţinem subgrupul G_3^{13} prin schimbarea

$$\overline{x} = x + c_5 y + b_3 c_5,\ \overline{y} = y + b_3.$$

3.5) $b_1 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem lua $b_1 = 1$, $a_1 = 0$.

3.5.1) $a_2 = a_3 = a_5 = 0$. Rezultă $a_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.2).

3.5.2) $a_2 = a_3 = 0$, $a_5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2).

3.5.3) $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3).

3.5.4) $a_2 \neq 0$. Regăsim cazul 3.4.4).

4) $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 \neq 0$. Putem considera că $c = 1$, $a = b = 0$.

4.1) $b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = 0$. Rezultă $b_6 \neq 0$ şi cădem peste cazul 1.3).

4.2) $b_1 = b_2 = b_4 = 0$, $b_5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3).

4.3) $b_1 = b_2 = 0$, $b_4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3).

4.4) $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$. Luăm $b_2 = 1$, $a_2 = 0$.

4.4.1) $a_1 = a_4 = a_5 = 0$. Rezultă $a_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.3).

4.4.2)$a_1 = a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3).

4.4.3) $a_1 = 0$, $a_4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3).

4.4.4) $a_1 \neq 0$. Putem presupune că $a_1 = 1$ şi punînd condiţia ca operatorii Y_1, Y_2, Y_3 să formeze grup obţinem una din soluţiile

I) $a_4 = c_4 = c_5 = 0,\ a_5 = 1,\ b_4 = c_6(c_6 - b_5),\ b_6 = a_6(b_5 - c_6)$;

II) $c_4 = c_5 = 0,\ a_5 = \dfrac{1}{2},\ b_4 = -\dfrac{c_6^2}{2},\ b_5 = \dfrac{3c_6}{2},\ a_4 = \dfrac{c_6}{2}$;

III) $a_5 \neq 1, \dfrac{1}{2},\ c_4 = c_5 = 0,\ a_4 = c_6(1 - a_5),\ b_4 = -a_5 c_6^2,\ b_5 = c_6 (1 + a_5),\ b_6 = a_6 c_6$.

În cazul I), dacă $b_5 = c_6 = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = y + a_6,\ \overline{y} = x,$$

obţinem subgrupul G_3^5 cu $\lambda = 1$.

Dacă $b_5 = c_6 \neq 0$, făcînd schimbarea

$$\overline{x}_3 = c_6 x - y - a_6,\ \overline{y} = y + a_6,$$

găsim subgrupul G_3^3.

Dacă $b_5 = 2c_6$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = c_6 x - y - a_6,\ \overline{y} = x,$$

deducem subgrupul G_3^5 cu $\lambda = 1$, iar dacă $b_5 \neq c_6, 2c_6$, prin schimbarea

$$\overline{x} = c_6 x - y - a_6,\ \overline{y} = (c_6 - b_5)x + y + a_6,$$

obţinem subgrupul G_3^3.

În cazul II), dacă $b_6 = a_6 c_6$, regăsim subgrupul G_3^5 cu $\lambda = 2$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = c_6 x - y - a_6, \ \overline{y} = x,$$

iar dacă $b_6 \neq a_6 c_6$, regăsim subgrupul G_3^{10} prin schimbarea

$$\overline{x} = c_6 x - y - a_6, \quad \overline{y} = (b_6 - a_6 c_6) x.$$

În cazul III), dacă $a_5 = a_6 = 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = c_6 x - y, \quad \overline{y} = x,$$

obţinem subgrupul G_3^1.

Dacă $a_5 = 0$, $a_6 \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = \frac{1}{a_6}(c_6 x - y), \quad \overline{y} = x$$

găsim subgrupul G_3^4 cu $\lambda = 1$.

În sfîrşit, dacă $a_5 \neq 0$, obţinem subgrupul G_3^5 prin schimbarea

$$\overline{x} = a_5 c_6 x - a_5 y - a_6, \quad \overline{y} = x.$$

4.5) $b_1 \neq 0$. În acest caz putem lua $b_1 = 1$, $a_1 = 0$.
4.5.1) $a_2 = a_4 = a_5 = 0$. Rezultă $a_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.3).
4.5.2) $a_2 = a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3).
4.5.3) $a_2 = 0$, $a_4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3).
4.5.4) $a_2 \neq 0$. Regăsim cazul 4.4.4).

5) $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem lua $c_2 = 1$, $a_2 = b_2 = 0$.
5.1) $b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$. Rezultă $b_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.4).
5.2) $b_1 = b_3 = b_4 = 0$, $b_5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.4).
5.3) $b_1 = b_3 = 0$, $b_4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.4).
5.4) $b_1 = 0$, $b_3 \neq 0$. Regăsim cazul 4.4).
5.5) $b_1 \neq 0$. Putem lua $b_1 = 1$, $a_1 = 0$.
5.5.1) $a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Rezultă $a_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.4).
5.5.2) $a_3 = a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.4).
5.5.3) $a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.4).
5.5.4) $a_3 \neq 0$. Regăsim cazul 4.4.4).

6) $c_1 \neq 0$. Făcînd o schimbare de parametri putem considera că $c_1 = 1$, $a_1 = b_1 = 0$.
6.1) $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$. Rezultă $b_6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.5).
6.2) $b_2 = b_3 = b_4 = 0$, $b_5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.5).
6.3) $b_2 = b_3 = 0$, $b_4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.5).
6.4) $b_2 = 0$, $b_3 \neq 0$. Regăsim cazul 4.5).
6.5) $b_2 \neq 0$. Regăsim cazul 5.5).

Avem deci teorema:

Subgrupurile cu trei parametri ale grupului transformărilor afine din plan se pot reduce la una din formele

$$G_3^1 \equiv [q,\ xq,\ yq], \quad G_3^2 \equiv [p,\ q,\ yq], \quad G_3^3 \equiv [q,\ xp,\ yq].$$
$$G_3^4 \equiv [p + \lambda yq, q, xq], \quad G_3^5 \equiv [q, xq, xp + \lambda yq], \quad G_3^6 \equiv [p, q, xp + \lambda yq],$$
$$G_3^7 \equiv [p, q, xp + (x + y)q], \quad G_3^8 \equiv [p, q, yp - xq], \quad G_3^4 \equiv [p, q, \lambda yp + + (x + y)q], \left(\lambda < -\frac{1}{4}\right),$$

$$G_3^{10} \equiv [q,\ p + xq,\ xp + 2yq],\quad G_3^{11} \equiv [p,\ q,\ xp + yq],$$
$$G_3^{12} \equiv [p,\ q,\ \lambda xp + (x + y)q],\ (\lambda \neq 0),\quad G^{13} \equiv [xp,\ xq,\ yq],$$
$$G_3^{14} \equiv [yp,\ xq,\ xp - yp].$$

Să considerăm acum patru operatori

$$Y_h f = a_h^i X_i f, \qquad (i = 1,\ldots,6\,;\ h = 1,\ldots,4).$$

1) $a_4^1 = \ldots = a_4^5 = 0$. Rezultă $a_4^6 \neq$ şi printr-o schimbare de parametri presupunem că $a_4^6 = 1$, $a_1^6 = a_2^6 = a_3^6 = 0$.

1.1) $a_3^1 = \ldots. = a_3^4 = 0$. Rezultă $a_3^5 = 0$ şi putem lua $a_3^5 = 1$, $a_1^5 = a_2^5 = 0$.

1.1.1) $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$. Rezultă $a_2^4 \neq 0$ şi deci $a_2^4 = 1$, $a_1^4 = 0$. Punînd condiţia ca operatorii Y_h să formeze grup, obţinem $a_1^2 = 0$. În acest caz dacă $a_1^1 = 0$, rezultă $a_1^3 \neq 0$ şi printr-o schimbare de parametri găsim subgrupul

$$G_4^1 \equiv [p,\ q,\ xq,\ = yq].$$

Dacă $a_1^1 \neq 0$, luăm $a_1^1 = 1$ şi prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x + a^3{}_1,\ \overline{y} = y.$$

obţinem subgrupul

$$G_4^2 \equiv [q,\ xp,\ xq,\ yq].$$

1.1.2) $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^3 = 1$, $a_1^3 = 0$.

1.1.2.1) $a_1^1 = a_1^2 = 0$. Rezultă $a_1^4 \neq 0$ şi regăsim subgrupul G_4^1.

1.1.2.2) $a_1^1 = 0$, $a_1^2 \neq 0$. Luăm $a_1^2 = 1$ şi scriind că operatorii Y_h formează grup, obţinem $a_1^4 = a_2^4 = 0$, deci găsim subgrupul

$$G_4^3 \equiv [p,\ q,\ yp,\ yq].$$

1.1.2.3) $a_1^1 \neq 0$. Luăm $a_1^1 = 1$ şi condiţia ca operatorii Y_h să formeze grup ne dă $a_1^2 = a_1^4 = a_2^4 = 0$. Avem deci subgrupul

$$G_4^4 \equiv [p,\ q,\ xp,\ yq].$$

1.1.3) $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$. Putem lua $a = 1$, $a = 0$.

1.1.3.1) $a_1^1 = a_1^3 = 0$. Rezultă $a_1^4 \neq$ şi regăsim cazul 1.1.1).

1.1.3.2) $a_1^1 = 0$ şi $a_1^3 \neq 0$. Regăsim cazul 1.1.2).

1.1.3.3) $a_1^1 \neq 0$. În acest caz operatorii Y_h nu formează grup.

1.1.4) $a_2^1 \neq 0$. Luăm $a_2^1 = 1$, $a_1^1 = 0$.

1.1.4.1) $a_1^2 = a_1^3 = 0$. Rezultă $a_1^4 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).

1.1.4.2) $a_1^2 = 0$, $a_1^3 \neq 0$. Regăsim cazul 1.1.2).

1.1.4.3) $a_1^2 \neq 0$. În acest caz operatorii Y nu formează grup.

1.2) $a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. Luăm $a_3^4 = 1$, $a_1^4 = a_2^4 = 0$.

1.2.1) $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$. Rezultă $a_1^5 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).

1.2.2) $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. Luăm $a_2^3 = 1$, $a_1^3 = 0$.

1.2.2.1) $a_1^1 = a_1^2 = 0$. Rezultă $a_1^5 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).

1.2.2.2) $a_1^1 = 0$, $a_1^2 \neq 0$. În acest caz operatorii Y_h nu formează grup.

1.2.2.3) $a_1^1 \neq 0$. Luăm $a_1^1 = 1$. Scriind că operatorii Y_h formează grup, obţinem soluţiile

I) $a_1^5 = a_2^5 = a_3^5 = 0\,;$
II) $a_1^2 = a_2^5 = 0$, $a_1^5 = 1$, $a_3^5 \neq 0\,;$
III) $a_1^5 = a_2^5 = 0$, $a_1^2 = a_3^5 \neq 0.$

În cazul I) avem subgrupul

$$G_4^5 \equiv [p,\ q,\ xq,\ xp + \lambda yq].$$

În cazul II) obținem subgrupul G_4^4 prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x,\ \overline{y} = x + a_3^5 y$$

iar în cazul III) prin aceeași schimbare de variabile obținem subgrupul G_4^3.

1.2.3) $a_2^1 = 0,\ a_2^2 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^2 = 1,\ a_1^2 = 0$.
Dacă $a_1^1 = a_1^3 = 0$, rezultă $a_1^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).
Dacă $a_1^1 = 0,\ a_1^3 \neq 0$, sau dacă $a_1^1 \neq 0$, operatorii Y_h nu formează grup.

1.2.4) $a_2^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^1 = 1,\ a_1^1 = 0$.
Dacă $a_1^2 = a_1^3 = 0$, rezultă $a_1^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).
Dacă $a_1^2 = 0,\ a_1^3 \neq 0$, regăsim cazul 1.2.2.3).
Dacă $a_1^2 \neq 0$, operatorii Y_h nu formează grup.

1.3) $a_3^1 = a_3^2 = 0,\ a_3^3 \neq 0$. În acest caz luăm $a_3^3 = 1,\ a_1^3 = a_2^3 = 0$.
1.3.1) $a_2^1 = a_2^2 = a_2^4 = 0$. Rezultă $a_2^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1)
1.3.2) $a_2^1 = a_2^2 = 0,\ a_2^4 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2.2).
1.3.3) $a_2^1 = 0,\ a_2^2 \neq 0$. Luăm $a_2^2 = 1,\ a_1^2 = 0$.
1.3.3.1) $a_1^1 = a_1^4 = 0$. Rezultă $a_1^5 \neq$ și regăsim cazul 1.1.1).
1.3.3.2) $a_1^1 = 0,\ a_1^4 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2.3).
1.3.3.3) $a_1^1 \neq 0$. Luăm $a_1^1 = 1$ și scriind că operatorii Y formează grup, rezultă una din condițiile

I) $a_1^4 = a_3^4 = a_3^5 = 0,\ a_1^5 = 1$;

II) $a_3^4 = a_3^5 = 0,\ a_1^5 \neq 1,\ a_2^4 = -\dfrac{(a_1^4)^2\, a_1^5}{(1-a_1^5)^2},\ a_2^5 = \dfrac{a_1^4(1 + a_1^5)}{1 - a_1^5}$.

Dacă $a_2^4 = a_2^5 = 0$, schimbînd variabilele între ele, obținem subgrupul G_4^5 cu $\lambda = 1$.

Dacă $a_2^4 = 0,\ a_2^5 \neq 0$, prin schimbarea

$$\overline{x} = a_2^5 x - y,\ \overline{y} = y,$$

deducem subgrupul G_4^4.

Dacă $a_2^4 > 0,\ a_2^5 = 0$, obținem subgrupul G_4^4 prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = \sqrt{a_2^4}\, x + y,\quad \overline{y} = \sqrt{a_2^4}\, x - y\,.$$

Dacă $a_2^4 < 0,\ a_2^5 = 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = \sqrt{-a_2^4}\, x + 2y,\quad \overline{y} = 2\sqrt{-a_2^4}\, x + y\,,$$

găsim subgrupul

$$G_4^6 \equiv [p,\ q,\ xp + yq,\ yp - xq].$$

Dacă $a_2^4 \neq 0,\ a_2^5 \neq 0,\ (a_2^5)^2 + 4\, a_2^4 > 0$, prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x} = [-a_2^5 + \sqrt{(a_2^5)^2 + 4a_2^4}]\, x + 2y\,, \\ \overline{y} = [-a_2^5 - \sqrt{(a_2^5)^2 + 4a_2^4}]x + 2y\,, \end{cases}$$

regăsim subgrupul G_4^4.

Dacă $a_2^4 = -\frac{(a_2^5)^2}{4} \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = a_2^5\, x - 2y, \quad y = 2a_2^5\, x,$$

găsim subgrupul

$$G_4^7 \equiv [p,\, q,\, xp + yq,\, (x + y)\, q].$$

Dacă $a_2^4 \neq 0$, $a_2^5 \neq 0$, $(a_2^5)^2 + 4a_2^4 < 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = a_2^5\, x,\ \overline{y} = y,$$

obținem subgrupul

$$G_4^8 \equiv [p,\, q,\, xp + yq,\, yp + \lambda\, (x + y)q],\ \left(\lambda < -\frac{1}{4}\right).$$

În cazul II), dacă $a_1^4 = a_1^5 = 0$, avem subgrupul G_4^1 iar dacă $a_1^4 = 0$, $a_1^5 \neq 0$, avem subgrupul G_4^5.

Dacă $a_1^4 \neq 0$, $a_1^5 = 0$ schimbarea de variabile

$$\overline{x} = a_1^4\, x - y,\ \ \overline{y} = x$$

ne conduce la subgrupul G_4^1.

În sfîrşit, dacă $a_1^4 \neq 0$, $a_1^5 \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = a_1^4\, x + (a_1^5 - 1)y,\ \ \overline{y} = x$$

obținem subgrupul G_4^5.

1.3.4) $a_2^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^1 = 1$, $a_1^1 = 0$.

Dacă $a_1^2 = a_1^4 = 0$, rezultă $a_1^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

Dacă $a_1^2 = 0$, $a_1^4 \neq 0$, regăsim cazul 1.2.3), iar dacă $a_1^2 \neq 0$, regăsim cazul 1.3.3.3).

1.4) $a_3^1 = 0$, $a_3^2 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem considera că $a_3^2 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = 0$.

1.4.1) $a_2^1 = a_2^3 = a_2^4 = 0$. Rezultă $a_2^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

1.4.2) $a_2^1 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2.3).

1.4.3) $a_2^1 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. Regăsim cazul 1.3.3).

1.4.4) $a_2^1 \neq 0$. În acest caz luăm $a_2^1 = 1$, $a_1^1 = 0$.

Dacă $a_1^3 = a_1^4 = 0$, rezultă $a_1^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

Dacă $a_1^3 = 0$, $a_1^4 = 0$, regăsim cazul 1.2.3), iar dacă $a_1^3 \neq 0$, regăsim cazul 1.3.3.).

1.5) $a_3^1 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem presupune că $a_3^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = 0$.

1.5.1) $a_2^2 = a_2^3 = a_2^4 = 0$. Rezultă $a_2^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

1.5.2) $a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2.4).

1.5.3) $a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. Regăsim cazul 1.3.4).

1.5.4) $a_2^2 \neq 0$. Regăsim cazul 1.4.4).

2) $a_4^1 = a_4^2 = a_4^3 = a_4^4 = 0$, $a_4^5 \neq 0$. Făcînd o schimbare de parametri putem considera că $a_4^5 = 1$, $a_1^5 = a_2^5 = a_3^5 = 0$.

2.1) $a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = a_3^4 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1).

2.2) $a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_3^4 = 1$, $a_1^4 = a_2^4 = 0$.

2.2.1) $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$. Rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).

2.2.2) $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. Luăm $a_2^3 = 1$, $a_1^3 = 0$.

Dacă $a_1^1 = a_1^2 = 0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).

Dacă $a_1^1 = 0$, $a_1^2 \neq 0$, sau dacă $a_1^1 \neq 0$, operatorii Y_h nu formează grup.

2.2.3) $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^2 = 1$, $a_1^2 = 0$.

2.2.3.1) $a_1^1 = a_1^3 = 0$. Rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).

2.2.3.2) $a_1^1 = 0$, $a_1^3 \neq 0$. Punînd condiţia ca operatorii Y_h să formeze grup, obţinem o relaţie imposibilă.

2.2.3.3) $a_1^1 \neq 0$. Luînd $a_1^1 = 1$ şi scriind că operatorii Y_h formează grup, obţinem $a_1^6 = a_2^6 = 0$, $a_3^6 = a_1^3$, $a_4^6 = a_2^3$ şi prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x + a_1^3,\ y = y + a_2^3,$$

găsim subgrupul

$$G_4^9 \equiv [xp,\ yp,\ xq,\ yq].$$

2.2.4) $a_2^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^1 = 1$, $a_1^1 = 0$.

Dacă $a_1^2 = a_1^3 = 0$, rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).

Dacă $a_1^2 = 0$, $a_1^3 \neq 0$, operatorii Y nu formează grup.

Dacă $a_1^2 \neq 0$, regăsim cazul 2.2.3.3).

2.3) $a_3^1 = a_3^2 = 0$, $a_3^3 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_3^3 = 1$, $a_1^3 = a_2^3 = 0$.

2.3.1) $a_2^1 = a_2^2 = a_2^4 = 0$. Rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).

2.3.2) $a_2^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.2).

2.3.3) $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$. Luăm $a_2^2 = 1$, $a_1^2 = 0$.

2.3.3.1) $a_1^1 = a_1^4 = 0$. Rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).

2.3.3.2) $a_1^1 = 0$, $a_1^4 \neq 0$. Operatorii Y_h nu formează grup.

2.3.3.3) $a_1^1 \neq 0$. Putem lua $a_1^1 = 1$ şi punînd condiţia ca operatorii Y_h să formeze grup, obţinem $a_1^4 = a_2^4 = a_3^4 = a_1^6 = a_2^6 = a_3^6 = 0$. Făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x} = y + a_4^6,\ \ \overline{y} = x,$$

obţinem subgrupul G_4^2.

2.3.4) $a_2^1 \neq 0$. În acest caz luăm $a_2^1 = 1$, $a_1^1 = 0$.

Dacă $a_1^2 = a_1^4 = 0$, rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).

Dacă $a_1^2 = 0$, $a_1^4 \neq 0$, regăsim cazul 2.2.2).

Dacă $a_1^2 \neq 0$, regăsim cazul 2.3.3.3).

2.4) $a_3^1 = 0$, $a_3^2 \neq 0$. Putem lua $a_3^2 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = 0$.

2.4.1) $a_2^1 = a_2^3 = a_2^4 = 0$. Rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).

2.4.2) $a_2^1 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.3).

2.4.3) $a_2^1 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.3).

2.4.4) $a_2^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^1 = 1$, $a_1^1 = 0$.

Dacă $a_1^3 = a_1^4 = 0$, rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).

Dacă $a_1^3 = 0$, $a_1^4 \neq 0$, regăsim cazul 2.2.3.3).

Dacă $a_1^3 \neq$, regăsim cazul 2.3.3.3).

2.5) $a_3^1 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem considera că $a_3^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = 0$.

Dacă $a_2^2 = a_2^3 = a_2^4 = 0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).

Dacă $a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^4 \neq 0$, operatorii Y nu formează grup.

Dacă $a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$, regăsim cazul 2.3.4), iar dacă $a_2^2 \neq 0$, regăsim cazul 2.4.4).

3) $a_4^1 = a_4^2 = a_4^3 = 0$, $a_4^4 \neq$. Printr-o schimbare de parametri, putem considera că $a_4^4 = 1$, $a_1^4 = a_2^4 = a_3^4 = 0$.

3.1) $a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = a_3^5 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim 1.2).

3.2) $a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = 0$, $a_3^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2).

3.3) $a_3^1 = a_3^2 = 0$, $a_3^3 \neq 0$. Putem lua $a_3^3 = 1$, $a_1^3 = a_2^3 = 0$.

3.3.1) $a_2^1 = a_2^2 = a_2^5 = 0$. Rezultă $a_2^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.2.2).

3.3.2) $a_2^1 = a_2^2 \neq 0$, $a_2^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.2).

3.3.3) $a_2^1 = 0$, $a_2^2 = 0$. În acest caz putem presupune că $a_2^2 = 1$, $a_1^2 = 0$.

3.3.3.1) $a_1^1 = 0$. Operatorii Y_h nu formează grup.

3.3.3.2) $a_1^1 \neq 0$. Putem lua $a_1^1 = 1$ și condiția ca operatorii Y_h să formeze grup ne conduce la $a_1^6 = a_2^6 = a_4^6 = a_3^5 = 0$, $a_1^5 = 1$, $a_4^5 \neq 0$, $a_2^5 = a_3^6 = -\dfrac{1}{a_4^5}$. Făcînd acum schimbarea de variabile

$$\overline{x} = x + a_4^5,\ \overline{y} = x,$$

obținem subgrupul G_4^2.

3.3.4) $a_2^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^1 = 1$, $a_1^1 = 0$.

Dacă $a_1^2 = a_1^5 = 0$, rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.2.2.3).

Dacă $a_1^2 = 0$, $a_1^5 \neq 0$, operatorii Y_h nu formează grup.

Dacă $a_1^2 \neq 0$, regăsim cazul 3.3.3.2).

3.4) $a_3^1 = 0$, $a_3^2 \neq 0$. Putem considera că $a_3^2 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = 0$.

3.4.1) $a_2^1 = a_2^3 = a_2^5 = 0$. Rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.2.3).

3.4.2) $a_2^1 = a_2^3 = 0$, $a_2^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.3).

3.4.3) $a_2^1 = 0$, $a_2^3 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3.3).

3.4.4) $a_2^1 \neq 0$. În acest caz putem considera că $a_2^1 = 1$, $a_1^1 = 0$.

Dacă $a_1^3 = a_1^5 = 0$, rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi operatorii Y_h nu formează grup.

Dacă $a_1^3 = 0$, $a_1^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.2.3.3), iar dacă $a_1^3 \neq 0$, regăsim cazul 3.3.3.2).

3.5) $a_3^1 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem presupune că $a_3^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = 0$.

Dacă $a_2^2 = a_2^3 = a_2^5 = 0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.2.4).

Dacă $a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_2^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.2.4).

Dacă $a_2^2 = 0$, $a_2^3 \neq 0$, regăsim cazul 3.3.4).

Dacă $a_2^2 \neq 0$, regăsim cazul 3.4.4).

4) $a_4^1 = a_4^2 = 0$, $a_4^3 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem presupune $a_4^3 = 1$, $a_1^3 = a_2^3 = a_3^3 = 0$.

4.1) $a_1^3 = a_3^2 = a_3^4 = a_3^5 = 0$, rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.3).

4.2) $a_3^1 = a_3^2 = a_3^4 = 0$, $a_3^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.3).

4.3) $a_3^1 = a_3^2 = 0$, $a_3^4 \neq 0$, regăsim cazul 3.3).

4.4) $a_3^1 = 0$, $a_3^2 \neq 0$. În acest caz putem considera că $a_3^2 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = 0$.

4.4.1) $a_2^1 = a_2^4 = a_2^5 = 0$. Rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.3.3).

4.4.2) $a_2^1 = a_2^4 = 0$, $a_2^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.3).

4.4.3) $a_2^1 = 0$, $a_2^4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3.3).

4.4.4) $a_2^1 \neq 0$. Luăm $a_2^1 = 1$, $a_1^1 = 0$.

Dacă $a_1^4 = a_1^5 = 0$, rezultă $a_1^6 \neq 0$, și regăsim cazul 1.3.3.3).

Dacă $a_1^4=0$, $a_1^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.3.3.3).

Dacă $a_1^4 \neq 0$, regăsim cazul 3.3.3.2).

4.5) $a_3^1 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_3^1=1$, $a_1^1=a_2^1=0$.

Dacă $a_2^2=a_2^4=a_2^5=0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$, şi regăsim cazul 1.3.4).

Dacă $a_2^2=a_2^4=0$, $a_2^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.3.4).

Dacă $a_2^2=0$, $a_2^4 \neq 0$, regăsim 3.3.4).

Dacă $a_2^2 \neq 0$, regăsim cazul 4.4.4).

5) $a_4^1=0$, $a_4^2 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem presupune că $a_4^2=1$, $a_1^2=a_2^2=a_3^2=0$.

5.1) $a_3^1=a_3^3=a_3^4=a_3^5=0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.4).

5.2) $a_3^1=a_3^3=a_3^4=0$, $a_3^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.4).

5.3) $a_2^1=a_3^3=0$, $a_3^4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.4).

5.4) $a_3^1=0$, $a_3^3 \neq 0$. Regăsim cazul 4.4).

5.5) $a_3^1 \neq 0$. În acest caz luăm $a_3^1=1$, $a_1^1=a_2^1=0$.

Dacă $a_2^3=a_2^4=a_2^5=0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.4.4).

Dacă $a_2^3=a_2^4=0$, $a_2^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.4.4).

Dacă $a_2^3=0$, $a_2^4 \neq 0$, regăsim cazul 3.4.4).

Dacă $a_2^3 \neq 0$, regăsim cazul 4.4.4).

6) $a_4^1 \neq 0$. Printr-o schimbare de variabile putem considera că $a_4^1=1$, $a_1^1=a_2^1=a_3^1=0$.

Dacă $a_3^2=a_3^3=a_3^4=a_3^5=0$, rezultă că $a_3^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.5).

Dacă $a_3^2=a_3^3=a_3^4=0$, $a_3^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.5).

Dacă $a_3^2=a_3^3=0$, $a_3^4 \neq 0$, regăsim cazul 3.5).

Dacă $a_3^2=0$, $a_3^3 \neq 0$, regăsim cazul 4.5).

Dacă $a_3^2 \neq 0$, regăsim cazul 5.5).

Avem deci următoarea teoremă

Subgrupurile cu patru parametri ale grupului transformărilor afine din plan se pot reduce la următoarele forme

$G_4^1 \equiv [p, q, xq, yq]$, $G_4^2 \equiv [q, xp, xp, yp]$, $G_4^3 \equiv [p, q, yp, yq]$,
$G_4^4 \equiv [p, q, xp, yq]$, $G_4^5 \equiv [p, q, xq, xp + \lambda\, yq]$,
$G_4^6 \equiv [p, q, xp + yq, yp - xq]$, $G_4^7 \equiv [p, q, xp + yq, (x + y)\, q]$,
$G_4^8 \equiv [p, q, xp + yq, yp + \lambda\, (x + y)q]$, $\left(\lambda < -\dfrac{1}{4}\right)$, $G_4^9 \equiv [xp, yp, xq, yq]$.

Să considerăm acum cinci operatori

$$Y_k f = a_k^i X_i f, \qquad (i = 1, \ldots, 6\,;\, k = 1, \ldots, 5).$$

1) $a_5^1 = \ldots = a_5^5 = 0$, $a_5^6 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem presupune că $a_5^6=1$, $a_1^6=a_2^6=a_3^6=a_4^6=0$.

1.1) $a_4^1 = \ldots = a_4^4 = 0$. Rezultă $a_4^5 \neq 0$ şi printr-o schimbare de parametri putem considera că $a_4^5=1$, $a_1^5=a_2^5=a_3^5=0$.

1.1.1) $a_3^1=a_3^2=a_3^3=0$. Rezultă $a_3^4 \neq 0$ şi putem lua $a_3^4=1$, $a_1^4 = a_2^4=0$.

1.1.1.1) $a_2^1=a_2^2=0$. Deducem $a_2^3 \neq 0$ şi luăm $a_2^3=1$, $a_1^3=0$. Scriind că operatorii Y_k formează grup, obţinem $a_1^2=0$ şi deci avem subgrupul

$$G_5^1 \equiv [p, q, xp, xq, yq].$$

1.1.1.2) $a_2^1=0$, $a_2^2 \neq 0$. În acest caz cei cinci operatori nu formează grup.

1.1.1.3) $a_2^1 \neq 0$. Putem lua $a_2^1 = 1, a_1^1 = 0$. Punînd condiția ca operatorii Y_k să formeze grup, obținem $a_1^2 = a_2^2 = a_2^3 = 0$, $a_1^3 \neq 0$ și regăsim subgrupul G_5^1.

1.1.2) $a_3^1 = a_3^2 = 0$, $a_3^3 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_3^3 = 1, a_1^3 = a_2^3 = 0$.

1.1.2.1) $a_2^1 = a_2^2 = 0$. Rezultă $a_2^4 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1.1).

1.1.2.2) $a_2^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$. Luăm $a_2^2 = 1$, $a_4^2 = 0$.

1.1.2.2.1) $a_1^1 = 0$. Operatorii Y_k nu formează grup.

1.1.2.2.2) $a_1^1 \neq 0$. Putem lua $a_1^1 = 1$ și scriind că operatorii Y_k formează grup deducem $a_1^4 = a_2^4 = a_3^4 = 0$. Schimbînd acum variabilele între ele, obținem subgrupul G_5^1.

1.1.2.3) $a_2^1 \neq 0$. Luăm $a_2^1 = 1$, $a_1^1 = 0$.

Dacă $a_1^2 = 0$, operatorii Y_k nu formează grup, iar dacă $a_1^2 \neq 0$, regăsim cazul 1.1.2.2.2)

1.1.3) $a_3^1 = 0$, $a_3^2 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_3^2 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = 0$.

1.1.3.1) $a_1^1 = a_1^3 = 0$. Rezultă $a_1^4 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1)

1.1.3.2) $a_1^1 = 0$, $a_1^3 \neq 0$. Regăsim cazul 1.1.2.2).

1.1.3.3) $a_1^1 \neq 0$. Luăm $a_1^1 = 1$, $a_2^1 = 0$.

Dacă $a_2^3 = 0$, rezultă $a_2^4 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

Dacă $a_2^3 \neq 0$, regăsim cazul 1.1.2.2.2).

1.1.4) $a_3^1 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem considera $a_3^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = 0$.

1.1.4.1) $a_1^2 = a_1^3 = 0$. Rezultă $a_1^4 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

1.1.4.2) $a_1^2 = 0$, $a_1^3 \neq 0$. Luăm $a_1^3 = 1$, $a_2^3 = a_3^3 = 0$.

Dacă $a_2^2 = 0$, rezultă $a_2^4 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

Dacă $a_2^2 \neq 0$, regăsim cazul 1.1.2.2.2).

1.1.4.3) $a_1^2 \neq 0$. Regăsim cazul 1.1.3.3).

1.2) $a_4^1 = a_4^2 = a_4^3 = 0$, $a_4^4 \neq 0$. Făcînd o schimbare de parametri putem presupune că $a_4^4 = 1$, $a_1^4 = a_2^4 = a_3^4 = 0$.

1.2.1) $a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = 0$. Rezultă $a_3^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

1.2.2) $a_3^1 = a_3^2 = 0$, $a_3^3 \neq 0$. Luăm $a_3^3 = 1$, $a_1^3 = a_2^3 = 0$.

1.2.2.1) $a_1^1 = a_1^2 = 0$. Rezultă $a_1^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

1.2.2.2.) $a_1^1 = 0$, $a_1^2 \neq 0$. Luăm $a_1^2 = 1$, $a_2^2 = 0$.

1.2.2.2.1) $a_2^1 = 0$. Rezultă $a_2^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

1.2.2.2.2) $a_2^1 \neq 0$. Putem lua $a_2^1 = 1$, și scriind că operatorii Y_k formează grup, obținem

I) $a_1^5 = a_3^5 = a_4^5 = 0$, $a_2^5 = -1$;

II) $a_3^5 = 0$, $a_2^5 = 1$, $a_4^5 \neq 0$, $a_1^5 = -\dfrac{1}{a_4^5}$.

În cazul I) avem subgrupul

$$G_5^2 \equiv [p,\ q,\ yp,\ xq,\ xp - yq].$$

În cazul II), prin schimbarea de variabile

$$\overline{x} = a_1^5\, x - y,\ \overline{y} = x,$$

obținem subgrupul G_5^1.

1.2.2.3) $a_1^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_1^1 = 1$, $a_2^1 = 0$.

Dacă $a_2^2 = 0$, rezultă $a_2^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

Dacă $a_2^2 \neq 0$, regăsim cazul 1.2.2.2.2).

1.2.3) $a_3^1=0$, $a_3^2 \neq 0$. Luăm $a_3^2=1$, $a_1^2=a_2^2=0$.

1.2.3.1) $a_1^1=a_1^3=0$. Rezultă $a_1^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

1.2.3.2) $a_1^1=0$, $a_1^3 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2.2.2.2).

1.2.3.3) $a_1^1 \neq 0$. Putem lua $a_1^1=1$, $a_2^1=0$.

Dacă $a_2^3=0$, rezultă $a_2^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

Dacă $a_2^3 \neq 0$, regăsim cazul 1.2.2).

1.2.4) $a_3^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_3^1=1$, $a_1^1=a_2^1=0$.

1.2.4.1) $a_1^2=a_1^3=0$. Rezultă $a_1^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

1.2.4.2) $a_1^2=0$, $a_1^3 \neq 0$. Putem presupune că $a_1^3=1$, $a_2^3=a_3^3=0$.

Dacă $a_2^2=0$, rezultă $a_2^5=0$ și regăsim cazul 1.1.1).

Dacă $a_2^2 \neq 0$, regăsim cazul 1.2.2.2.2).

1.2.4.3) $a_1^2 \neq 0$. Luăm $a_1^2=1$, $a_2^2=a_3^2=0$.

Dacă $a_2^3=0$, rezultă $a_2^5=0$ și regăsim cazul 1.1.1).

Dacă $a_2^3 \neq 0$, regăsim cazul 1.2.2.2.2).

1.3) $a_4^1=a_4^2=0$, $a_4^3 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem considera că $a_4^3=1$, $a_1^3=a_2^3=a_3^3=0$.

1.3.1) $a_3^1=a_3^2=a_3^4=0$. Rezultă $a_3^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.2).

1.3.2) $a_3^1=a_3^2=0$, $a_3^4 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2.2).

1.3.3) $a_3^1=0$, $a_3^2 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_2^3=1$, $a_1^2=a_2^2=0$.

1.3.3.1) $a_1^1=a_1^4=0$. Rezultă $a_1^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.2).

1.3.3.2) $a_4^1=0$, $a_1^4 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2.3).

1.3.3.3) $a_1^1 \neq 0$. Putem lua $a_1^1=1$, $a_2^1=0$.

Dacă $a_2^4=0$, rezultă $a_2^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.2).

Dacă $a_2^4 \neq 0$, regăsim cazul 1.2.3).

1.3.4) $a_3^1 \neq 0$. Putem considera că $a_3^1=1$, $a_1^1=a_2^1=0$.

1.3.4.1) $a_1^2=a_1^4=0$. Rezultă $a_1^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.2).

1.3.4.2) $a_1^2=0$, $a_1^4 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2.3).

1.3.4.3) $a_1^2 \neq 0$. Regăsim cazul 1.3.3.3).

1.4) $a_4^1=0$, $a_4^2 \neq 0$. Făcînd o schimbare de variabile, putem considera că $a_4^2=1$, $a_1^2=a_2^2=a_3^2=0$.

1.4.1) $a_3^1=a_3^3=a_3^4=0$. Rezultă $a_3^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.3).

1.4.2) $a_3^1=a_3^3=0$, $a_3^4 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2.3).

1.4.3) $a_3^1=0$, $a_2^3 \neq 0$. Regăsim cazul 1.3.3).

1.4.4) $a_3^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_3^1=1$, $a_1^1=a_2^1=0$.

1.4.4.1) $a_1^3=a_1^4=0$. Rezultă $a_1^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.3).

1.4.4.2) $a_1^3=0$, $a_1^4 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2.4).

1.4.4.3) $a_1^3 \neq 0$. Regăsim cazul 1.3.4).

1.5) $a_4^1 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem lua $a_4^1=1$, $a_1^1=a_2^1=a_3^1=0$.

1.5.1) $a_3^2=a_3^3=a_3^4=0$. Rezultă $a_3^5 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.4).

1.5.2) $a_3^2=a_3^3=0$, $a_3^4 \neq 0$. Regăsim cazul 1.2.4).

1.5.3) $a_3^2=0$, $a_3^3 \neq 0$. Regăsim cazul 1.3.4).

1.5.4) $a_3^2 \neq 0$. Regăsim cazul 1.4.4).

2) $a_5^1= \ldots =a_5^4=0$, $a_5^5 \neq 0$. Făcînd o schimbare de parametri putem considera că $a_5^5=1$, $a_1^5=a_2^5=a_3^5=a_4^5=0$.

2.1) $a_4^1=a_4^2=a_4^3=a_4^4=0$. Rezultă $a_4^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1).

2.2) $a_4^1=a_4^2=a_4^3=0$, $a_4^4 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_4^4=1$, $a_1^4=a_2^4=a_3^4=0$.

2.2.1) $a_3^1=a_3^2=a_3^3=0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1).

2.2.2.) $a_3^1=a_3^2=0$, $a_3^3 \neq 0$. Putem presupune că $a_3^3=1$, $a_1^3=a_2^3=0$

2.2.2.1) ${}^1_1 = a_1^2 = 0$. Rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).
2.2.2.2) $a_1^1 = 0$, $a_1^2 \neq 0$. Luăm $a_1^2 = 1$, $a_2^2 = 0$.
2.2.2.2.1) $a_2^1 = 0$. Rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).
2.2.2.2.2) $a_2^1 \neq 0$. Cu aceste valori operatorii Y_k nu formează grup.
2.2.2.3) $a_1^1 \neq 0$. Luăm $a_1^1 = 1$, $a_2^1 = 0$.

Dacă $a_2^2 = 0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1.1), iar dacă $a_2^2 \neq 0$ regăsim cazul 2.2.2.2).

2.2.3) $a_3^1 = 0$, $a_3^2 \neq 0$. În acest caz putem considera că $a_3^2 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = 0$.

2.2.3.1) $a_1^1 = a_1^3 = 0$. Rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).
2.2.3.2) $a_1^1 = 0$, $a_1^3 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.2.2).
2.2.3.3) $a_1^1 \neq 0$. Luăm $a_1^1 = 1$, $a_2^1 = 0$.
Dacă $a_2^3 = 0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).
Dacă $a_2^3 \neq 0$, regăsim cazul 2.2.2).
2.2.4) $a_3^1 \neq 0$. Putem lua $a_3^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = 0$.
2.2.4.1) $a_1^2 = a_1^3 = 0$. Rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1).
2.2.4.2) $a_1^2 = 0$, $a_1^3 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.2).
2.2.4.3) $a_1^2 \neq 0$. Luăm $a_1^2 = 1$, $a_2^2 = a_3^2 = 0$.

Dacă $a_2^3 = 0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.1), iar dacă $a_2^3 \neq 0$, regăsim cazul 2.2.2).

2.3) $a_4^1 = a_4^2 = 0$, $a_4^3 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_4^3 = 1$. $a_1^3 = a_2^3 = a_3^3 = 0$.

2.3.1) $a_3^1 = a_3^2 = a_3^4 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.2).
2.3.2) $a_3^1 = a_3^2 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.2).
2.3.3) $a_3^1 = 0$, $a_3^2 \neq 0$. Luăm $a_3^2 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = 0$.
2.3.3.1) $a_1^1 = a_1^4 = 0$. Rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.2).
2.3.3.2) $a_1^1 = 0$, $a_1^4 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.2).
2.3.3.3) $a_1^1 \neq 0$. Luăm $a_1^1 = 1$, $a_2^1 = 0$.

Dacă $a_2^4 = 0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.2), iar dacă $a_2^4 \neq 0$, regăsim cazul 2.2.2).

2.3.4) $a_3^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_3^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = 0$.
2.3.4.1) $a_1^2 = a_1^4 = 0$. Rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.2).
2.3.4.2) $a_1^2 = 0$, $a_1^4 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.2).
2.3.4.3) $a_1^2 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.3.3).

2.4) $a_4^1 = 0$, $a_4^2 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem presupune că $a_4^2 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = 0$.

2.4.1) $a_3^1 = a_3^3 = a_3^4 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.3).
2.4.2) $a_3^1 = a_3^3 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.3).
2.4.3) $a_3^1 = 0$, $a_3^3 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.3).
2.4.4) $a_3^1 \neq 0$. Luăm $a_3^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = 0$.
2.4.4.1) $a_1^3 = a_1^4 = 0$. Rezultă $a_1^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.3).
2.4.4.2) $a_1^3 = 0$, $a_1^4 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.3).
2.4.4.3) $a_1^3 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.3).
2.5) $a_4^1 \neq 0$. Putem presupune că $a_4^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = a_3^1 = 0$.
Dacă $a_3^2 = a_3^3 = a_3^4 = 0$, rezultă $a_3^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1.4)
Dacă $a_3^2 = a_3^3 = 0$, $a_3^4 \neq 0$, regăsim cazul 2.2.4).
Dacă $a_3^2 = 0$, dacă $a_3^3 \neq 0$ regăsim cazul 2.4.4).

3) $a_5^4 = a_5^2 = a_5^3 = 0$, $a_5^4 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem considera că $a_5^4 = 1$, $a_1^4 = a_2^4 = a_3^4 = a_4^4 = 0$.

3.1) $a_4^1 = a_4^2 = a_4^3 = a_4^5 = 0$. Rezultă $a_4^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.2).

3.2) $a_4^1 = a_4^2 = a_4^3 = 0$, $a_4^5 \neq 0$. Regăsim 2.2).

3.3) $a_4^1 = a_4^2 = 0$, $a_4^3 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_4^3 = 1$, $a_1^3 = a_2^3 = a_3^3 = 0$.

3.3.1) $a_3^2 = a_3^2 = a_3^5 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.2.2).

3.3.2) $a_3^1 = a_3^2 = 0$, $a_3^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.2).

3.3.3) $a_3^1 = 0$, $a_3^2 \neq 0$. Putem lua $a_3^2 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = 0$.

3.3.3.1) $a_1^1 = a_1^5 = 0$. Rezultă $a_1^6 \neq 0$. și regăsim cazul 1.2..2.2).

3.3.3.2) $a_1^1 = 0$, $a_1^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.2.2).

3.3.3.3) $a_1^1 \neq 0$. Luăm $a_1^1 = 1$, $a_2^1 = 0$.

Dacă $a_2^5 = 0$, rezultă $a_2^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.2.2.2), iar dacă $a_2^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.2.2.2).

3.3.4) $a_3^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_3^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = 0$.

3.3.4.1) $a_1^2 = a_1^5 = 0$. Rezultă $a_1^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.2.2.3).

3.3.4.2) $a_1^2 = 0$, $a_1^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.2.3).

3.3.4.3) $a_1^2 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3.3.3).

3.4) $a_4^1 = 0$, $a_4^2 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem presupune că $a_4^2 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = 0$.

3.4.1) $a_3^1 = a_3^3 = a_3^5 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1.2)

3.4.2) $a_3^1 = a_3^3 = 0$, $a_3^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.2.2).

3.4.3) $a_3^1 = 0$, $a_3^3 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3.3).

3.4.4) $a_3^1 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_3^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = 0$.

Dacă $a_1^3 = a_1^5 = 0$, rezultă $a_1^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1.2)

Dacă $a_1^3 = 0$, $a_1^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.2.2.2).

Dacă $a_1^3 \neq 0$, regăsim cazul 3.3.3.3).

3.5) $a_4^1 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem presupune că $a_4^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = a_3^1 = 0$.

3.5.1) $a_3^2 = a_3^3 = a_3^5 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.1.1.3).

3.5.2) $a_3^2 = a_3^3 = 0$, $a_3^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.2.2.3).

3.5.3) $a_3^2 = 0$, $a_3^3 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3.4).

3.5.4) $a_3^2 \neq 0$. Regăsim cazul 3.4.4).

4) $a_5^1 = a_5^2 = 0$, $a_5^3 \neq 0$. Printr-o schimbare de parametri putem considera că $a_5^3 = 1$, $a_1^3 = a_2^3 = a_3^3 = a_4^3 = 0$.

4.1) $a_4^1 = a_4^2 = a_4^4 = a_4^5 = 0$. Rezultă că $a_4^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.3).

4.2) $a_4^1 = a_4^2 = a_4^4 = 0$, $a_4^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3).

4.3) $a_4^1 = a_4^2 = 0$, $a_4^4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3).

4.4) $a_4^1 = 0$, $a_4^2 \neq 0$. În acest caz putem lua $a_4^2 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = a_3^3 = 0$.

4.4.1) $a_3^1 = a_3^4 = a_3^5 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.3.3).

4.4.2) $a_3^1 = a_3^4 = 0$, $a_3^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.3).

4.4.3) $a_3^1 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3.3).

4.4.4) $a_3^1 = 0$. Luăm $a_3^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = 0$.

Dacă $a_1^4 = a_1^5 = 0$, rezultă $a_1^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.3.3.3).

Dacă $a_1^4 = 0$, $a_1^5 \neq 0$, regăsim cazul 2.3.3.3), iar dacă $a_1^4 \neq 0$, regăsim cazul 3.3.3.3).

4.5) $a_4^1 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_4^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = a_3^1 = 0$.

4.5.1) $a_3^2 = a_3^4 = a_3^5 = 0$. Rezultă $a_3^6 \neq 0$ și regăsim cazul 1.3.4).

4.5.2) $a_3^2 = a_3^4 = 0$, $a_3^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.3.4).

4.5.3) $a_3^3 = 0$, $a_3^4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.3.4).

4.5.4) $a_3^2 \neq 0$. Regăsim cazul 4.4.4).

5) $a_5^1 = 0$, $a_5^2 \neq 0$. Făcînd o schimbare de parametri, putem considera că $a_5^2 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = a_4^2 = 0$.

5.1) $a_4^1 = a_4^3 = a_4^4 = a_4^5 = 0$. Rezultă $a_4^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.4).
5.2) $a_4^1 = a_4^3 = a_4^4 = 0$, $a_4^5 \neq 0$. Regăsim cazul 3.4).
5.3) $a_4^1 = a_4^3 = 0$, $a_4^4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.4).
5.4) $a_4^1 = 0$, $a_4^3 \neq 0$. Regăsim cazul 4.4).
5.5) $a_4^1 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_4^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = a_3^1 = 0$
Dacă $a_3^3 = a_3^4 = a_3^5 = 0$, rezultă $a_3^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.4.4).
Dacă $a_3^3 = a_3^4 = 0$, $a_3^5 \neq$ regăsim cazul 2.4.4).
Dacă $a_3^3 = 0$, $a_3^4 \neq 0$, regăsim cazul 3.4.4).
Dacă $a_3^3 \neq 0$, regăsim cazul 4.4.4).

6) $a_5^1 \neq 0$. Printr-o schimbare de variabile putem considera că $a_5^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^1 = a_3^1 = a_4^1 = 0$.
6.1) $a_4^2 = a_4^3 = a_4^4 = a_4^5 = 0$. Rezultă $a_4^6 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.5).
6.2) $a_4^2 = a_4^3 = a_4^4 = 0$, $a_4^5 \neq 0$. Regăsim cazul 2.5).
6.3) $a_4^2 = a_4^3 = 0$, $a_4^4 \neq 0$. Regăsim cazul 3.5).
6.4) $a_4^2 = 0$, $a_4^3 \neq 0$. Regăsim cazul 4.5).
6.5) $a_4^2 \neq 0$. Regăsim cazul 5.5).

Avem deci teorema

Subgrupurile cu cinci parametri ale grupului transformărilor afine din plan, se pot reduce la una din formele

$$G_5^1 \equiv [p,\ q,\ xp,\ xq,\ yq],\ G_5^2 \equiv [p,\ q,\ yp,\ xq,\ xp - yq].$$

Primită la redacţie la 3 ianuarie 1967

Centrul de statitsică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. E. KOWALEWSKI, *Einfführung in die Theorie der Kontinuierlichen Gruppen*. Leipzig, 1931.
2. S. Lie und F. ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*. vol. III, Leipzig, 1893.

5.1) $a_1^1 = a_1^2 = a_2^1 = a_2 = 0$. Rezultă $a_1 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.1).
5.2) $a_1 = a_2 = a_2^1 = 0$, $a_1^1 \neq 0$. Regăsim cazul 2.1).
5.3) $a_1 = a_2^2 = 0$, $a_2^1 \neq 0$. Regăsim cazul 3.1).
5.4) $a_1^1 = 0$, $a_2^1 \neq 0$. Regăsim cazul 4.1).
5.5) $a_2^1 \neq 0$. În acest caz putem presupune că $a_2^1 = 1$, $a_1^1 = a_2^2 = a_1 = 0$.
Dacă $a_2^2 = a_1^1 = a_2^2 = 0$, rezultă $a_2^2 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.4.1).
Dacă $a_1^2 = a^1 = 0$, $a_2 \neq$ regăsim cazul 2.4.1).
Dacă $a_1 = 0$, $a_2^1 \neq 0$, regăsim cazul 3.4.1).
Dacă $a_2^2 \neq 0$, regăsim cazul 4.4.1).
6) $a_2^1 \neq 0$. Printr-o schimbare de variabile putem considera ca $a_2^1 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = a_1 = a_2 = 0$.
6.1) $a_1^1 = a_2 = a_1^2 = a_1 = 0$. Rezultă $a_1^1 \neq 0$ şi regăsim cazul 1.5).
6.2) $a_1^1 = a_2^2 = a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$. Regăsim cazul 2.5).
6.3) $a_1^1 = a_2^2 = 0$, $a_1 \neq 0$. Regăsim cazul 3.5).
6.4) $a_1^1 = 0$, $a_2^2 \neq 0$. Regăsim cazul 4.5).
6.5) $a_1^1 \neq 0$. Regăsim cazul 5.5).

Avem deci teorema

Subgrupurile cu câte un parametru ale grupului transformărilor afine din plan, se pot reduce la unu din formele

$$G_2^1 = \{p, q, xp, xq, yq\}, \; G_2^2 = \{p, q, xp, yp, yq - xq\} \; [illegible]$$

Primită la redacţie la [illegible] 1957.

Centrul de [illegible]
al Academiei Republicii Populare Romîne
[illegible] Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. G. Kowalewski, Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen. Leipzig, 1931.
2. S. Lie und F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, vol. III, Leipzig, 1893.

PROPRIETĂŢI ALE FUNCŢIEI CARACTERISTICE A UNUI MULTIPOL

DE

IOAN TOMESCU

În lucrarea de faţă se pun în evidenţă proprietăţi ale funcţiei caracteristice a unui multipol (introdusă de A. G. Lunţ) în legătură cu unele probleme de simplificare a multipolilor cu păstrarea tuturor conductibilităţilor totale.

În acest articol se vor utiliza numai matrici booleene $A=\{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ cu $a_{\alpha\alpha}=1$. Se notează $\mathfrak{X}=\{1,2,\ldots,p\}$ şi $\Omega=\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\setminus\{(1,1);(2,2);\ldots;(p,p)\}$. În general notaţiile coincid cu cele folosite în [3].

În [3] este introdusă funcţia caracteristică a multipolului $\mathfrak{A}$ cu p noduri de matrice A prin relaţia $f_A(x_1,\ldots,x_p)=\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta}\,x_\alpha\,\overline{x}_\beta=\sum\limits_{(\alpha,\beta)\in\Omega} a_{\alpha\beta}\,x_\alpha\,\overline{x}_\beta$, unde $x_\alpha\in L_2=\{0,1\}$ pentru orice $\alpha\in\mathfrak{X}$ şi se demonstrează că matricile conductibilităţilor totale a doi multipoli sînt egale, adică $A^{p-1}=B^{p-1}$ dacă şi numai dacă $f_A(x_1,\ldots,x_p)=f_B(x_1,\ldots,x_p)$.

Fiind date matricile A şi B, vom considera mulţimea $\Lambda\subset\Omega$ şi definim matricea $C_\Lambda=\{c_{\alpha\beta}^{[\Lambda]}\}_{\alpha,\beta\in\mathfrak{X}}$ astfel: $c_{\alpha\beta}^{[\Lambda]}=\{A\times B\}_{\alpha\beta}=\sum\limits_{k=1}^{p} a_{\alpha k}\,b_{k\beta}$ dacă $(\alpha,\beta)\in\Omega\setminus\Lambda$; $c_{\alpha\beta}^{[\Lambda]}=a_{\alpha\beta}+b_{\alpha\beta}$ dacă $(\alpha,\beta)\in\Lambda$ şi $c_{\alpha\alpha}^{[\Lambda]}=1$ pentru orice $\alpha\in\mathfrak{X}$.

TEOREMA 1. *Avem*

$$f_{C_\Lambda}(x_1,\ldots,x_p)=f_{A+B}(x_1,\ldots,x_p)=f_A(x_1,\ldots,x_p)+f_B(x_1,\ldots,x_p).$$

Demonstraţie.

$$f_{A+B}(x_1,\ldots,x_p)=\sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega}(a_{\alpha\beta}+b_{\alpha\beta})\,x_\alpha\overline{x}_\beta=\sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega}a_{\alpha\beta}x_\alpha\overline{x}_\beta+\sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega}b_{\alpha\beta}\,x_\alpha\,\overline{x}_\beta=$$

$$=f_A(x_1,\ldots,x_p)+f_B(x_1,\ldots,x_p).$$

$$f_{C_\Lambda}(x_1,\ldots,x_p)=\sum_{(\alpha,\beta)\in\Lambda}(a_{\alpha\beta}+b_{\alpha\beta})\,x_\alpha\,\overline{x}_\beta+\sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega\setminus\Lambda}\ \sum_{k=1}^{p}a_{\alpha k}\,b_{k\beta}\,x_\alpha\,\overline{x}_\beta.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 927–934, BUCUREŞTI, 1967

Dar

$$\sum_{k=1}^{p} a_{\alpha k}\, b_{k\beta} = a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\alpha,\beta}}^{p} a_{\alpha k}\, b_{k\beta} \geqslant a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}$$

și deci

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega\setminus\Lambda}\ \sum_{k=1}^{p} a_{\alpha k}\, b_{k\beta}\, x_\alpha \overline{x}_\beta \geqslant \sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega\setminus\Lambda} (a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})\, x_\alpha \overline{x}_\beta .$$

Rezultă că

$$f_{C_\Lambda}(x_1,\ldots,x_p) \geqslant \sum_{(\alpha,\beta)\in\Lambda} (a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})\, x_\alpha \overline{x}_\beta + \sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega\setminus\Lambda} (a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})\, x_\alpha \overline{x}_\beta = f_{A+B}(x_1,\ldots,x_p).$$

Se observă că

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega\setminus\Lambda}\ \sum_{k=1}^{p} a_{\alpha k}\, b_{k\beta}\, x_\alpha \overline{x}_\beta \leqslant \sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega}\ \sum_{k=1}^{p} a_{\alpha k}\, b_{k\beta}\, x_\alpha \overline{x}_\beta = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{p} a_{\alpha k}\, b_{k\beta}\, x_\alpha \overline{x}_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{p} a_{\alpha k}\, b_{k\beta}\, x_\alpha \overline{x}_\beta (x_k + \overline{x}_k) = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{p} a_{\alpha k}\, b_{k\beta}\, x_\alpha \overline{x}_\beta x_k + \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{p} a_{\alpha k}\, b_{k\beta}\, x_\alpha \overline{x}_\beta \overline{x}_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\beta,k=1}^{p} b_{k\beta}\, x_k \overline{x}_\beta + \sum_{\alpha,k=1}^{p} a_{\alpha k}\, x_\alpha \overline{x}_k = f_A(x_1,\ldots,x_p) + f_B(x_1,\ldots,x_p),$$

deci

$$f_{C_\Lambda}(x_1,\ldots,x_p) \leqslant \sum_{(\alpha,\beta)\in\Lambda} (a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})\, x_\alpha \overline{x}_\beta + f_A(x_1,\ldots,x_p) + f_B(x_1,\ldots,x_p) = f_A(x_1,\ldots,x_p) + f_B(x_1,\ldots,x_p).$$

Deoarece am obținut

$$f_{A+B}(x_1,\ldots,x_p) \leqslant f_{C_\Lambda}(x_1,\ldots,x_p) \leqslant f_{A+B}(x_1,\ldots,x_p),$$

rezultă c.c.t.d.

În cazul cînd $\Lambda = \emptyset$, se obține $f_{A\times B}(x_1,\ldots,x_p) = f_{A+B}(x_1,\ldots,x_p)$, relație care arată că suma și produsul a două matrici booleene cu elementele diagonalei principale egale cu 1 reprezintă doi multipoli cu aceleași conductibilități totale, adică $\chi(A\times B) = \chi(A+B)$.

Relația se extinde prin inducție la un număr finit de matrici $A_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$f_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}(x_1,\ldots,x_p) = f_{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i}(x_1,\ldots,x_p) = \sum_{i=1}^{n} f_{A_i}(x_1,\ldots,x_p),$$

deci

$$(A_1\times A_2\times\ldots\times A_n)^{p-1} = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)^{p-1}.$$

De aici rezultă un procedeu de simplificare a unui multipol $\mathfrak{A}$ avînd matricea conductibilităților directe A: se descompune, într-un mod oarecare, $A = B + C$ și se face produsul $B\times C$; elementele $\{B\times C\}_{\alpha\beta}$ care conțin mai multe contacte (litere) ca $a_{\alpha\beta}$ se înlocuiesc cu $a_{\alpha\beta}$ și multipolul astfel obținut va conține cel mult tot atîtea contacte ca $\mathfrak{A}$.

Descompunerea matricii A se poate face în n matrici : $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, înlocuindu-se elementele $\{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n\}_{\alpha\beta}$ care conțin mai multe contacte ca $a_{\alpha\beta}$ cu $a_{\alpha\beta}$.

Din relația $f_{B+C}(x_1, \ldots, x_p) = f_B(x_1, \ldots, x_p) + f_C(x_1, \ldots, x_p)$ rezultă că putem descompune $A = B + C$ și simplifica fiecare din matricile B și C : se obțin matricile B_1 și C_1 cu proprietatea că $\chi(B_1) = \chi(B)$; $\chi(C_1) = \chi(C)$.

Rezultă că $\chi(A_1) = \chi(A)$, unde $A_1 = B_1 + C_1$ deoarece

$$f_{A_1} = f_{B_1+C_1} = f_{B_1} + f_{C_1} = f_B + f_C = f_{B+C} = f_A.$$

Aceste descompuneri și simplificări se pot efectua numai în cazul cînd matricile B și C se simplifică prin aplicarea unor transformări care păstrează toate conductibilitățile totale ale multipolilor.

Să considerăm cazul cînd matricile conductibilităților directe A, B sînt simetrice (adică sînt asociate unor multipoli $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ care nu conțin elemente ventil), deci $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$; $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ pentru orice $\alpha, \beta \in \mathfrak{P}$. În general matricea produs $A \times B$ nu mai este simetrică și metoda de simplificare expusă mai sus nu este avantajoasă deoarece introduce elemente ventil în schemă.

Vom demonstra însă că matricea $C = A \times B$ poate fi simetrizată într-un mod oarecare (unele elemente $c_{\alpha\beta}$ se înlocuiesc prin elementele simetrice față de diagonala principală, $c_{\beta\alpha}$) și toate conductibilitățile totale se conservă (egale cu conductibilitățile totale ale sumei $A + B$), obținîndu-se scheme care nu conțin elemente ventil.

Să considerăm mulțimile $\Lambda \subset \Omega$, $\Theta \subset \Omega \setminus \Lambda$ care au proprietatea că dacă $(\alpha, \beta) \in \Lambda$, atunci și $(\beta, \alpha) \in \Lambda$ și dacă $(\alpha, \beta) \in \Theta$, atunci $(\beta, \alpha) \notin \Theta$. Notăm $A \times B = C = \{c_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathfrak{P}}$.

Definim matricea $C_{\Lambda,\Theta} = \{c_{\alpha\beta}^{[\Lambda,\Theta]}\}_{\alpha,\beta \in \mathfrak{P}}$ astfel : $c_{\alpha\beta}^{[\Lambda,\Theta]} = a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}$ dacă $(\alpha, \beta) \in \Lambda$; $c_{\alpha\beta}^{[\Lambda,\Theta]} = c_{\beta\alpha}$ dacă $(\alpha, \beta) \in \Theta$; $c_{\alpha\beta}^{[\Lambda,\Theta]} = c_{\alpha\beta}$ dacă $(\alpha, \beta) \in \Omega \setminus \{\Lambda \cup \Theta\}$ și $c_{\alpha\alpha}^{[\Lambda,\Theta]} = 1$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{P}$.

În cazul în care se alege $\Theta = \{(\alpha_1, \beta_1) ; (\alpha_2, \beta_2) ; \ldots ; (\alpha_s, \beta_s)\}$ și $\Omega \setminus \Lambda = \{(\alpha_1, \beta_1) ; (\beta_1, \alpha_1) ; \ldots ; (\alpha_s, \beta_s) ; (\beta_s, \alpha_s)\}$, atunci matricea $C_{\Lambda,\Theta}$ este simetrică dacă matricile A și B sînt simetrice.

TEOREMA 2. *Dacă matricile A și B sînt simetrice, atunci*

$$f_{C_{\Lambda,\Theta}}(x_1, \ldots, x_p) = f_{A+B}(x_1, \ldots, x_p).$$

Această teoremă arată că prin procedeul de simetrizare se conservă toate conductibilitățile totale sau $\chi(C_{\Lambda,\Theta}) = \chi(C) = \chi(A + B)$.

Demonstrație.

$$f_{C_{\Lambda,\Theta}}(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{(\alpha,\beta) \in \Lambda} (a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}) x_\alpha \overline{x}_\beta + \sum_{(\alpha,\beta) \in \Theta} c_{\beta\alpha} x_\alpha \overline{x}_\beta + \sum_{(\alpha,\beta) \in \Omega \setminus \{\Lambda \cup \Theta\}} c_{\alpha\beta} x_\alpha \overline{x}_\beta.$$

În această expresie

$$\sum_{(\alpha,\beta) \in \Theta} c_{\beta\alpha} x_\alpha \overline{x}_\beta = \sum_{(\alpha,\beta) \in \Theta} \sum_{k=1}^{p} a_{\beta k} b_{k\alpha} x_\alpha \overline{x}_\beta$$

și

$$\sum_{k=1}^{p} a_{\beta k} b_{k\alpha} \geqslant a_{\beta\alpha} + b_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta},$$

deci

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in\Theta} c_{\beta\alpha}\, x_\alpha\, \overline{x}_\beta \geqslant \sum_{(\alpha,\beta)\in\Theta} (a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})\, x_\alpha\, \overline{x}_\beta,$$

de unde rezultă

$$f_{C_{\Lambda,\Theta}}(x_1, \ldots, x_p) \geqslant \sum_{(\alpha,\beta)\in\Lambda\cup\Theta} (a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})\, x_\alpha\, \overline{x}_\beta + \sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega\setminus\{\Lambda\cup\Theta\}} c_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, \overline{x}_\beta = $$

$$= f_{C_{\Lambda\cup\Theta}}(x_1, \ldots, x_p).$$

Dar

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in\Theta} c_{\beta\alpha}\, x_\alpha\, \overline{x}_\beta = \sum_{(\alpha,\beta)\in\Theta} \sum_{k=1}^{p} a_{\beta k}\, b_{k\alpha}\, x_\alpha\, \overline{x}_\beta = \sum_{(\alpha,\beta)\in\Theta} \sum_{k=1}^{p} a_{\beta k}\, b_{k\alpha}\, x_\alpha\, \overline{x}_\beta\, (x_k + \overline{x}_k) =$$

$$= \sum_{(\alpha,\beta)\in\Theta} \sum_{k=1}^{p} a_{\beta k}\, b_{k\alpha}\, x_\alpha\, \overline{x}_\beta\, x_k + \sum_{(\alpha,\beta)\in\Theta} \sum_{k=1}^{p} a_{\beta k}\, b_{k\alpha}\, x_\alpha\, \overline{x}_\beta\, \overline{x}_k = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{p} a_{\beta k}\, b_{k\alpha}\, x_\alpha\, \overline{x}_\beta\, x_k +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{p} a_{\beta k}\, b_{k\alpha}\, x_\alpha\, \overline{x}_\beta\, \overline{x}_k \leqslant \sum_{\beta,k=1}^{p} a_{\beta k}\, \overline{x}_\beta\, x_k + \sum_{\alpha,k=1}^{p} b_{k\alpha}\, x_\alpha\, \overline{x}_k = \sum_{\beta,k=1}^{p} a_{k\beta}\, x_k\, \overline{x}_\beta +$$

$$+ \sum_{\alpha,k=1}^{p} b_{\alpha k}\, x_\alpha\, \overline{x}_k = f_A(x_1, \ldots, x_p) + f_B(x_1, \ldots, x_p).$$

Deci

$$f_{C_{\Lambda,\Theta}}(x_1, \ldots, x_p) \leqslant f_A(x_1, \ldots, x_p) + f_B(x_1, \ldots, x_p) + \sum_{(\alpha,\beta)\in\Lambda} (a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})\, x_\alpha\, \overline{x}_\beta +$$

$$+ \sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega\setminus\Lambda} c_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, \overline{x}_\beta = f_A(x_1, \ldots, x_p) + f_B(x_1, \ldots, x_p) + f_{C_\Lambda}(x_1, \ldots, x_p)$$

deoarece $\Omega\setminus\{\Lambda\cup\Theta\}\subset\Omega\setminus\Lambda$.

Din demonstrația teoremei 1 rezultă că

$$f_{C_\Lambda}(x_1, \ldots, x_p) = f_{C_{\Lambda\cup\Theta}}(x_1, \ldots, x_p) = f_A(x_1, \ldots, x_p) + f_B(x_1, \ldots, x_p),$$

deci

$$f_{A+B}(x_1, \ldots, x_p) \leqslant f_{C_{\Lambda,\Theta}}(x_1, \ldots, x_p) \leqslant f_{A+B}(x_1, \ldots, x_p) \quad \text{c.c.t.d.}$$

Pe baza teoremei 2 rezultă o metodă de simplificare a unui multipol fără elemente ventil 𝔄 care are matricea conductibilităților directe A; se descompune într-un mod oarecare $A = B + C$ cu B, C matrici simetrice și se efectuează produsul $B \times C$; dacă fiecare din elementele $\{B \times C\}_{\alpha\beta}$ și $\{B \times C\}_{\beta\alpha}$ conține mai multe contacte ca $a_{\alpha\beta}$, se înlocuiesc cu $a_{\alpha\beta}$; dacă $\{B \times C\}_{\alpha\beta}$ conține mai puține contacte ca $a_{\alpha\beta}$ și $\{B \times C\}_{\beta\alpha}$, se înlocuiește $\{B \times C\}_{\beta\alpha}$ cu $\{B \times C\}_{\alpha\beta}$; dacă $\{B\times C\}_{\alpha\beta}$ și $\{B\times C\}_{\beta\alpha}$ conțin același număr de contacte, mai mic decît numărul contactelor conținute de $a_{\alpha\beta}$, simetrizarea se poate face în două feluri. Rezultă că multipolul astfel obținut (care va conține cel mult tot atîtea contacte ca 𝔄) are aceleași conductibilități totale ca 𝔄.

COROLAR. *Dacă matricea conductibilităților directe* $A=\{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathfrak{X}}$ *a unui multipol* $\mathfrak{A}$ *cu* p *noduri care conține elemente ventil se poate scrie ca produsul a două matrici simetrice, atunci matricea* A *poate fi simetrizată (în sensul de mai sus) cu* p *reducerea numărului de contacte, adică se obține matricea* $A_{\varnothing,\Theta}$ *cu* $\chi(A)=\chi(A_{\varnothing,\Theta})$. *Multipolul astfel obținut nu mai conține elemente ventil.*

Fiind dată matricea A, condiția $A=B\times C$ cu $b_{\alpha\alpha}=c_{\alpha\alpha}=1$ iar $b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}$; $c_{\alpha\beta}=c_{\beta\alpha}$ se scrie: $a_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}+c_{\alpha\beta}+\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq\alpha,\beta}}^{p} b_{\alpha k}c_{k\beta}$ pentru $\alpha,\beta\in\mathfrak{X}$ și $\alpha\neq\beta$, care reprezintă un sistem de p^2-p ecuații booleene cu necunoscutele $b_{\alpha\beta}$ și $c_{\alpha\beta}$.

Acest sistem este echivalent cu ecuația:

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\\alpha\neq\beta}}^{p}\left\{\overline{a}_{\alpha\beta}\left(b_{\alpha\beta}+c_{\alpha\beta}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq\alpha,\beta}}^{p} b_{\alpha k}c_{k\beta}\right)+\overline{a_{\alpha\beta}\left(b_{\alpha\beta}+c_{\alpha\beta}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq\alpha,\beta}}^{p} b_{\alpha k}c_{k\beta}\right)}\right\}=0 \tag{1}$$

în necunoscutele $b_{\alpha\beta}$ și $c_{\alpha\beta}$ ($\alpha\neq\beta$) care satisfac condiția de simetrie: $b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}$ și $c_{\alpha\beta}=c_{\beta\alpha}$. Condiția necesară și suficientă de compatibilitate a ecuației (1) este:

$$\prod_{(b_{\alpha\beta},\,c_{\alpha\beta})}\left\{\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\\alpha\neq\beta}}^{p}\left[\overline{a}_{\alpha\beta}\left(b_{\alpha\beta}+c_{\alpha\beta}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq\alpha,\beta}}^{p} b_{\alpha k}c_{k\beta}\right)+\overline{a_{\alpha\beta}\left(b_{\alpha\beta}+c_{\alpha\beta}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq\alpha,\beta}}^{p} b_{\alpha k}c_{k\beta}\right)}\right]\right\}=0 \tag{2}$$

unde produsul se face după toate valorile $(b_{12},\ldots,b_{1p},b_{23},\ldots,b_{2p},\ldots,b_{p-1p},c_{12},\ldots,c_{1p},c_{23},\ldots,c_{2p},\ldots,c_{p-1p})\in L_2^{p^2-p}$ iar $b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}$; $c_{\alpha\beta}=c_{\beta\alpha}$.

Relația (2) este o condiție suficientă pentru ca o matrice să poată fi simetrizată în totalitatea ei; un criteriu pentru simetrizări parțiale este dat în [1].

Pentru o matrice asociată unui multipol cu 3 noduri efectuînd toate calculele se obține că relația (2) este echivalentă cu relația:

$$\overline{a}_{12}\overline{a}_{13}\overline{a}_{21}\overline{a}_{23}\overline{a}_{31}\overline{a}_{32}+\overline{a}_{12}\overline{a}_{13}\overline{a}_{21}a_{23}\overline{a}_{31}a_{32}+a_{12}\overline{a}_{13}a_{21}\overline{a}_{23}\overline{a}_{31}\overline{a}_{32}+\overline{a}_{12}a_{13}\overline{a}_{21}\overline{a}_{23}a_{31}\overline{a}_{32}+$$
$$+a_{13}a_{23}a_{31}a_{32}+a_{12}a_{13}a_{21}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{23}a_{32}=1$$

TEOREMA 3. *O condiție necesară pentru ca matricea* $A=\{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathfrak{X}}$ *să fie egală cu produsul a două matrici simetrice este ca* $\sum\limits_{\substack{\alpha,\beta=1\\\alpha\neq\beta}}^{p} a_{\alpha\beta}=\sum\limits_{\substack{\alpha,\beta=1\\\alpha<\beta}}^{p} a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha}$.

Demonstrație. Am văzut că relația $A=B\times C$ se scrie sub forma sistemului $a_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}+c_{\alpha\beta}+\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq\alpha,\beta}}^{p} b_{\alpha k}c_{k\beta}$, unde $\alpha,\beta\in\mathfrak{X}$ și $\alpha\neq\beta$ iar $b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}$; $c_{\alpha\beta}=c_{\beta\alpha}$.

Se observă că $a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha}=\left(b_{\alpha\beta}+c_{\alpha\beta}+\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq\alpha,\beta}}^{p} b_{\alpha k}c_{k\beta}\right)\left(b_{\beta\alpha}+c_{\beta\alpha}+\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq\alpha,\beta}}^{p} b_{\beta k}c_{k\alpha}\right)=b_{\alpha\beta}+c_{\alpha\beta}$, deci $\sum\limits_{\substack{\alpha,\beta=1\\\alpha<\beta}}^{p} a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha}=\sum\limits_{\substack{\alpha,\beta=1\\\alpha<\beta}}^{p}(b_{\alpha\beta}+c_{\alpha\beta})$.

Dar $\sum\limits_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p} a_{\alpha\beta} = \sum\limits_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p} (b_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta})$, restul termenilor fiind absorbiţi. Din cauza simetriei termenilor $b_{\alpha\beta}$ şi $c_{\alpha\beta}$ ultima sumă este egală cu $\sum\limits_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha<\beta}}^{p} (b_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta})$ c.c.t.d.

Vom considera două exemple de aplicare a teoremei 1 la transformarea multipolilor:

a) Fie matricea conductibilităţilor directe $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathfrak{P}}$ şi descompunem $A = A + B$, unde $B = \{b_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathfrak{P}}$ cu $b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ pentru $\alpha, \beta \in \mathfrak{P}$ şi $\beta \neq \nu$; $b_{\rho\nu} = a_{\rho\nu}$; $b_{\nu\nu} = 1$ iar $b_{\lambda\nu} = 0$ pentru $\lambda \in \mathfrak{P} \setminus \{\rho, \nu\}$. Fie $\Lambda = \Omega \setminus \{(\mu, \nu)\}$. Matricea $C_\Lambda = \{c_{\alpha\beta}^{[\Lambda]}\}_{\alpha,\beta\in\mathfrak{P}}$ cu $c_{\alpha\beta}^{[\Lambda]} = a_{\alpha\beta}$ dacă $(\alpha,\beta) \neq (\mu, \nu)$ şi $c_{\mu\nu}^{[\Lambda]} = a_{\mu\nu} + a_{\mu\rho}a_{\rho\nu}$.

Rezultă că $\chi(C_\Lambda) = \chi(A)$, deci dacă considerăm două matrici booleene de ordin p, A şi B cu $b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ pentru $(\alpha, \beta) \neq (\mu, \nu)$ şi $b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + a_{\mu\rho}a_{\rho\nu}$, atunci $\chi(A) = \chi(B)$.

b) Să considerăm matricea simetrică A şi descompunerea $A = A + B$, unde $b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ pentru $\alpha, \beta \in \mathfrak{P} \setminus \{\nu\}$; $b_{\rho\nu} = b_{\nu\rho} = a_{\rho\nu} = a_{\nu\rho}$; $b_{\nu\nu} = 1$ şi $b_{\lambda\nu} = b_{\nu\lambda} = 0$ pentru orice $\lambda \in \mathfrak{P} \setminus \{\rho, \nu\}$.

Fie $\Lambda = \Omega \setminus \{(\mu, \nu); (\nu, \mu)\}$. În acest caz $C_\Lambda = \{c_{\alpha\beta}^{[\Lambda]}\}_{\alpha,\beta\in\mathfrak{P}}$ cu $c_{\alpha\beta}^{[\Lambda]} = a_{\alpha\beta}$ dacă $(\alpha, \beta) \neq (\mu, \nu); (\nu, \mu)$ şi $c_{\mu\nu}^{[\Lambda]} = a_{\mu\nu} + a_{\mu\rho}a_{\rho\nu} = a_{\nu\mu} + a_{\nu\rho}a_{\rho\mu} = c_{\nu\mu}^{[\Lambda]}$.

Rezultă că $\chi(C_\Lambda) = \chi(A)$, deci dacă considerăm două matrici booleene simetrice de ordin p, A şi B cu $b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ pentru $(\alpha, \beta) \neq (\mu, \nu)$; (ν, μ) şi $b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + a_{\mu\rho}a_{\rho\nu}$; $b_{\nu\mu} = a_{\nu\mu} + a_{\nu\rho}a_{\rho\mu}$, atunci $\chi(A) = \chi(B)$.

Transformarea pentru matrici simetrice asociate unor scheme fără elemente ventil se poate obţine aplicînd prima transformare de două ori: o dată pentru elementele $(a_{\mu\nu}, a_{\mu\rho}, a_{\rho\nu})$ şi apoi pentru elementele $(a_{\nu\mu}, a_{\nu\rho}, a_{\rho\mu})$.

În [6] se demonstrează că orice transformare care păstrează toate conductibilităţile totale ale unui multipol se poate reprezenta ca un produs de un număr finit de aceste transformări (cel mult $4p(p-1)(p-2)$ transformări elementare de tipul celor de mai sus). Transformările de la *a*) şi *b*) pot conduce la simplificări ale schemelor în cazul cînd unii termeni din $a_{\mu\nu}$ sînt absorbiţi de termeni din produsul $a_{\mu\rho}a_{\rho\nu}$.

Să presupunem că elementele matricii $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathfrak{P}}$ care sînt funcţii booleene de conductibilităţile asociate contactelor (de butoni sau de relee) ale multipolului $\mathfrak{A}$, sînt scrise sub forma normală disjunctivă redusă (definită în [4]), adică $a_{\alpha\beta} = \sum\limits_{i=1}^{n(\alpha,\beta)} a_{\alpha\beta}^{(i)}$ unde prin $n(\alpha, \beta)$ am notat numărul conjuncţiilor ce apar în expresia funcţiei $a_{\alpha\beta}$ scrisă sub formă normală disjunctivă redusă.

Termenii $a_{\alpha\beta}^{(i)}$ reprezintă produse de funcţii lagrangiene în L_2: $\Lambda_0(a), \Lambda_1(a), \ldots, \Lambda_0(x), \Lambda_1(x), \ldots$ unde $a, \ldots, x, \ldots$ sînt variabilele bivalente asociate poziţiei armăturii butoanelor $A, \ldots$ şi releelor $X, \ldots$ (în funcţionarea ideală) sau produse de funcţii lagrangiene în L_3: $L_0(a)$, $L_1(a), \ldots, L_0(x)$, $L_1(x), \ldots$ respectiv $\overline{L_0(a)}$, $\overline{L_1(a)}, \ldots$, $\overline{L_0(x)}$, $\overline{L_1(x)}, \ldots$ în cazul funcţionării reale cu contacte ordinare respectiv cu contacte speciale unde $a, \ldots, x, \ldots$ sînt variabilele trivalente asociate poziţiei armăturii butoanelor $A, \ldots$ şi releelor $X, \ldots$

Se observă că termenii $a_{\mu\nu}$, $a_{\mu\rho}$, $a_{\rho\nu}$ și $a_{\rho\rho}=1$ sînt situați în vîrfurile unui dreptunghi în matricea conductibilităților directe A, iar $a_{\mu\rho}$ și $a_{\rho\nu}$ reprezintă „componentele” unității $a_{\rho\rho}=1$ pe linia μ și coloana ν.

Dacă $\rho=\mu,\ \nu$, atunci $a_{\mu\nu}+a_{\mu\rho}\,a_{\rho\nu}=a_{\mu\nu}$, deci vom considera $\rho\neq\mu,\ \nu$.

Se poate formula un algoritm de simplificare care constă în următoarele : se urmăresc toate perechile de componente pe linia μ și coloana ν ale unităților situate pe diagonala principală a matricii A, mai puțin ale unităților $a_{\mu\mu}$ și $a_{\nu\nu}$ (deci $p-2$ perechi de componente, situate pe linia μ și respectiv coloana ν).

Dacă există o unitate $a_{\rho\rho}=1$ ($\rho\neq\mu,\ \nu$) cu componentele $a_{\mu\rho}$ și $a_{\rho\nu}$ care îndeplinesc condiția : în forma normală disjunctivă redusă $a_{\mu\rho}=\sum\limits_{i=1}^{n(\mu,\rho)}a_{\mu\rho}^{(i)}$, respectiv $a_{\rho\nu}=\sum\limits_{i=1}^{n(\rho,\nu)}a_{\rho\nu}^{(i)}$ există cîte o conjuncție $a_{\mu\rho}^{(i_1)}$, $a_{\rho\nu}^{(i_2)}$ cu $1\leqslant i_1\leqslant n(\mu,\ \rho)$; $1\leqslant i_2\leqslant n\ (\rho,\nu)$ care poate absorbi conjuncția $a_{\mu\nu}^{(j)}$ $(1\leqslant j\leqslant n(\mu,\nu))$, adică $a_{\mu\rho}^{(i_1)}+a_{\mu\nu}^{(j)}=a_{\mu\rho}^{(i_1)}$; $a_{\rho\nu}^{(i_2)}+a_{\mu\nu}^{(j)}=a_{\rho\nu}^{(i_2)}$, atunci înlocuind conjuncția $a_{\mu\nu}^{(j)}$ din dezvoltarea normală disjunctivă redusă a lui $a_{\mu\nu}$ cu zero, se obține o matrice B cu $\chi(B)=\chi(A)$.

Acest procedeu de comparare a conjuncțiilor se aplică tuturor elementelor $a_{\mu\nu}\neq 0{,}1$ (suprimînd toate conjuncțiile $a_{\mu\nu}^{(j)}$ pentru care condiția de mai sus este îndeplinită) și avîndu-se în vedere ca simplificarea să înceapă în fiecare etapă cu conjuncțiile care conțin numărul maxim de litere (această condiție este importantă pentru obținerea unei reduceri cît mai mari a numărului contactelor).

Dacă matricea A este simetrică, se aplică algoritmul pentru elementele $a_{\alpha\beta}$ cu $\alpha<\beta$ după care matricea se simetrizează.

Demonstrație. Se descompune $A=B+C$ cu $b_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}$ pentru $(\alpha,\ \beta)\neq(\mu,\ \nu)$ și $b_{\mu\nu}=\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n(\mu,\nu)}a_{\mu\nu}^{(i)}$; $c_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}$ pentru $(\alpha,\ \beta)\neq(\mu,\ \nu)$; $(\mu,\ \rho)$; $(\rho,\ \nu)$ iar $c_{\mu\nu}=c_{\mu\rho}=c_{\rho\nu}=a_{\mu\nu}^{(j)}$.

Descompunerea $A=B+C$ are loc deoarece $a_{\mu\rho}+a_{\mu\nu}^{(j)}=a_{\mu\rho}$ și $a_{\rho\nu}+a_{\mu\nu}^{(j)}=a_{\rho\nu}$. Fie $D=\{d_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathfrak{Q}}$ cu $d_{\alpha\beta}=c_{\alpha\beta}$ pentru $(\alpha,\ \beta)\neq(\mu,\ \nu)$ și $d_{\mu\nu}=0$.

Ținînd seama de a), rezultă că $\chi(D)=\chi(C)$ și deci $\chi(A)=\chi(B+D)$. Deoarece matricea $B+D$ este matricea A din care s-a suprimat conjuncția $a_{\mu\nu}^{(j)}$, rezultă c.c.t.d.

Exemplu. Fie matricea simetrică :

$$A=\left\{\begin{array}{cccc} 1 & ac+bd+ade & a+be+bcd & b+ae+acd \\ & 1 & c+de+abd & d+ce \\ & & 1 & e+ab+cd \\ & & & 1 \end{array}\right\}$$

Șirul de transformări efectuate succesiv asupra matricii A poate fi notat astfel : $(ade)_{12}\rightsquigarrow 0$; $(bcd)_{13}\rightsquigarrow 0$; $(acd)_{14}\rightsquigarrow 0$; $(abd)_{23}\rightsquigarrow 0$; $(ac)_{12}\rightsquigarrow 0$; $(bd)_{12}\rightsquigarrow 0$; $(be)_{13}\rightsquigarrow 0$; $(ae)_{14}\rightsquigarrow 0$; $(de)_{23}\rightsquigarrow 0$; $(ce)_{24}\rightsquigarrow 0$; $(ab)_{34}\rightsquigarrow 0$; $(cd)_{34}\rightsquigarrow 0$, unde, de exemplu, $(ade)_{12}\rightsquigarrow 0$ înseamnă că am înlocuit prin zero conjuncția *ade* din expresia a_{12}.

Am obținut matricea

$$B=\begin{Bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ & 1 & c & d \\ & & 1 & e \\ & & & 1 \end{Bmatrix}$$

și $\chi(A)=\chi(B)$.

Se poate formula și un algoritm dual care constă în înlocuirea termenului $a_{\mu\nu}$ cu 1 dacă există o mulțime de indici $J=\underline{\{j_1, j_2, \ldots, j_q\}}$; $1 \leqslant j_i \leqslant n(\mu, \nu)$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant q$ așa ca expresia $\sum\limits_{i\in J} a_{\mu\nu}^{(i)}$ să conțină în dezvoltarea normal disjunctivă numai conjuncții care pot fi înlocuite cu zero prin aplicarea algoritmului precedent pentru termenul $a_{\mu\nu}$.

Se deduce că $\chi(A)=\chi(B)$, unde $b_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}$ pentru $(\alpha, \beta) \neq (\mu, \nu)$ iar $b_{\mu\nu}=a_{\mu\nu}+\overline{\sum\limits_{i\in J} a_{\mu\nu}^{(i)}}=1$. În cazul matricilor simetrice dacă condiția de mai sus este îndeplinită, se vor înlocui cu 1 atît $a_{\mu\nu}$ cît și $a_{\nu\mu}$.

Ca mod de lucru se va aplica mai întîi algoritmul dual și apoi algoritmul dat începînd cu conjuncțiile care conțin numărul cel mai mare de funcții lagrangiene.

Să presupunem că algoritmul dual s-a aplicat elementului $a_{\mu\rho}$ și am obținut o matrice echivalentă pentru care $a_{\mu\rho} \rightsquigarrow 1$.

În acest caz, pentru a se aplica primul algoritm elementului $a_{\mu\nu}$ pentru a anula conjuncția $a_{\mu\nu}^{(j)}$, este suficient să existe o conjuncție $a_{\rho\nu}^{(i_2)}$ cu $1 \leqslant i_2 \leqslant n(\rho, \nu)$ așa ca $a_{\rho\nu}^{(i_2)}+a_{\mu\nu}^{(j)}=a_{\rho\nu}^{(i_2)}$. Într-adevăr, în rolul conjuncției $a_{\mu\rho}^{(i_1)}$ putem lua pe $a_{\mu\nu}^{(j)}$ deoarece $a_{\mu\nu}^{(j)}+a_{\mu\nu}^{(j)}=a_{\mu\nu}^{(j)}$ și $1+a_{\mu\nu}^{(j)}=1$.

Algoritmele date nu epuizează toate posibilitățile de simplificare a multipolilor cu păstrarea tuturor conductibilităților totale și se pot aplica în diferite moduri (ca succesiune de operații).

Primită la redacție la 1 septembrie 1966

Facultatea de matematică și mecanică
a Universității din București, str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. P. Constantinescu, *Synthesis of the multi-terminal networks with relay-contacs and rectifiers.* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., **2(50)**, *4* (1958).
2. P. Constantinescu, *Asupra reducerii numărului de contacte prin introducerea circuitelor în punte.* Analele Univ. C. I. Parhon, *10* (1956).
3. А. Г. Лунц, *Алгебраические методы анализа и синтеза контрактных схем.* Изв. Ак. наук СССР, Сер, матем., *16* (1952).
4. Gr. C. Moisil, *Funcționarea reală a schemelor cu contacte și relee.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1965.
5. S. Rudeanu, *Boolean equations and their applications to the study of bridge-circuits.* I. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., **3(51)**, 4(1959).
6. I. Tomescu, *Metodă pentru determinarea conductibilităților totale ale unui multipol.* St. cerc. mat., **17**, *7* (1965).

O GENERALIZARE A NOȚIUNII DE CONTINUITATE ÎN SENSUL LUI FLORIN VASILESCU

DE

IONEL ȚEVY

Se introduce un concept de continuitate care generalizează noțiunea de continuitate a funcțiilor multiforme din [1], care, apoi, se aplică în studiul unor funcții de tipul funcției $\delta(x, \varepsilon)$.

În analiza clasică, unor proprietăți locale, care se exprimă în limbajul cu ε și δ, le corespund proprietăți globale, proprietăți de uniformitate, care în limbajul amintit revin la faptul că δ nu mai depinde de elementul local, ci numai de ε. Demonstrarea proprietăților de uniformitate se face diferit de la caz la caz.

Dacă notăm cu x elementul local (punct, funcție etc.) numărul real δ este o funcție de două variabile x și ε. În cazul în care funcția $\delta(x, \varepsilon)$ ar avea anumite proprietăți, în special de continuitate, atunci demonstrarea proprietăților de uniformitate ar deveni aproape aceeași în toate cazurile. Vom arăta că studiul funcțiilor de tipul funcției $\delta(x, \varepsilon)$ conduce la introducerea unui concept de continuitate care generalizează noțiunea de continuitate a funcțiilor multiforme, datorită lui Florin Vasilescu [1].

§ 1. Vom da mai înainte cîteva propoziții preliminare.

În [1] găsim următoarea propoziție, echivalentă cu definiția convergenței șirurilor de mulțimi compacte, expusă mai jos într-o formulare mai generală.

Fie $(K_n)_{n\in N}$ un șir de compacte dintr-un spațiu Hausdorff compact cu bază numărabilă E; atunci avem.

TEOREMA 1. *Șirul de compacte* (K_n) *este convergent către mulțimea* K *dacă și numai dacă:*

1° *oricare ar fi șirul* (y_n), *cu* $y_n \in K_n$, *punctele sale de acumulare se află în* K;

2° *oricare ar fi* $y_0 \in K$, *există un șir* (y_n), *cu* $y_n \in K_n$, *convergent către* y_0.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 935–943, BUCUREȘTI, 1967

LEMA 1: *Afirmaţia 2^0 a teoremei anterioare este echivalentă cu propoziţia: oricare ar fi vecinătatea U a lui y_0, există un N astfel încît pentru orice $n > N$, $U \cap K_n \neq \emptyset$.*

Demonstraţie. În adevăr, deoarece $y_0 = \lim y_n$, rezultă că oricare ar fi vecinătatea U a lui y_0, există un N astfel încît pentru orice $n > N$, $y_n \in U$, deci $y_n \in U \cap K_n$.

Reciproc, vom indica construcţia şirului (y_n).

a) Dacă există un N astfel încît pentru orice $n > N$, $y_0 \in K_n$, atunci primele N puncte din şir vor fi arbitrare, iar următoarele identice cu y_0.

b) Dacă nu avem realizat *a*), să considerăm un şir descendent (U_m) de vecinătăţi ale lui y_0, cu proprietatea că oricare ar fi $y \neq y_0$, există o vecinătate din şir care nu-l conţine. Fie U_1 şi U_2 două vecinătăţi din şir. Pentru U_1 există un N_1, iar pentru U_2 un N_2 cu proprietatea din enunţ; dacă $U_1 \supseteq U_2$, atunci $N_1 \leqslant N_2$. Vom lua pe y_n, pentru $N_1 \leqslant n \leqslant N_2$, din $K_n \cap (U_1 - U_2)$. Prin inducţie după şirul (U_m) construim întreg şirul (y_n). Să arătăm că acest şir este convergent către y_0. În adevăr, fie U o vecinătate a lui y_0; atunci va exista $U_m \subseteq U$ şi cum pentru orice $n > N_m$, $y_n \in U_m$, rezultă convergenţa şirului (y_n) către y_0.

Avem, evident, şi

LEMA 2. *Un punct $x \in E$ aparţine mulţimii K dacă şi numai dacă x satisface condiţia 2° a teoremei 1.*

Cu aceasta putem demonstra

PROPOZIŢIA 1. ***Dacă şirul (K_n) de compacte din E este convergent către mulţimea K, atunci K este compactă.***

Demonstraţie. Spaţiul E fiind compact, trebuie să arătăm că mulţimea K este închisă.

Fie (x_n) un şir de puncte diferite din K, convergent către un punct x_0. Vom demonstra că $x_0 \in K$ folosind lemele anterioare.

În adevăr, fie V o vecinătate a lui x_0. Punctul x_0 fiind un punct de acumulare pentru (x_n), există un punct $x_k \neq x_0$, din şir, aflat în V. Atunci, datorită unei proprietăţi a vecinătăţilor, există o vecinătate $U \subseteq V$ a lui x_k. Însă pentru vecinătatea U există un N, astfel încît pentru orice $n > N$, $K_n \cap U \neq \emptyset$ şi deci, pentru cel puţin $n > N$, avem şi $K_n \cap V \neq \emptyset$, adică punctul x_0 îndeplineşte condiţiile lemei 1 şi deci satisface condiţia 2° a teoremei 1. Atunci, datorită lemei 2, $x_0 \in K$ şi deci mulţimea K este închisă. q.e.d.

De asemenea vom aminti următoarea teoremă din [1].

Fie f o funcţie reală multiformă. Avem următoarea teoremă:

TEOREMA 2. ***Funcţia** f **este continuă în punctul** x_0 **dacă şi numai dacă**:*

1°. *este continuă în fiecare valoare*;

2°. *mulţimea $f(x_0)$ este compactă.*

Putem extinde această teoremă considerînd în locul funcţiei multiforme o funcţie $f: A \to \mathcal{P}(B)$, unde A, B sînt spaţii topologice arbitrare, cu bază numărabilă, iar $\mathcal{P}(B)$ mulţimea părţilor lui B, şi vom da

DEFINIŢIA 1. Funcţia $f: A \to \mathcal{P}(B)$ este continuă în $x_0 \in A$ dacă:

1^0 există o vecinătate V, a lui x_0, astfel încît pentru orice $x \in V$, $f(x)$ este compactă,

2° oricare ar fi şirul $x_n \to x_0$, şirul $f(x_n)$ tinde către $f(x_0)$ în sensul din [1].

§ **2.** Vom introduce o nouă clasă de funcţii prin :

Definiţia 2. Fie o funcţie $f : A \to M$, unde A este un spaţiu topologic, iar M un spaţiu metric. Funcţia f se zice neconstantă în distanţă relativ la $x_0 \in A$ dacă oricare ar fi deschisa nevidă $G \subseteq A$, mulţimea valorilor pentru $d(f(x), f(x_0))$, cînd x parcurge pe G, are mai mult de un element.

O formulare echivalentă a acestei definiţii este dată de

Propoziţia 2. *Funcţia f este neconstantă în distanţă relativ la x_0 dacă şi numai dacă pentru orice constantă nenegativă k, mulţimea C a punctelor $x \in A$ pentru care $d(f(x), f(x_0)) = k$, este o frontieră.*

Demonstraţie. Condiţia este necesară. În adevăr, dacă mulţimea C nu ar fi o frontieră, atunci ar exista o deschisă nevidă $G \subseteq C$ şi am avea $d(f(x), f(x_0)) = k$, pentru orice $x \in G$, ceea ce contrazice faptul că f este neconstantă în distanţă relativ la x_0.

Condiţia este suficientă. Fie o deschisă nevidă $G \subseteq A$. Pentru această mulţime există, evident, o mulţime C, astfel încît $G \cap C \neq \emptyset$. Mulţimea C fiind o frontieră, rezultă că există în G un $x \notin C$ pentru care avem $d(f(x), f(x_0)) \neq k$, ceea ce demonstrează afirmaţia.

Pentru funcţiile reale de o variabilă reală definiţia 2 revine la faptul că în orice interval deschis funcţia ia cel puţin două valori distincte şi rezultă apoi că în acest caz neconstanţa în distanţă relativ la un punct atrage aceeaşi proprietate relativ la orice punct din mulţimea de definiţie.

O mulţime importantă de funcţii neconstante în distanţă pe întreaga mulţime de definiţie este dată de

Propoziţia 3. *Dacă f este o aplicaţie deschisă cu valori într-un spaţiu metric, atunci f este neconstantă în distanţă relativ la orice punct din spaţiul de definiţie.*

Demonstraţie. Fie un $x_0 \in A$ şi un număr real $k \geqslant 0$. Să presupunem că mulţimea C din propoziţia 2 nu ar fi o frontieră. Atunci ar exista o deschisă nevidă $G \subseteq C$. Aplicaţia f fiind deschisă, $f(G)$ este deschisă şi $f(G) \subseteq f(C)$, ceea ce contrazice faptul că C este preimaginea unei frontiere ; deci propoziţia este demonstrată.

Reciproca nu este, însă, adevărată deoarece, de exemplu, binecunoscuta funcţie a lui Dirichlet este neconstantă în distanţă relativ la orice punct din mulţimea de definiţie fără a fi aplicaţie deschisă.

§ **3.** Pentru a generaliza, după cum am anunţat, definiţia continuităţii funcţiilor multiforme din [1], vom modifica condiţia 2° a definiţiei 1 ; anume, vom da :

Definiţia 3. Fie o funcţie $f : A \to \mathcal{P}(B)$. Funcţia f se zice slab continuă în $x_0 \in A$ dacă:

1° există o vecinătate V, a lui x_0, astfel încît pentru orice $x \in V$, $f(x)$ să fie compactă ;

2° pentru orice şir (x_n) de puncte din V, cu $x_n \to x_0$, există o mulţime rară H, astfel încît şirul $f(x_n)$ este convergent către $f(x_0) - H$, în sensul teoremei 1.

Pentru concretizarea acestei definiţii vom da

Propoziţia 4. *Fie o funcţie reală de variabilă reală $f : E \to R$. Dacă f are în $x_0 \in E$ discontinuitate de prima specie, atunci funcţia multiformă $\bar{f} : E \to R$ definită astfel :*

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) \textit{ pentru } x \neq x_0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x), \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x), f(x_0) \quad \textit{pentru } x = x_0 \end{cases}$$

este slab continuă în punctul x_0.

Demonstraţia acestei propoziţii, aplicînd direct definiţia 3, este evidentă.

Prin extinderea acestei propoziţii şi pe baza unei teoreme datorate profesorului Al. Froda, teoremă prezentată, împreună cu unele generalizări ale ei, în [2], rezultă

PROPOZIŢIA 5. *Fie o funcţie reală de variabilă reală* $f : E \to R$, *care are în orice punct din* E *limite laterale finite. Atunci pentru funcţia* $\bar{f} : E \to R$, *definită prin* $\bar{f}(x) = \left\{ \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y < x}} f(y), \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y > x}} f(y), f(x) \right\}$ *mulţimea punctelor de continuitate slabă este cel mult numărabilă.*

O funcţie slab continuă devine o funcţie continuă multiformă dacă avem

TEOREMA 3. *Funcţia* $f : A \to \mathcal{P}(B)$ *slab continuă în* $x_0 \in A$ *este continuă în* x_0 *dacă şi numai dacă pentru orice şir* $x_n \to x_0$ *mulţimea rară* H *este vidă.*

Demonstraţia este evidentă în baza definiţiilor 1 şi 3.

Forma valorilor unei funcţii într-un punct de continuitate slabă este dată de

TEOREMA 4. *Fie o funcţie* $f : A \to \mathcal{P}(B)$ B *compact, slab continuă în punctul* $x_0 \in A$. *Atunci există o mulţime rară* $H \subseteq f(x_0)$ *astfel încît să avem* $H \cap \overline{\operatorname{Int} f(x_0)} = \emptyset$.

Demonstraţie. Dacă $\operatorname{Int} f(x_0) = \emptyset$, sau f este continuă în x_0,¹ atunci teorema este evidentă ; deci vom presupune că f este efectiv slab continuă şi că $\operatorname{Int} f(x_0) \neq \emptyset$.

Funcţia f fiind slab continuă în x_0, există un şir $x_n \to x_0$ pentru care mulţimea rară H este nevidă. Vom arăta că H este tocmai mulţimea căutată.

Să presupunem, prin absurd, că $H \cap \overline{\operatorname{Int} f(x_0)} \neq \emptyset$. Atunci există în H un punct $y \in \operatorname{Int} f(x_0)$. Deoarece H este rară, rezultă că y este punct aderent şi pentru $f(x_0) - H$. Din propoziţia 1 rezultă că $f(x_0) - H$ este închisă şi deci $y \in (f(x_0) - H)$, ceea ce contrazice alegerea lui y şi deci teorema este demonstrată.

În continuare vom pune în evidenţă o proprietate asemănătoare cu trecerea la limită în inegalităţi enunţînd

PROPOZIŢIA 6. *Fie două funcţii definite pe spaţiul topologic* A *cu valori în* $\mathcal{P}(B)$, *fiind un spaţiu compact. Dacă* :

i) f *este slab continuă în* $x_0 \in A$;

ii) *există o vecinătate* V *a lui* x_0 *cu proprietatea că pentru orice* $x \in V$, $g(x)$ *este compactă* ;

iii) *pentru orice* $x \in V$, $g(x) \subseteq f(x)$;

iv) $f(x_0)$ *este o mulţime rară* ;

v) $f(x_0) = g(x_0)$;

atunci g *este slab continuă în* x_0.

Demonstrație. În adevăr, condiția 1 a definiției 3 fiind îndeplinită datorită condiției ii), rămîne de demonstrat că este îndeplinită și condiția 2.

Fie (x_n) un șir de puncte din V, cu $x_n \to x_0$, și fie (y_n) un șir de puncte cu $y_n \in g(x_n)$. Atunci, datorită condiției iii), $y_n \in f(x_n)$ și f fiind slab continuă în x_0, rezultă că mulțimea punctelor de acumulare pentru (y_n) este conținută în $f(x_0) = g(x_0)$.

Fie $H_1 \subseteq g(x_0)$ mulțimea punctelor care îndeplinesc condiția 2° a teoremei 1, pentru șirul $g(x_n)$. Atunci, pentru mulțimea H din definiția 3, avem $H = g(x_0) - H_1$, care, deoarece $g(x_0)$ este rară, este o mulțime rară, cu aceasta propoziția fiind demonstrată.

Fie μ o măsură pozitivă definită pe $\mathcal{P}(B)$, astfel încît măsura unei mulțimi este nulă dacă și numai dacă interiorul ei este vid, și să definim funcția $m : A \to R_+$ prin $m(x) = \mu(f(x))$.

PROPOZIȚIA 7. *Dacă f este slab continuă în x_0, atunci m este continuă.*

Demonstrație. Fie un șir $x_n \to x_0$. Deoarece pentru acest șir există o mulțime rară H astfel încît $f(x_n) \to f(x_0) - H$, din proprietățile măsurii rezultă că $\mu(f(x_n)) \to \mu(f(x_0) - H)$, sau datorită aditivității măsurii $m(x_n) \to m(x_0) - \mu(H)$. Deoarece H este o mulțime rară $\mu(H) = 0$ și deci $m(x_n) \to m(x_0)$, adică m este continuă în x_0.

§ 4. Fie E un spațiu topologic compact, separat, cu bază numărabilă, în care orice punct este mulțime închisă și numai mulțime închisă, și M un spațiu metric cu topologia obișnuită. Fie, de asemenea, o funcție continuă $f : E \to M$. Definiția continuității ne asigură, în acest caz, că pentru orice $\varepsilon > 0$, există o vecinătate V, a fiecărui $x_0 \in E$, cu proprietatea că oricare ar fi $x \in V$, $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, unde d este distanța în M. Această definiție nu ne dă nici o indicație asupra modului în care V depinde de ε și x_0. Aplicînd cele demonstrate anterior, vom căuta să punem în evidență proprietățile unei astfel de dependențe, din care vom deduce apoi unele proprietăți foarte cunoscute.

Vom face notația $\mathcal{V}(x, \varepsilon) = \{y \in E \mid d(f(y), f(x)) \leqslant \varepsilon\}$, pentru orice $x \in E$ și orice $\varepsilon \in R_+$. Evident, mulțimile $\mathcal{V}$ sînt compacte deoarece sînt închise, ca preimagini prin f ale unor mulțimi închise, într-un spațiu compact. Dacă $\mathcal{V}$ nu sînt conexe, atunci și componentele conexe ale lor sînt compacte.

Cînd x parcurge pe E, iar ε pe R_+, obținem funcția $\mathcal{V} : E \times R_+ \to \mathcal{P}_C(E)$, unde $\mathcal{P}_C(E)$ este mulțimea părților compacte ale lui E.

Vom demonstra

TEOREMA 5. *Dacă f este neconstantă în distanță relativ la orice punct din E, funcția $\mathcal{V}$ este slab continuă pe $E \times R_+$.*

Demonstrație. Fie un șir $(x_n, \varepsilon_n) \to (x_0, \varepsilon_0)$, adică $x_n \to x_0$ și $\varepsilon_n \to \varepsilon_0$, și mulțimile corespunzătoare $\mathcal{V}_n$. Vom pune în evidență o mulțime rară H și vom arăta că șirul $\mathcal{V}_n$ converge, în baza teoremei 1, către mulțimea $\mathcal{V}_0 - H$.

1° Fie șirul (y_n), $y_n \in \mathcal{V}_n$, și fie y_0 un punct de acumulare al său. Avem :

$$d(f(y_n), f(x_0)) \leqslant d(f(y_n), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x_0)) \leqslant \varepsilon_n + d(f(x_n), f(x_0)).$$

Datorită continuităţii distanţei şi a funcţiei f, notînd (y'_n) subşirul lui (y_n) convergent către y_0, trecînd la limită avem:

$$\lim d(f(y'_n), f(x_0)) \leqslant \varepsilon_0 + \lim d(f(x_n), f(x_0))$$

de unde

$$d(f(y_0), f(x_0)) \leqslant \varepsilon_0,$$

deci $y_0 \in \mathcal{V}(x_0, \varepsilon_0)$.

2° Funcţia f fiind continuă şi neconstantă în distanţă relativ la x_0, se poate uşor observa că singura componentă conexă rară a lui $\mathcal{V}_0$ poate fi, eventual, o submulţime K, a mulţimii punctelor x pentru care avem $d(f(x), f(x_0)) = \varepsilon_0$. Vom arăta că orice punct din $\mathcal{V}_0 - K$ îndeplineşte afirmaţiile lemei 1.

Deoarece $\mathcal{V}_0 - K$ are numai componente conexe cu interior nevid şi deoarece f este neconstantă în distanţă relativ la x_0, rezultă că oricare ar fi $x \in \mathcal{V}_0 - K$ şi oricare ar fi vecinătatea sa V, există $x' \in V$ astfel încît $d(f(x'), f(x_0)) = \eta < \varepsilon_0$.

Deoarece $\varepsilon_n \to \varepsilon_0$, avem $\lim(\varepsilon_n - \eta) < 0$, şi, f fiind continuă, rezultă că există un N astfel încît pentru orice $n > N$, $d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon_n - \eta$. Pentru aceşti x_n avem:

$$d(f(x'), f(x_n)) \leqslant d(f(x'), f(x_0)) + d(f(x_0), f(x_n)) < \eta + \varepsilon_n - \eta = \varepsilon_n$$

şi deci $x' \in \mathcal{V}_n$.

Dacă vre-un punct din K îndeplineşte condiţia de la 1°, atunci îndeplineşte şi condiţia de la 2° şi reciproc; deci pentru orice şir (x_n, ε_n) tinzînd către (x_0, ε_0), mulţimea H este o submulţime, proprie sau improprie, a lui K. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Din demonstrarea teoremei precedente rezultă următorul

COROLAR: *Orice punct din H are următoarele proprietăţi*:

i) $d(f(x), f(x_0)) = \varepsilon_0$,

ii) *există o vecinătate a sa V, astfel încît pentru orice* $x' \in V$, $d(f(x'), f(x_0)) \geqslant \varepsilon_0$.

Folosind acest corolar demonstrăm

PROPOZIŢIA 8. *Dacă f este o aplicaţie deschisă şi continuă, atunci funcţia $\mathcal{V}$ este continuă pe $E \times R$.*

Demonstraţie. Deoarece f este deschisă, atunci, conform propoziţiei 3, f este neconstantă în distanţă relativ la orice $x \in E$ şi, fiind continuă, rezultă că $\mathcal{V}$ este slab continuă pe $E \times R_+$. Vom arăta că $\mathcal{V}$ este chiar continuă, aplicînd teorema 3.

Să presupunem că $\mathcal{V}$ nu ar fi continuă într-un punct (x_0, ε_0). Atunci ar exista un şir $(x_n, \varepsilon_n) \to (x_0, \varepsilon_0)$ pentru care mulţimea H ar fi nevidă. Corolarul precedent ne arată în acest caz că $\mathcal{V}_0$ are o submulţime cu proprietăţile i) şi ii). Pentru fiecare $x \in H$ să considerăm deschisa nevidă $G_x \subseteq V$ şi să notăm $G = \bigcup_{x \in H} G_x$, care este o mulţime deschisă. Mulţimea $f(G)$ nu este, însă, o mulţime deschisă deoarece $f(H)$, $H \subseteq G$, nu are puncte interioare lui $f(G)$ şi aceasta contrazice faptul că f este aplicaţie deschisă. Deci pentru orice şir $(x_n, \varepsilon_n) \to (x_0, \varepsilon_0)$, mulţimea H este vidă şi rezultă că $\mathcal{V}$ este continuă.

Ca rezultat imediat vom enunţa

PROPOZIŢIA 9. *Funcţia* $\mathcal{V}$ *este slab continuă şi în punctul* $(x_0, 0)$.

Demonstraţie. Faţă de teorema 5, secvenţa 1° nu prezintă nici o modificare, înlocuindu-se ε_0 cu 0.

2° Mulţimea $\mathcal{V}(x_0, \varepsilon_0)$ devine în acest caz $f^{-1}(f(x_0))$ care este o mulţime rară, fiind închisă, deoarece f este continuă, şi fiind o frontieră, deoarece f este neconstantă în distanţă relativ la x_0. Cum $x_0 = \lim x_n$, rezultă că mulţimile H sînt submulţimi proprii, rare, ale mulţimii $\mathcal{V}(x_0, 0)$ şi propoziţia este demonstrată.

Se poate enunţa şi propoziţia analogă provenită din propoziţia 8.

Vom aplica cele de mai sus pentru deducerea unor proprietăţi ale funcţiilor inverse.

PROPOZIŢIA 10. *Dacă* f *este continuă şi neconstantă în distanţă relativ la orice* $x \in E$, *atunci funcţia* $F : E \to \mathcal{P}_C(E)$, *definită astfel* : $F(x) = \mathcal{V}(x, 0)$, *este slab continuă pe* E.

Demonstraţie. Vom arăta că sîntem în condiţiile propoziţiei 6. Fie un punct $x_0 \in E$. Funcţiile din propoziţia 6 vor fi $h(x, \varepsilon) = \mathcal{V}(x, \varepsilon)$ şi $g(x, \varepsilon) = \mathcal{V}(x, 0) F(x)$.

i) În baza propoziţiei 9, $h(x, \varepsilon)$ este slab continuă în $(x_0, 0)$.

ii) Deoarece f este continuă şi E compact, $F(x)$ este compactă pentru orice x.

iii) Evident, pentru orice x şi ε, $g(x, \varepsilon) \subseteq h(x, \varepsilon)$.

iv) După cum am mai arătat, $\mathcal{V}(x_0, 0)$ este o mulţime rară.

v) Evident, $h(x_0, 0) = g(x_0, 0)$.

Fiind îndeplinite condiţiile i) — v) ale propoziţiei 6, funcţia F este slab continuă pe E.

Vom mai face remarca că pentru orice $x' \in F(x)$, avem $F(x') = F(x)$.

PROPOZIŢIA 11. *Fie* E *un spaţiu compact şi* M *un spaţiu metric, iar* $f : E \to M$ *o aplicaţie continuă şi neconstantă în distanţă pe* E. *Atunci aplicaţia multiformă* $\overline{f}^{-1}$ *este slab continuă pe* $f(E)$.

Demonstraţie. Fie $y_0 \in f(E)$ şi $x_0 \in \overline{f}^{-1}(y_0)$. Fie de asemenea un şir $y_n \to y_0$. Deoarece f este continuă, există un şir $x_n \to x_0$, cu $f(x_n) = y_n$. Se poate observa că $\overline{f}^{-1}(y_n) = F(x_n)$, deoarece $F(x)$ nu depinde de o schimbare de reprezentant. Deoarece F este slab continuă, cînd $y_n \to y_0$, deci cînd $x_n \to x_0$, există o mulţime rară H astfel încît $\overline{f}^{-1}(y_n) \to \overline{f}^{-1}(y_0) - H$, deci $\overline{f}^{-1}$ este slab continuă pe $f(M)$.

COROLAR. *Fie* $f : E \to M$ *o aplicaţie deschisă şi continuă ; atunci aplicaţia multiformă* $\overline{f}^{-1}$ *este continuă pe* $f(E)$.

De aici, printr-o extindere evidentă a teoremei, rezultă următorul rezultat cunoscut din teoria funcţiilor de o variabilă complexă :

Fie f o funcţie olomorfă, neconstantă, pe un domeniu compact. Atunci inversa sa este continuă pe fiecare foaie a suprafeţei riemanniene corespunzătoare.

§ 5. Fie E un spaţiu Hausdorff compact cu bază numărabilă. Vom încerca să regăsim unele rezultate anterioare prin introducerea unei topologii adecvate în $\mathcal{P}(E)$.

DEFINIŢIA 4. Fie G_1 şi G_2 două deschise din E. Vom numi interval deschis în $\mathcal{P}(E)$ şi vom nota $I(G_1, G_2)$ mulţimea părţilor $A \subseteq E$, astfel încît $G_1 \cap A \neq \emptyset$ şi $A \subseteq G_2$, dacă $G_1 \neq \emptyset$, şi $A \subseteq G_2$, dacă $G_1 = \emptyset$.

Evident, dacă $G_1 \neq \emptyset$, atunci $I(G_1, G_2) = \emptyset$ dacă şi numai dacă $G^1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

Definiţia 5. Fie K un compact din E. Numim vecinătate a lui K, o mulţime V de părţi din E pentru care există două deschise G_1 şi G_2 astfel încît $G_1 \subset K \subset G_2$ şi $I(G_1, G_2) \subseteq V$.

Dacă avem $I(G_1, G_2) \cap I(G'_1, G'_2) = I(G'_1 \cap G_1, G_2 \cap G'_2)$, se poate verifica cu uşurinţă că mulţimile V, de mai sus, au proprietăţile vecinătăţilor. Vom nota cu τ topologia introdusă prin definiţia 5.

Cu acestea avem

Teorema 6. *Şirul de compacte (K_n), din E, este convergent către compactul K dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate V, a lui K, există un N astfel încît pentru orice $n > N$, $K_n \in V$.*

Demonstraţie. Evident că în locul vecinătăţilor oarecare putem considera numai vecinătăţi deschise (formate din intervale deschise).

Condiţia este necesară. Fie un interval deschis $I(G_1, G_2)$, avînd $G_1 \subset K \subset G_2$, şi să presupunem că nu am avea realizată concluzia teoremei. Atunci există un subşir (K_{n_p}), a lui (K_n), astfel încît $K_{n_p} \cap G_1 = \emptyset$, sau $K_{n_p} \cap (E - G_2) \neq \emptyset$.

În primul caz rezultă că există $x \in G_1$ şi vecinătatea sa G_1 care nu îndeplinesc condiţiile lemei 1, ceea ce contrazice ipoteza.

În al doilea caz, deoarece $E - G_2$ este compactă, există un şir (y_n), cu $y_n \in K_n$, $y_{n_p} \in K_{n_p} - G_2$, care ar avea un punct de acumulare neaparţinînd lui K, ceea ce contrazice punctul 1° al teoremei 1 şi deci prima parte a teoremei este demonstrată.

Condiţia este suficientă. Vom arăta că sînt îndeplinite condiţiile teoremei 1.

1° Fie un şir (y_n), $y_n \in K_n$, şi să presupunem că ar avea un punct de acumulare $y_0 \notin K$. Atunci, E fiind un spaţiu Hausdorff, există o vecinătate U a lui y_0 şi o deschisă nevidă $G \subset K$, astfel încît $G \cap U = \emptyset$. Deoarece pentru un subşir (K_{n_p}), al lui (K_n), $K_{n_p} \cap U \neq \emptyset$, rezultă că $K_{n_p} \notin I(G_1, G)$, unde $G_1 \subset K$ este o deschisă oarecare, ceea ce contrazice ipoteza, deci $y_0 \in K$.

Vom presupune Int $K \neq \emptyset$,. Fie un punct $y_0 \in$ Int K şi fie o vecinătate deschisă a sa G. Atunci există un N astfel încît pentru orice $n > N$ avem $K_n \in I(G, G_2)$, $G_2 \supset K$ fiind o deschisă oarecare, adică $K_n \cap G \neq \emptyset$ şi deci y_0 este în condiţiile lemei 1, condiţia 2° fiind deci îndeplinită.

Dacă Int $K = \emptyset$, atunci orice $G_1 = \emptyset$ şi partea întîi a demonstraţiei se reduce la al doilea caz, iar partea a doua la 1°.

Este aproape evident că topologia $\mathcal{E}$ determină mulţimea K în afara unei mulţimi rare arbitrare.

Cu aceasta, devine imediată

Teorema 7. *Fie o funcţie $f : A \to \mathcal{P}_C(E)$. Funcţia f este slab continuă în $x_0 \in A$ dacă şi numai dacă este continuă în x_0 în sensul topologiei τ adică pentru orice şir $x_n \to x_0$, $f(x_n) \to f(x_0)$ în sensul teoremei 6.*

În încheiere arătăm că pentru noţiunile şi rezultatele de funcţii reale şi topologie generală, utilizate mai sus, a se vedea, de exemplu [4].

Primită la redacţie la 13 ianuarie 1967

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti
Str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. Fl. Vasilescu, *Essai sur les fonctions multiformes de variables réelles.* (Teză). Paris, Gauthier-Villars, 1925.
2. Al. Froda, *Sur la distribution des propriétés de voisinage des fonctions de variables réelles.* Librairie Scientifique Herman, Paris, 1929.
3. S. Marcus, Al. Solian, *Profesorul Al. Froda la 70 de ani.* Gazeta Matematică, **LXXI**, *4* (1966).
4. Acad. M. Nicolescu, *Funcții reale și elemente de analiză funcțională.* Ed. didactică și pedagogică, București, 1962.

INFLUENȚA TEMPERATURII ASUPRA UNOR MIȘCĂRI PLANE STAȚIONARE ÎN MEDII POROASE

DE

ELENA UNGUREANU

Se determină mişcarea plană staţionară a unui fluid într-un mediu poros omogen ce ocupă un domeniu oarecare limitat atît de frontiere de alimentare cît şi impermeabile. În studiul acestei mişcări se ţine seama de existenţa unei diferenţe de temperaturi pe frontierele de alimentare, care se face simţită prin variaţia densităţii ρ a fluidului după legea (6). În ultima parte a lucrării se dau două exemple de domenii ale mişcării.

1. *Introducere.* Studii asupra mişcării fluidelor în medii poroase au fost făcute, în special, considerînd mişcarea ca rezultat al unor factori dinamici, cum ar fi existenţa unor diferenţe de presiuni. O influenţă asupra mişcării o poate juca însă şi diferenţa de temperatură. Această influenţă poate fi resimţită mai mult, dacă diferenţa de temperatură face să varieze şi caracteristicile fluidului şi mediului, mai precis coeficientul de permeabilitate al mediului, vîscozitatea fluidului, deci, altfel spus, coeficientul de filtraţie k şi de asemenea densitatea ρ a fluidului. Printre cercetările întreprinse în acest sens putem aminti pe cele ale lui Şt. I. Gheorghiţă [1].

În lucrarea de faţă, noi vom încerca un studiu al mişcărilor staţionare bidimensionale pentru un domeniu oarecare al mişcării. Cum tratarea problemei prezintă destule dificultăţi matematice, aici vom considera că numai ρ variază în raport cu temperatura, iar k este constant.

Ne vom mărgini aici numai la acest caz şi pentru faptul că vom folosi o metodă de rezolvare care nu mai poate fi utilizată cînd variază şi k. În schimb generalitatea problemei constă în forma domeniului care poate fi oarecare.

2. *Enunţul problemei.* Fie $\mathcal{D}$ domeniul mişcării, mărginit atît de frontiere de alimentare, cît şi de pereţi impermeabili. Notînd succesiv

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 945–953, BUCUREŞTI, 1967

cu A, B, C, D patru puncte ale frontierei, care, parcursă în acest sens, lasă domeniul la dreapta, vom admite arcele AB şi CD ca frontiere de alimentare, iar arcele BC şi DA ca impermeabile. Vom considera că prin frontierele de alimentare intră, respectiv iese, un fluid cu presiunea şi temperatura cunoscute. Prin pereţii impermeabili presupunem că nu există schimb de temperatură.

În aceste condiţii, putem formula problema din punct de vedere matematic. Ea constă în a determina, în fiecare punct (x, y) al domeniului, presiunea p, proiecţiile u şi v ale vitezei pe cele două axe Ox şi Oy (axa Oy fiind după verticala ascendentă), precum şi temperatura T.

Ecuaţiile de mişcare vor fi (de ex. [1] sau [2] p. 37)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho g}{k} u, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\rho g}{k} v - \rho g, \tag{2}$$

cea de continuitate

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

la care se adaugă ecuaţia referitoare la temperatură

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = c\,\Delta T, \tag{4}$$

c fiind constanta de termoconductibilitate.

Condiţiile la limită se vor scrie:

$$\begin{aligned} &p = p_1 = \text{const.}, \quad T = T_1 = \text{const. pe } AB \\ &p = p_2 = \text{const.}, \quad T = T_2 = \text{const. pe } CD \\ &v_n = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ pe } BC,\ DA, \end{aligned} \tag{5}$$

n normala la BC şi DA.

Pentru rezolvarea problemei mai este necesară o ecuaţie. Aceasta va fi ecuaţia de stare. În lucrarea de faţă vom alege o relaţie de dependenţă a lui ρ faţă de T de forma

$$\rho = \rho_0(1 - aT), \tag{6}$$

aceeaşi ca în [1]. ρ_0 şi a sînt două constante date.

O problemă analoagă acesteia ar fi aceea în care în locul presiunii se dau vitezele pe diferite porţiuni de frontieră ale domeniului.

3. *Metoda de rezolvare.* Avînd în vedere ecuaţia de continuitate, vom face notaţiile

$$\rho u = U, \quad \rho v = V, \tag{7}$$

cu ajutorul cărora ecuaţia (3) se va scrie

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

Aceasta arată existenţa unei funcţii Ψ astfel încît

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{9}$$

Dacă vom reuşi să găsim o expresie aproximativă cît mai bună pentru o funcţie Φ, astfel încît ecuaţiile (1), (2) să poată fi scrise cu ajutorul ei sub forma

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{10}$$

problema se simplifică, deoarece relaţiile (9) şi (10) reprezintă condiţii de monogeneitate pentru Φ şi Ψ şi putem utiliza funcţii complexe.

În cazul absenţei termenului gravitaţional din ecuaţia (2), expresia lui Φ va fi una exactă:

$$\Phi = -\frac{kp}{g}. \tag{11a}$$

Pentru cazul tratat la general este greu de precizat ce alegere a lui Φ ar duce la o aproximaţie mai bună.

Alegînd, de exemplu,

$$\Phi = -\frac{kp}{g} - k\int_0^y \rho \, \mathrm{d}y, \tag{11b}$$

ecuaţia (2) se scrie exact, urmînd ca ecuaţia (1) să fie satisfăcută cu ipoteza că $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ şi deci $\rho_0 a \frac{\partial T}{\partial x}$ este neglijabil. Altă alegere a lui Φ poate fi următoarea:

$$\Phi = -\frac{kp}{g} - k\int_0^y \rho^* \, \mathrm{d}y, \tag{11c}$$

unde $\rho^*(y)$ este media după x a lui ρ în domeniul respectiv, pentru un y dat, deci

$$\rho^*(y) = \frac{1}{x_1 - x_2}\int_{x_1}^{x_2} \rho \, \mathrm{d}x,$$

$x_1 = x_1(y)$, $x_2 = x_2(y)$ fiind abscisele punctelor de intersecţie a frontierei domeniului cu paralela la axa Ox dusă la distanţa y.

Toate aceste expresii se vor vedea în ce măsură sînt valabile, în cazul exemplelor, în funcţie de alura mişcării şi a parametrilor ei. Astfel (11a) este indicată pentru o mişcare într-un domeniu alungit după Ox, după Oy avînd dimensiuni mici încît forţa gravitaţională să nu-şi aducă o contribuţie sesizabilă. De asemenea, poate fi indicată şi pentru mişcarea unui fluid uşor. Expresia (11b) impune neglijarea termenului $\rho_0 a \dfrac{\partial T}{\partial x}$, prin urmare se referă la mişcări între doi pereţi verticali în care temperatura variază puţin pe o paralelă la Ox. În schimb ecuaţia (2) rămîne neschimbată. De asemenea expresia (11c) presupune o mişcare între doi pereţi verticali. De data aceasta însă ecuaţia (1) va fi cea care nu se modifică cu nimic; modificarea va apare în ecuaţia (2), în care în loc de ρ din termenul gravitaţional va apare ρ^*.

Deci, mai departe, vom considera ecuaţiile (1) şi (2) înlocuite prin (10).

Condiţiile de monogeneitate (9) şi (10) determină faptul că Φ şi Ψ sînt funcţii armonice

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta\Psi = 0 \tag{12}$$

şi că există funcţia complexă $F(z) = \Phi + i\Psi$ a cărei derivată în raport cu $z = x + iy$ are ca parte reală, respectiv imaginară, pe U şi $-V$, adică

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = U - iV. \tag{13}$$

Astfel, din punct de vedere matematic, problema (1)—(3) s-a redus acum la găsirea funcţiei complexe F.

Va trebui să precizăm şi condiţiile la limită.

Mai întîi însă, să transpunem problema într-un limbaj mecanic. Aceasta se poate exprima în felul următor: în locul mişcării reale din planul fizic se poate admite o mişcare fictivă a unui fluid incompresibil, cu potenţialul complex F al vitezei $W = U - iV$. Ecuaţia (8) reprezintă ecuaţia de continuitate a acestui fluid. Funcţiile Φ şi Ψ sînt, în această interpretare, potenţialul vitezei şi funcţia de curent.

Vom căuta acum legătura dintre mărimile mişcării reale şi cele ale mişcării fictive. Calculînd mărimea şi direcţia celor două viteze, obţinem

$$\begin{gathered} U^2 + V^2 = \rho^2 (u^2 + v^2), \\ \frac{U}{V} = \frac{u}{v} \end{gathered} \tag{14}$$

sau, exprimînd aceasta în cuvinte, modulul vitezei fictive este egal cu modulul vitezei reale înmulţit cu ρ, iar direcţiile sînt aceleaşi. A doua observaţie ne permite să spunem că liniile echipotenţiale şi de curent sînt aceleaşi. În special acest lucru ne interesează pentru arcele de frontieră, pentru a preciza condiţiile la limită.

În mişcarea reală, viteza este normală la AB şi CD şi tangentă la BC şi DA. Acelaşi lucru va fi adevărat şi pentru viteza fictivă. Porţiunile de frontieră AB şi CD se menţin ca linii echipotenţiale, deci pe ele funcţia Φ va fi constantă, iar arcele BC şi DA acţionează ca pereţi impermeabili, aşa că aici funcţia Ψ va fi constantă. Vom nota aceste constante astfel:

$$\begin{gathered} \Phi = \Phi_1 = \text{const. pe } AB, \quad \Phi = \Phi_2 = \text{const. pe } CD, \\ \Psi = \Psi_1 = \text{const. pe } AD, \quad \Psi = \Psi_2 = \text{const. pe } BC, \end{gathered} \tag{15}$$

urmînd a le determina din condiţiile (5).

Valorile lui Φ_1 și Φ_2 pot fi deduse din (11), în mod exact dacă se folosește reprezentarea (11a) și în mod aproximativ pentru reprezentările (11b) și (11c). Dacă în cazul unor domenii, frontierele de alimentare coincid cu $y = 0$, așa cum se va vedea pe un exemplu la sfîrșitul lucrării, atunci vom obține Φ_1 și Φ_2 exact și din (11b) și (11c).

Mai departe, vom calcula integrala :

$$\int_{AB} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \mathrm{d}s = \int_{AB} V_n \mathrm{d}s = \int_{AB} \rho v_n \mathrm{d}s = Q \Big|_{AB} ,$$

V_n fiind viteza normală.

Pe de altă parte,

$$\int_{AB} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \mathrm{d}s = \Psi_2 - \Psi_1 .$$

Dacă convenim să luăm $\Psi_1 = 0$, atunci Ψ_2 va fi egal cu debitul mișcării reale prin arcul AB, valoare ce va fi determinată mai tîrziu.

În felul acesta cunoaștem partea reală a lui F pe două porțiuni de frontieră a lui $\mathcal{D}$ și partea ei imaginară pe celelalte două porțiuni și deci problema poate fi rezolvată.

4. *Determinarea funcției complexe* F. Pentru găsirea potențialului complex al mișcării fictive, se poate folosi metoda reprezentărilor conforme.

În planul F, domeniul corespunzător este un dreptunghi și el poate fi reprezentat pe semiplanul superior al planului $\zeta = \xi + i\eta$ cu ajutorul transformării lui Schwarz-Cristoffel :

$$F = A \int_0^{\zeta} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\lambda^2\zeta^2)}} + B.$$

Vom aduce punctele B, A, D, C respectiv în $-1/\lambda$, -1, 1, $1/\lambda$ și din corespondența punctelor găsim

$$F = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2K} \int_0^{\zeta} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\lambda^2\zeta^2)}} + \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}. \tag{16}$$

Tot din corespondența punctelor găsim

$$\Psi_2 = Q = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2} \frac{K'}{K}. \tag{17}$$

K și K' reprezintă integralele eliptice complete de prima speță de argument λ, respectiv $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$.

Pe același semiplan se reprezintă și domeniul din planul fizic prin transformarea

$$z = z(\zeta). \tag{18}$$

Astfel am determinat parametric funcţia $F(z)$.

Viteza fictivă este dată de relaţia

$$W = U - iV = \frac{dF}{dz} = \frac{dF}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}, \tag{19}$$

iar viteza mişcării reale va fi

$$w = u - iv = \frac{1}{\rho}(U - iV). \tag{20}$$

Ea va fi complet determinată cînd se va cunoaşte ρ, ceea ce, conform lui (6), înseamnă a cunoaşte funcţia T.

5. *Determinarea temperaturii.* Înmulţind ecuaţia (4) cu ρ, vom căpăta

$$U\frac{\partial T}{\partial x} + V\frac{\partial T}{\partial y} = c\rho\,\Delta(x, y)\,T.$$

Vom putea acum folosi schimbarea de variabile $x = x(\Phi, \Psi)$, $y = y(\Phi, \Psi)$, schimbare care a mai fost utilizată şi în alte lucrări ([3]). Ea va simplifica ecuaţia temperaturii astfel:

$$\frac{\partial T}{\partial \Phi} = c\rho\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \Psi^2}\right), \tag{21}$$

în care s-a ţinut seama de faptul că Φ şi Ψ sînt funcţii armonice.

Condiţiile la limită sînt date de (5). Ele se mai pot scrie în felul următor:

$$\begin{aligned} T &= T_1 \text{ pentru } \Phi = \Phi_1, \\ T &= T_2 \text{ pentru } \Phi = \Phi_2, \\ \frac{\partial T}{\partial \Psi} &= 0 \text{ pentru } \Psi = \Psi_1,\ \Psi = \Psi_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Vom căuta să dăm o soluţie aproximativă a ecuaţiei neliniare (21).

Aşa cum este precizat şi în alte lucrări (de ex. [3]), în cazul condiţiilor la limită de mai sus, variaţia lui T este mică pe o linie echipotenţială, în comparaţie cu variaţia de-a lungul unei linii de curent. De aceea, în locul funcţiei T putem introduce o funcţie T^* care să fie media lui T pe o linie echipotenţială şi anume:

$$T^*(\Phi) = \frac{1}{\Psi_2 - \Psi_1}\int_{\Psi_1}^{\Psi_2} T(\Phi, \Psi)\,d\Psi. \tag{23}$$

Acest lucru este folosit de mai mulţi autori (de ex. [3], [4]).

Cum nu putem opera această transformare direct asupra ecuaţiei (21) din cauza neliniarităţii ei, vom transforma-o mai întîi pe ea, înlocuind pe ρ prin ρ^* mediu pe o linie echipotenţială:

$$\rho^* = \frac{1}{\Psi_2 - \Psi_1}\int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \rho\,d\Psi = \frac{\rho_0}{\Psi_2 - \Psi_1}\int_{\Psi_1}^{\Psi_2}(1 - aT)\,d\Psi = \rho_0(1 - aT^*) \tag{24}$$

şi ecuaţia va fi

$$\frac{\partial T}{\partial \Phi} = c\rho_* \Delta_{(\Phi,\Psi)} T.$$

Asupra acestei ecuaţii operăm transformarea (23) şi obţinem

$$\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}\Phi} = c\rho^* \frac{\mathrm{d}^2 T^*}{\mathrm{d}\Phi^2} \tag{25}$$

sau

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}\Phi}}{1 - aT^*} = c\rho_0 \frac{\mathrm{d}^2 T^*}{\mathrm{d}\Phi^2}. \tag{25'}$$

Condiţiile la limită le obţinem din primele două condiţii (22):

$$\begin{gathered} T^*(\Phi_1) = \frac{1}{\Psi_2 - \Psi_1} \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} T_1 \mathrm{d}\Psi = T_1, \\ T^*(\Phi_2) = T_2. \end{gathered} \tag{26}$$

O primă operaţie de integrare a ecuaţiei (25′) ne dă

$$-\frac{1}{a} \ln (1 - a\,T^*) = c\,\rho_0 \frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}\Phi} + C_0$$

şi mai departe

$$\Phi = \frac{c\rho_0}{C_1} \operatorname{li} [C_1 (1 - Ta^*)] + C_2. \tag{27}$$

Pentru cele două constante de integrare, obţinem ecuaţiile

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{c\rho_0}{C_1} \operatorname{li} [C_1 (1 - aT_1)] + C_2, \\ \Phi_2 &= \frac{c\rho_0}{C_1} \operatorname{li} [C_1 (1 - aT_2)] + C_2. \end{aligned} \tag{28}$$

Se obţine aceeaşi soluţie dacă admitem ipoteza că a treia condiţie (22) este valabilă nu numai pe frontieră, ci în tot domeniul.

Soluţia găsită mai sus reprezintă o primă aproximaţie. Pentru a doua aproximaţie se poate utiliza reprezentarea

$$T = T_0(\Phi) + \widetilde{T}(\Phi, \Psi),$$

unde T_0 (egal cu T^*) este soluţia ecuaţiei cînd T depinde numai de Φ, iar $\widetilde{T}$ reprezintă un termen oarecum perturbator, mic faţă de T_0, introdus datorită variaţiei temperaturii de-a lungul unei linii echipotenţiale. După ce se determină T_0 din ecuaţia scrisă numai în Φ, se obţine pentru $\widetilde{T}$ o ecuaţie atît în Φ cît şi în Ψ, dar care se poate liniariza, în ipoteza că

T este mic față de T_0.

Aici ne-am oprit numai la prima aproximație.

Folosind această valoare, din (20) putem determina vitezele. Medierea efectuată asupra lui T (și ρ), nu intervine în viteză decît prin factorul $\dfrac{1}{\rho}$, singurul care face posibilă influența temperaturii asupra mișcării.

Mai departe putem determina și presiunea din ecuațiile (1) și (2).

6. *Cazuri particulare.* Vom ilustra cele spuse mai sus pe cîteva exemple.

A. Pentru început vom lua mișcarea între două plăci paralele orizontale. Domeniul $\mathcal{D}$ este un dreptunghi $-L \leqslant x \leqslant L$, $-h \leqslant y \leqslant h$, cu h mic încît putem neglija influența forței gravitaționale. Pentru $x = -L$, presiunea o presupunem egală cu p_1, iar pentru $x = L$, cu p_2.

În acest caz, reprezentarea lui Φ va fi (11a), iar condițiile la limită se vor scrie

$$\Phi_1 = -\frac{k\,p_1}{g}, \quad \Phi_2 = -\frac{k\,p_2}{g}.$$

Reprezentarea conformă a domeniului nostru pe semiplanul $\eta > 0$ va fi dată de transformarea

$$z = \frac{L}{K}\int_0^{\zeta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\lambda^2\zeta^2)}} - ih, \tag{29}$$

iar parametrul λ se determină din ecuația $\dfrac{K'}{K} = \dfrac{2h}{L}$.

În acest caz simplu, se poate elimina ζ între (16) și (29) și obținem

$$F = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2L}\,z + \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} + i\,\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2L}\,h. \tag{30}$$

De aici

$$W = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2L},$$

sau

$$u = \frac{1}{\rho}\,U = \frac{1}{\rho_0(1-aT)}\,\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2L}, \quad v = \frac{1}{\rho}\,V = 0. \tag{31}$$

Deci liniile de curent sînt paralele cu axa Ox și cele echipotențiale cu axa Oy, avînd în vedere ipoteza care am făcut-o cînd am ales expresiile (10).

Din (30) și (27) găsim

$$x = \frac{2L}{\Phi_2 - \Phi_1}\left\{\frac{c\rho_0}{C_1}\,\mathrm{li}\,[C_1(1-aT^*)] + C_2\right\} - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_2 - \Phi_1}\,L. \tag{32}$$

Dacă în (31) considerăm în loc de T, valoarea aproximativă T^*, (31) și (32) constituie soluția parametrică a problemei, cu parametrul

T^*, deoarece se cunoaște viteza în tot domeniul. Dacă se elimină T^*, se obține $x = x(u)$.

B. Vom alege acum o bandă infinită $-d \leqslant y \leqslant 0$. Porțiunile de frontieră $-l \leqslant x \leqslant l$, $y = 0$ și $-\infty < x < \infty$, $y = -d$ sînt impermeabile. Pe porțiunile $-\infty < x \leqslant l$, $y = 0$ vom lua $\Phi = \Phi_1 = -kH$, iar pe $l \leqslant x < \infty$, $y = 0$, $\Phi = \Phi_2 = 0$.

Reprezentarea acestui domeniu pe semiplanul $\eta > 0$ va fi

$$z = \frac{d}{\pi} \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}, \tag{33}$$

iar parametrul λ are valoarea

$$\lambda = \operatorname{th} \frac{\pi l}{2d}.$$

Viteza este în acest caz

$$w = \frac{1}{\rho_0 (1 - aT)} \frac{\pi k H}{4 d K} \frac{1 - \zeta^2}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - \lambda^2 \zeta^2)}}. \tag{34}$$

Din (27) și (16) cunoaștem implicit valoarea aproximativă $T^*(\zeta)$.

Astfel din (33) și (34) găsim viteza în fiecare punct al domeniului mișcării.

Primită la redacție la 23 ianuarie 1967

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România, Str.
M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. I. Gheorghiță, *The Marginal Stability in Porous Inhomogeneous Media.* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **57**, part. 4, 871–877 (1961).
2. Șt. I. Gheorghiță, *Metode matematice în Hidrogazodinamica subterană.* Ed. Acad. Republicii Socialiste România, București, 1966.
3. В. С. Хоменко, *Об одной задаче теплопроводности для струй*, П. М. М., **28.**, *5*, 965 (1964).
4. J. Crank, I. B. Parker, *Approximate Methods for Two-dimensional Problems in Heat Flow.* The Quaterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, **XIX**, part. 2, 167 (1966).

ORSZÁGOS KÖNYVTÁR 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor din text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzuanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1967 JUL 27

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU şi M. JURCHESCU, **Topologie. Categorii. Suprafeţe riemanniene**, 1966, 394 p., 21,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ALEXANDRU GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 558 p., 31 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSCHI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 352 p., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 6, P. 803—954, BUCUREŞTI, 1967

I. P. „Informaţia" — c. 5299 43831 **Lei 12.—**

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI
MATEMATICE

7

TOMUL 19

1967

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

TOM. 19, Nr. 7
1967

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZ. MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1863

SUMAR

Pag.

GALINA CAMENSCHI, Asupra mişcării cu cavitaţie a fluidelor compresibile în jurul plăcii 957

LAZĂR DRAGOŞ şi DOREL HOMENTCOVSCHI, Asupra mişcării bidimensionale a fluidului conductor în jurul profilelor subţiri în cazul cîmpurilor cvasialiniate 963

SILVIU GUIAŞU, Contribuţii la studiul repartiţiei limită a proceselor stocastice cu timp discret aleator 971

DOREL HOMENTCOVSCHI, Asupra mişcării bidimensionale a fluidului perfect conductor în jurul profilelor subţiri 1019

D. B. ION, Asupra unor proprietăţi ale constantelor de structură ale algebrelor Jordan de tip *A* 1031

N. MARCOV, Perturbarea cîmpului magnetic în cazul mişcării fluidului electroconductor în jurul obstacolului circular 1039

FLORICA MUNTEANU PASCAL, O schemă cu gradul de exactitate patru în metoda dreptelor aplicată la rezolvarea aproximativă a unor probleme la limită asupra ecuaţiilor de tip parabolic 1047

GH. S. NADIU, Asupra unei metode de construcţie a algebrelor lukasiewicz trivalente 1063

MARIUS I. STOKA, Conexiuni invariante pe spaţii riemanniene cu metrica nedefinită cu curbura constantă 1071

MARIUS I. STOKA, Asupra grupurilor izomorfe cu grupul proiectiv din plan şi cu subgrupurile lui 1081

RODICA TRANDAFIR, Probleme de geometrie integrală ale reţelelor dintr-un spaţiu euclidian E_3 1105

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 7, P. 955–1112, BUCUREŞTI, 1967

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT BUDAPEST
7883

ASUPRA MIŞCĂRII CU CAVITAŢIE A FLUIDELOR COMPRESIBILE ÎN JURUL PLĂCII

DE

GALINA CAMENSCHI

În lucrare se studiază mişcarea cu cavitaţie a fluidelor compresibile în jurul plăcii normale la curent, folosind metoda hodografică a lui Ciaplîghin. Se pleacă de la soluţia problemei mişcării în jurul plăcii pentru cazul incompresibil dată de Efros. Se obţin expresiile vitezei pe liniile libere care mărginesc cavitatea şi numărul de cavitaţie în cazul compresibil, care se scriu în cele trei variante ale metodei lui Ciaplîghin.

1. Mişcarea cu cavitaţie a unui fluid incompresibil în jurul plăcii, normale la direcţia vitezei de la infinit, a fost studiată încă de D. Riabouchinsky în 1920 [1] şi dezvoltată de F. Weinig în 1932 [2]. Schema propusă a fost denumită schema lui Riabouchinsky.

Mult mai tîrziu, în anul 1946, D. Efros [3] propune o altă schemă pentru mişcarea cu cavitaţie în jurul plăcii normale la direcţia vitezei de la infinit. Independent de Efros, această schemă a fost considerată şi de D. Gilbarg şi H. H. Rock [4].

Calculul mişcării cu cavitaţie a unui fluid compresibil, cînd viteza pe liniile libere este egală cu viteza sunetului, folosind schema lui Riabouchinsky, a fost făcut de D. Fisher în 1962 [5].

În cele ce urmează se studiază mişcarea cu cavitaţie a unui fluid compresibil prin metoda fluidului fictiv a lui Ciaplîghin, folosind schema lui Efros.

2. Fie în planul $Z = X + \mathrm{i}Y$ mişcarea fluidului incompresibil în jurul plăcii AB (fig. 1) după schema lui Efros. Jeturile fluide care se ciocnesc în spatele plăcii formează jetul de întoarcere, care în schema amintită se întinde la infinit, vărsîndu-se pe foaia a doua a suprafeţei lui Riemann. Adică mişcarea se desfăşoară pe două foi. Însă, schema cu jetul de întoarcere descrie bine mişcarea dată, metoda matematică folosită dovedindu-se eficace.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 7, P. 957–962, BUCUREŞTI, 1967

Rezolvarea problemei se face [6] în planul ζ, domeniul care corespunde planului mişcării fiind semicercul de rază 1 cu centrul în originea axelor ($|\zeta|) \leqslant 1$; $\operatorname{Im} \zeta \geqslant 0$) (fig. 2). Plăcii AOB îi corespunde semicircumferinţa $\zeta = e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$; punctului O de viteza nulă îi corespunde $\zeta = i$; punctului de la infinit al jetului de întoarcere E îi corespunde

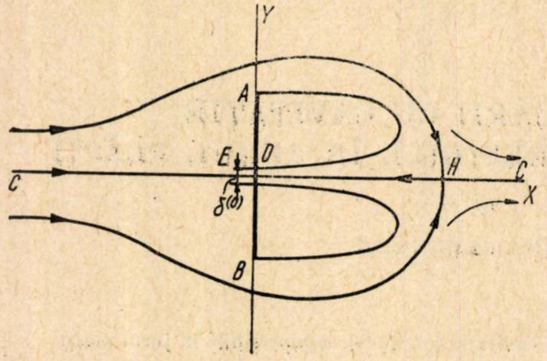


Fig. 1

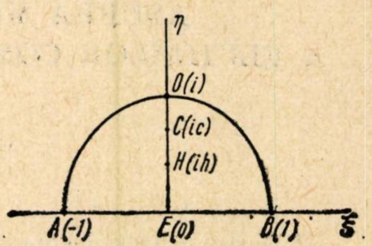


Fig. 2

punctul $\zeta = 0$; punctului de viteză nulă H îi corespunde $\zeta = ih$; iar punctului de la infinit C — $\zeta = ic$. Constantele h şi c sînt reale şi evident verifică condiţia $0 < h \leqslant c$.

Fie f_0 potenţialul complex al mişcării incompresibile iar $V_0^{(0)} = \text{const.}$ viteza pe liniile libere, care mărginesc cavitatea ; atunci, conform cu [6]

$$\frac{df_0}{dZ} = V_0^{(0)} \frac{(\zeta - ih)(h\zeta - i)(\zeta - i)}{(\zeta + ih)(h\zeta + i)(\zeta + i)}, \tag{1}$$

şi

$$\frac{dZ}{d\zeta} = N \frac{(\zeta + ih)^2 (h\zeta + i)^2 (\zeta + i)^2 (\zeta^2 - 1)}{\zeta(\zeta^2 + c^2)^2 (c^2\zeta^2 + 1)^2}, \tag{2}$$

unde N este o constantă.

Funcţia $Z(\zeta)$, calculată din (2), nu va fi uniformă dacă h şi c sînt aleşi arbitrar. Anulînd reziduul funcţiei $\dfrac{dZ}{d\zeta}$ în punctul $\zeta = ic$ $Z(\zeta)$ va fi uniformă şi h şi c vor fi legaţi printr-o relaţie de forma [6]

$$h = \frac{2}{\left(c + \frac{1}{c}\right)^2 - \left(c + \frac{1}{c}\right) - 4 + \sqrt{\left[\left(c + \frac{1}{c}\right)^2 - \left(c + \frac{1}{c}\right) - 4\right]^2 - 4}}. \tag{3}$$

Viteza curentului de la infinit se obţine din (1) pentru $\zeta = ic$ şi este egală cu

$$V_\infty^{(0)} = V_0^{(0)} \frac{(c - h)(1 - hc)(1 - c)}{(c + h)(1 + hc)(1 + c)} = V_0^{(0)} K. \tag{4}$$

Numărul de cavitaţie care se calculează din expresia

$$Q^{(0)} = \frac{V_0^{(0)2}}{V_\infty^{(0)2}} - 1, \tag{5}$$

conform relaţiei (4), va fi

$$Q^{(0)} = \frac{1}{K^2} - 1, \tag{5'}$$

unde am folosit notaţia

$$K = \frac{(c-h)(1-hc)(1-c)}{(c+h)(1+hc)(1+c)}. \tag{4'}$$

3. Vom presupune acum că avem mişcarea cu cavitaţie a unui fluid compresibil în jurul plăcii. Vom folosi metoda hodografică a lui Ciaplîghin pentru rezolvarea problemei propuse.

Corespondenţa între mişcarea fluidului incompresibil de bază şi mişcarea fluidului compresibil din planul z este dată de [7]

$$\mathrm{d}z = C_1 \mathrm{d}Z + C_2 \overline{\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}Z}\right)^2 \mathrm{d}Z}, \tag{6}$$

constantele C_1 şi C_2 avînd valorile

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_1}\right), \quad C_2 = \frac{1}{2\tilde{V}_1^2}\left(1 - \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_1}\right),$$

în care $\tilde{\rho}_0$ şi $\tilde{\rho}_1$ sînt densităţile fluidului fictiv al lui Ciaplîghin în punctul de viteză nulă şi, respectiv, în punctul în care $V = \tilde{V}_1$, V fiind modulul vitezei.

Vom presupune că viteza de la infinit a fluidului incompresibil şi a celui compresibil fictiv este $\tilde{V}_1 = V_\infty^{(0)} = V_\infty$.

Prin intermediul variabilei ζ, relaţia (6) se va scrie

$$\mathrm{d}z = C_1 \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta + C_2 \overline{\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}Z}\right)^2 \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta}$$

şi conform formulelor (1) şi (2) vom avea

$$\mathrm{d}z = N\left[C_1 \frac{(\zeta + \mathrm{i}h)^2(h\zeta + \mathrm{i})^2(\zeta + \mathrm{i})^2(\zeta^2 - 1)}{\zeta(\zeta^2 + c^2)^2(c^2\zeta^2 + 1)^2}\mathrm{d}\zeta + \right. \tag{7}$$
$$\left. + C_2 V_0^{(0)2} \frac{\overline{(\zeta - \mathrm{i}h)^2(h\zeta - \mathrm{i})^2(\zeta - \mathrm{i})^2(\zeta^2 - 1)}}{\zeta(\zeta^2 + c^2)^2(c^2\zeta^2 + 1)^2}\mathrm{d}\zeta\right].$$

Pe liniile libere care mărginesc cavitatea avem $\overline{\mathrm{d}f_0} = \mathrm{d}f_0$ pentru că $\mathrm{d}\psi_0 = 0$; atunci

$$\overline{\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}Z}\right)^2 \mathrm{d}Z} = \overline{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}Z}} \cdot \overline{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}Z}}\, \overline{\mathrm{d}Z} = \overline{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}Z}} \cdot \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z = V_0^{(0)2}\mathrm{d}Z.$$

Liniile libere care mărginesc cavitatea în mişcarea fluidului compresibil vor fi obţinute prin integrarea expresiei

$$(7') \qquad \mathrm{d}z = C_1 + C_2 V_0^{(0)^2})\, \mathrm{d}Z = (C_1 + C_2 V_0^{(0)^2}) \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\,\zeta}\, \mathrm{d}\zeta =$$

$$= N\,(C_1 + C_2 V_0^{(0)^2}) \frac{(\zeta + \mathrm{i}h)^2\,(h\,\zeta + \mathrm{i})^2\,(\,\zeta + \mathrm{i})^2\,(\,\zeta^2 - 1)}{\zeta(\,\zeta^2 + c^2)^2\,(c^2\,\zeta^2 + 1)^2}\, \mathrm{d}\zeta.$$

Ele vor diferi de cele incompresibile doar prin factorul constant $(C_1 + C_2 V_0^{(0)^2})$.

Pe placă, în planul variabilei ζ, avem $\zeta\bar{\zeta} = 1$; atunci, folosind (7) şi înlocuind pe $\mathrm{d}\bar{\zeta} = \mathrm{d}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\frac{1}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta$, avem

$$(7'') \qquad \mathrm{d}z = N\left[C_1 \frac{(\,\zeta + \mathrm{i}h)^2\,(h\,\zeta + \mathrm{i})^2\,(\,\zeta + \mathrm{i})^2\,(\,\zeta^2 - 1)}{\zeta\,(\zeta^2 + c^2)^2\,(c^2\,\zeta^2 + 1)^2} - \right.$$

$$\left. - C_2 V_0^{(0)^2} \frac{(\zeta - \mathrm{i}h)^2\,(h\zeta - \mathrm{i})^2\,(\zeta - \mathrm{i})^2\,(\zeta^2 - 1)}{\zeta(\zeta^2 + c^2)^2\,(c^2\zeta^2 + 1)^2}\right] \mathrm{d}\zeta.$$

După descompunerea în fracţii simple şi integrarea între limitele corespunzătoare, formula (7″) dă lungimea modificată a plăcii

$$(8) \qquad l = N\left[\frac{h^2}{c^4}\,\pi\,(C_1 - C_2 V_0^{(0)^2}) + \frac{h^2}{c^4}\,K\,(\pi - 4 \operatorname{arc\,tg} c)\,(C_1 + \right.$$

$$\left. + C_2 V_0^{(0)^2}) + \frac{(c + h)^2\,(1 + ch)^2}{c^2\,(1 + c^2)^2\,(1 - c)^2}\,(1 - K^2)\,(C_1 + C_2 V_0^{(0)^2})\right],$$

care poate fi comparată cu lungimea plăcii în cazul incompresibil dată de [6]

$$(8') \qquad l^{(0)} = N\left[\frac{h^2}{c^4}\,\pi + \frac{h^2}{c^4}\,K\,(\pi - 4 \operatorname{arc\,tg} c) + \right.$$

$$\left. + \frac{(c + h)^2\,(1 + ch)^2}{c^2\,(1 + c^2)^2\,(1 - c)^2}\,(1 - K^2)\right].$$

În formulele (8) şi (8′) s-a folosit notaţia (4′).

Integrînd (7′) după o semicircumferinţă de rază mică în jurul punctului $\zeta = 0$, se obţine grosimea jetului de întoarcere δ

$$(9) \qquad \delta = N\,(C_1 + C_2 V_0^{(0)^2})\,\frac{\pi h^2}{c^4},$$

în timp ce grosimea $\delta^{(0)}$ a jetului în cazul incompresibil este conform [6]

$$(9') \qquad \delta^{(0)} = N\,\frac{\pi h^2}{c^4}.$$

Conform uneia dintre proprietăţile mişcărilor incompresibile de bază şi a celei compresibile asociate, fluxul se conservă în cele două mişcări [8].

Folosind această proprietate se calculează viteza V_0, viteza pe liniile libere, care mărginesc cavitatea compresibilă, în funcţie de $V_0^{(0)}$. Din egalitatea

$$\delta \cdot V_0 = \delta^{(0)} \cdot V_0^{(0)},$$

rezultă

$$V_0 = \frac{V_0^{(0)}}{C_1 + C_2 V_0^{(0)2}}. \tag{10}$$

Acelaşi rezultat se obţine şi din formula [7]

$$\frac{1}{V} = \frac{C_1}{V^{(0)}} + C_2 V^{(0)}.$$

Numărul de cavitaţie Q în cazul fluidului compresibil va fi calculat din expresia

$$Q = \frac{2(p_\infty - p_c)}{\widetilde{\rho}_1 V_\infty^2}, \tag{11}$$

unde p_∞ este presiunea fluidului de la infinit, iar p_c presiunea în cavernă.

Pentru a-l exprima în funcţie de numărul de cavitaţie în cazul fluidului incompresibil, care se mai scrie

$$Q^{(0)} = \frac{2(p_\infty^{(0)} - p_c^{(0)})}{\widetilde{\rho}_0 V_\infty^2}, \tag{5''}$$

unde $p_c^{(0)}$ este presiunea în cavernă în cazul incompresibil; se foloseşte egalitatea lui Demtchenko [8], transcrisă pentru acest caz în forma următoare

$$\frac{p_\infty - p_c}{V_0} = \frac{p_\infty^{(0)} - p_c^{(0)}}{V_0^{(0)}}.$$

Din (11) şi (5''), folosind ultima egalitate, rezultă

$$Q = \frac{2(p_\infty^{(0)} - p_c^{(0)})}{\widetilde{\rho}_0 V_\infty^2} \cdot \frac{\widetilde{\rho}_0}{\widetilde{\rho}_1} \cdot \frac{V_0}{V_0^{(0)}} = Q^{(0)} \frac{\widetilde{\rho}_0}{\widetilde{\rho}_1} \frac{1}{C_1 + C_2 V_0^{(0)2}},$$

sau ţinînd seama de (5) şi de valorile constantelor C_1 şi C_2 vom avea

$$Q = \frac{Q^{(0)}}{\frac{\widetilde{\rho}_1}{\widetilde{\rho}_0} - \frac{1}{2} Q^{(0)} \left(1 - \frac{\widetilde{\rho}_1}{\widetilde{\rho}_0}\right)}. \tag{12}$$

Prin urmare, metoda lui Ciaplîghin duce la modificarea lungimii plăcii şi modifică şi liniile libere care mărginesc cavitatea în mişcarea incompresibilă.

4. Relaţiile (10) şi (12) se exprimă în cazul celor trei variante [8] ale metodei lui Ciaplîghin după cum urmează :

a) varianta lui Ciaplîghin—Demtchenko

$$V_0 = \frac{2V_0^{(0)}}{1 + \sqrt{1 + M_0^2} + \frac{V_0^{(0)2}}{V_\infty^2} (1 - \sqrt{1 + M_0^2}}, \tag{10'}$$

$$Q = \frac{Q^{(0)}}{\frac{1}{\sqrt{1 + M_0^2}} - \frac{1}{2} Q^{(0)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + M_0^2}}\right)}, \tag{12'}$$

b) varianta Kármán – Tsien

$$V_0 = \frac{2V_0^{(0)}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}} + \dfrac{V_0^{(0)2}}{V_\infty^2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}}\right)}, \tag{10''}$$

$$Q = \frac{Q^{(0)}}{\sqrt{1 - M_1^2} - \dfrac{1}{2} Q^{(0)} (1 - \sqrt{1 - M_1^2})}, \tag{12''}$$

c) varianta lui Caius Iacob

$$V_0 = \tag{10'''}$$

$$= \frac{2V_0^{(0)}}{1 + \left(1 - \dfrac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{-1/\gamma-1} + \dfrac{\gamma V_0^{(0)2}}{c_0^2} \cdot \dfrac{1 - \left(1 - \dfrac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{-1/\gamma-1}}{\left[1 - \left(1 - \dfrac{\gamma-1}{2} M_0^2\right)^{\gamma/\gamma-1}\right]\left[1 + \left(1 - \dfrac{\gamma-1}{2} M_0^2\right)^{-1/\gamma-1}\right]}}$$

$$Q = \frac{Q^{(0)}}{\left(1 - \dfrac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{1/\gamma-1} - \dfrac{1}{2} Q^{(0)} \left[1 - \left(1 - \dfrac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{1/\gamma-1}\right]}. \tag{12'''}$$

Notaţiile folosite sînt : $M_0 = \dfrac{V_\infty}{c_0}$ numărul lui Ciaplîghin ; $M_1 = \dfrac{V_\infty}{c_1}$ numărul lui Mach ; c_0 viteza sunetului în punctul de viteză nulă ; c_1 viteza sunetului în punctul de viteză $\widetilde{V}_1 = V_1 = V_\infty$; γ exponentul adiabatei $p = C\rho^\gamma$ – legea de compresibilitate a fluidului real.

Primită la redacţie la 3 martie 1967

Facultatea de matematică şi mecanică a Universităţii
din Bucureşti, Str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. RIABOUCHINSKY D., *On steady fluid motions with free surfaces*. Proc. London Math. Soc., **19**, ser. 2, 206–215 (1920).
2. WEINIG F., *Die Ausdehnung des Kavitationsgebietes*. Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs, Hamburg, 1932.
3. ЭФРОС Д. А., *Гидродинамическая теория плоскопараллельных кавитационных течений*. ДАН СССР, новая серия, **51**, *4*, 267–270 (1946).
4. GILBARG D. ROCK H. H., NOL Memo. 8718, 1946.
5. FISHER D., *Calculation of subsonic cavities with sonic free streamlines*. Applied Math. and Statistics lab., Stanford University, California, Techn. report N 22, 41–47 (1962).
6. ГУРЕВИЧ М. И., *Теория струй идеальной жидкости*. Москва, 1961, 168–173.
7. IACOB C., *Sur les mouvements lents des fluides parfaits compressibles*. Portugaliae Mathematica, Lisbonne, **1**, 246 (1939).
8. IACOB C., *Introduction mathématique à la Mécanique des fluides*. Bucarest– Paris, 1959, p. 1066–1075.

ASUPRA MIŞCĂRII BIDIMENSIONALE A FLUIDULUI CONDUCTOR ÎN JURUL PROFILELOR SUBŢIRI ÎN CAZUL CÎMPURILOR CVASIALINIATE

DE

LAZĂR DRAGOŞ şi DOREL HOMENTCOVSCHI

Se studiază mişcarea unui fluid compresibil, cu conductivitate electrică finită în prezenţa unui profil subţire considerînd cîmpul magnetic cvasialiniat. Utilizînd o suprapunere continuă de unde plane, se obţine soluţia finală sub forma unor integrale de tip Fourier.

Studiul curgerii fluidului conductor în jurul unui profil subţire a fost iniţiat de Sears şi Resler în [1]. Ei consideră fluidul incompresibil şi perfect conductor. În [2] J.E. Mc Cune şi E. L. Resler Jr. tratează cazul fluidului compresibil perfect conductor, iar problema curgerii fluidului compresibil cu conductivitate σ arbitrară este rezolvată în [3] şi [4]. În lucrările citate, cîmpul magnetic neperturbat şi viteza curentului la infinit se presupun în planul de referinţă, rezultînd o mişcare plană a fluidului. Roger Thibault abordează în [5] studiul curgerii bidimensionale a fluidului conductor (R_M arbitrar) în ipoteza cîmpurilor cvasialiniate. În final se ajunge la o relaţie integrală între derivatele funcţiilor necunoscute $\varphi(x, y)$ şi $\psi(x, y)$ pe axa Ox, în cazul supersonic apărînd încă o necunoscută suplimentară. În următoarele vom relua această problemă folosind metodele utilizate în [3] şi [4].

1. ECUAŢII GENERALE

Se consideră un curent fluid uniform, de viteză $\vec{U}$, perturbat de un corp cilindric în prezenţa cîmpului magnetic omogen $\vec{H}_0^*$. Axa Oz se alege paralelă cu generatoarele cilindrului iar secţiunea acestuia în planul xOy (normal) este un profil subţire (izolator) de ecuaţie

$$y = Y(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant +1.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 7, P. 963–970, BUCUREŞTI, 1967

Fluidul se presupune nevîscos, compresibil, de conductivitate electrică σ. Viteza $\vec{U}$, la mari distanţe, are direcţia axei Ox, iar expresia analitică a cîmpului magnetic omogen este

$$\vec{H}_0^* = H_0(\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \operatorname{tg}\alpha)$$

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ fiind versorii axelor iar α unghiul cu planul de referinţă.

Mişcarea este staţionară şi bidimensională, fiecare mărime fizică fiind funcţie numai de x şi y.

În ipoteza teoriei linearizate, cu variabilele dinamice din [4], curgerea fluidului va fi descrisă de următoarele ecuaţii :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = - \operatorname{grad} p + \frac{1}{A^2} \vec{j} \times (\vec{e}_1 + \operatorname{tg} \alpha\, \vec{e}_3) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} - (\vec{e}_1 + \operatorname{tg} \alpha\, \vec{e}_3) \operatorname{div} \vec{v} + \frac{1}{R_M} \Delta \vec{h} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = M^2 \frac{\partial p}{\partial x} \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \vec{h} = 0 \, ; \ \operatorname{rot} \vec{h} = \vec{j} \tag{5}$$

$$\vec{j} = R_M [\vec{E} + \vec{e}_1 \times h + \vec{v} \times (\vec{e}_1 + \operatorname{tg} \alpha\, \vec{e}_3)] \tag{6}$$

cu notaţiile :

$$A = \frac{U}{V_A}\, ; \quad V_A = H_0 \sqrt{\frac{\mu_e}{4\pi\rho_\infty}}\, ; \quad R_M = 4\pi\sigma U L\, ; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

V_A fiind viteza lui Alfven corespunzătoare lui H_0, μ_e permiabilitatea magnetică iar M numărul lui Mach.

Din (1) şi (2) eliminînd presiunea se găseşte :

$$(1 - M^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{M^2}{A^2} \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial h_z}{\partial x}. \tag{7}$$

Condiţia rot $\vec{E} = 0$ impune anularea lui E_z astfel încît proiecţia ecuaţiei (6) pe axa Oz ia forma :

$$j = R_M (h_y - v). \tag{8}$$

Prin scalarii j şi Ω vom nota proiecţiile pe axa Oz ale vectorilor $\vec{j}$ şi respectiv $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} v$, iar prin θ divergenţa cîmpului vitezelor.

Luînd rotorul ecuaţiilor (2) şi (3) găsim :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{A^2}\vec{j} \tag{9}$$

$$\left[\frac{1}{R_M}\Delta + \frac{1-A^2}{A^2}\frac{\partial}{\partial x}\right]\vec{j} = \operatorname{grad}\theta \times (\vec{e}_1 + \operatorname{tg}\alpha\,\vec{e}_3). \tag{10}$$

Ultima ecuaţie avînd următoarele proiecţii :

$$\left[\frac{1}{R_M}\Delta + \frac{1-A^2}{A^2}\frac{\partial}{\partial x}\right]j = -\frac{\partial\theta}{\partial y} \tag{10'}$$

$$\left[\frac{1}{R_M}\Delta + \frac{1-A^2}{A^2}\frac{\partial}{\partial x}\right]h_z = \operatorname{tg}\alpha\cdot\theta. \tag{10''}$$

Din ecuaţiile (1) şi (2) se mai găseşte

$$\left[(1-M^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\theta = -\frac{M^2}{A^2}\frac{\partial}{\partial x}[(\vec{e}_1 + \operatorname{tg}\alpha\,\vec{e}_3)\cdot\operatorname{rot}\vec{j}]. \tag{11}$$

În sfîrşit, eliminarea lui $\vec{j}(x, y)$ între ecuaţiile (10) şi (11) conduce la următoarea ecuaţie în $\theta(x, y)$:

$$(1-M^2)\frac{A^2}{R_M}\frac{\partial^4\theta}{\partial x^4} + (2-M^2)\frac{A^2}{R_M}\frac{\partial^4\theta}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{A^2}{R_M}\frac{\partial^4\theta}{\partial y^4} +$$

$$+ (1 - A^2 - \widetilde{M}^2 + A^2M^2)\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3} + (1 - A^2 - \widetilde{M}^2)\frac{\partial^3\theta}{\partial x\,\partial y^2} = 0, \tag{12}$$

unde

$$\widetilde{M}^2 = M^2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha).$$

2. REPREZENTAREA SOLUŢIILOR GENERALE PENTRU $\theta(x, y)$, $j(x, y)$ ŞI $h_z(x, y)$

Vom căuta soluţia ecuaţiei (12) sub formă de unde simple amortizate :

$$\theta_\lambda(x, y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x + \beta y}. \tag{14}$$

Expresia (14) introdusă în (12) conduce la următoarea ecuaţie algebrică pentru determinarea lui β :

$$\beta^4 - b\beta^2 + c = 0, \tag{15}$$

unde :

$$b = (2 - M^2)\lambda^2 - \mathrm{i}\lambda\frac{R_M}{A^2}(A^2 + \widetilde{M}^2 - 1)$$

$$c = (1 - M^2)\lambda^4 - \mathrm{i}\lambda^3\frac{R_M}{A^2}(1 + A^2M^2 - A^2 - \widetilde{M}^2).$$

Presupunerea că ecuaţia ar avea rădăcini reale sau pur imaginare implică anularea discriminantului. Prin calcul direct găsim însă :

$$b^2 - 4c = \lambda^4 M^2 - \lambda^2 \frac{R_M^2}{A^4}(A^2 + \widetilde{M}^2 - 1) + 2\mathrm{i}\lambda^3 \frac{R_M}{A^2} M^2(\widetilde{M}^2 - A^2 - 1)$$

expresie în general diferită de zero. (În cazul $\widetilde{M}^2 = A^2 + 1$ discriminantul se anulează pentru două valori ale lui λ pe care însă le vom exclude în calcul.)

În consecinţă putem scrie rădăcinile ecuaţiei (15) sub forma :

$$\text{(16)}\quad \begin{aligned} s_+ &= -C_1 - \mathrm{i}D_1, & t_+ &= -C_2 - \mathrm{i}D_2 & \text{cu}\quad & C_1 > 0\,;\; C_2 > 0 \\ s_- &= C_1 + \mathrm{i}D_1, & t_- &= C_2 + \mathrm{i}D_2 & & D_{1,2} \neq 0. \end{aligned}$$

Dată fiind structura lui $s_\pm$ şi $t_\pm$, vom aplica condiţia de amortizare la infinit direct pe $\theta_\lambda(x, y)$, rezultînd după însumare următoarea reprezentare pentru soluţia generală a ecuaţiei (12) :

$$\text{(17)}\qquad \theta(x, y\pm) = \int_{-\infty}^{+\infty} [F_{s\pm}(\lambda)\,\mathrm{e}^{s\pm y} + F_{t\pm}(\lambda)\,\mathrm{e}^{t\pm y}]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda,$$

F_{s+}, F_{s-}, F_{t+}, F_{t-} fiind funcţii arbitrare de λ.

Pentru $j(x, y)$ vom căuta întîi o soluţie particulară a ecuaţiei (10′), de aceeaşi formă cu $\theta(x, y)$, iar apoi soluţia generală a ecuaţiei omogene, tot prin unde simple. Suma celor două soluţii ne va da reprezentarea căutată :

$$\text{(18)}\quad j(x, y\pm) = \int_{-\infty}^{+\infty} [G_{r\pm}(\lambda)\,\mathrm{e}^{r\pm y} + G_{s\pm}(\lambda)\,\mathrm{e}^{s\pm y} + G_{t\pm}(\lambda)\,\mathrm{e}^{t\pm y}]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda,$$

unde

$$r_\pm = \mp\sqrt{r^2}$$

$$\text{(19)}\qquad r^2 = \lambda^2 + \mathrm{i}\lambda(1 - A^2)\frac{R_M}{A^2}$$

iar

$$\text{(20)}\qquad G_{s\pm}(\lambda) = \frac{-s_\pm A^2}{L(s)} F_{s\pm}(\lambda)\,;\; G_{t\pm}(\lambda) = \frac{-t_\pm A^2}{L(t)} F_{t\pm}(\lambda),$$

unde prin $L(x)$ s-a notat :

$$L(x) = \frac{A^2}{R_M}(x^2 - \lambda^2) - \mathrm{i}\lambda(1 - A^2).$$

Procedînd în acelaşi mod obţinem următoarea reprezentare pentru soluţia generală a ecuaţiei (10″) :

$$\text{(21)}\quad h_z(x, y\pm) = \int_{-\infty}^{+\infty} [H_{r\pm}(\lambda)\,\mathrm{e}^{r\pm y} + H_{s\pm}(\lambda)\,\mathrm{e}^{s\pm y} + H_{t\pm}(\lambda)\,\mathrm{e}^{t\pm y}]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda$$

unde

$$\text{(22)}\qquad H_{s\pm}(\lambda) = \frac{A^2 \operatorname{tg}\alpha}{L(s)} F_{s\pm}(\lambda)\,;\; H_{t\pm}(\lambda) = \frac{A^2 \operatorname{tg}\alpha}{L(t)} F_{t\pm}(\lambda).$$

$G_{r+}(\lambda)$, $G_{r-}(\lambda)$, $H_{r+}(\lambda)$, $H_{r-}(\lambda)$ fiind deocamdată funcţii arbitrare.

3. DETERMINAREA CÎMPULUI VITEZELOR ŞI A CÎMPULUI MAGNETIC

Relaţia (21) ne dă pe $h_z(x, y\pm)$, iar din (9) se obţine $w(x, y\pm)$. Pentru determinarea lui u şi v vom integra sistemul:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \theta(x, y), \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{A^2} j(x, y). \tag{23}$$

Soluţia generală a sistemului este:

$$u(x, y) = u_p(x, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v(x, y) = v_p(x, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{24}$$

cu

$$\Delta\varphi(x, y) = 0 \tag{25}$$

iar

$$u_p(x, y\pm) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A_{r\pm}(\lambda)\, e^{r_\pm y} + A_{s\pm}(\lambda)\, e^{s_\pm y} + A_{t\pm}(\lambda)\, e^{t_\pm y}]\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda$$
$$v_p(x, y\pm) = \int_{-\infty}^{+\infty} [B_{r\pm}(\lambda)\, e^{r_\pm y} + B_{s\pm}(\lambda)\, e^{s_\pm y} + B_{t\pm}(\lambda)\, e^{t_\pm y}]\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda \tag{26}$$

funcţiile $A(\lambda)$ şi $B(\lambda)$ avînd următoarele expresii:

$$(r^2 - \lambda^2) A_{r\pm} = -\frac{r_\pm}{A^2} G_{r\pm} \qquad (r^2 - \lambda^2) B_{r\pm} = -\frac{i\lambda}{A^2} G_{r\pm}$$
$$(s^2 - \lambda^2) A_{s\pm} = -\frac{s_\pm}{A^2} G_{s\pm} - i\lambda F_{s\pm} \qquad (s^2 - \lambda^2) B_{s\pm} = -\frac{i\lambda}{A^2} G_{s\pm} + s_\pm F_{s\pm} \tag{27}$$
$$(t^2 - \lambda^2) A_{t\pm} = -\frac{t_\pm}{A^2} G_{t\pm} - i\lambda F_{t\pm} \qquad (t^2 - \lambda^2) B_{t\pm} = -\frac{i\lambda}{A^2} G_{t\pm} + t_\pm F_{t\pm}.$$

Analog din integrarea sistemului

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = j \tag{27'}$$

se obţine :

$$h_x = (h_x)_p + \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (28)$$
$$h_y = (h_y)_p + \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

unde

$$\Delta\psi(x, y) = 0 \qquad (29)$$

$$(h_x)_p = \int_{-\infty}^{+\infty} [C_{r\pm}(\lambda)e^{r_\pm y} + C_{s\pm}(\lambda)e^{s_\pm y} + C_{t\pm}(\lambda)e^{t_\pm y}]\,e^{-i\lambda x}d\lambda \qquad (30)$$
$$(h_y)_p = \int_{-\infty}^{+\infty} [D_{r\pm}(\lambda)e^{r_\pm y} + D_{s\pm}(\lambda)e^{s_\pm y} + D_{t\pm}(\lambda)e^{t_\pm y}]\,e^{-i\lambda x}d\lambda,$$

funcţiile $C(\lambda)$ şi $D(\lambda)$ avînd următoarele expresii :

$$(r^2-\lambda^2)\,C_{r\pm}(\lambda) = -\,r_\pm G_{r\pm}(\lambda) \qquad (r^2-\lambda^2)\,D_{r\pm}(\lambda) = -\,i\lambda G_{r\pm}(\lambda)$$
$$(s^2-\lambda^2)\,C_{s\pm}(\lambda) = -\,s_\pm G_{s\pm}(\lambda) \qquad (s^2-\lambda^2)\,D_{s\pm}(\lambda) = -\,i\lambda G_{s\pm}(\lambda) \qquad (31)$$
$$(t^2-\lambda^2)\,C_{t\pm}(\lambda) = -\,t_\pm G_{t\pm}(\lambda) \qquad (t^2-\lambda^2)\,D_{t\pm}(\lambda) = -\,i\lambda G_{t\pm}(\lambda).$$

Introducînd expresiile (24) şi (28) în ecuaţia (8), partea rotaţională se reduce astfel că rezultă :

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}. \qquad (32)$$

La fel din ecuaţia (7) se obţine :

$$M^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[i\lambda\,\mathrm{tg}\,\alpha H_{r\pm}(\lambda) - \frac{i\lambda}{r^2-\lambda^2}G_{r\pm}(\lambda)\right]e^{-i\lambda x + r_\pm y}d\lambda. \qquad (33)$$

De aici, pentru ca φ să fie armonică, trebuie ca integrantul să fie identic nul, rezultînd :

$$\mathrm{tg}\,\alpha H_{r\pm}(\lambda) = \frac{r_\pm}{r^2-\lambda^2}G_{r\pm}(\lambda) \qquad (34)$$

relaţie ce leagă pe $H_{r\pm}$ de $G_{r\pm}$.

Totodată $\varphi(x, y) \equiv 0$, iar din relaţia (32) avem şi $\psi(x, y) \equiv 0$ astfel încît, cîmpul magnetic şi cîmpul vitezelor au numai parte rotaţională.

În definitiv problema s-a redus la determinarea funcţiilor necunoscute $F_{s\pm}(\lambda)$, $F_{t\pm}(\lambda)$ şi $G_{r\pm}(\lambda)$.

4. CONDIŢII LA LIMITĂ

Pentru determinarea celor şase funcţii necunoscute dispunem de următoarele condiţii la limită :

Condiţia la limită cinematică :

$$v(x, 0) = Y'(x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1 \tag{35.1}$$

Continuitatea componentei normale pe profil a cîmpului magnetic

$$h_y(x, 0+) - h_y(x, 0-) = 0. \tag{35.2}$$

Lipsa curenţilor de suprafaţă :

$$h_x(x, 0+) - h_x(x, 0-) = 0 \tag{35.3}$$

$$h_z(x, 0+) - h_z(x, 0-) = 0. \tag{35.4}$$

Reprezentările (26), (30) şi (21) pentru funcţiile $u(x, y)$, $v(x, y)$, $h_x(x,y)$, $h_y(x,y)$ şi $h_z(x, y)$ pot fi prelungite prin continuitate pe axa Ox astfel că le vom putea introduce în condiţiile la limită (35).

Acestea iau următoarea formă :

$$\begin{aligned}&\frac{-\mathrm{i}\lambda}{A^2}\frac{1}{r^2-\lambda^2}G_{r+}(\lambda)+\frac{s_+}{s^2-\lambda^2}\left(1+\frac{\mathrm{i}\lambda}{L(s)}\right)F_{s+}(\lambda)+\\&+\frac{t_+}{t^2-\lambda^2}\left(1+\frac{\mathrm{i}\lambda}{L(t)}\right)F_{t+}(\lambda)=\mathcal{F}(\lambda)\end{aligned} \tag{36.1}$$

$$\begin{aligned}&\frac{-\mathrm{i}\lambda}{A^2}\frac{1}{r^2-\lambda^2}[G_{r+}-G_{r-}]+\frac{s_+}{s^2-\lambda^2}\left(1+\frac{\mathrm{i}\lambda}{L(s)}\right)[F_{s+}+F_{s-}]+\\&+\frac{t_+}{t^2-\lambda^2}\left(1+\frac{\mathrm{i}\lambda}{L(t)}\right)[F_{t+}+F_{t-}]=0\end{aligned} \tag{36.1'}$$

$$\frac{-\mathrm{i}\lambda}{r^2-\lambda^2}[G_{r+}-G_{-}]+\frac{\mathrm{i}\lambda}{s^2-\lambda^2}[F_{s+}+F_{s-}]+\frac{\mathrm{i}\lambda}{t^2-\lambda^2}[F_{t+}+F_{t-}]=0 \tag{36.2}$$

$$\begin{aligned}&\frac{-r_+}{r^2-\lambda^2}[G_{r+}+G_{r-}]+\frac{1}{L(s)}\frac{s_+^2A^2}{s^2-\lambda^2}[F_{s+}-F_{s-}]+\\&+\frac{1}{L(t)}\cdot\frac{t_+^2A^2}{t^2-\lambda^2}[F_{t+}-F_{t-}]=0\end{aligned} \tag{36.3}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{r_+}{r^2-\lambda^2}[G_{r+}+G_{r-}]+\frac{A^2\operatorname{tg}\alpha}{L(s)}[F_{s+}-F_{s-}]+\\&+\frac{A^2\operatorname{tg}^2\alpha}{L(t)}[F_{t+}-F_{t-}]=0\end{aligned} \tag{36.4}$$

$\mathcal{F}(\lambda)$ este soluţia următoarei ecuaţii integrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\lambda)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda = Y'(x) \quad \text{ptr. } -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{37}$$

Această ecuaţie este rezolvată în [4] admiţînd soluţie unică în anumite condiţii de regularitate pentru funcţia $y = Y(x)$.

(36.1) — (36.4) constituie un sistem de cinci ecuaţii liniare cu şase necunoscute astfel că pentru rezolvarea completă a problemei sînt necesare date suplimentare.

Admiţînd, cu Thibault, că :

$$\frac{\partial h_z}{\partial y}(x, 0+) = \frac{\partial h_z}{\partial y}(x, 0-) \tag{35.5}$$

se mai obţine următoarea ecuaţie :

$$\frac{r^2}{\mathrm{tg}^2\alpha}\,\frac{G_{r+} - G_{r-}}{r^2 - \lambda^2} + \frac{s + A^2}{L(s)}\,[F_{s+} + F_{s-}] + \frac{t + A^2}{L(t)}\,[F_{t+} + F_{t-}] = 0. \tag{36.5}$$

Din ecuaţiile (36.1′), (36.2) şi (36.5) rezultă : $G_{r+} = G_{r-i}F_{s+} = -F_{s-i}F_{t+} = -$ $-F_{t-}$ iar celelalte trei ecuaţii ne vor determina şi restul funcţiilor, astfel că în acest caz problema este complet rezolvată.

Se observă că problema se poate rezolva analog şi în cazul cînd avem curenţi de suprafaţă pe profil.

Primită la redacţie la 27 februarie 1967

Facultatea de matematică şi mecanică a Universităţii
din Bucureşti, Str. Academiei nr. 14
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej”
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Sears, Resler, J. Fluid. Mech., **7**, *3*, 449 (1960).
2. J. E. Mc. Cune, E. L. Resler Jr., J. Aerospace Sc., **27**, p. 493—503 (1960).
3. Lazăr Dragoş, A. I. A. A. Journal, 1967.
4. Lazăr Dragoş, Atti dei Lincei, 1967.
5. Roger Thibault, C. R. Paris, mai 1965.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL REPARTIȚIEI LIMITĂ A PROCESELOR STOCASTICE CU TIMP DISCRET ALEATOR

DE

SILVIU GUIAȘU

În această lucrare se studiază repartiția limită a unui proces stocastic oarecare cu timp discret aleator, aplicîndu-se apoi rezultatele obținute pentru anumite clase speciale de procese cum sînt procesul sumelor normate de variabile aleatoare independente, procesele stocastice amestecate tare, procesele ergodice cu densitate și procesele Markov omogene.

NOTAȚII

În cursul lucrării vom nota cu :
$\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ — un cîmp de evenimente probabilizat, format din mulțimea evenimentelor $\mathcal{K}$, părți ale mulțimii de bază Ω, cărora li se atașează probabilitatea P ;
$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P)$ — mulțimea variabilelor aleatoare de pătrat integrabil definite pe cîmpul de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$;
$(S\,K)$ — familia mulțimilor de variabile aleatoare independente în sensul lui Steinhaus-kac ;
$\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ — momentele de primul și de-al doilea ordin ;
$P_B(A)$ — probabilitatea evenimentului A $(A \in \mathcal{K})$ condiționată de evenimentul B ; $B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$;
N — mulțimea numerelor naturale ;
R — mulțimea numerelor reale ;
C_A — complementara față de mulțimea A ;
$[q]$ — partea întreagă a numărului real q ;
$\rightarrow$ — convergența obișnuită ;
$\xrightarrow{P}$ — convergența în probabilitate ;
$\max\limits_{i \in I}{}_i$ — maximul după i, cînd i parcurge mulțimea I ;
$\mathcal{B}$ — familia mulțimilor boreliene de pe dreapta reală ;

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 7, P. 971–1018, BUCUREȘTI, 1967

$\mathfrak{P}(E)$ — mulţimea părţilor mulţimii E;
$<x,y>$ — produsul scalar al elementelor x şi y;
$\|x\|$ — norma unui element x dintr-un spaţiu normat.

§ 1. INTRODUCERE

Lucrarea îşi propune să studieze repartiţia limită a unui proces stocastic cu timp discret aleator, adică repartiţia limită a unui proces stocastic de forma

$$\{Y_{N_r}, 1 \leqslant r < +\infty\},$$

unde $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ este un şir de variabile aleatoare definite pe un cîmp de evenimente probabilizat $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ iar $\{N_r, 1 \leqslant r < +\infty\}$ este un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive definite tot pe $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$. Asupra modului în care timpul aleator N_r se scurge la infinit, se face următoarea presupunere: dacă $(n_r)_{1 \leqslant r < +\infty}$ este un şir crescător de întregi pozitivi, care tinde la infinit împreună cu r, se cere ca

$$\frac{N_r}{n_r} \xrightarrow{P} \lambda (r \to +\infty), \tag{1.1}$$

unde λ este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare, semnul grafic $\xrightarrow{P}$ reprezentînd convergenţa în probabilitate. Problema care se pune este următoarea: în ce caz repartiţia limită a procesului stocastic $\{Y_{N_r}, 1 \leqslant r < +\infty\}$ pentru $r \to +\infty$ este aceeaşi cu repartiţia limită a procesului $\{Y_r, 1 \leqslant r < +\infty\}$ pentru $r \to +\infty$ cu alte cuvinte în ce caz repartiţia limită a unui proces stocastic rămîne invariantă la înlocuirea timpului obişnuit, care se scurge monoton către infinit, cu timpul aleator.

Studiul repartiţiei limită a proceselor stocastice cu timp aleator îşi găseşte aplicaţii în mersul la întîmplare, în analiza secvenţială şi în metoda Monte-Carlo. În afară de aceasta, cum timpul măsurat de un număr mare de ceasornice este de fapt un timp aleator, aceasta atît din punct de vedere al imperfecţiunilor de construcţie, cît şi din punct de vedere al consecinţelor relativiste legate de starea de mişcare sau repaus în care se găsesc ceasornicele respective, prezintă importanţă principială cunoaşterea condiţiilor în care observaţiile şi măsurătorile asupra unui anumit proces, efectuate de către un singur observator coincid cu observaţiile şi măsurătorile efectuate de către un număr mare de observatori asupra procesului respectiv.

Din punct de vedere istoric, prima teoremă generală de conservare a repartiţiei limită a unui proces stocastic, cînd se trece la timpul aleator, a fost dată de către F. J. Anscombe [2] în anul 1952, pentru cazul în care, în condiţia (1), variabila aleatoare λ se reduce la o constantă: $\lambda \equiv 1$. De fapt în 1948 H. Robbins [69], în 1951 S. Takahashi [75], în 1952 R.F.Tate [76], iar mai tîrziu în 1955 M. Loève [36] şi R.L. Dobruşin [13] au studiat repartiţia limită a sumelor aleatoare de variabile aleatoare independente:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{N_r},$$

unde $\{N_r, 1 \leqslant r < +\infty\}$ este un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive, care pentru $r \to +\infty$ converge către $+\infty$, însă în toate aceste cercetări s-a presupus că variabile aleatoare N_r este, pentru orice r, independentă de variabilele aleatoare $x_j (1 \leqslant j < +\infty)$. În anul 1957, A. Rényi [54] a redemonstrat teorema lui F. J. Anscombe în cazul particular al procesului stocastic format din sume normate de variabile aleatoare independente, identic repartizate, caz în care repartiţia limită se conservă cînd se trece la timp aleator, fără impunerea de condiţii suplimentare asupra procesului, aplicînd această teoremă pentru obţinerea mai rapidă a unui rezultat a lui L. Takács [74] care dăduse un exemplu de proces stocastic în care timpul aleator $N_r (1 \leqslant r < +\infty)$ depindea esenţial de variabilele aleatoare $x_j (1 \leqslant j < +\infty)$. De fapt A. Rényi a iniţiat extinderea condiţiei (1.1) de la cazul $\lambda \equiv 1$, considerat de către F. J. Anscombe, la cazul $\lambda \equiv c$ (c constantă pozitivă) în lucrarea [54] şi la cazul cînd λ este o variabilă aleatoare pozitivă cu valori discrete, în lucrarea [56], toate acestea tot în cazul particular al sumelor normale de variabile aleatoare independente identic repartizate. În anul 1961, J. Mogyoródi [41] a arătat că în cazul sumelor normate de variabile aleatoare independente, cu repartiţie oarecare, condiţia lui F. J. Anscombe este nu numai suficientă, dar şi necesară, dîndu-i şi o expresie echivalentă mai simplă. În 1963, S. Guiaşu [18], [21] a dat o generalizare a teoremei lui F.J. Anscombe în cazul în care în (1) λ este o variabilă aleatoare pozitivă cu valori discrete, obţinînd condiţii care pentru $\lambda \equiv 1$ se reduc la condiţiile clasice ale lui F. J. Anscombe şi care sînt satisfăcute de procesul sumelor normate de variabile aleatoare independente, identic repartizate, reobţinîndu-se în acest caz particular rezultatul lui A. Rényi [56]. În 1960 A. Rényi [56] a anunţat menţinerea teoremei stabilită de dînsul asupra repartiţiei limită a sumelor normate de variabile aleatoare independente identic repartizate, şi în cazul în care în condiţia (1) λ este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare. Demonstraţia acestei afirmaţii a fost dată în 1962 de către J. Mogyoródi [42] şi independent, în 1963, de către J. R. Blum, D. L. Hanson şi J. I. Rosenblatt [9]. În anul 1964, H. Wittenberg [78] studiază cazurile în care distanţa în sensul lui Kolmogorov-Smirnov, dintre sumele aleatoare şi sumele obişnuite de variabile aleatoare independente, identic repartizate, converge către o anumită repartiţie. În acelaşi an, O. Barndorff-Nielsen [3] demonstrează că repartiţia limită a procesului $\{Y_r, 1 \leqslant r < +\infty\}$ pentru care

$$Y_r = \max(x_1, x_2, \ldots, x_r) \qquad (1 \leqslant r < +\infty),$$

unde $\{x_j, 1 \leqslant j < +\infty\}$ este un şir de variabile aleatoare independente identic repartizate, este invariantă dacă se introduce în locul lui r timpul aleator, $N_r (1 \leqslant r < +\infty)$, satisfăcînd condiţia (1). Reîntorcîndu-se la problematica generală a lui F. J. Anscombe, de a se cerceta în ce condiţii repartiţia limită a unui proces stocastic oarecare este invariantă prin trecerea la timpul aleator, în anul 1964 S. Guiaşu, [22], [25] obţine o generalizare a teoremei lui F. J. Anscombe, în cazul în care în condiţia (1) λ este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare. Se redemonstrează ca un caz particular teorema lui A. Rényi amintită mai sus, se obţine o clasă de procese stocastice, procesele de amestecare tare, tari Cauchy, a căror repartiţie limită este invariantă prin trecerea la timp aleator şi se indică condiţia care este suficient să fie impusă dispersiilor pentru ca repartiţia limită a sumelor normate de variabile independente, neidentic repartizate, să fie de asemenea invariantă la trecerea la timpul aleator. În 1964 şi 1965, într-un ciclu de şase lucrări, W. Richter [62] [65] [67] [68] continuă aceste cercetări insistînd asupra unor clase de procese stocastice pentru care condiţiile de trecere, în studiul repartiţiei limită, la timpul aleator, sînt simple. În aceste lucrări se realizează de asemenea o generalizare în sensul că se lucrează cu variabile aleatoare Y_n, $(1 \leqslant n < +\infty)$, cu valori într-un spaţiu metric, în general şi într-un spaţiu Hilbert în special. Într-o altă direcţie de generalizare, în 1965, H. Teicher [77], extinde teorema lui A. Rényi [56] şi cîteva rezultate ale lui H. Wittenberg [78] la cazul sumelor aleatoare de vectori aleatori. Tot în 1965 J. Mogyoródi [43] demonstrează legea numerelor mari pentru suma unui număr aleator de variabile aleatoare independente. Informaţii ample asupra domeniilor în care se aplică trecerea la timpul aleator în studiul repartiţiei limită a proceselor stocastice sînt date de către W. Feller [15] şi în mod special de către D. Maravall Casesnoves [37] — [39]. Am lăsat intenţionat la sfîrşit tratatul [48] din anul 1964 al acad. O. Onicescu în care şirurile aleatoare de variabile aleatoare sînt încadrate în schema generală a şirurilor aleatoare în timp, cărora li se ataşează o funcţie selectivă aleatoare.

În cadrul lucrării după un prim paragraf care conţine expunerea problemei şi un scurt istoric pe care de altfel le-am reprodus mai sus, în § 2 se dă teorema lui F. J. Anscombe generalizată, în cazul în care în condiţia (1) λ este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare. Această teoremă este folosită mai departe, în cadrul § 4, la studiul repartiţiei limită a sumelor aleatoare de variabile aleatoare independente identic şi respectiv neidentic repartizate. În cadrul § 5 se studiază invarianţa repartiţiei limită, la trecerea la timpul aleator pentru cîteva clase de procese stocastice, insistîndu-se asupra acelor procese pentru care condiţiile ce asigură această invarianţă sînt simple. Paragrafele 3 şi 6 conţin studiul şirurilor ergodice şi respectiv stabil ergodice de evenimente, care constituie o uşoară generalizare a şirurilor amestecate tare (strongly mixing) şi respectiv stabile de evenimente în sensul lui A. Rényi [55], [57] generalizare justificată prin teorema cu care se încheie lucrarea, privitoare la o clasă largă de procese Markov omogene pentru care repartiţia medie limită rămîne invariantă la orice translaţie aleatoare a timpului.

Menţionăm în încheierea acestui paragraf că la cea de-a patra Conferinţă de teoria informaţiei, funcţii de decizie satatistică şi procese aleatoare care a avut loc la Praga în toamna anului 1965, au fost prezentate trei comunicări [25], [45], [68] consacrate problemei de care se ocupă lucrarea, dintre care, două au avut chiar acelaşi titlu.

În cele ce urmează vom prezenta rezultatele principale cuprinse în lucrare.

§ 2. TEOREMA LUI F. J. ANSCOMBE GENERALIZATĂ

În problema studiului repartiţiei limită pentru procesele stocastice cu timp aleator, lucrarea lui F.J. Anscombe [2], din anul 1952, este importantă din două puncte de vedere : a) pentru prima dată s-a renunţat la ipoteza de independenţă a timpului aleator de procesul stocastic a cărui repartiţie limită se studiază; b) s-au căutat condiţii care să asigure invarianţa repartiţiei limită atunci cînd se trece la timp aleator, pentru procese stocastice oarecare cu timp discret. Influenţa lucrării lui F. J. Anscombe s-a manifestat în special în ceea ce priveşte punctul a), din 1952 şi pînă în prezent în toate cercetările presupunîndu-se că timpul aleator poate depinde de procesul stocastic a cărui repartiţie limită se studiază. În ceea ce priveşte punctul b), absolut toate cercetările ulterioare lucrării lui F. J. Anscombe, ca şi cele care au precedat-o de altfel, s-au ocupat, pînă în 1963, exclusiv de studiul repartiţiei limită a sumelor aleatoare sau a valorilor extreme ale variabilelor aleatoare independente identic sau neidentic repartizate ([69], [75], [76], [36], [13], [54], [74], [59], [56], [41], [42], [9], [4], [5]). Este drept însă că în cursul acestor cercetări s-au realizat paşi importanţi înainte în slăbirea condiţiei de „scurgere către infinit" a timpului aleator $\{N_r, \ 1 \leqslant r < +\infty\}$, ajungîndu-se de la condiţia iniţială din teorema lui F. J. Anscombe:

$$\frac{N_r}{n_r} \xrightarrow{P} 1, \qquad (r \to +\infty) \tag{2.1}$$

la condiţia lui A. Rényi

$$\frac{N_r}{n_r} \xrightarrow{P} \lambda \qquad (r \to +\infty), \tag{2.2}$$

unde $(n_r)_{1 \leqslant r < +\infty}$ este un şir de întregi pozitivi care tinde la infinit odată cu r, iar λ o variabilă aleatoare pozitivă oarecare; aceasta după ce se trecuse în prealabil prin cazurile intermediare $\lambda \equiv c$ (c constantă pozitivă) şi λ variabilă aleatoare pozitivă discretă.

În anul 1963, autorul ([18], [19], [21]) a reluat problematica lui F. J. Anscombe de a studia condiţiile generale pe care trebuie să le satisfacă un proces stocastic oarecare cu timp discret, pentru ca repartiţia limită a procesului să rămînă invariantă prin trecerea la un timp aleator, în general dependent de procesul respectiv, considerînd însă în acelaşi timp, în ceea ce priveşte scurgerea timpului aleator către infinit, în locul condiţiei (2.1) a lui F. J. Anscombe, condiţia (2.2), cu λ variabilă aleatoare pozitivă discretă. Ulterior ([22], [25]) s-a considerat condiţia (2.2) cu λ variabilă aleatoare pozitivă oarecare. Scopul unei asemenea cercetări este acela de a pune în evidenţă ceea ce este general în tipurile de raţionament aplicate în studiul particular al repartiţiei limită pentru sumele aleatoare de variabile aleatoare independente pentru a se putea trece la studiul invarianţei repartiţiei limită, prin trecerea la timpul aleator, pentru o clasă cît mai largă de procese stocastice. Condiţiile teoremei lui F. J. Anscombe generalizate (care de altfel ar fi trebuit să fie numită lemă, tocmai datorită caracterului de „bază de lucru" al condiţiilor ei) sînt complicate, însă ele asigură invarianţa repartiţiei limită prin trecerea la timpul aleator, fără a se face în prealabil nici o ipoteză asupra naturii procesului stocastic. Ulterior se vor indica o serie de clase de procese stocastice pentru care aceste condiţii de invarianţă a repartiţiei limită prin trecerea la timpul aleator sînt satisfăcute sau sînt simplificate.

În lucrările consacrate repartiţiei limită a sumelor aleatoare de variabile aleatoare independente, în cazul în care în condiţia (2.2) λ este o variabilă aleatoare pozitivă cu valori discrete, nucleul demonstraţiilor l-a constituit următoarea afirmaţie foarte simplă : dacă $\{x_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ este un şir de variabile aleatoare avînd o repartiţie limită, iar $\{y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ un şir de variabile aleatoare astfel încît

$$y_n \xrightarrow{P} 0 \qquad (n \to +\infty),$$

atunci şirul $\{x_n + y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ are aceeaşi repartiţie limită ca şi şirul $\{x_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$. Cea mai fină rafinare, cunoscută pînă în prezent, a acestei afirmaţii, a fost obţinută de către J. R. Blum, D. L. Hanson şi J. I. Rosenblatt [9] şi a fost aplicată de ei în studiul repartiţiei limită a sumelor aleatoare de variabile aleatoare independente identic repartizate, în cazul în care, în condiţia (2.2), λ este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare. Ea se enunţă în modul următor :

LEMA 1. *Fie* $\{W_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$, $\{x_{m,n}, 1 \leqslant m < +\infty, 1 \leqslant \leqslant n < +\infty\}$, $\{y^{(j)}_{m.n}, 1 \leqslant m < +\infty, 1 \leqslant n < +\infty\}$, $(1 \leqslant j \leqslant k)$, $\{z^{(j)}_{m.n}, 1 \leqslant m < +\infty, 1 \leqslant n < +\infty\}$, $(1 \leqslant j \leqslant k)$ *şiruri simple şi duble de variabile aleatoare. Presupunem*

$$W_n = x_{m,n} + \sum_{j=1}^{k} y^{(j)}_{m.n} z^{(j)}_{m.n}$$

(A) *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *şi* $1 \leqslant j \leqslant k$

$$\lim_{m \to +\infty} \limsup_{n} P(|y^{(j)}_{m.n}| > \varepsilon) = 0;$$

(B) *pentru* $1 \leqslant j \leqslant k$

$$\lim_{M \to +\infty} \limsup_{m} \limsup_{n} P(\{|z^{(j)}_{m.n}| > M\}) = 0;$$

(C) *funcţiile de repartiţie ale şirului* $\{x_{m,n}, 1 \leqslant m < +\infty, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *converg către funcţia de repartiţie* $\mathfrak{F}$, *pentru fiecare* m *fix.*

Atunci, funcţiile de repartiţie ataşate şirului $\{W_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *converg către* $\mathfrak{F}$.

Demonstraţie [9]. Să observăm în primul rînd că dacă x şi y sînt variabile aleatoare şi $b \geqslant 0$, atunci

$$\begin{aligned} &P(\{x + y \leqslant a - b\}) - P(\{|y| > b\}) \leqslant P(\{x \leqslant a\}) \leqslant \\ (2.3) \qquad &\leqslant P(\{x + y \leqslant a + b\}) + P(\{|y| > b\}). \end{aligned}$$

Fie acum α un punct de continuitate arbitrar al funcţiei de repartiţie $\mathfrak{F}$ şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Trebuie să arătăm că pentru n suficient de mare avem

$$(2.4) \qquad |P(\{W_n \leqslant \alpha\}) - \mathfrak{F}(\alpha)| < \varepsilon$$

Fie $\qquad x = W_n, \qquad y = -\sum_{j=1}^{k} y^{(j)}_{m.n} z^{(j)}_{m.n}$

şi $a = \alpha$, $b = \delta$. Aplicînd (2.3), obţinem pentru $1 \leqslant m < \infty$, $1 \leqslant n < \infty$, $\delta > 0$ scăzînd peste tot pe $\mathcal{F}(\alpha)$:

$$P(\{x_{m,n} \leqslant \alpha - \delta\}) - \mathcal{F}(\alpha) - P\left(\left\{\left|\sum_{j=1}^{k} y_{m,n}^{(j)} z_{m,n}^{(j)}\right| > \delta\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant P(\{W_n \leqslant \alpha\}) - \mathcal{F}(\alpha) \leqslant P(\{x_{m,n} \leqslant \alpha + \delta\}) - \mathcal{F}(\alpha) +$$

$$+ P\left(\left\{\left|\sum_{j=1}^{k} y_{m,n}^{(j)} z_{m,n}^{(j)}\right| > \delta\right\}\right).$$

Atunci

$$|P(\{W_n \leqslant \alpha\}) - \mathcal{F}(\alpha)| \leqslant \max_{i=\pm 1} |P(\{x_{m,n} \leqslant \alpha + \mathrm{i}\,\delta\}) - \mathcal{F}(\alpha)| +$$

$$+ P\left(\left\{\left|\sum_{j=1}^{k} y_{m,n}^{(j)} z_{m,n}^{(j)}\right| > \delta\right\}\right) \leqslant \max_{i=\pm 1} |\mathcal{F}(\alpha + \mathrm{i}\delta) - \mathcal{F}(\alpha)| +$$

$$+ \max_{i=\pm 1} |P(\{x_{m,n} \leqslant \alpha + \mathrm{i}\,\delta\}) - \mathcal{F}(\alpha + \mathrm{i}\,\delta)| + \tag{2.5}$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} P(\{|z_{m,n}^{(j)}| > M\}) + \sum_{j=1}^{k} P\left(\left\{|y_{m,n}^{(j)}| > \frac{\delta}{kM}\right\}\right).$$

Luăm $\delta > 0$ astfel încît

a) $\alpha + \delta$ şi $\alpha - \delta$ sînt puncte de continuitate pentru $\mathcal{F}$,

b) $\max\limits_{i=\pm 1} |\mathcal{F}(\alpha) - \mathcal{F}(\alpha + \mathrm{i}\,\delta)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Folosind condiţia (B) luăm pe M suficient de mare încît pentru $j = 1,2,\dots,k$,

c) $\lim\limits_{m} \sup \lim\limits_{n} \sup P(\{|z_{m,n}^{(j)}| > M\}) < \dfrac{\varepsilon}{4k}$.

Folosind c) şi (A) alegem pe m suficient de mare încît pentru $j = 1, 2, \dots, k$, să avem

d) $\lim\limits_{n} \sup P(\{|z_{m,n}^{(j)}| > M\}) < \dfrac{\varepsilon}{4k}$

e) $\lim\limits_{n} \sup P\left(\left\{\left|y_{m,n}^{(j)}\right| > \dfrac{\delta}{kM}\right\}\right) < \dfrac{\varepsilon}{4k}$

Folosind acum a), (c), d), e), fixăm pe n_0 astfel încît pentru toţi $n \geqslant n_0$ să avem

f) $\max\limits_{i=\pm 1} |P(\{x_{m,n} \leqslant \alpha + \mathrm{i}\,\delta\}) - \mathcal{F}(\alpha + \mathrm{i}\,\delta)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$

g) $P(\{|z_{m,n}^{(j)}| > M\}) < \dfrac{\varepsilon}{4k}$ $\quad (j = 1,2,\dots,k)$

h) $P\left(\left\{\left|y_{m,n}^{(j)}\right| > \dfrac{\delta}{kM}\right\}\right) < \dfrac{\varepsilon}{4k}$ $\quad (j = 1,2,\dots,k)$.

Înlocuind b), f), g), h), în (2.5) avem pentru toţi $n \geqslant n_0$ inegalitatea (2.4). q.e.d.

Fie acum λ o variabilă aleatoare pozitivă oarecare faţă de cîmpul de evenimente probabilizat $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$. Fie de asemenea $\{\nu_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$

un şir de variabile aleatoare faţă de $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$, fiecare avînd o mulţime cel mult numărabilă de valori pozitive:

$$\nu_m : 0 < a_{1,m} < a_{2,m} < \ldots < a_{k,m} < a_{k+1,m} < \ldots (1 \leqslant m < +\infty)$$

astfel ca

$$|\lambda - \nu_m| < c_m \qquad (1 \leqslant m < +\infty),$$

unde $(c_m)_{1 \leqslant m < +\infty}$ este un şir de numere pozitive, avînd proprietatea că $c_m m \searrow 0$ cînd $m \to +\infty$ şi deci $c_m \searrow 0$ cînd $m \to +\infty$.
Să considerăm evenimentele

$$A_{k,m} = \{\nu_m = a_{k,m}\}, \qquad (1 \leqslant k < +\infty, 1 \leqslant m < +\infty).$$

Avem

$$A_{k',m} \cap A_{k'',m} = \emptyset \qquad (k' \neq k'')$$

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{k,m} = \Omega \qquad (1 \leqslant m < +\infty).$$

Evident, oricare ar fi variabila aleatoare $\lambda > 0$ se poate întotdeauna construi un şir de variabile aleatoare $\{\nu_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ cu proprietăţile de mai sus. Astfel, luînd

$$A_{k,m} = \left\{\frac{k-1}{2^m} \leqslant \lambda < \frac{k}{2^m}\right\} \qquad (1 \leqslant k < +\infty, 1 \leqslant m < +\infty)$$

se poate lua

$$\nu_m = \nu_m(\omega) = \frac{k}{2^m} \quad \text{dacă} \quad \omega \in A_{k,m}$$

în care caz

$$0 < \nu_m - \lambda \leqslant \frac{1}{2^m},$$

unde $\frac{1}{2^m} m \searrow 0$ cînd $m \to +\infty$. Aceste precizări o dată făcute se demonstrează următoarea teoremă:

Teorema 1. *Fie* $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare faţă de cîmpul de evenimente probabilizat* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$. *Fie* $\{N_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive faţă de* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$. *Fie* $(w_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ *un şir de numere pozitive,* $(n_r)_{1 \leqslant r < +\infty}$ *un şir crescător de întregi pozitivi tinzînd la infinit împreună cu* r, θ *un număr real şi* $\mathcal{F}(a)$ *o funcţie de repartiţie. Să presupunem că avem satisfăcute condiţiile:*

$$(c_1) \qquad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow{P} \lambda \qquad (r \to +\infty).$$

(c_2) *În toate punctele de continuitate ale lui* $\mathcal{F}(a)$ *avem*

$$\lim_{n \to +\infty} P_{A_{k,m}}(\{Y_n - \theta < a w_n\}) = \mathcal{F}(a)$$

pentru toate valorile lui k $(1 \leqslant k < +\infty)$ *şi ale lui* m $(1 \leqslant m < +\infty)$ pentru care $P(A_{k,m}) > 0$.

(c$_3$) *Pentru orice* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m\to+\infty} \limsup_{n} P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (\max_{\left|\frac{i}{n} - a_{k,m}\right| < 2c_m.} \mid Y_i - Y_{[na_{k,m}]} \mid > \varepsilon w_{[na_{k,m}]}\} \cap A_{k,m})\right) = 0$$

(c$_4$) *Pentru orice* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m\to+\infty} \limsup_{r} P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n_r\nu_m]}}{w_{[n_r\lambda]}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Atunci

$$\lim_{r\to+\infty} P(\{Y_{N_r} - \theta < a w_{[n_r\lambda]}\}) = \mathfrak{F}(a) \tag{2.6}$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$.

Dacă în loc de condiția (c_4) *avem* (c$'_4$) *pentru orice* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m\to+\infty} \limsup_{r} P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n_r\nu_m]}}{w_{N_r}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0,$$

atunci, în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$, *avem*

$$\lim_{r\to+\infty} P(\{Y_{N_r} - \theta < a\, w_{N_r}\}) = \mathfrak{F}(a). \tag{2.7}$$

Demonstrație [23]. a) Să notăm pentru $1 \leqslant r < +\infty$, $1 \leqslant m < +\infty$,

$$x_{m,r} = z^{(2)}_{m,r} = \frac{1}{w_{[n_r\nu_m]}} (Y_{[n_r\nu_m]} - \theta);$$

$$y^{(1)}_{m,r} = \frac{1}{w_{[n_r\nu_m]}} (Y_{N_r} - Y_{[n_r\nu_m]});$$

$$y^{(2)}_{m,r} = \frac{w_{[n_r\nu_m]}}{w_{[n_r\lambda]}} - 1; \qquad z^{(1)}_{m,r} = \frac{w_{[n_r\nu_m]}}{w_{[n_r\lambda]}}$$

$$W_r = \frac{1}{w_{[n_r\lambda]}} (Y_{N_r} - \theta). \tag{2.8}$$

Avem evident descompunerea

$$W_r = x_{m,r} + y^{(1)}_{m,r} z^{(1)}_{m,r} + y^{(2)}_{m,r} z^{(2)}_{m,r}, \qquad (1 \leqslant r < +\infty, 1 \leqslant m < +\infty). \tag{2.9}$$

Să arătăm că în condițiile teoremei sînt satisfăcute ipotezele lemei precedente.

b) Pentru orice m și k, ($1 \leqslant m < +\infty$, $1 \leqslant k < +\infty$), avem $([n_r\, a_{k,m}])_{1\leqslant r<\infty} \subset N$.

Din condiția (c$_2$) rezultă

$$\lim_{r\to\infty} P_{A_{k,m}} (\{Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta < a\, w_{[n_r a_{k,m}]}\}) = \mathfrak{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$, pentru toate valorile lui k

şi m, $(1 \leqslant k < +\infty,\ 1 \leqslant m < +\infty)$, pentru care $P(A_{k,m}) > 0$. Pentru orice m avem

$$\lim_{r\to+\infty} P(\{x_{m,r} < a\}) = \lim_{r\to+\infty} P(\{Y_{[n_r\nu_m]} - \theta < a\, w_{[n_r\nu_m]}\}) =$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{Y_{[n_r\nu_m]} - \theta < a\, w_{[n_r\nu_m]}\} \cap A_{k,m}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{r\to+\infty} P_{A_{k,m}}(\{Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta < a\, w_{[n_r a_{k,m}]}\}) P(A_{k,m})^{1)} = \mathfrak{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$.

c) $\mathfrak{F}(a)$ fiind o funcţie de repartiţie, avem

$$\lim_{a\to+\infty} \mathfrak{F}(a) = 1, \qquad \lim_{a\to-\infty} \mathfrak{F}(a) = 0.$$

Rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $M_0' = M_0'(\varepsilon)$ şi $M_0'' = M_0''(\varepsilon) > 0$ puncte de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$, astfel ca

$$1 - \mathfrak{F}(M_0') < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \mathfrak{F}(M_0'') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie

$$M_0 = M_0(\varepsilon) = \max\,(|M_0'(\varepsilon)|,\ M_0''(\varepsilon)).$$

Pentru orice $M > M_0$ avem

$$\limsup_r P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{|Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta|}{w_{[n_r a_{k,m}]}} > M\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \liminf_r P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta}{w_{[n_r a_{k,m}]}} \leqslant M\right\}\right) +$$

$$+ \limsup_r P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta}{w_{[n_r a_{k,m}]}} < -M\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \liminf_r P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta}{w_{[n_r a_{k,m}]}} < M_0'\right\}\right) +$$

$$+ \limsup_r P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta}{w_{[n_r a_{k,m}]}} < M_0''\right\}\right) = 1 - \mathfrak{F}(M_0') + \mathfrak{F}(M_0'') < \varepsilon,$$

pentru orice m, $(1 \leqslant m < +\infty)$ şi k, $(1 \leqslant k < +\infty)$ pentru care $P(A_{k,m}) > 0$. Deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $M_0 = M_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $M > M_0$ să avem

$$\limsup_m \limsup_r P\left(\left\{\frac{|Y_{[n_r\nu_m]} - \theta|}{w_{[n_r\nu_m]}} > M\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_m \sum_{k=1}^{+\infty} \limsup_r P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{|Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta|}{w_{[n_r a_{k,m}]}} > M\right\}\right) P(A_{k,m}) <$$

$$< \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_{km}) = \varepsilon$$

Peste tot se trece la condiţionare numai pentru acele valori ale lui k şi m, pentru care $P(A_{k,m}) > 0$. Restul termenilor din sumă sînt nuli.

adică

$$\lim_{M\to+\infty} \limsup_{m} \limsup_{r} P(\{|z_{m,r}^{(2)}| > M\}) =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\frac{|Y_{[n_r, \nu_m]} - \theta|}{w_{[n_r \nu_m]}} > M\right\}\right) = 0$$

d) Fie $\varepsilon > 0$. Folosind relaţia (c_4), pentru orice $M > 1 + \varepsilon$ avem

$$\limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{[n_r \lambda]}} > M\right\}\right) \leqslant \limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{[n_r \lambda]}} > 1+\right.\right.$$

$$\left.\left. + \varepsilon\right\}\right) \leqslant \limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{[n_r \lambda]}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Prin urmare

$$\lim_{M\to+\infty} \limsup_{m} \limsup_{r} P(\{|z_{m,r}^{(1)}| > M\}) =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{[n_r \lambda]}} > M\right\}\right) = 0$$

e) Folosind acum condiţiile (c_1) şi (c_2) avem, oricare ar fi $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m\to+\infty} \limsup_{r} P(\{|y_{m,r}^{(1)}| > \varepsilon\}) =$$

$$= \lim_{m\to+\infty} \limsup_{r} P(\{|Y_{N_r} - Y_{[n_r \nu_m]}| > \varepsilon\, w_{[n_r \nu_m]}\}) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to+\infty} \limsup_{r} P\left(\{|Y_{N_r} - Y_{[n_r \nu_m]}| > \varepsilon\, w_{[n_r \nu_m]}\} \cap \left\{\left|\frac{N_r}{n_r} - \lambda\right| < c_m\right\}\right) +$$

$$+ \lim_{m\to+\infty} \limsup_{r} P\left(\left\{\left|\frac{N_r}{n_r} - \lambda\right| \geqslant c_m\right\}\right) =$$

$$= \lim_{m\to+\infty} \limsup_{r} P\left(\{|Y_{N_r} - Y_{[n_r \nu_m]}| > \varepsilon\, w_{[n_r \nu_m]}\} \cap \left\{\left|\frac{N_r}{n_r} - \lambda\right| < c_m\right\}\right) =$$

$$= \lim_{m\to+\infty} \limsup_{r} P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\{|Y_{N_r} - Y_{[n_r \nu_m]}| > \varepsilon\, w_{[n_r \nu_m]}\} \cap \left\{\left|\frac{N_r}{n_r} -\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. - \lambda\right| < c_m\right\} \cap A_{k,m}\right)\right) \leqslant \lim_{m\to+\infty} \limsup_{r} P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left\{\max_{\left|\frac{i}{n_r} - \lambda\right| < c_m} |Y_i -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - Y_{[n_r a_{k,m}]}| > \varepsilon\, w_{[n_r a_{k,m}]}\right\} \cap A_{k,m}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to+\infty} \limsup_{r} P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left\{\max_{(a_{k,m} - 2c_m)\, n_r < i < (a_{k,m} + 2c_m)\, n_r} |Y_i -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - Y_{[n_r a_{k,m}]}| > \varepsilon\, w_{[n_r a_{k,m}]}\right\} \cap A_{k,m}\right)\right) = 0$$

deoarece pe mulţimea $A_{k,m}$ din $\left|\frac{i}{n_r} - \lambda\right| < c_m$ cum $|\lambda - \nu_m| < c_m$ obţinem

$$(a_{k,m} - 2c_m)\, n_r < i < (a_{k,m} + 2\,c_m)\, n_r.$$

f) Să mai observăm că putem scrie condiţia (c_4) sub forma

$$\lim_{m\to+\infty} \limsup_{r} P(\{|y^{(2)}_{m,r}| > \varepsilon\}) = 0,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$. Din această egalitate şi din cele demonstrate la punctele b), c), d), e) rezultă că putem aplica lema 1 pentru şirul de variabile aleatoare $\{W_r, 1 \leqslant r < +\infty\}$ definit de (2.8) şi avînd descompunerea (2.9). Obţinem

$$\lim_{r\to+\infty} P(\{W_r < a\}) = \lim_{r\to+\infty} P(\{Y_{N_r} - \theta < a\, w_{[n_r \lambda]}\}) = \mathfrak{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$, ceea ce demonstrează prima parte a teoremei.

g) Să notăm acum pentru $1 \leqslant m < +\infty, 1 \leqslant r < +\infty$,

$$x^{*}_{m,r} = z^{*(2)}_{m,r} = \frac{1}{w_{[n_r \nu_m]}} (Y_{[n_r \nu_m]} - \theta)$$

$$y^{*(1)}_{m,r} = \frac{1}{w_{[n_r \nu_m]}} (Y_{N_r} - Y_{[n_r \nu_m]})$$

$$y^{*(2)}_{m,r} = \frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{N_r}} - 1; \quad z^{*(1)}_{m,r} = \frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{N_r}}$$

$$W^{*}_r = \frac{1}{w_{N_r}} (Y_{N_r} - \theta). \tag{2.10}$$

Avem evident descompunerea

$$W^{*}_r = x^{*}_{m,r} + y^{*(1)}_{m,r}\, z^{*(1)}_{m,r} + y^{*(2)}_{m,r}\, z^{*(2)}_{m,r}, \quad (1 \leqslant r < +\infty, 1 \leqslant m < +\infty). \tag{2.11}$$

Făcînd o comparaţie cu notaţiile de la punctul a), se vede că

$$x^{*}_{m,r} = x_{m,r},\ y^{*(1)}_{m,r} = y^{(1)}_{m,r},\ z^{*(2)}_{m,r} = z^{(2)}_{m,r}, \quad (1 \leqslant r < +\infty,\ 1 \leqslant m < +\infty).$$

h) Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Pentru orice $M > 1 + \varepsilon$, folosind condiţia (c'_4), avem

$$\limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{N_r}} > M\right\}\right) \leqslant \limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{N_r}} > 1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varepsilon\right\}\right) \leqslant \limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{N_r}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

şi prin urmare

$$\lim_{M\to+\infty} \limsup_{m} \limsup_{r} P(\{|z^{*(1)}_{m,r}| > M\}) =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{N_r}} > M\right\}\right) = 0.$$

i) Cum condiţia (c'_4) se mai poate scrie, pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m \to +\infty} \limsup_{r} P(\{|y^{*(2)}_{m,r}| > \varepsilon\}) = 0$$

ţinînd cont de cele demonstrate la punctele *b*), c), e), h), rezultă că putem aplica lema 1 de data aceasta pentru şirul de variabile aleatoare $\{W^*_r, 1 \leqslant r < +\infty\}$ definit de egalitatea (2.10) şi avînd descompunerea (2.11). În consecinţă

$$\lim_{r \to +\infty} P(\{W^*_r < a\}) = \lim_{r \to +\infty} P(\{Y_{N_r} - \theta < a\, w_{N_r}\}) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$, ceea ce demonstrează a doua parte a teoremei q.e.d.

Condiţiile (c_2), (c_3), (c_4), (c'_4) reprezintă cele mai slabe condiţii asupra procesului stocastic $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ şi asupra şirului de normare $(w_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$, condiţii care asigură invarianţa repartiţiei limită prin trecerea la timpul aleator $\{N_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ dacă acest timp aleator se „scurge la infinit'' conform condiţiei (c_1) şi dacă tehnica demonstraţiei urmează schema indicată de lema 1. Unul din scopurile următoare este de a vedea în ce cazuri aceste condiţii sînt satisfăcute şi de asemenea de a vedea pentru ce clase de procese ele se pot simplifica. În acest sens, condiţiile (c_2), (c_3), (c_4), (c'_4) de mai sus constituie numai o „bază de lucru'' pentru studiul claselor de procese stocastice a căror repartiţie limită este invariantă prin trecerea la timpul aleator.

Dacă în teorema 1 se fac următoarele particularizări

$$\lambda \equiv 1, \quad \nu_m \equiv 1, \qquad (1 \leqslant m < +\infty)$$

se obţine teorema clasică a lui F. J. Anscombe:

TEOREMA 2. [2]. *Fie* $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare definite pe* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$. *Fie de asemenea,* $\{N_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive definite tot pe* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$, $(w_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ *un şir de numere pozitive,* $(n_r)_{1 \leqslant r < +\infty}$ *un şir crescător de întregi pozitivi care tind la infinit împreună cu* r, θ *un număr real* şi $\mathcal{F}(a)$ *o funcţie de repartiţie. Să presupunem că sînt satisfăcute condiţiile*

$$(\bar{c}_1) \qquad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow{P} 1 \qquad (r \to +\infty).$$

$(\bar{c}_2)$ *În toate punctele de continuitate ale lui* $\mathcal{F}(a)$

$$\lim_{n \to +\infty} P(\{Y_n - \theta < a\, w_n\}) = \mathcal{F}(a).$$

$(\bar{c}_3)$ *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *şi* $\eta > 0$ *există un număr natural* n_0 *şi un număr pozitiv mic c astfel încît, pentru orice* $n > n_0$, *să avem*

$$P\Big(\bigcup_{|i-n| < cn} (\{|Y_i - Y_n| > \varepsilon\, w_n\})\Big) < \eta.$$

Atunci

$$\lim_{r \to +\infty} P(\{Y_{N_r} - \theta < a\, w_{n_r}\}) = \mathcal{F}(a) \tag{2.12}$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$.

Demonstrație [23]. Într-adevăr, în acest caz condiția $(\bar{c}_1)$ este chiar (c_1) pentru $\lambda = 1$. Condiția (c_2) devine $(\bar{c}_2)$ deoarece partițiile $(A_{k,m})_{1 \leqslant k < +\infty}$ $(1 \leqslant m < \infty)$ se reduc la un singur eveniment $\{\nu_m \equiv 1\} = \Omega$, evenimentul sigur. Să luăm acum condiția (c_3). Ea ne spune că dacă $\lambda \equiv 1$ şi $\nu_m \equiv 1$, $(1 \leqslant m < +\infty)$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m\to+\infty} \limsup_{n} P\Big(\bigcup_{|i-n|<2c_m\cdot n} (\{|Y_i - Y_n| > \varepsilon w_n\})\Big) = 0,$$

unde $(c_m)_{1 \leqslant m < +\infty}$ este un şir de numere pozitive, $c_m \searrow 0$ dacă $m \to +\infty$. Deci pentru $\varepsilon > 0$; $\eta > 0$, există m_0 şi n_0 astfel încît $n > n_0$ implică

$$P\Big(\bigcup_{|i-n|<2c_{m_0}\cdot n} (\{|Y_i - Y_n| > \varepsilon w_n\})\Big) < \eta.$$

Notînd $2c_{m_0} = c$, obținem condiția $(\bar{c}_3)$. Condiția (c_4) este banal satisfăcută, deci din teorema 1 rezultă (2.12) q.e.d.

Să considerăm din nou teorema 1 şi să presupuem că λ este o variabilă aleatoare pozitivă cu valori discrete

$$\lambda : 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

Drept şir care aproximează pe λ să luăm şirul de variabile aleatoare identice cu λ, adică $\nu_m \equiv \lambda$, $(1 \leqslant m < +\infty)$. Teorema 1 devine în acest caz particular :

TEOREMA 3 [21]. *Fie* $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare definite pe* $\{\Omega, \mathfrak{K}, P\}$. *Fie de asemenea* $\{N_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive definite tot pe* $\{\Omega, \mathfrak{K}, P\}$, $(w_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ *un şir de numere pozitive,* $(n_r)_{1 \leqslant r < +\infty}$ *un şir crescător de întregi pozitivi care tinde la infinit împreună cu r,* θ *un număr real şi* $\mathfrak{F}(a)$ *o funcție de repartiție. Să presupunem că sînt satisfăcute condițiile :*

$$(c_1) \qquad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow{P} \lambda,$$

unde λ *este o variabilă aleatoare cu valori discrete pozitive*

$$\lambda : 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

(c_2) *În toate punctele de continuitate ale lui* $\mathfrak{F}(a)$

$$\lim_{n\to+\infty} P_{A_k}(\{Y_n - \theta < a\, w_n\}) = \mathfrak{F}(a)$$

pentru toate valorile lui k, $(1 \leqslant k < +\infty)$, *pentru care* $P(A_k) > 0$, *unde* $A_k = \{\lambda \equiv \lambda_k\}$.

(c_3) *Pentru orice* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m\to+\infty} \limsup_{n} P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (\{\max_{\left|\frac{i}{n}-\lambda_k\right|<c_m} |Y_i - Y_{[n\lambda_k]}| > \varepsilon\, w_{[n\lambda_k]}\} \cap A_k)\right) = 0,$$

unde $(c_m)_{1 \leqslant m < +\infty}$ *este un şir de numere pozitive,* $c_m \searrow 0$, $(m \to +\infty)$.

Atunci[1]

$$\lim_{r\to+\infty} P\ (\{Y_{N_r} - \theta < a\, w_{[n_r\lambda]}\}) = \mathcal{F}\,(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}\,(a)$.

Să presupunem în plus că avem :

(c_4') *Pentru orice* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{r\to+\infty} P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n_r\lambda]}}{w_{N_r}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Atunci în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}\,(a)$, *avem*

$$\lim_{r\to+\infty} P\,(\{Y_{N_r} - \theta < a\, w_{N_r}\}) = \mathcal{F}\,(a).$$

§ 3. ȘIRURI ERGODICE DE EVENIMENTE

Trecerea la timpul aleator în stadiul repartiției limită a proceselor stocastice cu timp discret introduce, printre altele, următoarea problemă. Fiind dat procesul stocastic $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ definit pe cîmpul de evenimente probabilizat $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ pentru care există repartiția limită

$$\lim_{n\to+\infty} P\,(\{Y_n < a\}) = \mathcal{F}\,(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}\,(a)$, în ce caz avem

$$\lim_{n\to+\infty} P_A\,(\{Y_n < a\}) = \mathcal{F}\,(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}\,(a)$, pentru orice eveniment A, $A \in \mathcal{K}$, $P(A) > 0$ sau, mai general, în ce caz avem

$$\lim_{n\to+\infty} Q\,(\{Y_n < a\}) = \mathcal{F}\,(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}\,(a)$, unde Q este o probabilitate definită pe $\mathcal{K}$ și absolut continuă în raport cu P ? Într-adevăr, după cum se vede din teorema 1, condiția (c_2), pentru invarianța repartiției limită a unui proces stocastic prin trecerea la timpul aleator, cere ca această repartiție limită să existe nu numai față de probabilitatea inițială P, dar și față de un număr de probabilități condiționate de evenimente din $\mathcal{K}$. Pentru rezolvarea problemei de mai sus, A. Rényi [55] a studiat așa-numitele șiruri de variabile aleatoare, respectiv de evenimente, amestecate tare, dînd răspuns afirmativ problemei enunțate, în cazul procesului stocastic format din sume normate de variabile aleatoare independente. În cursul § 3 se dă o ușoară generalizare a șirurilor amestecate de evenimente și de variabile aleatoare, introducîndu-se șirurile ergodice de evenimente și de variabile aleatoare, care pe lîngă faptul că constituie o clasă mult mai bogată, își vor găsi adevărata justificare în rezultatele finale ale § 6. Rezultatele și demonstrațiile din acest paragraf urmează, cu mici modificări cerute de gradul mai mare de generalitate, lucrarea lui A. Rényi [55].

---

[1] Condiția (c_4) este evident satisfăcută în acest caz particular.

DEFINIŢIA 1. Fie spaţiul cu măsură $\{\Omega, \mathcal{K}, \mu\}$. *Şirul* $(A_n)_{0 \leqslant n < +\infty} \subset \mathcal{K}$ *se numeşte şir ergodic de mulţimi măsurabile, cu densitatea* α, *dacă pentru orice* $B \in \mathcal{K}$, $\mu(B) < +\infty$, *avem*

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(A_n \cap B) = \alpha\, \mu(B) \tag{3.1}$$

unde $0 < \alpha < 1$, *iar valoarea lui* α *nu depinde de* B.

În cazul în care $\mu(\Omega) < +\infty$, (3.1) se poate scrie sub forma

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(A_n \cap B) = \frac{1}{\mu(\Omega)} \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(A_n)\, \mu(B). \tag{3.2}$$

Denumirea de şir ergodic este aleasă în concordanţă cu definiţia binecunoscută a transformărilor ergodice care păstrează măsura. Într-adevăr, dacă T este o transformare măsurabilă a spaţiului cu măsură $\{\Omega, \mathcal{K}, \mu\}$ în el însuşi, care păstrează măsura μ şi $\mu(\Omega) < +\infty$, atunci T se numeşte transformare ergodică dacă ea nu admite mulţimi invariante nebanale, adică pentru orice mulţime măsurabilă $E \in \mathcal{K}$, invariantă în raport cu T, deci pentru care $T^{-1} E = E$, avem sau $\mu(E) = 0$ sau $\mu(\Omega - E) = 0$. Se ştie [28] că T este ergodică dacă şi numai dacă pentru orice mulţimi măsurabile $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{K}$ avem

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T^{-n} A_n \cap B) = \frac{\mu(A)\, \mu(B)}{\mu(\Omega)}. \tag{3.3}$$

Ţinînd cont că $\mu(T^{-n} A) = \mu(A)$ şi folosind terminologia de mai sus vom spune că transformarea T care păstrează măsura μ este ergodică dacă şi numai dacă pentru orice $A \in \mathcal{K}$, şirul $(A_n)_{0 \leqslant n < +\infty}$ unde $A_n = T^{-n} A$, este ergodic cu densitatea $\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$. Acesta este totuşi numai un mod particular de a obţine şiruri ergodice de mulţimi măsurabile.

Să presupunem acum că avem un cîmp de evenimente probabilizat $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$. Un şir de evenimente $(A_n)_{0 \leqslant n < +\infty} \subset \mathcal{K}$ este ergodic cu densitatea α, $0 < \alpha < 1$, dacă pentru orice eveniment $B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$, avem

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_B(A_n) = \alpha. \tag{3.4}$$

Se demonstrează următoarea teoremă:

TEOREMA 4. *Dacă* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ *este un cîmp de evenimente probabilizat, iar şirul de evenimente* $(A_n)_{0 \leqslant n < +\infty} \subset \mathcal{K}$ *este ergodic, cu densitatea* α, *atunci*

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} Q(A_n) = \alpha \tag{3.5}$$

pentru orice probabilitate Q *definită pe* $\mathcal{K}$, *absolut continuă în raport cu probabilitatea* P.

Demonstrație. Pe baza teoremei lui Radon-Nikodym există o funcție măsurabilă nenegativă $\xi(\omega)$ pe Ω, care este integrabilă în raport cu măsura P şi este astfel încît pentru orice $A \in \mathcal{H}$ avem

$$Q(A) = \int_A \xi(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega). \tag{3.6}$$

Evident, (3.5) are loc dacă $\xi(\omega)$ este o funcţie cu valori discrete. Pe de altă parte, pentru orice ξ integrabilă oarecare şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există o funcţie cu valori discrete ξ_1 astfel încît

$$\int_\Omega |\xi(\omega) - \xi_1(\omega)|\,\mathrm{d}P(\omega) < \varepsilon.$$

Rezultă atunci imediat că (3.5) are loc în general. q.e.d.

Urmărim în cele ce urmează să obţinem un criteriu care să asigure ergodicitatea unui şir de evenimente. În prealabil să demonstrăm însă următoarea lemă:

LEMA 2. *Fie* $(f_n)_{0 \leqslant n < +\infty}$ *un şir de elemente ale spaţiului Hilbert* $\mathcal{H}$. *Presupunem că*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \|f_n\| \leqslant K \qquad (N = 1, 2, \ldots) \tag{3.7}$$

şi că pentru orice $k = 0, 1, \ldots$ *avem*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} < f_k, f_n > = 0. \tag{3.8}$$

Atunci pentru orice $g \in \mathcal{H}$ *avem*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} < g, f_n > = 0. \tag{3.9}$$

Demonstrație. Evident, relaţia (3.9) are loc dacă g este o combinaţie liniară finită de elemente ale şirului $(f_n)_{0\leqslant n<+\infty}$. Dacă $\mathcal{H}_1$ este cel mai mic subspaţiu al lui $\mathcal{H}$ care conţine şirul $(f_n)_{0\leqslant n<+\infty}$ şi $g \in \mathcal{H}_1$ putem găsi pentru orice $\varepsilon > 0$ coeficienţii $c_0, c_1, \ldots, c_r$ astfel încît punînd

$$g_1 = \sum_{k=0}^{r} c_k\, f_k$$

avem

$$\|g - g_1\| < \varepsilon.$$

Urmează din (3.7) că

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} < g, f_n > - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} < g_1, f_n >\right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \left| < g - g_1, f_n > \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \|f_n\| \leqslant \varepsilon K.$$

Deci (3.9) are loc pentru orice $g \in \mathcal{H}_1$. Să notăm cu $\mathcal{H}_2$ complementul ortogonal al lui $\mathcal{H}_1$, adică $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1$. Evident, pentru orice $g \in \mathcal{H}_2$ relaţia (3.9) are loc, deoarece pentru orice n, $< g, f_n > = 0$. Cum fiecare $g \in \mathcal{H}$ se poate reprezenta în mod unic sub forma

$$g = g_1 + g_2, \ g_1 \in \mathcal{H}_1, \ g_2 \in \mathcal{H}_2,$$

rezultă că (3.9) are loc pentru fiecare $g \in \mathcal{H}$. q.e.d.

Cu ajutorul acestei leme să demonstrăm acum următoarea teoremă, care ne dă un criteriu de ergodicitate a unui şir de evenimente :

TEOREMA 5. *Fie* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ *un cîmp de evenimente probabilizat şi fie* $(A_n)_{0 \leqslant n < +\infty}$ *un şir de evenimente astfel încît* $A_0 = \Omega$ *şi* $P(A_n) > 0$, $(1 \leqslant n < +\infty)$. *Acest şir de evenimente este ergodic, cu densitatea* α, $(0 < \alpha < 1)$, *dacă şi numai dacă*

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_{A_k}(A_n) = \alpha \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.10}$$

Demonstraţie. Fie $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, \mathrm{P})$ spaţiul Hilbert al variabilelor aleatoare de pătrat integrabil, în care produsul scalar a două elemente arbitrare ξ şi η se defineşte ca fiind

$$< \xi, \eta > = \int_\Omega \xi\eta \, \mathrm{d}P.$$

Fie acum variabilele aleatoare $\alpha_n = \alpha_n(\omega)$ definite în modul următor

$$\alpha_n(\omega) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{dacă } \omega \in A_n \\ -\alpha & \text{dacă } \omega \notin A_n. \end{cases}$$

Atunci avem

$$< \alpha_k \, \alpha_n > = P(A_n \cap A_k) - \alpha P(A_n) - \alpha P(A_n) + \alpha^2 ; \tag{3.11}$$

deoarece s-a presupus $A_0 = \Omega$, din (3.10) urmează că

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P(A_n) = \alpha. \tag{3.12}$$

De asemenea din (3.10) rezultă că

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P(A_n \cap A_k) = \alpha P(A_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.13}$$

Din (3.11), (3.12) şi (3.13) obţinem

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} < \alpha_k ; \alpha_n > = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.14}$$

Ţinînd seama că

$$\| \alpha_n \|^2 = (1 - \alpha)^2 P(A_n) + \alpha^2 (1 - P(A_n)) \leqslant 1, \tag{3.15}$$

se vede că şirul $(\alpha_n)_{0 \leqslant n < +\infty} \subset \mathcal{H}$ satisface condiţiile lemei 2. Deci pentru orice $\chi \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P)$ avem

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} < \chi, \alpha_n > = 0. \tag{3.16}$$

Să luăm acum

$$\chi = \chi(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \omega \in B \\ 0 \text{ dacă } \omega \notin B. \end{cases}$$

Avem

$$< \chi, \alpha_n > = P(A_n \cap B) - \alpha P(B)$$

şi deci pe baza lui (3.16) avem, presupunînd că $P(B) > 0$,

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_B(A_n) = \alpha.$$

Cu aceasta suficienţa este demonstrată. Necesitatea este imediată. q.e.d.

Din teoremele 4 şi 5 rezultă că dacă Q este o probabilitate pe $\mathcal{K}$, absolut continuă în raport cu P, iar şirul de evenimente $(A_n)_{1 \leqslant n < +\infty} \subset \mathcal{K}$ satisface condiţia (3.10), atunci avem

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Q(A_n) = \alpha$$

DEFINIŢIA 2. *Şirurile ergodice de evenimente constituie o extensiune a şirurilor de evenimente amestecate tare, introduse de A. Rényi* [55]. *Un şir de evenimente* $(A_n)_{0 \leqslant n < +\infty}$ *este amestecat tare, cu densitatea* α, $(0 < \alpha < 1)$, *dacă pentru orice eveniment* $B \in \mathcal{K}$ *avem*

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n \cap B) = \alpha P(B). \tag{3.17}$$

Denumirea „amestecat tare'' a fost aleasă în concordanţă cu definiţia transformărilor de amestecare tare care păstrează măsura, din teoria ergodică, o transformare T care păstrează măsura fiind o amestecare tare dacă şi numai dacă pentru orice $A \in K$ şirul $A_n = T^{-n} A$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, este amestecat tare cu densitatea $\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$; acesta fiind totuşi un mod particular de a obţine şiruri amestecate tare de evenimente. Este clar că orice şir amestecat tare de evenimente este un şir ergodic, implicaţia inversă neavînd în general loc. De fapt clasa şirurilor ergodice de evenimente este mult mai „masivă'' decît clasa şirurilor de evenimente amestecate tare. Într-adevăr, după cum s-a văzut, un mod (nu singurul!) de a obţine şiruri ergodice este acela de a aplica iteratele succesive ale unei transformări ergodice care păstrează măsura, unui eveniment arbitrar, în timp ce aplicînd asupra unui eveniment arbitrar iteratele succesive ale unei transformări de amestecare tare, care păstrează măsura, se obţin şiruri amestecate tare de evenimente. Or, se ştie [28] că în cadrul mulţimii transformărilor care păstrează măsura, în sensul topologiei slabe [1]), mulţimea transformărilor de amestecare tare este de prima categorie, în timp ce transformările ergodice formează o mulţime G_δ peste tot densă. Utilitatea considerării unor şiruri ergodice de evenimente se va vedea în § 6.

În acelaşi mod ca şi teorema 5 se demonstrează:

TEOREMA 6 ([55]). *Fie* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ *un cîmp de evenimente probabilizat. Fie* $(A_n)_{0 \leqslant n < +\infty}$ *un şir de evenimente astfel ca* $A_0 = \Omega$ *şi* $P(A_n) > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Şirul* $(A_n)_{0 \leqslant n < +\infty}$ *este amestecat tare cu densitatea* α, $(0 < \alpha < 1)$, *dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n \to +\infty} P_{A_k}(A_n) = \alpha \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.18}$$

Vom încheia acest paragraf cu două leme datorate lui A. Rényi şi respectiv J. R. Blum, D. L. Hanson şi J. I. Rosenblatt, de care vom avea nevoie în următoarele două paragrafe. În prealabil vom enunţa însă o lemă evidentă a cărei demonstraţie simplă o omitem:

LEMA 3. *Dacă* $\{x_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *este un şir de variabile aleatoare avînd o repartiţie limită, iar* $\{y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *şi* $\{z_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *două şiruri de variabile aleatoare astfel încît*

$$y_n \xrightarrow{P} 1, \quad z_n \xrightarrow{P} 0 \qquad (n \to +\infty)$$

atunci şirul de variabile aleatoare $\{x_n y_n + z_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *are aceeaşi repartiţie limită ca şi şirul* $\{x_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$.

LEMA 4 ([55]). *Fie* $\{x_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare definite pe* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$, $\{x_n, 1 \leqslant n < +\infty\} \in (SK)$ [2]), *fie* $(C_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ *un şir de numere reale şi fie* $(D_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ *un şir de numere pozitive tinzînd la infinit împreună cu n. Notăm*

$$\eta_n = \frac{\zeta_n - C_n}{D_n},$$

unde $\zeta_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. *Dacă în toate punctele de continuitate ale lui* $\mathcal{F}(a)$ *avem*

$$\lim_{n \to +\infty} P(\{\eta_n < a\}) = \mathcal{F}(a),$$

atunci oricare ar fi $B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$, *avem în toate punctele de continuitate ale lui* $\mathcal{F}(a)$:

$$\lim_{n \to +\infty} P_B(\{\eta_n < a\}) = \mathcal{F}(a).$$

---

[1]) Topologia slabă se introduce în mulţimea transformărilor care păstrează măsura μ şi care sînt inversabile, în modul următor: şirul $(T_j)_{1 \leqslant j < +\infty}$ converge către transformarea T, în sensul topologiei slabe, dacă şirul $(T_j E)_{1 \leqslant j < +\infty}$ converge către TE pentru orice mulţime măsurabilă E. Mai precis se cere ca $\mu(T_j E \,\Delta\, TE) \to 0$, unde Δ reprezintă diferenţa simetrică. Un sistem complet de vecinătăţi este format de mulţimile de forma

$$N(S) = N(S; E, \varepsilon) = \{T \mid \mu(SE \,\Delta\, TE) < \varepsilon\}.$$

[2]) (SK) = familia mulţimilor de variabile aleatoare independente în sensul lui Steinhaus-Kac.

Demonstraţie ([55]). Fie a un punct de continuitate al lui $\mathcal{F}(a)$, cu $\mathcal{F}(a) > 0$. Este suficient să considerăm numai astfel de valori ale lui a. Este evident că pentru $n \geqslant n_0$,

$$P(\{\eta_n < a\}) > 0.$$

Alegem evenimentele

$$A_0 = \Omega,\ A_n = \{\eta_{n+n_0} < a\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Să introducem variabilele aleatoare

$$x_n = \eta_n,\ z_n = -\frac{\zeta_k}{D_n}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Aceste variabile aleatoare satisfac condiţiile lemei 3. Deci avem

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left\{\eta_n - \frac{\zeta_k}{D_n} < a\right\}\right) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$. Evident,

$$\eta_n - \frac{\zeta_k}{D_n} = \frac{\zeta_n - \zeta_k - C_n}{D_n} = \frac{x_{k+1} + \ldots + x_n - C_n}{D_n}$$

este independentă de variabila aleatoare

$$\eta_k = \frac{x_1 + \ldots + x_k}{D_k}$$

şi avem

$$\lim_{n\to+\infty} P_{\{\eta_k<a\}}\left(\left\{\eta_n - \frac{\zeta_k}{D_n} < a\right\}\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\left\{\eta_n - \frac{\zeta_k}{D_n} < a\right\}\right) = \mathcal{F}(a).$$

Luînd acum

$$x_n = \eta_n - \frac{\zeta_k}{D_n},\ z_n = \frac{\zeta_k}{D_n}$$

pe cîmpul de evenimente probabilizat $\{\Omega, \mathcal{K}, P^*\}$, unde

$$P^*(A) = P_{\{\eta_k<a\}}(A) \qquad (A \in \mathcal{K})$$

aceeaşi lemă 3 ne dă

$$\lim_{n\to+\infty} P_{\{\eta_k<a\}}(\{\eta_n < a\}) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$, de unde pe baza teoremei 6 avem

$$\lim_{n\to+\infty} P_B(\{\eta_n < a\}) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$, oricare ar fi $B \in \mathcal{K}$ $P(B) > 0$. q.e.d.

LEMA 5 ([9]). *Fie* $\{x_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare definite pe* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$, $\{x_n, 1 \leqslant n < +\infty\} \in (SK)$, *fie* $(k_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ *şi* $(m_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ *două şiruri numerice tinzînd la infinit şi* A_n *un eveniment depinzînd numai de variabilele aleatoare* $x_{k_n}, \ldots, x_{m_n}$ *dacă* $k_n \leqslant m_n$ *sau de variabilele aleatoare* $x_{m_n}, \ldots, x_{k_n}$ *dacă* $m_n \leqslant k_n$. *Dacă* A *este un eveniment oarecare* $A \in \mathcal{K}$, $P(A) > 0$, *atunci*

$$\lim_n \sup P_A(A_n) = \lim_n \sup P(A_n). \tag{3.19}$$

Demonstraţie ([9]). Pentru un n_0 fix şi n suficient de mare, avem

$$P(A_{n_0} \cap A_n) - P(A_{n_0})\, P(A_n) = 0.$$

Fie

$$f_n(\omega) = \begin{cases} 1 - P(A_n) \text{ dacă } \omega \in A_n \\ \quad - P(A_n) \text{ dacă } \omega \notin A_n. \end{cases}$$

Avem

$$< f_k, f_n > = P(A_k \cap A_n) - P(A_k)\, P(A_n)$$

de unde

$$\lim_{n \to +\infty} < f_k, f_n > = 0$$

pentru orice k. Deoarece în plus

$$\|f_n\|^2 = < f_n, f_n > = P(A_n) - P^2(A_n) \leqslant 1,$$

urmînd un raţionament similar cu cel din demonstraţia lemei 2, rezultă

$$\lim_{n \to +\infty} < g, f_n > = 0$$

pentru orice $g \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P)$. În particular, pentru

$$g(\omega) = \begin{cases} 1 - P(A) \text{ dacă } \omega \in A \\ \quad - P(A) \text{ dacă } \omega \notin A, \end{cases}$$

unde A este un eveniment oarecare $A \in \mathcal{K}$, $P(A) > 0$, avem

$$\lim_{n \to +\infty} [P(A \cap A_n) - P(A)\, P(A_n)] = 0$$

de unde, împărţind cu $P(A)$, obţinem

$$\lim_{n \to +\infty} [P_A(A_n) - P(A_n)] = 0$$

ceea ce implică (3.19). q.e.d.

§ 4. SUME ALEATOARE DE VARIABILE ALEATOARE INDEPENDENTE

Fie $\{x_j, 1 \leqslant j < +\infty\}$ un şir de variabile aleatoare satisfăcînd condiţiile următoare

$$\{x_j, 1 \leqslant j < +\infty\} \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P) \tag{4.1}$$

$$\{x_j, 1 \leqslant j < +\infty\} \in (SK) \tag{4.2}$$

$$\mathfrak{M}_1(x_j) = 0, \quad (1 \leqslant j < +\infty) \tag{4.3}$$

$$\mathfrak{M}_2(x_j) = 1, \quad (1 \leqslant j < +\infty) \tag{4.4}$$

$$P(\{x_j < a\}) = F(a), \quad (1 \leqslant j < +\infty) \tag{4.5}$$

cu alte cuvinte un şir de variabile aleatoare independente, identic repartizate, de pătrat integrabil. Condiţiile (4.3) şi (4.4) nu sînt esenţiale, ele figurînd exclusiv pentru simplificarea calculelor. Cu notaţiile din § 2 să alegem

$$Y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \qquad (1 \leqslant n < +\infty) \tag{4.6}$$

$$w_n = \sqrt{n} \qquad (1 \leqslant n < +\infty) \tag{4.7}$$

$$n_r \equiv r \qquad (1 \leqslant r < +\infty) \tag{4.8}$$

$$\theta = 0 \tag{4.9}$$

$$\mathcal{F}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u \tag{4.10}$$

Se arată că în acest caz particular, toate condiţiile (c_2), (c_3), (c_4), (c_4') din teorema 1 sînt satisfăcute şi deci avem pe baza teoremei 1 :

TEOREMA 7. *Fie şirul de variabile aleatoare* $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *definit de egalitatea* (5) *şi fie* $\{N_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive. Dacă*

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} \lambda \qquad (n \to +\infty) \tag{4.11}$$

λ *fiind o variabilă aleatoare pozitivă oarecare, atunci*

$$\lim_{n \to +\infty} P(\{Y_{N_n} < a\sqrt{N_N}\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u. \tag{4.12}$$

Demonstraţie ([23]). Fie variabila aleatoare $\lambda > 0$ şi fie $\{\nu_m, 1 \leqslant m < < +\infty\}$ un şir de variabile aleatoare, fiecare avînd o mulţime cel mult numărabilă de valori, care aproximează pe λ

$$\nu_m : 0 < a_{1,m} < a_{2,m} < \ldots < a_{k,m} < a_{k+1,m} < \ldots \qquad (1 \leqslant m < +\infty$$

$$|\lambda - \nu_m| < c_m \qquad (1 \leqslant m < +\infty),$$

unde $(c_m)_{1 \leqslant m < +\infty}$ este un şir de numere pozitive avînd proprietatea că $c_m \cdot m \searrow 0$ cînd $m \to +\infty$.

Din teorema clasică a lui Lindeberg rezultă

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{Y_n < a\sqrt{n}\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

şi conform lemei 5, pentru orice $B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} P_B(\{Y_n < a\sqrt{n}\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

şi deci

$$\lim_{n\to+\infty} P_{A_{k,m}}(\{Y_n < a\sqrt{n}\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

pentru toate valorile lui $k (1 \leqslant k < +\infty)$ şi ale lui m $(1 \leqslant m < +\infty)$ pentru care $P(A_{k,m}) > 0$, unde

$$A_{k,m} = \{\nu_m = a_{k,m}\} \in \mathcal{K}.$$

Vedem deci că este satisfăcută condiţia (c_2) a teoremei 1.

Pentru m dat, fie $k_0 = k_{0(m)}$ acel indice pentru care

$$a_{k_0,m} < c_m \cdot m, \quad a_{k_0+1,m} \geqslant c_m \cdot m.$$

Pentru $k < k_0$ avem $a_{k,m} < c_m \cdot m$, iar pentru $k > k_0+1$ avem $a_{k,m} > c_m \cdot m$. Evident,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{k_0} A_{k,m}\right) \leqslant P(\{\lambda < c_m \cdot m + c_m\})$$

şi cum $c_m \cdot m + c_m \searrow 0$ cînd $m \to +\infty$, rezultă

$$\lim_{m\to+\infty} P(\{\lambda < c_m \cdot m + c_m\}) = 0.$$

Avem

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to+\infty} \limsup_{n} P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}(\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n} |Y_i - Y_{[na_{k,m}]}| > \right.\\
&\qquad \left. > \varepsilon\sqrt{[na_{k,m}]}\} \cap A_{k,m})\right) \leqslant \lim_{m\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{k_0} A_{k,m}\right) + \\
&\qquad + \lim_{m\to+\infty} \limsup_{n} P\left(\bigcup_{k=k_0+1}^{+\infty}(\{|Y_{[na_{k,m}]} - Y_{[(a_{k,m}-2c_m)n]}| + \right.\\
&\left. + \max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n} |Y_i - Y_{[(a_{k,m}-2c_m)n]}| > \varepsilon\sqrt{[na_{k,m}]}\} \cap A_{k,m})\right) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \lim_{m\to+\infty} P(\{\lambda < c_m \cdot m + c_m\}) + \\
&\qquad + \lim_{m\to+\infty} \limsup_{n} P\left(\bigcup_{k=k_0+1}^{+\infty}(\{|Y_{[na_{k,m}]} - Y_{[(a_{k,m}-2c_m)n]}| > \right.\\
&\qquad \left. > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\} \cap A_{k,m})\right) +
\end{aligned}\tag{4.13}$$

$$+\lim_{m\to+\infty}\limsup_n P\Bigg(\bigcup_{k=k_0+1}^{+\infty}\Bigg(\Bigg\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n}\left|Y_i-Y_{[(a_{k,m}-2c_m)n]}\right|>$$

$$>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\Bigg\}\cap A_{k,m}\Bigg)\Bigg)\leqslant\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=k_0+1}^{+\infty}\limsup_n P_{A_{k,m}}\Bigg(\Bigg\{\Big|Y_{[na_{k,m}]}-$$

$$-Y_{[(a_{k,m}-2c_m)n]}\Big|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\Bigg\}\Bigg)P(A_{k,m})+$$

$$+\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=k_0+1}^{+\infty}\limsup_n P_{A_{k,m}}\Bigg(\Bigg\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n}\left|Y_i-Y_{[(a_k-2c_m)n]}\right|>$$

$$>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\Bigg\}\Bigg)P(A_{k,m})=\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=k_0+1}^{+\infty}\limsup_n P_{A_{k,m}}\Bigg(\Bigg\{\Bigg|\sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]+1}^{[na_{k,m}]}x_j\Bigg|>$$

$$>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\Bigg\}\Bigg)P(A_{k,m})+$$

$$+\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=k_0+1}^{+\infty}\limsup_n P_{A_{k,m}}\Bigg(\Bigg\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n}\Bigg|\sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]+1}^{i}x_j\Bigg|>$$

$$>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\Bigg\}\Bigg)P(A_{k,m}).$$

Să observăm că pentru orice $k\,(k\geqslant k_0+1)$ şi orice $m\geqslant 2$ avem

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{k,m}-2c_m)\,n=\lim_{n\to+\infty}(a_{k,m}+2c_m)\,n=+\infty.$$

Aplicînd acum lema 5 şi inegalitatea lui Cebîşev, vom avea pentru $m\geqslant 2$ $k\geqslant k_0+1$,

$$\limsup_n P_{A_{k,m}}\Bigg(\Bigg\{\Bigg|\sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]+1}^{[na_{k,m}]}x_j\Bigg|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\Bigg\}\Bigg)=$$

$$\begin{aligned}&=\limsup_n P\Bigg(\Bigg\{\Bigg|\sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]+1}^{[na_{k,m}]}x_j\Bigg|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\Bigg\}\Bigg)\leqslant\\ &\leqslant\frac{4}{\varepsilon^2}\limsup_n\frac{[na_{k,m}]-[(a_{k,m}-2c_m)\,n]}{[na_{k,m}]}\leqslant\qquad(4.14)\\ &\leqslant\frac{4}{\varepsilon^2}\limsup_n\frac{2c_m\cdot n+1}{[na_{k,m}]}=\frac{8}{\varepsilon^2}\,\frac{c_m}{a_{k,m}}<\frac{8}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Aplicînd acum din nou lema 5 şi inegalitatea lui Kolmogorov, vom avea pentru $k\geqslant k_0+1$, $m\geqslant 2$,

$$\limsup_n P_{A_{k,m}}\Bigg(\Bigg\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n}\Bigg|\sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]+1}^{i}\Bigg|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\Bigg\}\Bigg)=$$

(4.15)

$$= \limsup_{n} P\left(\left\{ \max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n} \left| \sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]+1}^{i} x_j \right| > \right.\right.$$

$$\left.\left. > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\right\}\right) \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2} \limsup_{n} \frac{[(a_{k,m}+2c_m)\,n]-[(a_{k,m}-2\,c_m)n]}{[na_{k,m}]} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\varepsilon^2} \limsup_{n} \frac{4\,c_m n+1}{[na_{k,m}]} = \frac{16}{\varepsilon^2}\,\frac{c_m}{a_{k,m}} < \frac{16}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{m}.$$

Ţinînd cont de (4.14) şi (4.15), din (4.13) obţinem

$$\lim_{m\to+\infty} \limsup_{n} P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left\{ \max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n} |Y_i - Y_{[na_{k,m}]}| > \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. > \varepsilon\sqrt{[an_{k,m}]}\right\} \cap A_{k,m}\right)\right) \leqslant \lim_{m\to+\infty} \frac{24}{\varepsilon^2}\,\frac{1}{m} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} P(A_{k,m}) \leqslant \lim_{m\to+\infty} \frac{24}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{m} = 0$$

oricare ar fi $\varepsilon > 0$. Deci şi condiţia (c_3) din teorema 1 este satisfăcută. Să observăm acum că din (4.11) rezultă

$$\sqrt{\frac{[n\nu_m]}{N_n}} \xrightarrow{P} \sqrt{\frac{\nu_m}{\lambda}} \qquad (n \to +\infty)$$

şi deoarece

$$\sqrt{\frac{\nu_m}{\lambda}} \to 1 \qquad (m \to +\infty)$$

avem pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m\to+\infty} \limsup_{n} P\left(\left\{\left|\sqrt{\frac{[n\nu_m]}{N_n}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

adică tocmai condiţia (c_4') din teorema 1. Cum (4.11) este chiar condiţia (c_1), atunci, din teorema 1, rezultă (4.12). q.e.d.

Remarcă. Se vede imediat că avem satisfăcută în acest caz particular şi condiţia (c_4) deoarece din

$$\frac{[n\,\nu_m]}{[n\lambda]} \to \frac{\nu_m}{\lambda},\ (n \to +\infty);\ \nu_m \to \lambda, \qquad (m \to +\infty)$$

rezultă

$$\lim_{m\to+\infty} \limsup_{n} P\left(\left\{\left|\sqrt{\frac{[n\nu_m]}{[n\lambda]}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

pentru orice $\varepsilon > 0$. Condiţiile (c_1), (c_2), (c_3), (c_4) fiind satisfăcute, din teorema 1 rezultă

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{Y_{N_n} < a\sqrt{[n\lambda]}\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Prin urmare şirul sumelor normate de variabile aleatoare independente identic repartizate satisfac condiţiile (c_2), (c_3), (c_4), (c_4') din teorema 1, deci în acest caz se poate trece la timpul aleator fără ca repartiția gaussiană limită să se modifice.

Această teoremă a fost dată pentru cazul $\lambda \equiv 1$ de către F.J. Anscombe în 1952 [2], pentru cazul $\lambda \equiv c (c > 0$ constantă) de către A. Rényi în 1957 [54], iar pentru cazul cînd λ este o variabilă aleatoare pozitivă cu valori discrete de către A. Rényi în 1960 [56]. Pentru cazul cînd λ este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare, teorema a fost enunțată de A. Rényi în 1960 [56] și demonstrată direct de către J. Mogyoródi în 1962 [42] și independent de către J. R. Blum, D. L. Hanson, J. I. Rosenblatt în 1963 [9].

Să studiem în continuare repartiția limită a sumelor aleatoare de variabile aleatoare independente, însă de data aceasta nu neapărat identic repartizate. Fie deci $\{x_j, 1 \leqslant j < +\infty\}$ un șir de variabile aleatoare satisfăcînd condițiile :

$$\{x_j, 1 \leqslant j < +\infty\} \subset \mathfrak{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P\} \tag{4.16}$$

$$\{x_j, 1 \leqslant j < +\infty\} \in (SK) \tag{4.17}$$

$$\mathfrak{M}_1(x_j) = 0 \qquad (1 \leqslant j < +\infty). \tag{4.18}$$

Cu notațiile din § 2, să alegem

$$Y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \qquad (1 \leqslant n < +\infty) \tag{4.19}$$

$$w_n = \sqrt{\mathfrak{M}_2(x_1) + \mathfrak{M}_2(x_2) + \ldots + \mathfrak{M}_2(x_n)}, \quad (1 \leqslant n < +\infty) \tag{4.20}$$

$$n_r \equiv r \qquad (1 \leqslant r + < +\infty) \tag{4.21}$$

$$\theta = 0. \tag{4.22}$$

Pe baza teoremei 1 se demonstrează :

TEOREMA 8. *Să considerăm șirul de variabile aleatoare* $\{Y_n, 1 \leqslant n < < +\infty\}$ *definit de egalitatea* (4.19). *Fie șirul de variabile aleatoare* $\{N_n, 1 \leqslant \leqslant n < \infty\}$ *cu valori întregi pozitive, șirul dispersiilor* $(w_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ *definit de* (4.20) *și* $\mathcal{F}(a)$ *o funcție de repartiție. Presupunem că avem*

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} \lambda \qquad (n \to +\infty) \tag{c$_1^*$}$$

λ *fiind o variabilă aleatoare pozitivă oarecare.*

(c$_2^*$) *În toate punctele de continuitate ale lui* $\mathcal{F}(a)$

$$\lim_{n \to +\infty} P(\{Y_n < a\ w_n\}) = \mathcal{F}(a)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{n \to +\infty} \frac{w_n}{w_{[n(1 \pm \delta)]}} = 1, \qquad (\delta > 0). \tag{c$_3^*$}$$

Atunci

$$\lim_{n \to +\infty} P(\{Y_{N_n} < a\, w_{N_n}\}) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$.

Această teoremă a fost demonstrată pentru cazul $\lambda = 1$ de către J. Mogyoródi în 1961 [41], iar pentru cazul în care λ este o variabilă aleatoare pozitivă cu valori discrete de către S. Guiașu [20].

Demonstrație. Vom demonstra teorema de mai sus pe baza teoremei 1, ținînd cont de particularizările (4.19) — (4.22). Să considerăm variabila aleatoare $\lambda > 0$ și drept șir $\{\nu_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ care aproximează pe λ să alegem

$$(4.23) \qquad \nu_m = \nu_m(\omega) = \frac{k}{2^m} \text{ pentru } \omega \in A_{k,m}, \quad (1 \leqslant k < +\infty, \quad 1 \leqslant m < +\infty),$$

unde

$$A_{k,m} = \left\{\frac{k-1}{2^m} \leqslant \lambda < \frac{k}{2^m}\right\}.$$

Evident,

$$0 < \nu_m - \lambda \leqslant \frac{1}{2^m} \qquad (1 \leqslant m < +\infty).$$

Din condiția (c_2^*) și din lema 4 rezultă

$$\lim_{n \to \infty} P_{A_{k,m}}(\{Y_n < a\, w_n\}) = \mathfrak{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$, pentru toate valorile lui $k (1 \leqslant k < +\infty)$ și ale lui $m (1 \leqslant m < +\infty)$ pentru care $P(A_{k,m}) > 0$, adică avem satisfăcută condiția (c_2) din teorema 1, în care pe baza lui (4.23) avem $a_{k,m} = \frac{k}{2^m}$, $c_m = \frac{1}{2^m}$.

Înainte de a merge mai departe, să observăm că din condiția (c_3^*) rezultă

$$(4.24) \qquad \lim_{m \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} \frac{w_{[nk2^{-m}]}}{w_{[n(k \pm 2)2^{-m}]}} = 1$$

pentru orice k, $m \leqslant k \leqslant m2^m$. Într-adevăr, din (c_3^*) pentru orice $\varepsilon > 0$ există δ_0 astfel încît pentru orice $\delta < \delta_0$ există $n_0 = n_0(\delta)$ astfel încît îndată ce $n > n_0$,

$$\left| \frac{w_n}{w_{[n(1 \pm \delta)]}} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Luînd acum m_0 astfel încît $\frac{2}{2^{m_0}} < \delta$ pentru orice $m > m_0$ și $k \geqslant m$, este suficient să alegem $n_0' = n_0'(m)$ astfel încît $[n_0'k\ 2^{-m}] > n_0$ pentru ca îndată ce $n > n_0'$ să avem

$$\left| \frac{w_{[nk2^{-m}]}}{w_{[n(k \pm 2)2^{-m}]}} - 1 \right| < \varepsilon$$

adică (4.24). Să arătăm acum că avem îndeplinită condiția (c_3) din teorema 1. Ținînd cont de (4.24), oricare ar fi $\varepsilon > 0$ și $\eta > 0$, fie m_0 astfel încît pentru fiecare $m \geqslant m_0$ și $k \geqslant m$ să avem

$$\limsup_n \left| \frac{w^2_{[n(k \pm 2)2^{-m}]}}{w^2_{[nk2^{-m}]}} - 1 \right| < \eta\, \varepsilon^2$$

$$P(\{\lambda < m2^{-m}\}) < \eta, \ P(\{\lambda \geqslant m\}) < \eta.$$

Atunci, procedînd ca în demonstraţia teoremei 7 şi aplicînd lema 5 şi inegalităţile lui Cebîşev şi respectiv Kolmogorov, obţinem pentru $m \geqslant m_0$,

$$\limsup_n P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left\{\max_{\left|\frac{i}{n}-\frac{k}{2^m}\right|<\frac{2}{2^m}}{}_i\, |Y_i - Y_{[nk2^{-m}]}| > \varepsilon w_{[nk2^{-m}]}\right\} \cap A_{k,m}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_{k,m}\right) + P\left(\bigcup_{k=m2^m+1}^{+\infty} A_{k,m}\right) + \sum_{k=m}^{m2^m} \limsup_m P\left(\left\{\left|\sum_{j=[n(k-2)2^{-m}]+1}^{[nk2^{-m}]} x_i\right| >\right.\right.$$

$$\left.\left. > \frac{\varepsilon}{2} w_{[nk2^{-m}]}\right\}\right) P(A_{k,m}) + \sum_{k=m}^{m2^m} \limsup_n P\left(\left\{\max_{\left|\frac{i}{n}-\frac{k}{2^m}\right|<\frac{2}{2^m}}{}_i \left|\sum_{j=[n(k-2)2^{-m}]+1}^{i} x_j\right| >\right.\right.$$

$$\left.\left. > \frac{\varepsilon}{2} w_{[nk2^{-m}]}\right\}\right) P(A_{k,m}) \leqslant P(\{\lambda < m2^{-m}\}) + P(\{\lambda \geqslant m\}) +$$

$$+ \sum_{k=m}^{m2^m} \left[\frac{4}{\varepsilon^2} \limsup_n \left[\frac{w^2_{[n(k+2)2^{-m}]}}{w^2_{[nk2^{-m}]}} - 1\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{8}{\varepsilon^2} \limsup_n \left(1 - \frac{w^2_{[n(k-2)2^{-m}]}}{w^2_{[nk2^{-m}]}}\right)\right] P(A_{k,m}) < 2\eta + 12\eta \sum_{k=m}^{m2^m} P(A_{k,m}) \leqslant 14\ \eta.$$

Prin urmare

$$\lim_{m\to+\infty} \limsup_n P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left\{\max_{\left|\frac{i}{n}-\frac{k}{2^m}\right|<\frac{2}{2^m}}{}_i\, |Y_i - Y_{[nk2^{-m}]}| > \varepsilon w_{[nk2^{-m}]}\right\} \cap A_{k,m}\right)\right) = 0$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, deci condiţia (c_3) din teorema 1.

Ne-a mai rămas să arătăm că este satisfăcută şi condiţia (c_4') din teorema 1. Pentru aceasta trebuie să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$, există m_0 astfel încît oricare ar fi $m > m_0$,

$$\limsup_n P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{N_n}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) < \eta. \tag{4.25}$$

Avem

$$P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{N_n}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = P\left(\bigcup_{s=1}^{+\infty}\left(\left\{\left|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_s} - 1\right| > \varepsilon\right\} \cap \{N_n = s\}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(\bigcup_{s=1}^{+\infty}\left(\left\{\left|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_s} - 1\right| > \varepsilon\right\} \cap \{N_n = s\} \cap \{|N_n - \lambda n| \leqslant n2^{-m}\}\right)\right) +$$

$$+ P(\{|N_n - \lambda n| > n2^{-m}\}) \leqslant P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{s=1}^{+\infty}\left(\left\{\left|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_s} - 1\right| > \varepsilon\right\} \cap\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \cap \{N_n = s\} \cap \{(\nu_m - 2.2^{-m})n \leqslant N_n \leqslant (\nu_m + 2.2^{-m})n\}\right)\right) \cap A_{k,m}\right) +$$

$$+ P(\{|N_n - \lambda n| > n2^{-m}\}) \leqslant P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_{k,m}\right) + P\left(\bigcup_{k=m2^m+1}^{+\infty} A_{k,m}\right) +$$

$$+ \sum_{k=m}^{m2^m} P\left(\bigcup_{s=[n(k-2)2^{-m}]}^{[n(k+2)2^{-m}]} \left(\left\{\left|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_s} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) \cap A_{k,m}\right) +$$

$$+ P(\{|N_n - \lambda n| > n2^{-m}\}) \leqslant P(\{\lambda < m2^{-m}\}) + P(\{\lambda \geqslant m\}) +$$

$$+ \sum_{k=m}^{m2^m} P\left(\left\{\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[n(\nu_m-2.2^{-m})]}} - 1 > \varepsilon\right\} \cap A_{k,m}\right) + \sum_{k=m}^{m2^m} P\left(\left\{1 - \frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[n(\nu_m+2.2^{-m})]}} >\right.\right.$$

$$\left.\left. > \varepsilon\right\} \cap A_{k,m}\right) + P(\{|N_n - \lambda n| > n2^{-m}\}).$$

Ținînd cont de condiția (c_1^*) obținem

$$\limsup_n P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{N_n}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) \leqslant P(\{\lambda < m2^{-m}\}) + P(\{\lambda \geqslant m\}) +$$

$$+ \sum_{k=m}^{m2^m} \limsup_n P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[n(\nu_m-2.2^{m})]}} - 1 > \varepsilon\right\}\right) P(A_{k,m}) +$$

$$+ \sum_{k=m}^{m2^m} \limsup_n P_{A_{k,m}}\left(\left\{1 - \frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[n(\nu_m+2.2^{-m})]}} > \varepsilon\right\}\right) P(A_{k,m}). \tag{4.26}$$

Din (4.24) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ și $\eta > 0$ există m_0 astfel încît pentru $m > m_0$ să avem

$$\limsup_n P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[n(\nu_m-2.2^{-m})]}} - 1 > \varepsilon\right\}\right) = 0, \quad (m \leqslant k \leqslant m2^m) \tag{4.27}$$

$$\limsup_n P_{A_{k,m}}\left(\left\{1 - \frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[n(\nu_m+2.2^{-m})]}} > \varepsilon\right\}\right) = 0, \quad (m \leqslant k \leqslant m2^m) \tag{4.28}$$

$$P(\{\lambda < m2^{-m}\}) < \frac{\eta}{2}, \quad P\{(\lambda \geqslant m\}) < \frac{\eta}{2}. \tag{4.29}$$

Introducînd (4.27) – (4.29) în (4.26), rezultă (4.25) și deci pe baza teoremei 1 rezultă afirmația teoremei 8. q.e.d.

Remarca 1. Teorema 8 are loc și dacă în locul condiției (c_3^*) se introduce următoarea condiție mai slabă :

(c_3^{**}) Fie un șir de variabile aleatoare $\{\nu_m, 1 \leqslant m < +\infty\}$ fiecare avînd o mulțime cel mult numărabilă de valori $\nu_m : 0 < a_{1,m} < a_{2,m} < \ldots$, $(1 \leqslant m < +\infty)$ șir care aproximează pe λ, $|\lambda - \nu_m| < c_m$, $(1 \leqslant m < \infty)$, unde numerele c_m, $(1 \leqslant m < +\infty)$ au proprietatea că $c_m \cdot m \searrow 0$ și să presupunem că există două șiruri de numere pozitive $f_m \searrow 0$, $g_m \nearrow +\infty$, $(m \to +\infty)$, $(2c_m < f_m < g_m)$ astfel încît

$$\lim_{m \to +\infty} \limsup_n \left|\frac{w_{[na_{k,m}]}}{w_{[(a_{k,m} \pm 2c_m)n]}} - 1\right| = 0$$

pentru toți k, $k'_{0,m} < k \leqslant k''_{0,m}$, unde $k'_{0,m}$, $k''_{0,m}$ $(1 \leqslant m < +\infty)$ sînt întregii pozitivi definiți astfel

$$a_{k'_{0,m}, m} < f_m, \; a_{k'_{0,m}+1, m} \geqslant f_m; \; a_{k''_{0,m}, m} < g_m, \; a_{k''_{0,m}+1, m} \geqslant g_m, \quad (1 \leqslant m < +\infty).$$

Demonstrația urmează aceeași cale (cu condiția de mai sus, teorema 8 a fost demonstrată în [23]) ca mai sus, ținîndu-se cont de faptul că

$$\lim_{m \to +\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{k'_{0,m}} A_{k,m} \right) \leqslant \lim_{m \to +\infty} P(\{\lambda < f_m + c_m\}) = 0$$

$$\lim_{m \to +\infty} P\left(\bigcup_{k=k''_{0,m}+1}^{+\infty} A_{k,m} \right) \leqslant \lim_{m \to +\infty} P(\{\lambda > g_m - c_m\}) = 0.$$

În demonstrația dată mai sus teoremei 8 am avut $\nu_m = \nu_m(\omega) = \frac{k}{2^m}$ pentru $\omega \in A_{k,m}$, unde $A_{k,m} = \left\{ \frac{k-1}{2^m} \leqslant \lambda < \frac{k}{2^m} \right\}$ și

$$a_{k,m} = \frac{k}{2^m}, \; c_m = \frac{1}{2^m}, \; k'_{0,m} = m - 1, \; k''_{0,m} = m \cdot 2^m, \; f_m = m \cdot 2^{-m}, \; g_m = m + 1.$$

Remarca 2. La fel ca în ultima parte a demonstrației teoremei 8, se poate arăta că este satisfăcută, pe baza lui (c_1^*), (c_2^*), (c_3^*) și condiția (c_4) din teorema 1 și deci avem pe lîngă afirmația teoremei 8 și faptul că

$$\lim_{n \to +\infty} P(\{Y_{N_n} < a w_{[n\lambda]}\}) = \mathfrak{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$.

Remarca 3. Condiția (c_3^*) este o condiție simplă asupra dispersiilor variabilelor aleatoare independente, cu repartiție oarecare, $\{x_j, 1 \leqslant j < +\infty\}$ care asigură invarianța repartiției limită a sumelor normate ale acestor variabile cînd se trece la timpul aleator. Să presupunem acum că variabilele aleatoare $\{x_j, 1 \leqslant j < +\infty\}$ sînt identic repartizate, adică să presupunem că pe lîngă condițiile (4.16) — (4.18) avem

$$\mathfrak{M}_2(x_j) = 1 \qquad (1 \leqslant j < +\infty)$$

$$P(\{x_j < a\}) = F(a) \qquad (1 \leqslant j < +\infty)$$

și să luăm

$$\mathfrak{F}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Atunci $w_n = \sqrt{n}$, $(1 \leqslant n < +\infty)$, și conform teoremei lui Lindeberg avem satisfăcută condiția (c_2^*) din teorema 8. Este satisfăcută de asemenea și condiția (c_3^*) care în acest caz se reduce la

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{[n(1 \pm \delta)]}} = 1 \qquad (\delta > 0)$$

ceea ce este evident. Reobținem deci teorema 7.

§ 5. CLASE DE PROCESE STOCASTICE A CĂROR REPARTIŢIE LIMITĂ ESTE INVARIANTĂ LA MODIFICAREA ALEATOARE A TIMPULUI.

DEFINIŢIA 3. *Fie* $\mathfrak{F}(a)$ *o funcţie de repartiţie. Şirul de variabile aleatoare* $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *se numeşte şir ergodic de variabile aleatoare, cu densitatea* $\mathfrak{F}(a)$, *dacă pentru fiecare a punct de continuitate al lui* $\mathfrak{F}(a)$, *şirul de evenimente* $(\{Y_n < a\})_{1 \leqslant n < +\infty}$ *este ergodic, cu densitatea* $\mathfrak{F}(a)$, *cu alte cuvinte dacă pentru orice evenimente* $B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$ *avem*

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P_B(\{Y_n < a\}) = \mathfrak{F}(a) \tag{5.1}$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$.

În particular, şirul $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ este un şir amestecat tare de variabile aleatoare, cu densitatea $\mathfrak{F}(a)$, dacă în fiecare punct de continuitate al lui $\mathfrak{F}(a)$,

$$\lim_{n \to +\infty} P_B(\{Y_n < a\}) = \mathfrak{F}(a) \tag{5.2}$$

pentru orice eveniment $B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$.

S-a văzut în § 4 că procesul sumelor normate de variabile aleatoare independente identic repartizate, ca şi procesul sumelor normate de variabile aleatoare independente a căror dispersii satisfac condiţia simplă (c_3^*), au repartiţia limită invariantă la modificarea aleatoare a timpului. În acest paragraf se caută şi alte clase de procese stocastice, care se bucură de această proprietate, în care scop se demonstrează următoarele teoreme :

TEOREMA 9 ([25]). *Fie* $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare cu valori reale şi* $\{N_r, 1 \leqslant r < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive. Fie de asemenea* $(n_r)_{1 \leqslant r < +\infty}$ *un şir crescător de întregi pozitivi tinzînd la infinit şi* $\mathfrak{F}(a)$ *o funcţie de repartiţie. Dacă avem satisfăcute următoarele condiţii :*

$$(\tilde{c}_1) \qquad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r \to +\infty]{P} \lambda,$$

unde λ *este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare*;

($\tilde{c}_2$) *în toate punctele de continuitate ale lui* $\mathfrak{F}(a)$

$$\lim_{n \to +\infty} P_A(\{Y_n < a\}) = \mathfrak{F}(a)$$

pentru orice eveniment A, $P(A) > 0$. (proprietatea de „strongly mixing") cu densitatea $\mathfrak{F}(a)$) ;

($\tilde{c}_3$) *Pentru un şir de variabile aleatoare* $\{\nu_m, 1 \leqslant m < \infty\}$ *cu proprietatea* $\nu_m : 0 < a_{1,m} < a_{2,m} < \ldots < a_{k,m} < a_{k+1,m} < \ldots$ $(1 \leqslant m < +\infty$

$$|\lambda - \nu_m| < c_m \qquad (1 \leqslant m < +\infty),$$

unde $(c_m)_{1 \leqslant m < +\infty}$ *este un şir de numere pozitive astfel încît* $c_m m \searrow 0$ *cînd* $m \to +\infty$ *avem*

$$\lim_{m \to +\infty} \limsup_{n} P(\{\max_{k} \max_{i \atop \left|\frac{i}{n} - a_{k,m}\right| < c_m} |Y_i - Y_{[na_{k,m}]}| > \varepsilon\}) = 0.$$

Atunci

$$(5.3) \qquad \lim_{r\to+\infty} P(\{Y_{N_r} < a\}) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$.

Demonstraţie. Evident, dacă punem $w_m = 1$, $\theta \equiv 0$, avem în teorema 1 condiţiile (c_2) şi (c_3) sub forma

($\overline{\overline{c}}_2$) În toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$ avem

$$\lim_{n\to+\infty} P_{A_{k,m}}(\{Y_n < a\}) = \mathcal{F}(a)$$

oricare ar fi k, $(1 \leqslant k < +\infty)$ şi m, $(1 \leqslant m < \infty)$ astfel ca $P(A_{k,m}) > 0$.

($\overline{\overline{c}}_3$) Pentru fiecare $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \limsup_{n} P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}(\{\max_{i \atop \left|\frac{i}{n} - a_{k,m}\right| < 2c_m} |Y_i - Y_{[na_{k,m}]}| > \varepsilon\} \cap A_{k,m})\right) = 0.$$

Condiţia (c_4) este evident satisfăcută. Evident, condiţia ($\widetilde{c}_2$) implică ($\overline{\overline{c}}_2$). De asemenea, ($\widetilde{c}_3$) implică ($\overline{\overline{c}}_3$) deoarece

$$\lim_{m\to+\infty} \limsup_{n} P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}(\{\max_{i \atop \left|\frac{i}{n} - a_{k,m}\right| < 2c_m} |Y_i - Y_{[na_{k,m}]}| > \varepsilon\} \cap A_{k,m})\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to+\infty} \limsup_{n} P(\{\max_{k} \max_{i \atop \left|\frac{i}{n} - a_{k,m}\right| < 2c_m} |Y_i - Y_{[na_{k,m}]}| > \varepsilon\}) = 0.$$

Atunci din teorema 1 avem relaţia (5.3.) q.e.d.

Să considerăm acum că λ este o variabilă aleatoare pozitivă astfel încît există un şir de variabile aleatoare cu valori discrete $\{\nu_m, 1 \leqslant m < +\infty\}$ cu proprietăţile următoare:

$$\nu_m : 0 < a_{1,m} < a_{2,m} < \ldots < a_{k,m} < a_{k+1,m} < \ldots, \qquad (1 \leqslant m < +\infty)$$

$$|\lambda - \nu_m| < c_m, \qquad (1 \leqslant m < +\infty),$$

unde $(c_m)_{1 \leqslant m < +\infty}$ este un şir de numere pozitive pentru care $c_m \cdot m \searrow 0$, astfel încît

$$(5.4) \qquad \lim_{m\to+\infty \atop n\to+\infty} (a_{1,m} - 2c_m)\, n = +\infty, \quad \lim_{m\to+\infty \atop n\to+\infty} [a_{1,m}] = +\infty.$$

Remarcă. Dacă λ este o variabilă aleatoare cu valori pozitive discrete $\lambda : 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \ldots$ şi dacă punem $\nu_m \equiv \lambda$, $(1 \leqslant m < +\infty)$, atunci $a_{k,m} \equiv \lambda_k$, $(1 \leqslant m < +\infty)$, şi

$$\lim_{m\to+\infty \atop n\to+\infty} (a_{1,m} - 2c_m)n = \lim_{m\to+\infty \atop n\to+\infty} (\lambda_1 - 2c_m)n = +\infty; \quad \lim_{n\to+\infty} [\lambda_1, n] = +\infty$$

oricare ar fi şirul $(c_m)_{1 \leqslant m < +\infty}$ astfel încît $c_m \cdot m \searrow 0$.

Cu aceste precizări, avem teorema următoare:

TEOREMA 10. ([25]). *Fie* $\{Y_m, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare „tare Cauchy" şi „amestecat tare cu densitatea* $\mathcal{F}(a)$*". Dacă* $\{N_n,$

$1 \leqslant n < +\infty\}$ *este un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive astfel încît*

$$\frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r\to+\infty]{} \lambda,$$

unde $(n_r)_{1\leqslant r<+\infty}$ *este un şir crescător de întregi pozitivi tinzînd la infinit, atunci*

$$\lim_{r\to+\infty} P\left(\{Y_{N_r} < a\}\right) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$.

Demonstraţie. Dacă $\{Y_n,\ 1 \leqslant n < +\infty\}$ este tare Cauchy, atunci dacă $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$ sînt daţi, există $N_0 = N_0(\varepsilon, \eta)$ astfel încît

$$P\Big(\bigcup_{i,j\geqslant N_0} (\{|Y_i - Y_j| > \varepsilon\})\Big) < \eta.$$

Din (5.4) urmează că există $n_0 = n_0(\varepsilon, \eta)$ şi $m_0 = m_0(\varepsilon, \eta)$ astfel încît pentru $n > n_0$ şi $m > m_0$ să avem

$$(a_{1,m} - 2c_m)\, n \geqslant N_0, \quad [a_{1,m} n] \geqslant N_0$$

Atunci pentru fiecare $k = 2, 3, \ldots$ avem

$$(a_{k,m} - 2c_m)\, n \geqslant N_0, \quad [a_{k,m}\, n] \geqslant N_0$$

şi atunci

$$P\Big(\{\max_k \max_{i \atop \left|\frac{i}{n} - a_{k,m}\right| < 2c_m} |Y_i - Y_{[na_{k,m}]}| > \varepsilon\}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant P\Big(\{\max_{i,j\geqslant N_0} |Y_i - Y_j| > \varepsilon\}\Big) < \eta$$

şi deci condiţia ($\tilde{c}_3$) este satisfăcută şi deci din teorema 9 avem afirmaţia teoremei 10. q.e.d.

TEOREMA 11. *Fie* $\{Y_n,\ 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare definite pe cîmpul de evenimente probabilizat* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ *şi fie* $\{N_n,\ 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive, definite pe* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$. *Fie de asemenea* $(n_r)_{1\leqslant r<+\infty}$ *un şir crescător de întregi pozitivi tinzînd la infinit împreună cu r, iar* $\mathcal{F}(a)$ *o funcţie de repartiţie. Presupunem*

$$(\tilde{\tilde{c}}_1) \qquad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow{P} \lambda, \qquad (r \to +\infty),$$

unde λ *este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare.*

($\tilde{\tilde{c}}_2$) *Şirul* $\{Y_n,\ 1 \leqslant n < +\infty\}$ *este amestecat tare, cu densitatea* $\mathcal{F}(a)$ *şi pentru orice şir de evenimente* $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$, *cu* $A_k \in \mathcal{K}_k$, *unde* $\mathcal{K}_k \subset \mathcal{K}$ *este* σ*-algebra generată de* $\{Y_n,\ k \leqslant n < +\infty\}$, *avem*

$$\limsup_n P(A_n \cap A) = P(A) \limsup_n P(A_n)$$

pentru orice eveniment $A \in \mathcal{K}$, $P(A) > 0$.

$(\overset{\approx}{c}_3)$ *Pentru orice* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{s\to+\infty} \limsup_{n} P\,(\{\max_{|i-n|<l_s n}{}_i\, |Y_i - Y_n| > \varepsilon\}) = 0,$$

unde $(l_s)_{1\leqslant s<+\infty}$ *este un şir de numere* $l_s \searrow 0$, $(s \to +\infty)$.

Atunci

$$\lim_{r\to+\infty} P(\{Y_{N_r} < a\}) = \mathfrak{F}(a) \tag{5.5}$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$.

Demonstraţie ([25]). Vom considera din nou teorema 1 cu

$$w_n \equiv 1,\ (1 \leqslant n < +\infty),\quad \theta = 0$$

şi să luăm $\nu_m = \nu_m(\omega) = \dfrac{k}{2^m}$ pentru $\omega \in A_{k,m}$, unde

$$A_{k,m} = \left\{\frac{k-1}{2^m} \leqslant \lambda < \frac{k}{2^m}\right\}$$

şi deci

$$a_{k,m} = \frac{k}{2^m},\quad c_m = \frac{1}{2^m},\quad (1 \leqslant k < +\infty,\ 1 \leqslant m < +\infty).$$

Evident, condiţiile (c_1), (c_2) şi (c'_4) din teorema 1 sînt satisfăcute. Să arătăm că este îndeplinită şi condiţia (c_3). Pe baza condiţiei $(\overset{\approx}{c}_3)$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$, fie s un număr natural astfel încît $l_s < \eta$ şi

$$\limsup_{n} P(\{\max_{|i-n|<l_s n}{}_i\, |Y_i - Y_n| > \varepsilon\}) < \eta. \tag{5.6}$$

Fie m_0 un număr natural astfel încît $m_0 l_s > 2$ şi pentru $m > m_0$

$$P(\{\lambda < m2^{-m}\}) < \eta,\quad P(\{\lambda \geqslant m\}) < \eta. \tag{5.7}$$

Pentru fiecare $m \geqslant m_0$ şi $k \geqslant m$ şi pentru n suficient de mare avem

$$|[nk2^{-m}] - i| < l_s\,[nk2^{-m}]$$

pentru fiecare i din intervalul

$$n(k-2)\,2^{-m} < i < n(k+2)\,2^{-m}.$$

Atunci din condiţia $(\overset{\approx}{c}_2)$ şi din inegalităţile (5.6) şi (5.7) avem

$$\limsup_{n} P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}(\{\max_{\left|\frac{i}{n}-\frac{k}{2^m}\right|<\frac{2}{2^m}}{}_i\, |Y_i - Y_{[nk2^{-m}]}| > \varepsilon\} \cap A_{k,m})\right) \leqslant P(\{\lambda < m2^{-m}\}) +$$

$$+ P(\{\lambda \geqslant m\}) + \sum_{k=m}^{m2^m} \limsup_{n} P(\{\max_{\left|\frac{i}{n}-\frac{k}{2^m}\right|<\frac{2}{2^m}}{}_i\, |Y_i - Y_{[nk2^{-m}]}| > \varepsilon\}) P(A_{k,m}) <$$

$$< 2\eta + \eta \sum_{k=m}^{m2^m} P(A_{k,m}) < 3\eta$$

adică tocmai condiţia (c_3). Din teorema 1 rezultă (5.5). q.e.d.

Remarcă. Teorema 11 a fost demonstrată direct de către W.Richter [67].

§ 6. ŞIRURI STABIL ERGODICE DE EVENIMENTE

În cazul acestui paragraf se extind şirurile ergodice de evenimente prin noţiunea de şir stabil ergodic de evenimente al căror studiu permite să se tragă cîteva concluzii asupra posibilităţii trecerii la timp aleator în studiul repartiţiei limită a proceselor stocastice, într-o altă direcţie decît cea indicată de teorema 1 şi de consecinţele ei.

DEFINIŢIA 4. *Fie un cîmp de evenimente probabilizat* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$. *Şirul de evenimente* $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty} \subset \mathcal{K}$ *se numeşte stabil ergodic dacă limita*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(A_n \cap B) = Q(B) \tag{6.1}$$

există pentru orice eveniment $B \in \mathcal{K}$.

DEFINIŢIA 5. *Şirul de variabile aleatoare* $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *se numeşte stabil ergodic dacă pentru orice eveniment* $B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$ *avem*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P_B(\{Y_n < a\}) = \mathcal{F}_B(a) \tag{6.2}$$

pentru orice a care este punct de continuitate al funcţiei de repartiţie $\mathcal{F}_B(a)$.

Fie acum $\chi_n = \chi_{A_n}$ indicatorul mulţimii A_n. Avem următoarea teoremă:

TEOREMA 12. *Şirul* $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty} \subset \mathcal{K}$ *este un şir ergodic de evenimente dacă şi numai dacă şirul* $\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_n\right)_{1\leqslant N<+\infty}$ *converge slab în spaţiul Hilbert* $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P)$, *adică pentru orice* $\eta \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *există limita*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} < \chi_n, \eta > = A(\eta). \tag{6.3}$$

Demonstraţie. Evident, dacă β este indicatorul mulţimii B, $B \in \mathcal{K}$, atunci

$$< \chi_n, \beta > = P(A_n \cap B).$$

Astfel (6.3) se reduce la (6.1) dacă înlocuim pe β în locul lui η. Deci pentru a demonstra teorema este suficient să arătăm că dacă limita (6.3) există, oricare ar fi indicatorul η, ea există de asemenea dacă η este un element arbitrar al lui $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Evident, dacă limita (6.3) există pentru fiecare indicator η, ea există de asemenea dacă η este un element arbitrar al lui $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P)$ care ia numai un număr finit de valori. Deoarece pentru fiecare variabilă aleatoare η pentru care $\mathfrak{M}_1(\eta) < +\infty$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi o variabilă aleatoare care ia numai un număr finit de valori astfel încît $\mathfrak{M}_1(|\eta - \eta_1|) < \varepsilon$ urmează că (6.3) are loc nu numai pentru fiecare $\eta \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P)$, dar chiar pentru fiecare η pentru care $\mathfrak{M}_1(\eta) < +\infty$. q.e.d.

Ca o consecință a acestei teoreme obținem :

TEOREMA 13. *Dacă* $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}\subset\mathcal{K}$ *este un șir stabil ergodic de evenimente, adică dacă limita*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(A_n\cap B)=Q(B),$$

există pentru orice $B\in\mathcal{K}$, *atunci* Q *este o măsură pe* $\mathcal{K}$, *absolut continuă în raport cu* P *și deci poate fi reprezentată sub forma*

$$Q(B)=\int_B\alpha\mathrm{d}P,\tag{6.4}$$

unde $\alpha=\alpha(\omega)$ *este o variabilă aleatoare,* $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

Demonstrație. Evident, $A(\eta)$ definit de (6.3) este o aplicație liniară mărginită definită pe $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{K},P)$ și atunci există un $\alpha\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{K},P)$ astfel încît $A(\eta)$ poate fi reprezentat sub forma

$$A(\eta)=<\alpha,\eta>.$$

Evident, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Urmează că, notînd cu β indicatorul lui $B\in\mathcal{K}$, avem

$$Q(B)=A(\beta)=<\alpha,\beta>=\int_B\alpha\,\mathrm{d}P.$$

Deci Q este o măsură absolut continuă în raport cu P. q.e.d.

În cazul particular în care variabila aleatoare $\alpha=\alpha(\omega)$, care se numește densitate locală a șirului stabil ergodic de evenimente $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ este constantă, $\alpha(\omega)\equiv\alpha$, atunci $Q(B)=\alpha P(B)$, pentru fiecare $B\in\mathcal{K}$, și deci șirul de evenimente este un șir ergodic cu densitatea α, în sensul definiției 1.

Să observăm acum că definiția unui șir stabil ergodic de evenimente poate fi formulată de asemenea în următoarea formă echivalentă : Șirul $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ de evenimente este stabil ergodic dacă pentru fiecare eveniment B, $B\in\mathcal{K}$, $P(B)>0$ există

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P_B(A_n)=q(B).\tag{6.5}$$

Evident, dacă $P(B)>0$, atunci (6.1) și (6.5) cu

$$q(B)=\frac{Q(B)}{P(B)}$$

sînt echivalente. Dacă $P(B)=0$, atunci (6.1) are loc cu $Q(B)=0$ pentru orice șir $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$.

Vom da în continuare un criteriu de stabilitate ergodică a evenimentelor care este o generalizare a criteriului corespunzător pentru șirurile de evenimente ergodice exprimat de teorema 6.

TEOREMA 14. *Fie* $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ *un şir de evenimente astfel încît limita*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(A_n\cap A_k) = Q_k \qquad (k=1,2,\ldots), \tag{6.6}$$

există. Atunci şirul $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ *este stabil ergodic.*

Demonstraţie. Fie $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ subspaţiul generat de şirul $\{\chi_n, {}_{1\leqslant n<+\infty}\}$, unde χ_n este indicatorul evenimentului A_n. Fie $\mathcal{H}_2 = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P)\ominus\mathcal{H}_1$. Orice element $\eta\in\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}\, P)$ admite descompunerea unică

$$\eta = \eta_1 + \eta_2, \qquad \eta_1\in\mathcal{H}_1,\ \eta_2\in\mathcal{H}_2 .$$

Să arătăm că dacă (6.6) există, atunci limita

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} <\chi_n, \eta> = L(\eta) \tag{6.7}$$

există pentru fiecare $\eta\in\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că (6.7) există dacă $\eta = \eta_1\in\mathcal{H}_1$, deoarece dacă $\eta = \eta_2\in\mathcal{H}_2$, atunci (6.7) are loc cu $L(\eta) = 0$. De asemenea dacă limita există pentru $\eta = \eta_1$ şi $\eta = \eta_2$, evident există pentru $\eta = \eta_1 + \eta_2$. Însă dacă η_1 este combinaţie liniară a unui număr finit de variabile aleatoare din şirul $\{\chi_n, {}_{1\leqslant n<+\infty}\}$, atunci, evident, (6.7) există. Fie acum ξ_1 un element arbitrar al lui $\mathcal{H}_1$. Atunci fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde o combinaţie liniară $\sum_{k=1}^{m} a_k\chi_k$ astfel încît

$$\left\|\eta_1 - \sum_{k=1}^{m} a_k\chi_k\right\| < \varepsilon,$$

de unde, ţinînd cont de inegalitatea lui Schwartz şi de faptul că $\|\chi_n\| \leqslant 1$, obţinem

$$\left| <\chi_n, \eta_1> - \sum_{k=1}^{m} a_k <\chi_n, \chi_k> \right| < \varepsilon .$$

Urmează că limita (6.7) există şi din teorema 12 rezultă teorema 13.q.e.d.

Să punem

$$q_k = \frac{Q_k}{P(A_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

dacă $P(A_k) > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, unde Q_k sînt definiţi de (8).

Dacă toate numerele q_k $(k = 1, 2, \ldots)$, sînt egale, nu este sigur că şirul $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ de evenimente este ergodic. Aceasta este adevărat totuşi dacă $A_1 = \Omega$, după cum rezultă din teorema 5. O altă cale de a exprima acest fapt este conţinută în teorema următoare :

TEOREMA 15. *Fie* $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ *un şir stabil ergodic de evenimente astfel încît*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(A_n) = q_0$$

și

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(A_n \cap A_k) = q_k P(A_k) \qquad (k = 1,2, \ldots).$$

Atunci, șirul de evenimente $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ *este ergodic dacă și numai dacă numerele* q_k, $(0 \leqslant k < +\infty)$ *sînt egale între ele.*

Demonstrație. Necesitatea urmează imediat din definiția șirurilor ergodice de evenimente. Pentru a demonstra suficiența, fie α densitatea locală a șirului de evenimente $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$. Dacă $q_k = q \neq 0$, $(k = 1,2, \ldots)$, atunci evident

$$(6.8) \qquad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} < \alpha, \chi_k > = q \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} < 1, \chi_k >,$$

unde χ_k este indicatorul lui A_k. Evident, (6.8) se mai poate scrie sub forma

$$(6.9) \qquad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} < \alpha, \chi_k > = q \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P(A_k).$$

Trecînd la limită obținem din (6.8) $< \alpha, \alpha > = q < 1, \alpha >$ iar din (6.9), (6.10) $< \alpha, \alpha > = q^2$. Urmează că $q = < 1, \alpha >$ și deci $< \alpha, \alpha > = < 1, \alpha >^2$ adică

$$\int_\Omega \alpha^2 \mathrm{d}P = \left(\int_\Omega \alpha \mathrm{d}P \right)^2$$

ceea ce implică faptul că α este constantă aproape peste tot și deci conform cu (6.10) rezultă $\alpha \equiv q$. Cazul $q = 0$ este trivial. q.e.d.

TEOREMA 16. *Fie* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ *un cîmp de evenimente probabilizat și* $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ *un șir stabil ergodic de evenimente. Fie* P^* *o probabilitate pe* $\mathcal{K}$ *absolut continuă în raport cu* P. *Atunci șirul* $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ *este stabil ergodic și față de cîmpul de evenimente probabilizat* $\{\Omega, \mathcal{K}, P^*\}$ *cu aceeași densitate locală.*

Demonstrație. Să presupunem

$$P^*(A) = \int_A \rho \, \mathrm{d}P \qquad (A \in \mathcal{K}),$$

unde $\rho = \rho(\omega)$ este o variabilă aleatoare nenegativă și

$$\int_\Omega \rho \mathrm{d}P = 1.$$

Urmează că

$$P^*(A_n \cap B) = \int_B \chi_n \rho \, \mathrm{d}P = < \chi_n, \rho\beta >,$$

unde χ_n este indicatorul lui A_n, $(1 \leqslant n < +\infty)$, iar β indicatorul lui B, $B \in \mathcal{K}$. Ținînd cont acum de remarca făcută în cursul demonstrației teoremei 12 că limita (6.3) există nu numai dacă $\eta \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P)$ ci de asemenea dacă $\mathcal{M}_1(\eta)$ există și avem în acest caz

$$A(\eta) = <\alpha, \eta >,$$

unde α este densitatea locală a şirului stabil ergodic de evenimente $(A_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ relativ la cîmpul de evenimente probabilizat $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$, urmează că

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^{*}(A_n \cap B) = < \alpha, \rho\beta > = \int_B \alpha \mathrm{d} P^{*}$$

şi deci şirul de evenimente $(A_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ este stabil ergodic cu aceeaşi densitate locală α şi faţă de cîmpul de evenimente probabilizat $\{\Omega, \mathcal{K}, P^{*}\}$. q.e.d.

Şirurile stabil ergodice de evenimente constituie o extensiune a şirurilor de evenimente stabile introduse de A. Rényi [57] în anul 1963 :

DEFINIŢIA 6. *Şirul de evenimente* $(A_n)_{1 \leqslant n < +\infty} \subset \mathcal{K}$ *se numeşte stabil dacă limita*

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n \cap B) = Q(B)$$

există pentru fiecare eveniment $B \in \mathcal{K}$.

În acelaşi mod ca şi teoremele 14 şi 15 se demonstrează respectiv :

TEOREMA 17 [57]. *Fie* $(A_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ *un şir de evenimente astfel încît limita*

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n \cap A_k) = Q_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

există. Atunci şirul $(A_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ *este stabil.*

TEOREMA 18 [57]. *Fie* $(A_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ *un şir stabil de evenimente astfel încît*

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = q_0$$

şi

$$\lim_{m \to +\infty} P(A_n \cap A_k) = q_k \, P(A_k).$$

Atunci şirul de evenimente $(A_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ *este amestecat tare dacă şi numai dacă numerele* q_k, $(1 \leqslant k < +\infty)$ *sînt toate egale între ele.*

Vom vedea în continuare cît este de bogată clasa şirurilor stabil ergodice de evenimente în comparaţie cu clasa şirurilor stabile de evenimente pe care o conţine ca o subclasă.

Fie acum $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ un proces stocastic Markov omogen, definit pe cîmpul de evenimente probabilizat $\{R, \mathcal{B}, P\}$, unde R reprezintă mulţimea numerelor reale, iar $\mathcal{B}$ corpul mulţimilor boreliene din R. Presupunem că probabilitatea de trecere $P^n(x, A)$ din punctul $x \in R$ în mulţimea $A \in \mathcal{B}$ după n paşi, este o probabilitate regulată, adică satisface condiţiile:

1° $P^n(x, A)$ este măsurabilă ca funcţie de x pentru orice $A \in \mathcal{B}$

2° $P^n(x, A)$ este o probabilitate pe corpul $\mathcal{B}$ pentru orice $x \in R$.

Deoarece s-a propus procesul stocastic de tip Markov, are loc condiţia lui Chapman-Kolmogorov

$$3° \quad P^{n+m}(x, A) = \int_R P^n(x, \mathrm{d}y) \, P^m(y, A)$$

pentru orice n, m naturali.

Să notăm cu W spaţiul Banach al funcţiilor complexe aditive (σ-aditive) definite pe corpul borelian $\mathcal{B}$; norma unui element din acest spaţiu fiind dată de variaţia totală a elementului respectiv pe R : $\|x\| = \text{Var}\, x$, $(x \in W)$. Să punem pentru orice $x \in W$

$$(6.11) \qquad y(A) = \int_R x(\mathrm{d}t)\, P^1(t, A).$$

Aplicaţia $T : W \to W$, $y = Tx$, dată de relaţia (6.11) este un operator uniform mărginit

$$(6.12) \qquad \|T^n\| = 1.$$

Să luăm ca funcţie x, funcţia definită prin egalitatea

$$(6.13) \qquad x(A) = P^1(t, A),$$

unde t rămîne fix. Atunci

$$Tx = P^2(t, A)\,; \quad T^n x = P^{n+1}\,(t, A).$$

Se demonstrează următoarea teoremă :

Teorema 19. *Fie* $\{Y_n,\ 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un proces stocastic Markov omogen definit pe cîmpul de evenimente probabilizat* $\{R, \mathcal{B}, P\}$ *şi fie o mulţime arbitrară* $A \in \mathcal{B}$. *Dacă operatorul* T *definit de relaţiile* (6.11), (6.13) *este cvasicompact*[1]), *atunci şirul de evenimente* $(\{Y_n \in A\})_{1 \leqslant n < +\infty}$ *este stabil ergodic. Dacă 1 este singura valoare proprie de modul 1 a operatorului* T, *atunci şirul de evenimente* $(\{Y_n \in A\})_{1 \leqslant n < +\infty}$ *este stabil, iar dacă 1 este o valoare proprie de multiplicitate 1 a operatorului, atunci şirul de evenimente* $(\{Y_n \in A\})_{1 \leqslant n < +\infty}$ *este ergodic sau chiar tare amestecat dacă 1 este singura valoare proprie de modul 1 a operatorului* T.

Demonstraţie. Fie $A \in \mathfrak{B}$ şi să notăm

$$A_n = \{Y_n \in A\}\,; \quad P(\{Y_n \in A\}) = P_n\,(A).$$

Procesul stocastic fiind de tip Markov omogen, avem

$$(6.14) \quad P(A_n \cap A_k) = \int_A P_k\,(\mathrm{d}x)\, P^{n-k}(x, A) = \int_A P^{n-k}(x, A) \int_R P_0(\mathrm{d}t) P^k(t, \mathrm{d}x).$$

Aplicînd teorema ergodică uniformă în cazul în care operatorul T, presupus cvasicompact, este definit de către (6.11) şi (6.13), avem că [51], [36] :

α) Relaţia

$$(6.15) \qquad \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P^j\,(t, A) - P^\infty\,(t, A) \right| \leqslant \frac{M}{n}$$

are loc pentru orice $t \in R$, $A \in \mathcal{B}$ şi $n \geqslant 1$, unde $P^\infty\,(t, A)$ este o probabilitate pentru orice t, iar M o constantă convenabil aleasă ;

---

[1]) Fie E un spaţiu Banach şi T un operator liniar şi continuu al spaţiului E în el însuşi. T este compact dacă $T(X)$ este o mulţime relativ compactă pentru orice mulţime mărginită $X \subset E$. Operatorul T este cvasicompact dacă există un întreg $m \geqslant 1$ şi un operator compact S pentru care : $\|T^m - S\| < 1$.

β) Dacă 1 este singura valoare proprie de modul 1 a operatorului T, atunci pentru orice $t \in R$, $A \in \mathfrak{B}$ şi $n \geqslant 1$,

$$|P^n(t, A) - P^\infty(t, A)| \leqslant \frac{M}{(1+\varepsilon)^n}, \tag{6.16}$$

unde ε şi M sînt două constante strict pozitive convenabil alese;

γ) Dacă 1 este o valoare proprie de multiplicitate 1,

$$P^\infty(t, A) = P^\infty(A). \tag{6.17}$$

Ţinînd cont acum de (6.14) şi (6.15) obţinem

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=k+1}^{N+k} P(A_n \cap A_k) = \int_A \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=k+1}^{N+k} P^{n-k}(x, A) \int_R P_0(\mathrm{d}t) P^k(t, \mathrm{d}x) =$$

$$= \int_A \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^n(x, A) \int_R P_0(\mathrm{d}t) P^k(t, \mathrm{d}x) = \int_A P^\infty(x, A) \int_R P_0(\mathrm{d}t) P^k(t, \mathrm{d}x). \tag{6.18}$$

Deoarece însă

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=k+1}^{N+k} P(A_n \cap A_k) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(A_n \cap A_k) \right| =$$

$$= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=N+1}^{N+k} P(A_n \cap A_k) - \sum_{n=1}^{k} P(A_n \cap A_k) \right| \leqslant \frac{2k}{N}$$

din (6.18) rezultă

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(A_n \cap A_k) = \int_A P^\infty(x, A) \int_R P_0(\mathrm{d}t) P^k(t, \mathrm{d}x), \quad (k=1,2,\ldots) \tag{6.19}$$

de unde, pe baza teoremei 14, rezultă că şirul de evenimente $(A_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ este stabil ergodic.

Să presupunem acum că 1 este singura valoare proprie de modul 1 a operatorului T. Ţinînd cont de (6.14) şi (6.16) obţinem

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n \cap A_k) = \int_A \lim_{n\to+\infty} P^{n-k}(x, A) \int_R P_0(\mathrm{d}t) P^k(t, \mathrm{d}x) =$$

$$= \int_A P^\infty(x, A) \int_R P_0(\mathrm{d}t) P^k(t, \mathrm{d}x), \tag{6.20}$$

de unde, pe baza teoremei 17, rezultă că şirul de evenimente $(A_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ este în acest caz stabil.

În sfîrşit, să presupunem că 1 este o valoare proprie de multiplicitate 1 a operatorului T. În acest caz, din (6.17) şi (6.19) rezultă

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(A_n \cap A_k) = P^\infty(A) \int_A P_k(\mathrm{d}x) = P^\infty(A) P(A_k) \tag{6.21}$$

$$(k = 1, 2, \ldots)$$

și să observăm în plus că pe baza relației (6.15) avem în acest caz

(6.22)
$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(A_n)=\int_R P_0(\mathrm{d}t)\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P^n(t,A)=P^\infty(A)\int_R P_0(\mathrm{d}t)=P^\infty(A).$$

Din (6.21) și (6.22), pe baza teoremei 15, rezultă că în acest caz șirul de evenimente $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ este ergodic cu densitatea $P^\infty(A)$.

Dacă acum ne menținem în cazul în care 1 este o valoare proprie de multiplicitate 1 a operatorului T și presupunem în plus că 1 este singura valoare proprie de modul 1 a operatorului T, din (6.17) și (6.20) urmează că

$$\lim_{N\to+\infty}P(A_n\cap A_k)=P^\infty(A)P(A_k)\qquad(k=1,2,\ldots)\tag{6.23}$$

și deoarece în acest caz avem și egalitatea

$$\lim_{n\to+\infty}P(A_n)=\int_R P_0(\mathrm{d}t)\lim_{n\to+\infty}P^n(t,A)=P^\infty(A)\tag{6.24}$$

teorema 17 ne asigură că șirul de evenimente $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ este în acest caz amestecat tare cu densitatea $P^\infty(A)$. q.e.d.

Să considerăm cazul particular al unui lanț Markov omogen finit, în care probabilitățile condiționate $P^n(x, A)$ sînt definite pe produsul $N_r\times\mathfrak{A}(N_r)$, unde $N_r=\{1,2,\ldots,r\}$, iar $\mathfrak{A}(N_r)$ mulțimea părților mulțimii N_r. În acest caz probabilitățile condiționate $P^n(x, A)$ sînt complet determinate de matricile p_{ij}^n, unde

$$p_{ij}^n=P^n(i,\{j\}),\qquad i\in N_r,\ j\in N_r.$$

Spațiul Banach W poate fi identificat cu mulțimea șirurilor finite $(x_1, x_2, \ldots x_r)$ formate cu r numere complexe, unde

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{r}|x_i|.$$

Deoarece spațiul Banach W este un spațiu de dimensiune finită, orice mulțime mărginită este relativ compactă. Prin urmare operatorul T este compact și deci evident și cvasicompact. În acest caz particular, dacă Y_n reprezintă starea lanțului Markov omogen finit la momentul n, iar $A\in\mathfrak{A}(N_r)$, există π_{ij} astfel încît

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}p_{ij}^n=\pi_{ij},\qquad i\in N_r,\ j\in N_r$$

și pe baza teoremei 18, șirul $(A_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ este stabil ergodic, unde s-a notat $A_n=\{Y_n\in A\}$ și se calculează

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(A_n\cap A_k)=\sum_{n=1}^{r}p_i^0\left[\sum_{j\in A}p_{ij}^k\left(\sum_{h\in A}\pi_{jh}\right)\right],$$

unde p_i^0 reprezintă probabilitatea stării i la momentul inițial.

După cum se ştie [36], operatorul T definit de relaţiile (6.11), (6.13) este cvasicompact, în afară de cazul particular de mai sus, şi în cazul în care

$$\text{(a)} \qquad P^{n_0}(x, A) \leqslant c\, P^{n_0}(y, A)$$

pentru un întreg n_0 anumit şi pentru toţi $x \in R$, $y \in R$, $A \in \mathscr{B}$; sau în cazul în care:

$$\text{(b)} \qquad P^{n_0}(x, A) \leqslant 1 - \varepsilon$$

cu $P(A) \leqslant \varepsilon$, unde P este o probabilitate, $\varepsilon > 0$, pentru un anumit întreg n_0 şi pentru toţi $x \in R$, $A \in \mathscr{B}$ (condiţia lui W. Doeblin). În ambele cazuri teorema 19 are loc.

Teorema 19 arată deci, printre altele, că dacă operatorul T ataşat prin relaţiile (6.11), (6.13) unui proces Markov omogen $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ este cvasicompact şi admite pe 1, presupus de multiplicitate 1, drept singura valoare proprie de modul 1, atunci şirul de variabile aleatoare $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ este amestecat tare şi din teoremele 1, 9 şi 10 se poate vedea care sînt condiţiile pe care trebuie să le aibe procesul Markov omogen considerat pentru ca repartiţia limită a procesului Markov omogen cu timp aleator $\{Y_{N_n}, 1 \leqslant n < +\infty\}$ să coincidă cu repartiţia limită a procesului dat $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$, unde $\{N_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ este un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive definite pe $\{R, \mathscr{B}, P\}$ astfel încît

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} \lambda \qquad (n \to +\infty),$$

unde λ este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare.

În ceea ce priveşte şirurile ergodice de variabile aleatoare, acestea au proprietatea de a-şi menţine invariantă repartiţia limită medie la o translaţie aleatoare a timpului:

TEOREMA 20. *Fie* $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *un şir ergodic de variabile aleatoare cu densitatea* $\mathscr{F}(a)$. *Atunci, oricare ar fi variabila aleatoare* λ *cu valori întregi pozitive, şirul de variabile aleatoare* $\{Y_{n+\lambda}, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *este ergodic cu aceeaşi densitate* $\mathscr{F}(a)$.

Demonstraţie. Din ipoteză, pentru orice eveniment B, $P(B) > 0$, avem

$$\text{(6.25)} \qquad \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P_B(\{Y_n < a\}) = \mathscr{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathscr{F}(a)$. Fie λ o variabilă aleatoare cu valori întregi pozitive

$$\lambda : 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \ldots; \qquad \lambda_k \in N$$

$$P(\{\lambda = \lambda_k\}) > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

şi să notăm

$$B_k = \{\lambda = \lambda_k\} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ținînd cont de (6.25) și de faptul că

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_{B_k}(\{Y_n < a\}) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_{B_k}(\{Y_{n+\lambda_k} < a\})\right| =$$

$$= \frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N} P_{B_k}(\{Y_n < a\}) - \sum_{n=\lambda_k}^{N+\lambda_k} P_{B_k}(\{Y_n < a\})\right| \leqslant \frac{2\lambda_k}{N}$$

rezultă că

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(\{Y_{n+\lambda} < a\}) = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{+\infty} P(\{Y_{n+\lambda} < a\} \cap B_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k) \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_{B_k}(\{Y_{n+\lambda_k} < a\}) = \mathfrak{F}(a)\sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k) = \mathfrak{F}(a)$$

în toate puncte de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$. q.e.d.

Ținînd cont de teorema 19 are loc următorul corolar:

COROLAR. *Fie* Y_n *starea unui proces Markov omogen la momentul* n $(1 \leqslant n < +\infty)$ *și fie operatorul* T *atașat acestui proces, definit de realațiile* (6.11), (6.13). *Dacă operatorul* T *este cvasicompact (în particular pentru lanțurile Markov omogene cu un număr finit de stări sau pentru procesele Markov omogene de tip Doeblin) și dacă 1 este o valoare proprie de multiplicitate 1 a operatorului* T, *atunci există funcția de repartiție* $\mathfrak{F}(a)$ *astfel încît*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(\{Y_{n+\lambda} < a\}) = \mathfrak{F}(a)$$

în orice punct de continuitate a lui $\mathfrak{F}(a)$, *oricare ar fi variabila aleatoare* λ *cu valori întregi pozitive.*

După cum s-a văzut, studiul invarianței repartiției limită a proceselor stocastice la introducerea timpului aleator în locul timpului obișnuit, a impus studiul invarianței repartiției limită a proceselor stocastice atunci cînd se trece de la cîmpul de evenimente probabilizat inițial $\{\Omega\ \mathcal{K},\ P\}$ la cîmpurile $\{\Omega, \mathcal{K}, P_B\}$, $B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$ sau, mai general, la cîmpul de evenimente probabilizat $\{\Omega, \mathcal{K}, Q\}$, unde Q, este o probabilitate absolut continuă în raport cu P. Toate acestea se încadrează în problema mai generală a studiului acelor proprietăți ale proceselor stocastice care rămîn invariante față de un cîmp de evenimente probabilizat $\{\Omega, \mathcal{K}, P^n\}$ a cărui probabilitate variază în timp. Acest lucru este cerut atît de studiul automatelor aleatoare [49] care pune în evidență o schemă informațională în care ambele cîmpuri de evenimente care intervin (sursa și recepția) sînt înzestrate cu probabilități corelate care variază în timp, și de mecanica statistică a sistemelor neconservative [26], [50], [24] care impune un spațiu al fazelor care este tot un cîmp de evenimente cu probabilitate variabilă în timp astfel încît probabilitatea unui anumit eveniment, la un anumit moment, este absolut continuă în raport cu probabilitatea evenimenului respectiv la momentul imediat anterior.

Primită la redacție la 7 februarie 1967

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România, Str. M. Eminescu nr. 47,
București

BIBLIOGRAFIE

1. Abbott J. H., Blum J. R., *On a theorem of Rényi concerning mixing sequences of sets*. Ann. Math. Satist. **32**, 257—260 (1961).
2. Anscombe F. J., *Large-sample theory of sequential estimation.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **48**, 600—607 (1952).
3. Barndorff-Nielsen O., *On the limit distribution of the maximum of a random number of independent random variables.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., *15*, 399—403 (1964).
4. Berman S. M., *Limiting distribution of the maximum term in sequences of dependent random variables.* Ann. Math. Statist., **33**, 894—908 (1962).
5. — *Limiting distribution of the maximum of a diffusion process.* Ann. Math. Statist., **35**, 319—329 (1964).
6. Blackwell D., *On an equation of Wald.* Ann. Math. Statist., **17**, 84—87 (1946).
7. Blum J. R., *A note on transformations which are mixing of all orders.* University New Mexico. Department of Mathematics. Technical Report No. 99. November (1965).
8. Blum J. R., Hanson D. L., *A note on mixing conditions for Gaussian processes.* University New Mexico. Department of Mathematics. Technical Report No. 5, May (1962).
9. Blum J. R., Hanson D. L., Rosenblatt J. I., *On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie **1**, 389—393 (1963).
10. Blum J. R., Rosenblatt J. I., *On some aspects of sequential estimation.* University New Mexico, Department of Mathematics. Technical Report No. 37, August (1963).
11. Cramer H., *Mathematical methods of statistics.* Princeton, 1946.
12. Dînkin E. B., *Markovskie proţesi*, Moskva, 1963.
13. Dobruşin R. L., *Lema o predele splojnoi slucioinoi funcţii.* Usp. mat. nauk, **10**, 157—159 (1955).
14. Doob J. L., *Stochastic processes.* New York, 1953.
15. Feller W., *An introduction to probability theory and its applications.* New York-London, 1950.
16. Gnedenko B. V., *Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire.* Ann. Math., **44**, 423—453 (1943).
17. Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N., *Predelnîe raspredelenia dlia sum nezavisimîh sluciainîh velicin.* Moskva, 1949.
18. Guiaşu S., *La répartition asymptotique pour les suites aléatoires.* C. R. Acad. Sci., Paris, **256**, 3813—3815 (1963).
19. — *Cîteva cercetări legate de teorema lui Anscombe asupra repartiţiei asimptotice a şirurilor aleatoare de variabile aleatoare.* St. cerc. mat., **14**, 333—357 (1963).
20. — *La répartition asymptotique des sommes aléatoires de variables aléatoires indépendantes non identiquement distribuée.* Atti Acad. Naz. Lincei, **34**, 504—510 (1963).
21. — *Asymptotic distribution for random sequences of random variables.* Revue math. pures et appl., **7**, 661—671 (1963).
22. — *Sur la répartition asymptotique pour les suites aléatoires de variables aléatoires.* C.R. Acad. Sci. Paris, **259**, 973—976 (1964).
23. — *On limiting distribution for stochastic processes with random discrete time.* Revue Roumaine math. pures et appl., **10**, 481—503 (1965).
24. — *Sur le théorème H de L. Boltzmann.* C.R. Acad. Sci. Paris, **261**, 1179—1181 (1965).
25. — *Asymptotic distribution for stochastic processes with random discrete time.* Transactions of Fourth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, Prague (1966), p. 307—322.
26. — *La Mécanique statistique non conservative.* Revue Roumaine math. pures et appl., **11** (1966).
27. Guiaşu S., Theodorescu R., *Teoria matematică a informaţiei.* Edit. Acad. Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1966.
28. Halmos P. R., *Lectures on ergodic theory.* Tokyo, 1956.
29. Hincin A. I., *Matematiceskie osnovania statisticeskoi mehaniki.* Moskva, 1943.
30. Ionescu Tulcea C. T., *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues.* Ann. Math., **52**, 140—147 (1950).
31. Kendall M. G., Stuart A., *The advanced theory of statistics.* vol. 2. *Inference and relationship.* London, 1964.

32. Kolmogorov A. N., *Teorema o shodimosti uslovnih matematiceskih ojidanii.* Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens Hongrois. Budapest (1952), p. 367–386.

33. Kryloff N., Bogoliouboff N., *La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la Mécanique non linéaire.* Ann. Math., **38**, 65–113 (1937).

34. Lévy P., *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Paris, 1937.

35. Lindley D. V., *The theory of queues with a single server.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **48**, 277–289 (1952).

36. Loève M., *Probability theory.* New York, 1955.

37. Maravall Casesnoves D., *La adición de variables aleatorias en numero aleatorio y el proceso estocastico de la descendencia de un mismo progenitor.* Rev. matem. hisp. amer., **18**, 214–243 (1958).

38. — *Nuevos modelos de distribuciones y de procesos estocasticos.* Rev. R. Acad. Ciencias Madrid, **52**, 413–556 (1958).

39. — *Algunos nuevos procesos estocasticos y sus aplicaciones,* Rev. R. Acad. Ciencias Madrid, **53**, 3–125 (1959).

40. Marinescu G., *Spaţii vectoriale normate.* Edit. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1956.

41. Mogyoródi J., *On limiting distribution for sums of a random number of independent random variables.* Publications Math., Inst. Hung. Acad. Sci., **6**, 365–371 (1961).

42. — *A central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables.* Publications Math. Inst. Hung. Acad. Sci., **7**, 409–424 (1962).

43. — *On the law of large numbers for the sum of a random number of independent random variables.* Annales Univ. Scient. Budapest Rolando Eötvös Nominatae, **8**, 33–38 (1965).

44. — *On a consequence of a mixing theorem of A. Rényi.* Publications Math. Inst. Hung. Acad. Sci., **9**, 263–268 (1964).

45. — *Some limit theorems occurring in the theory of sequential estimations.* Transactions of Fourth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes. Prague (1966), p. 463–470.

46. Nicolescu M., *Analiza matematică.* vol. 3, Edit. tehnică, Bucureşti, 1960.

47. Onicescu O., *Calculul probabilităţilor.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1956.

48. — *Nombres et systèmes aléatoires.* Editions Eyrolles Paris, Edit. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1964.

49. Onicescu O., Guiaşu S., *Finite abstract random automate.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, **3**, 279–285 (1965).

50. — *Principes mathématiques de la Mécanique statistique* (va apărea)

51. Onicescu O., Mihoc G., Ionescu Tulcea C.T., *Calculul probabilităţilor şi aplicaţii.* Edit. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1956.

52. Prohorov I. V., *Shodimosti sluciainih profesov i predelnie teoremi teorii veroiatnostei.* Teoria veroiatn., **1**, 177–238 (1956).

53. Rényi A., *K teorii predelnih teorem dlia sum nezavisimih sluciainih velicin.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **1**, 99–108 (1950).

54. — *On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **8**, 193–199 (1957).

55. — *On mixing sequence of sets.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **9**, 215–228 (1958).

56. — *On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **11**, 97–102 (1960).

57. — *On stable sequences of events.* Sankhyā, **25** A, 293–302 (1963).

58. Rényi A., Révész P., *On mixing sequences of random variables.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **9**, 389–393 (1958).

59. Révész P., *On the limit distributions of sums of dependent random variables.* Annales Univ. Scient. Budapest Rolando Eötvös Nominatae, **1**, 135–142 (1958).

60. — *A generalization of the zero-one law.* Annales Univ. Scient. Budapest Rolando Eötvös Nominatae, **2**, 111–113 (1959).

61. — *A limit distribution theorem for sums of dependent random variables.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **10**, 125–131 (1959).

62. Richter W., *Ein zentraler Grenzwertsatz für das Maximum einer zufälligen Anzahl unabhängiger Zufallsgrössen.* Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, *13*, 1343–1346 (1964).

63. — *Übertragung von Grenzaussagen für Folgen von zufälligen Grössen auf Folgen mit zufälligen Indizes,* Teoria veroiatn., **10**, 82–93 (1965).

64. Richter W., *Ein Übertragungssatz für zufällige Elemente mit Werten aus einem Hilbertraum.* Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, **14**, 15—18 (1965).
65. — *Übertragung von Grenzaussagen für Folgen zufälliger Elemente auf Folgen mit zufälligen Indizes.* Math. Nachr., **29**, 347—365 (1965).
66. — *Zu einigen Konvergenzeigenschaften von Folgen zufälliger Elemente.* Studia Math., **25**, 231—243 (1965).
67. — *Das Null-Eins-Gesetz und ein Grenzwertsatz für zufällige Prozesse mit diskreter zufälliger Zeit.* Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, **14**, 497—504 (1965).
68. — *Über Grenzwertsätze für zufällige Prozesse mit diskreter zufälliger Zeit.* Transactions Fourth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes. Prague (1966).
69. Robbins H., *The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables.* Bull. Amer. Math. Soc., **54**, 1151—1161 (1948).
70. Rosenblatt M., *Random processes.* New York, 1962.
71. Sucheston L., *Note on mixing sequences of events.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **11**, 217—222 (1960).
72. Sucheston L., *A zero-one property of mixing sequences of events.* Bull. Amer. Math. Soc., **68**, 330—332 (1962).
73. — *On mixing and the zero-one law.* J. Math. Analys. Appl., **6**, 447—456 (1963).
74. Takács L., *On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **8**, 169—191 (1957).
75. Takahashi S., *On the asymptotic distribution of the sum of independent random variables.* Proc. Japan Acad., **27**, 393—400 (1951).
76. Tate R. F., *Contributions to the theory of random numbers of random variables.* Thesis University of California, Berkeley, 1962.
77. Teicher H., *On random sums of random vectors.* Ann. Math. Statist., **36**, 1450—1458 (1965).
78. Wittenberg H., *Limiting distributions of random sums of independent random variables.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, **3**, 7—8 (1964).
79. Yosida K., Kakutani S., *Birkhoff's ergodic theorem and the maximal ergodic theorem.* Proc. Imp. Acad. Tokyo, **15**, 165—168 (1939).

ASUPRA MIŞCĂRII BIDIMENSIONALE A FLUIDULUI PERFECT CONDUCTOR ÎN JURUL PROFILELOR SUBŢIRI

DE

DOREL HOMENTCOVSCHI

În această lucrare se extinde studiul făcut de J.E.Mc Cune şi E.L. Resler Jr. (J. Aero-Sc., 1960) la cazul în care cîmpul magnetic exterior formează un unghi cu planul mişcării. Utilizînd acelaşi procedeu ca şi autorii sus-amintiţi, se dă soluţia completă.

Curgerea unui fluid compresibil, perfect conductor, în prezenţa unui profil subţire a fost considerată de J.E.Mc Cune şi E.L. Resler Jr. în [1]. Se presupune că viteza la infinit şi cîmpul magnetic neperturbat se găsesc în planul de referinţă, mişcarea rezultată fiind, în consecinţă, plană.

Problema ce urmează a fi discutată este aceea a unui corp cilindric, cu generatoarele paralele cu axa Oz, a cărui secţiune în planul xOy (normal pe generatoare) formează un profil subţire (perfect izolator) de ecuaţie $y = Y(x) - L \leqslant x \leqslant L$ ce se găseşte într-un curent fluid. Mişcarea fluidului, presupusă a fi uniformă la mari distanţe, şi de viteză $\vec{U}$ va fi perturbată de profil în prezenţa unui cîmp magnetic omogen $\vec{H}_0^* = H_0\vec{m}$. Fluidul se presupune compresibil şi perfect conductor. Curentul neperturbat are direcţia axei Ox, iar direcţia $\vec{m}$ a cîmpului magnetic omogen are, în raport cu sistemul de axe ales, parametrii directori $(n_1, n_2, \operatorname{tg}\alpha)$ cu $n_1^2 + n_2^2 = 1$, iar α desemnînd unghiul lui $\vec{H}_0^*$ cu planul xOy.

Mişcarea este staţionară şi bidimensională, fiecare mărime fizică fiind funcţie numai de x şi y.

Cu variabilele dinamice introduse în [2], în ipoteza teoriei linearizate, mişcarea fluidului va fi descrisă de următorul sistem de ecuaţii:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{1}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 7, P. 1019–1030, BUCUREŞTI, 1967

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{A^2}\vec{j}\times\vec{m} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial x} = (\vec{m}\operatorname{grad})\,\vec{v} - \vec{m}\operatorname{div}\vec{v} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = M^2\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\vec{h} = 0\,;\quad \operatorname{rot}\vec{h} = 0 \tag{5}$$

$$\vec{E} + \vec{e}_1\times\vec{h} + \vec{v}\times\vec{m} = 0 \tag{6}$$

cu notaţiile

$$A = \frac{U}{V_A}\,;\; V_A = H_0\sqrt{\frac{\mu_e}{4\pi\rho_\infty}}, \tag{7}$$

V_A fiind viteza lu Alfven corespunzătoare lui H_0, μ_e permeabilitatea magnetică, iar M numărul lui Mach. Condiţia de anulare a perturbaţiei la infinit implică:

$$\lim_{x\to-\infty}(\vec{v},\,\vec{h},\,\rho,\,p,\,\vec{E}) = 0. \tag{8}$$

Din ecuaţiile (1) şi (2) se găsesc următoarele:

$$M^2\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{A^2}\left(n_2 j + \frac{\partial h_z}{\partial x}\operatorname{tg}\alpha\right) \tag{10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{A^2}\left(n_1 j - \frac{\partial h_z}{\partial y}\operatorname{tg}\alpha\right) \tag{11}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{A^2}\left(n_1\frac{\partial h_z}{\partial x} + n_2\frac{\partial h_z}{\partial y}\right), \tag{12}$$

unde prin scalarul j am notat proiecţia pe axa Oz a lui $\vec{j}$.

Condiţia rot $\vec{E} = 0$ impune anularea lui E_z, iar (6) devine

$$h_y + n_2 u - n_1 v = 0. \tag{13}$$

Luînd rotorul ecuaţiei (2) găsim

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial x} = \frac{1}{A^2}(\vec{m}\operatorname{grad})\,\vec{j}. \tag{14}$$

La fel (3) devine

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial x} = (\vec{m}\cdot\operatorname{grad})\,\vec{\Omega} + \vec{m}\times\operatorname{grad}\theta, \tag{15}$$

unde am notat $\vec{\Omega} = \text{rot}\ \vec{v}$, $\theta = \text{div}\ \vec{v}$. La fel ca pentru densitatea de curent vom folosi notaţia $\Omega = \Omega_z$.

Din ecuaţiile (1) şi (2) se obţine următoarea relaţie

$$\left[(1-M^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\theta = -\frac{M^2}{A^2}\frac{\partial}{\partial x}(\vec{m}\cdot\text{rot}\ \vec{j}). \tag{16}$$

Ecuaţiile (14), (15), (16) formează un sistem ce ne va determina funcţiile $\vec{\Omega}, \vec{j}$ şi θ.

Eliminînd pe $\vec{\Omega}$ între (14) şi (15) se găseşte:

$$\left[\frac{1}{A^2}(\vec{m}\ \text{grad})^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\vec{j} = \frac{\partial}{\partial x}\text{grad}\ \theta \times \vec{m} \tag{17}$$

cu proiecţiile

$$\left[\frac{1}{A^2}(\vec{m}\ \text{grad})^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] j = \frac{\partial}{\partial x}\left(n_2\frac{\partial\theta}{\partial x} - n_1\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) \tag{17'}$$

$$\left[\frac{1}{A^2}(\vec{m}\ \text{grad})^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] h_z = \frac{\partial\theta}{\partial x}\text{tg}\ \alpha. \tag{17''}$$

În sfîrşit, θ verifică următoarea ecuaţie:

$$\left[\frac{1}{A^2}(\vec{m}\ \text{grad})^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\left[(1-M^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\theta = - \tag{18}$$

$$-\frac{M^2}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(\vec{m}\ \text{grad})^2\,\theta - (1+\text{tg}^2\,\alpha)\,\Delta\theta].$$

Ecuaţia (18) poate fi pusă sub forma:

$$\left[(A^2M^2-A^2-\widetilde{M}^2+n_1^2)\frac{\partial^4}{\partial x^4} + (1-A^2-\widetilde{M}^2)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \right. \tag{19}$$

$$\left. + n_2^2\frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2n_1n_2\Delta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right]\theta = 0,$$

astfel că h_z şi j din (17′) şi (17″) vor satisface ecuaţia:

$$\left[\frac{1}{A^2}(\vec{m}\ \text{grad})^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\left[(A^2M^2-A^2-\widetilde{M}^2+n_1^2)\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \right. \tag{20}$$

$$\left. + (1-A^2-\widetilde{M}^2)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + n_2^2\frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2n_1n_2\Delta\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\right]\begin{bmatrix} j \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$

unde am notat

$$\widetilde{M}^2 = M^2(1+\text{tg}^2\,\alpha);\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Pentru $\alpha = 0$, al doilea operator din (2) va fi cel din curgerea plană [1], astfel că în cazul nostru pe lîngă cele două familii de caracteristici corespunzătoare acestui operator va mai apare o familie de caracteristici reprezentînd undele Alfven.

În cele ce urmează vom considera cîmpurile cvasialiniate ($n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$) şi cel al cîmpurilor încrucişate ($n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$).

1. CAZUL CÎMPURILOR CVASIALINIATE

Sistemul de ecuaţii considerat mai sus ne conduce la următoarele:

$$(1-M^2)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{M^2}{A^2}\frac{\partial h_z}{\partial x}\operatorname{tg}\alpha \tag{1.1}$$

$$h_y - v = 0 \tag{1.2}$$

$$\Omega = \frac{1}{A^2}\, j\,;\; w = \frac{1}{A^2}\, h_z \tag{1.3}$$

$$\frac{1-A^2}{A^2}\frac{\partial h_z}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha\cdot\theta \tag{1.4}$$

$$\frac{1-A^2}{A^2}\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial\theta}{\partial y} \tag{1.4'}$$

$$j\operatorname{tg}\alpha + \frac{\partial h_z}{\partial y} = 0 \tag{1.5}$$

$$\operatorname{div}\cdot\vec{h} = 0 \tag{1.6}$$

$$\left[(1-A^2-\widetilde{M}^2+A^2M^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-A^2-\widetilde{M}^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{bmatrix}\theta\\ j\\ h_z\end{bmatrix} = 0. \tag{1.7}$$

După cum se vede din (1.7), în acest caz avem o singură familie de caracteristici, curgerea fiind sau pur eliptică sau pur hiperbolică.

Din (1.6) avem

$$h_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}\,;\; h_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \text{cu } j(x,y) = -\Delta\psi(x,y) \tag{1.8}$$

iar (1.1) şi (1.2) ne conduc la:

$$(1-M^2)\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{M^2}{A^2}\Delta\psi\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\,;\; v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.9}$$

care introduse în (1.3) dau următoarea ecuaţie pentru funcţia de flux magnetic:

$$(1-\widetilde{M}^2-A^2+A^2M^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (1-A^2-\widetilde{M}^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0. \tag{1.10}$$

Ecuaţia (1.10) este ecuaţia Prandtl-Glauert din cazul mişcărilor subsonice şi Ackeret din cazul mişcărilor supersonice.

Tipul ecuaţiei este dat de mărimea:

$$\delta^2 = \frac{1 - A^2 - \widetilde{M}^2 + A^2 M^2}{1 - A^2 - \widetilde{M}^2} \tag{1.11}$$

şi poate fi determinat din diagrama din figura 1.

Pentru $\delta^2 > 0$ obţinem două regiuni de curgere eliptică *I* şi *II* iar pentru $\delta^2 < 0$, regiunile *1* şi *2* de curgere hiperbolică.

Pentru $\alpha = 0$ diagrama de pe figură se reduce la cea din [1]. Ea a fost găsită şi de Thibault în [3].

Condiţia la limită cinematică, în ipoteza teoriei linearizate, conduce la ecuaţia:

$$v = Y'(x) \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad y = 0$$

aceeaşi ca şi în hidrodinamica convenţională.

Astfel în regiunile de elipticitate putem caracteriza curgerea fluidului cu ajutorul unui fluid neconductor.

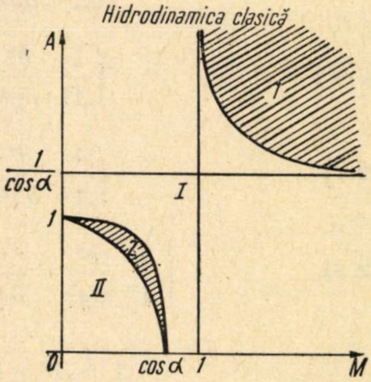


Fig. 1

În domeniile *1* şi *2* vom pune:

$$m^2 = -\delta^2 = \frac{1 - A^2 - \widetilde{M}^2 + A^2 M^2}{A^2 + \widetilde{M}^2 - 1}.$$

Vom avea:

$$\psi(x, y) = F_1(x - my) + F_2(x + my). \tag{1.12}$$

Am exclus cazurile limită în care $m = 0$ şi $m = \infty$.

Se observă că în regiunea *1*, m creşte o dată cu M, astfel caracteristicile vor fi îndreptate spre bordul de fugă, deci la fel ca în hidrodinamică. În regiunea *2* cînd M creşte, m descreşte, în consecinţă vom alege caracteristicile orientate spre bordul de atac. O dată determinat $\psi(x\ y)$, ecuaţia (1.5) ne determină pe h_z, astfel problema fiind complet rezolvată. Pentru a satisface condiţiile la limită pentru cîmpul magnetic, sînt necesari curenţi de suprafaţă pe profil.

2. CAZUL CÎMPURILOR ÎNCRUCIŞATE

Ecuaţiile din prima parte în acest caz se reduc la următoarele:

$$(1 - M^2)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{M^2}{A^2}\left(j + \frac{\partial h_z}{\partial x}\operatorname{tg}\alpha\right) \tag{2.1}$$

$$(1 - M^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{A^2}\frac{\partial j}{\partial y} + \frac{M^2}{A^2}\frac{\partial^2 h_z}{\partial x \partial y}\operatorname{tg}\alpha \tag{2.2}$$

$$h_y + u = 0 \tag{2.3}$$

$$\operatorname{div} \vec{h} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{1}{A^2}\,\frac{\partial j}{\partial y}; \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{A^2}\,\frac{\partial h_z}{\partial y} \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{1}{A^2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) j = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{2.6}$$

$$\left(\frac{1}{A^2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) h_z = \frac{\partial \theta}{\partial x} \operatorname{tg} \alpha \tag{2.6'}$$

$$\left(\frac{1}{A^2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(j \operatorname{tg} \alpha - \frac{\partial h_z}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{A^2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\left[(A^2M^2 - A^2 - \widetilde{M}^2)\,\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \right. \\ &\left. + (1 - A^2 - \widetilde{M}^2)\,\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right]\begin{bmatrix} j \\ h_z \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ecuaţia (2.8) poate fi pusă sub forma :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{A^2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{B}{R^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{bmatrix} j \\ h_z \end{bmatrix} = 0, \tag{2.9}$$

unde :

$$B = A^2 + \widetilde{M}^2 - A^2 M^2$$

$$2R^2 = A^2 + \widetilde{M}^2 - 1 + [(A^2 + \widetilde{M}^2 - 1)^2 + 4\,(A^2 + \widetilde{M}^2 - A^2M^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

Se observă că

$$\begin{aligned} &(A^2 + \widetilde{M}^2 - 1)^2 + 4\,(A^2 + \widetilde{M}^2 - A^2M^2) \geqslant (A^2 + M^2 - 1)^2 + \\ &+ 4\,(A^2 + M^2 - A^2M^2) = 1 + 2(A^2 + M^2) + (A^2 - M^2)^2 \end{aligned}$$

deci R^2 este totdeauna real şi pozitiv. În consecinţă primii doi operatori din (2.9) sînt peste tot iperbolici, iar tipul celui de-al treilea depinde de semnul lui B.

În regiunea I (din fig. 2), $B > 0$, al treilea operator din (2.9) va fi eliptic astfel că vom denumi această regiune hipereliptică. În II, $B < 0$, vom avea trei operatori hiperbolici, regiunea respectivă fiind complet hiperbolică.

Pentru $\alpha = 0$ se obţine diagrama din figura 2 din [1].

Primul operator din (2.9) indică undele Alfven, curgerea produsă de aceste unde implicînd componente ale vitezei normale pe planul de referinţă, lucru ce explică absenţa lor în curgerea plană din [1].

În regiunea hipereliptică avem :

$$j = (j)_h + (j)_e ; \quad h_z = (h_z)_h + (h_z)_e, \tag{2.10}$$

unde :

$$(j)_h = F_1' (x - Ay) + F_2^1 (x + Ay) + \tag{2.11}$$

$$+ F_3' (x - Ry) + F_4' (x + Ry)$$

$$(h_z)_h = G_1 (x - Ay) + G_2 (x + Ay) + \tag{2.12}$$

$$+ G_3 (x - Ry) + G_4 (x + Ry)$$

$$\left(\frac{B}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{bmatrix} (j)_e \\ (h_z)_e \end{bmatrix} = 0. \tag{2.13}$$

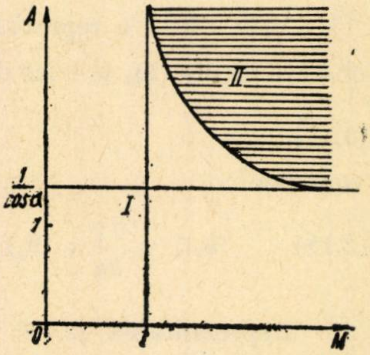


Fig. 2

Relaţia (2.7) ne va determina G_3 ; G_4 şi $(h_z)_e$ astfel :

$$\begin{aligned} G_3 &= F_3 \operatorname{tg} \alpha \\ G_4 &= F_4 \operatorname{tg} \alpha \\ (j)_e &= \frac{\partial (h_z)_e}{\partial x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \cdot \alpha} . \end{aligned} \tag{2.14}$$

Folosind expresiile (2.11), (2.12), (2.3) şi (2.5) vom determina următoarea reprezentare pentru partea hiperbolică a soluţiei generale.

$$\begin{aligned} (h_x)_h &= \frac{A}{1 + A^2} [F_1(x - Ay) - F_2 (x + Ay)] + \\ &\quad + \frac{R}{1 + R^2} [F_3(x - Ry) - F_4 (x + Ry)] \\ (h_x)_h &= \frac{1}{1 + A^2} [F_1 (x - Ay) + F_2 (x + Ay)] + \\ &\quad + \frac{1}{1 + R^2} [F_3 (x - Ry) + F_4(x + Ry)] \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} (u)_h &= - (h_y)_h \\ (v)_h &= \left(\frac{A}{1 + A^2} - \frac{A}{A^2} \right) [F_1(x - Ay) - F_2 (x + Ay)] + \\ &\quad + \left(\frac{R}{1 + R^2} - \frac{R}{A^2} \right) [F_3(x - Ry) - F_4 (x + Ry)] \end{aligned} \tag{2.16}$$

(2.14) şi (2.15) introduse în (2.1) vor da următoarea relaţie între $F_1(x)$, $G_1(x)$ şi $F_2(x)$, $G_2(x)$ respectiv:

$$F_{1,2}(x) = -(1+A^2)\operatorname{tg}\alpha\, G_{1,2}. \tag{2.14'}$$

Vom căuta o reprezentare şi pentru partea eliptică a soluţiei. Se observă că $\operatorname{div}(\vec{h})_h = 0$ iar de aici cu (2.4) se obţine:

$$\operatorname{div}(\vec{h})_e = 0 \tag{2.17}$$

vom lua

$$(h_x)_e = \frac{\partial\psi}{\partial y}\ ;\ (h_y)_e = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\ \text{ iar } (j)_e = -\Delta\psi(x,y). \tag{2.18}$$

Reprezentarea (2.18) introdusă în (2.13) dă următoarea ecuaţie pentru funcţia $\psi(x, y)$

$$\left(\frac{B}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Delta\psi(x,y) = 0. \tag{2.19}$$

De aici ar rezulta că $\psi(x, y)$ are o parte armonică. La fel ar avea şi $(h_x)_e$ iar de aici, conform lui (2.3), şi $(u)_e$. Cum $(j)_e$ şi $(h_z)_e$ nu au o parte armonică, ar urma că $(v)_e$ posedă o asemenea parte, lucru incompatibil cu ecuaţia (2.2) Prin urmare $\psi(x, y)$ va fi soluţie a următoarei ecuaţii:

$$\left(\frac{B}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) = 0. \tag{2.10}$$

Pentru determinarea părţii eliptice a cîmpului vitezelor vom apela la ecuaţiile (2.1), (2.3) şi (2.19) obţinînd expresiile:

$$\begin{aligned} (u)_e &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ (v)_e &= \frac{R^2-\tilde{M}^2}{A^2}\frac{\partial\psi}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$(h_z)_e = \left(\frac{B}{R^2} - 1\right)\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{2.22}$$

Se exclude de asemenea cazul limită $B = 0$. În particular în acest caz ecuaţia (2.20) degenerează, avem $B = R^2$, deci $(h_z)_e = 0$.

Cu schimbarea de variabile: $x = \frac{\sqrt{B}}{R}\xi$; $y = \eta$, $\Psi(\xi, \eta) = \psi(x,y)$ este armonică în exteriorul tăieturii $\eta = 0, -\frac{R}{\sqrt{B}} \leqslant \xi \leqslant \frac{R}{\sqrt{B}}$. Aplicînd teorema din [2] funcţiei $\mathrm{grad}_{\xi;\eta}\ \Psi\,(\xi,\eta)$, avem $\dfrac{\partial\Psi}{\partial\eta}(\xi, 0+) = \dfrac{\partial\Psi}{\partial\eta}(\xi, 0-)$ şi $\dfrac{\partial\Psi}{\partial\xi}(\xi, 0+) = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial\xi}(\xi, 0-)$ şi trecînd la variabilele x şi y $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(x, 0+) = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}(x, 0-)$ pe Ox iar $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x, 0+) = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x, 0-)$.

Condiţiile la limită. În primul rînd, ţinînd seama de familia de caracteristici ce trebuie menţinută, vom lua funcţiile cu indice impar nule în semiplanul inferior, iar cele cu indice par nule în semiplanul superior.

Condiţia cinematică ne dă :

$$v\,(x, 0) = Y^1(x) \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.23'}$$

iar absenţa curenţilor de suprafaţă următoarele relaţii :

$$h_x(x, 0+) - h_x(x, 0-) = 0 \tag{2.23''}$$

$$h_y(x, 0+) - h_y(x, 0-) = 0 \tag{2.23'''}$$

$$h_z(x, 0+) - h_z(x, 0-) = 0. \tag{2.23^{IV}}$$

Din (2.23′), (2.23″) şi continuitatea lui $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(x, 0)$ deducem :

$$\left(\frac{A}{1+A^2} - \frac{A}{A^2}\right)(F_1(x) + F_2(x)) + \left(\frac{R}{1+R^2} - \frac{R}{A^2}\right)(F_3(x) + F_4(x)) = 0 \tag{2.24'}$$

$$\frac{A}{1+A^2}(F_1(x) + F_2(x)) + \frac{R}{1+R^2}(F_3(x) + F_4(x)) = 0 \tag{2.24''}$$

sistem omogen cu determinant nenul care ne dă :

$$\begin{aligned} F_1(x) &= -F_2(x) \\ F_3(x) &= -F_4(x). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Utilizînd relaţiile (2.23′), (2.23‴), (2.23^{IV}) şi relaţia $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x, 0+) = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x, 0-)$ obţinem :

$$\left(\frac{A}{1+A^2} - \frac{A}{A^2}\right) F_1(x) + \left(\frac{R}{1+R^2} - \frac{R}{A^2}\right) F_3(x) + \frac{R^2 - \widetilde{M}^2}{A^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 0) = Y'(x) \quad \text{pentru } -1 \leqslant x \leqslant +1 \tag{2.26'}$$

$$\frac{1}{1+A^2}\,F_1(x) + \frac{1}{1+R^2}\,F_3(x) - \frac{\partial\psi}{\partial x}(x, 0+) = 0 \tag{2.26''}$$

$$-\frac{1}{1+A^2}\,\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\,F_1(x) + \operatorname{tg}\alpha\, F_3(x) + \left(\frac{B}{R^2} - 1\right)\operatorname{tg}\alpha\,\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, 0+) = 0. \tag{2.26'''}$$

Din ultimele două ecuaţii obţinem :

$$(2.27')\qquad F_1(x)=\frac{1+\dfrac{B-R^2}{R^2}\,\dfrac{1}{1+R^2}}{\mathrm{tg}^2\,\alpha+\dfrac{1}{1+R^2}}\,(1+A^2)\mathrm{tg}^2\,\alpha\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\,(x,0+)$$

$$(2.27'')\qquad F_3(x)=\frac{1-\dfrac{B-R^2}{R^2}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{1+R^2}}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\,(x,0+)$$

care introduse în (2.26′) dau următoarea condiţie la limită pentru ψ :

$$(2.28)\qquad \left(-\frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{A^2}\,\frac{1+\dfrac{B-R^2}{R^2}\,\dfrac{1}{1+R^2}}{\mathrm{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{1+R^2}}+\right.$$

$$\left.+R\left(\frac{1}{1+R^2}-\frac{1}{A^2}\right)\frac{1-\dfrac{B-R^2}{R^2}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{1+R^2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,0+)+\frac{R^2-\tilde{M}^2}{A^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\,(x,0)=$$

$$=Y'(x)\qquad \text{ptr.}\,-1\leqslant x\leqslant+1$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\,(x,0+)=0\qquad \text{ptr.}\qquad |x|>1.$$

Pentru $\alpha=0$ găsim :

$$(2.28')\qquad \begin{aligned}&\left(\frac{R}{1+R^2}-\frac{R}{A^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\,(x,0+)+\frac{R^2-\tilde{M}^2}{A^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\,(x,0)=Y'(x)\qquad |x|\leqslant 1\\&\frac{\partial\psi}{\partial x}\,(x,0+)=0\qquad\qquad |x|>1\end{aligned}$$

adică tocmai problema la limită din cazul cîmpurilor ortogonale din [1]. Ca şi în lucrarea citată, printr-o transformare a variabilelor independente, problema fizică este înlocuită printr-o mişcare incompresibilă, plană, de aceeaşi viteză la infinit şi în jurul aceluiaşi profil. Diferă numai numărul lui Alfven.

În regiunea de curgere complet hiperbolică cum $B<0$ vom nota $P=\dfrac{R}{\sqrt{-B}}$.

Soluţia generală admite următoarea reprezentare :

$$j(x,y) = F_1'(x-Ay) + F_2'(x+Ay) + F_3'(x-Ry) + F_4'(x+Ry) + F_5'(x-Py) + F_6'(x+Py) \tag{2.29}$$

$$h_z(x,y) = G_1(x-Ay) + G_2(x+Ay) + G_3(x-Ry) + G_4(x+Ry) + G_5(x-Py) + G_6(x+Py) \tag{2.30}$$

cu

$$F_i \operatorname{tg}\alpha = G_i \qquad i = 3,\ 4,\ 5,\ 6$$
$$F_i = -(1+A^2)\operatorname{tg}\alpha\, G_i \qquad i = 1,\ 2.$$

Cîmpul magnetic admite următoarea reprezentare :

$$\begin{aligned} h_x &= \frac{A}{1+A^2}[F_1(x-Ay) - F_2(x+Ay)] + \frac{R}{1+R^2}[F_3(x-Ry) - F_4(x+Ry)] + \frac{P}{1+P^2}[F_5(x-Py) - F_6(x+Py)] \\ h_y &= \frac{1}{1+A^2}[F_1(x-Ay) + F_2(x+Ay)] + \frac{1}{1+R^2}[F_3(x-Ry) + F_4(x+Ry)] + \frac{P}{1+P^2}[F_5(x-Py) + F_6(x+Py)] \end{aligned} \tag{2.31}$$

iar cîmpul vitezelor poate fi scris sub forma :

$$u = -h_y$$

$$v = \left(\frac{A}{1+A^2} - \frac{A}{A^2}\right)[F_1 - F_2] + \left(\frac{R}{1+R^2} - \frac{R}{A^2}\right)[F_3 - F_4] + \left(\frac{P}{1+P^2} - \frac{P}{A^2}\right)[F_5 - F_6] \tag{2.32}$$

Condiţiile la limită. Vom alege iarăşi $F_{2i}(x) \equiv 0$ în semiplanul superior şi $F_{2i-1}(x) \equiv 0$ în semiplanul inferior. Condiţiile la limită vor fi aceleaşi de la (2.23). Cum avem cinci condiţii ce conţin liniar cele şase funcţii necunoscute, nu vom putea rezolva complet problema. Pentru rezolvare trebuie date suplimentare.

Se observă că pentru $\alpha = 0$, $F_1(x) \equiv F_2(x) \equiv 0$, problema avînd aceeaşi soluţie ca şi în [1].

Primită la redacţie la 27 februarie 1967

Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. J. E. Mc Cune şi E. L. Resler Jr., J. Aerospace Sc., **27**, 293—503 (1960).
2. Lazăr Dragoş, Journal de Mécanique, 1963.
3. Roger Thibault, C.R. Paris, **256**, 2528 (1963).

ASUPRA UNOR PROPRIETĂȚI ALE CONSTANTELOR DE STRUCTURĂ ALE ALGEBRELOR JORDAN DE TIP A

DE

D. B. ION

În această lucrare se continuă studiul proprietăţilor constantelor de structură ale algebrelor Jordan de tip A, studiu care a fost început în lucrările [1], [2]. În teoremele I şi II din lucrare se obţin pentru rădăcini şi ponderi proprietăţi analoage cu proprietăţile rădăcinilor şi ponderilor din algebrele Lie semisimple. În ultima parte a lucrării se studiază proprietăţile rădăcinilor utilizîndu-se o bază concretă dată în lucrarea [3].

În lucrarea [1] au fost stabilite relaţiile canonice de anticomutare pentru algebrele Jordan $J(A)$, analoagele relaţiilor lui Killing din algebrele Lie. Aceste relaţii au fost folosite în lucrarea [2] la stabilirea unor proprietăţi ale rădăcinilor algebrelor Jordan $J(A)$.

În cele ce urmează ne propunem să cercetăm în continuare proprietăţile constantelor de structură ale algebrelor Jordan $J(A)$. Vom păstra în continuare notaţiile din lucrările [1] şi [2].

TEOREMA I. *Constantele* $\{\bar{\gamma}^{i}_{\alpha.-\alpha}\}$ *sînt componentele contravariante ale vectorului rădăcină* $\bar{\alpha}$.

Demonstrație. Considerăm tensorul simetric

(I.1) $\bar{g}_{\mu\nu} = \bar{\gamma}^{\lambda}_{\mu\rho}\, \bar{\gamma}^{\rho}_{\nu\lambda}$ (se sumează după indicii care se repetă).

Cu ajutorul acestui tensor putem scrie :

$$\bar{\gamma}_{\sigma\eta\mu} = \bar{\gamma}^{\nu}_{\sigma\eta}\, \bar{g}_{\nu\mu} . \tag{I.2}$$

Acum, datorită identităţii fundamentale din algebra Jordan (vezi [1], relaţia (1.13)), avem :

$$\bar{\gamma}^{\nu}_{\sigma\eta}\, \bar{\gamma}^{\rho}_{\nu\lambda} = \bar{\gamma}^{\nu}_{\sigma\lambda}\, \bar{\gamma}^{\rho}_{\eta\nu} . \tag{I.3}$$

Cu identitatea (1.3) relaţia (1.2) devine :

$$\bar{\gamma}_{\sigma\eta\mu} = \bar{\gamma}^{\nu}_{\sigma\lambda}\, \bar{\gamma}^{\rho}_{\eta\nu}\, \bar{\gamma}^{\lambda}_{\mu\rho} . \tag{1.2'}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 7, P. 1031–1037, BUCUREȘTI, 1967

Relaţia (1.2′) ne spune că constantele $\overline{\gamma}_{\sigma\eta\mu}$ sînt total simetrice în indicii σ, η, μ. Această proprietate ne va folosi la demonstrarea teoremei I.

Următorul pas în demonstrarea teoremei I este stabilirea formei tensorului (I.1). Cu ajutorul relaţiilor (2) din [2] se observă că $\overline{g}_{\mu\nu}$ are următoarea formă:

$$\overline{g}_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c:c} \overline{g}_{ij} & 0 \\ \hdashline 0 & \overline{g}_{\alpha\tau} \end{array}\right) \tag{I.4}$$

cu

$$\begin{gathered} \overline{g}_{ij} = \overline{\gamma}^{m}_{il}\,\overline{\gamma}^{l}_{jm} + 2\sum_{\alpha>0}\overline{\alpha}_i\,\overline{\alpha}_j \\ \overline{g}_{\alpha,-\alpha} = 2\overline{\alpha}_i\,\overline{\gamma}^{i}_{\alpha,-\alpha} + \sum_{\beta\neq-\alpha}\overline{N}^{\alpha+\beta}_{\alpha\beta}\,\overline{N}^{\beta}_{-\alpha,\alpha+\beta} \\ \overline{g}_{\alpha\tau} = 0 \qquad \text{pentru} \quad \tau\neq-\alpha \end{gathered} \tag{I.4′}$$

det $\overline{g}_{ij} > 0$; det $\overline{g}_{\alpha,-\alpha} > 0$ (a se vedea partea III din această lucrare).

Se observă că H_i-urile din formula (2) din [2] pot fi normate independent de normarea E_α-urilor.

O dată fixată normarea H-urilor putem alege normarea E_α-urilor în aşa fel ca să avem:

$$\overline{g}_{\alpha,-\alpha} = 1. \tag{I.5}$$

Relaţia (I.5) împreună cu proprietatea de totală simetrie în indici a constantelor $\overline{\gamma}_{\sigma\eta\mu}$, ne permite demonstrarea teoremei I. Într-adevăr, cu ajutorul inversului lui $\overline{g}_{ij}$ putem scrie:

$$\begin{aligned} \overline{\gamma}^{i}_{\alpha,-\alpha} &= \overline{g}^{ij}\,\overline{\gamma}_{\alpha,-\alpha,j} \text{ prin totală simetrie} \\ &= \overline{g}^{ij}\cdot\overline{\gamma}_{j,\alpha,-\alpha} \text{ prin (I.5)} \\ &= \overline{g}^{ij}\,\overline{\gamma}^{\alpha}_{j\alpha} \\ &= \overline{g}^{ij}\,\overline{\alpha}_j = \overline{\alpha}^{i}. \end{aligned} \tag{I.6}$$

Astfel teorema I este demonstrată, iar relaţia $\overline{\gamma}^{i}_{\alpha,-\alpha} = \overline{\alpha}^{i}$ din (I.20 din [1] este acum justificată.

Consecința I.1. Unghiul dintre două rădăcini $\overline{\alpha}$ şi $\overline{\beta}$ ale algebrelor $J(A)$ este unul din unghiurile $0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$. Într-adevăr, pe baza celor demonstrate mai sus, teorema II din [2] ne conduce la:

$$\frac{2\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\,\overline{\alpha}} = g \quad (g \text{ fiind un număr întreg}), \tag{I.7}$$

$\overline{\alpha}\,\overline{\beta} = \overline{\alpha}_i\,\overline{\beta}^{i}$ fiind produsul scalar al celor două rădăcini.

Pe baza lui (I.7) se stabileşte următoarea relaţie :

$$\cos^2(\widehat{\bar\alpha\,\bar\beta}) = \frac{gh}{4}, \tag{I.8}$$

h fiind de asemenea un număr întreg $\left(\frac{2\bar\alpha\,\bar\beta}{\bar\beta\,\bar\beta} = h\right)$.

Avînd în vedere că $\cos^2(\widehat{\bar\alpha\,\bar\beta})$ ia valori în intervalul $[0,1]$ (considerăm numai unghiuri reale) şi ţinînd seama de faptul că g şi h sînt numere întregi, rezultă pentru $\cos(\widehat{\bar\alpha\,\bar\beta})$ următoarele valori : 0 ; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; ± 1. Dacă ne oprim la primul cadran avem unghiurile : $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$ şi $0°$.

Consecinţa I.2. Rapoartele lungimilor a două rădăcini $\bar\alpha$ şi $\bar\beta$ sînt, după cum urmează : $\sqrt{3}$ dacă $\cos(\widehat{\bar\alpha\,\bar\beta}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{2}$ dacă $\cos(\widehat{\bar\alpha\,\bar\beta}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 1 pentru $\cos\widehat{\bar\alpha\,\bar\beta} = \frac{1}{2}$; nedeterminat pentru $\cos(\widehat{\bar\alpha\,\bar\beta}) = 0$; 1 sau 2 dacă $\cos(\widehat{\bar\alpha\,\bar\beta}) = 1$.

Consecinţa (I.2) rezultă imediat din relaţia :

$$\frac{1}{2}\,g(\bar\alpha\,\bar\alpha) = \frac{1}{2}\,h(\bar\beta\,\bar\beta) = \bar\alpha\,\bar\beta \qquad (g,h = 0,1,2,3,4). \tag{I.9}$$

Dacă valorile lui g şi h se limitează la $h, g, = 0,1, 2, 3$, atunci raportul rădăcinilor în cazul cînd $\cos(\widehat{\bar\alpha\,\bar\beta}) = 1$, este unic determinat şi este egal cu 1.

TEOREMA II. *Dacă* $\bar\alpha$ *este o rădăcină iar* $m^{(0)}$ *o pondere a unei algebre Jordan* $J(A)$, *atunci există relaţia :*

$$\frac{\bar\alpha\, m^{(0)}}{\bar\alpha\,\bar\alpha} = k, \qquad k = 0,1, \tag{II}$$

$\bar\alpha\, m^{(0)} = \bar\alpha^i\, m_i^{(0)}$ *produsul scalar între vectorii* $\bar\alpha$ *şi* $m^{(0)}$.

Demonstraţie. Presupunem dat un vector $|\xi> = U_0$, a cărui pondere este $m^{(0)}$, cu proprietatea $E_\alpha|\xi> = 0$.

Construim un şir de vectori definiţi prin :

$$U_i = E_{-\alpha}\, U_{i-1} \tag{II.1}$$

Astfel vom avea :

$$U_0 = |\xi>$$

$$U_1 = E_{-\alpha}\,|\xi>$$

$$U_2 = E_{-\alpha}\,E_{-\alpha}\,|\xi>$$

. . . .

Se observă că lungimea șirului este cel mult 2. Într-adevăr, $U_2 = E_{-\alpha} E_{-\alpha} |\xi>$ dar $E_{-\alpha} E_{-\alpha} = [E_{-\alpha}, E_{-\alpha}] = 0$ întrucît $\overline{N}^{-2\alpha}_{-\alpha, -\alpha} = 0$, 2α nefiind rădăcină a problemei de funcții și valori proprii (1.14) din [1].

Presupunînd că lungimea șirului este 1, atunci $U_1 = 0$ și prin urmare

$$E_\alpha U_1 = E_\alpha E_{-\alpha} \ |\xi> = 2\overline{\alpha}\ m^{(0)} |\xi> - E_{-\alpha} E_\alpha |\xi> = 0$$

din care rezultă

$$\overline{\alpha}\ m^{(0)} = 0. \tag{II.2}$$

În cazul cînd lungimea șirului (II.1) este 2, $U_2 = 0, U_1 \neq 0$ $(U_2 = E_{-\alpha} U_1)$, atunci vom avea:

$$E_\alpha U_2 = E_\alpha E_{-\alpha} U_1 = 2\overline{\alpha}\ m^{(1)} U_1 - E_{-\alpha} E_\alpha U_1 =$$

$$= 2\overline{\alpha}\ m^{(1)} U_1 - 2\overline{\alpha}\ m^{(0)} U_1 = 0$$

U_1 fiind diferit de zero, rezultă:

$$\overline{\alpha}\ m^{(1)} - \overline{\alpha} m^{(0)} = 0. \tag{II.3}$$

Dar $m^{(1)} = 2\ \overline{\alpha} - m^{(0)}$ (vezi [1]) și (II.3) ne conduce la:

$$\frac{\overline{\alpha}\ m^{(0)}}{\overline{\alpha}\ \overline{\alpha}} = 1. \tag{II.4}$$

Relațiile (II.2) și (II.4) împreună dau relația (II). Astfel teorema II a fost demonstrată. Acest rezultat este util în construirea reprezentărilor algebrelor Jordan $J(A)$.

III. Fie A algebra asociativă a matricelor $n \times n$ unitare. Orice matrice unitară poate fi scrisă sub forma:
(III.1) $U = \exp (iH)$, unde $H = H^+$ (hermitica conjugată).

În vecinătatea identității, U devine:

$$U \simeq 1 + i H \tag{III.2}$$

Parametrizînd H cu $p^*_{ij} = p_{ji}$ vom avea:

$$H = \sum_i p_{ii}\ e_{ii} + \sum_{i \neq j} p_{ij}\ e_{ij}, \tag{III.3}$$

unde e_{ij} este matricea ce constă din 1 în poziția $(i,\ j)$ și zero în rest.

Baza convenabilă care satisface formulele (I.18) din [1] este [3]:

$$H_i = \frac{1}{(2n)^{1/2}} \sum_{l=1}^{n} \lambda_l^{(i)} e_{ll}\,;\ l = 1,2,\ldots n\,;\ i = 1,2,\ldots, n-1. \tag{III.4}$$

$$H_0 = \frac{1}{(2n)^{1/2}} \sum_{l=1}^{n} \lambda_l^{(0)}\ e_{ll} = \frac{1}{n\sqrt{2}}\ E,\ E \text{ este matricea unitate},$$

$$E_\alpha = \frac{1}{(2n)^{1/2}}\ e_{km},\quad \alpha = (k\ m),\ -\alpha = (m\ k),$$

unde $\lambda_l^{(i)}$ sînt numere reale care satisfac următoarele relaţii de ortonormalitate :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_l^{(i)} \lambda_m^{(i)} = \delta_{lm} \tag{III.5}$$

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l^{(i)} \lambda_l^{(j)} = \delta_{ij}.$$

Să calculăm pe rînd constantele de structură ale algebrei Jordan $J(A)$ în funcţie de coeficienţii $\lambda_l^{(i)}$.

Astfel vom avea :

(a)
$$[H_i, H_j]_+ = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\gamma}_{ij}^{(k)} H_k$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} \sum_{l=1}^{n} \lambda_l^{(i)} \lambda_l^{(j)} e_{ll}$$

ceea ce conduce la

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\gamma}_{ij}^{(k)} \lambda_l^{(k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)^{1/2}} \lambda_l^{(i)} \lambda_l^{(j)} \tag{III.6}$$

sau

$$\overline{\gamma}_{ij}^{(r)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)^{1/2}} \sum_{l=1}^{n} \lambda_l^{(i)} \lambda_l^{(j)} \lambda_l^{(r)} \tag{III.6'}$$

care se obţine din (III.6) prin înmulţire în ambii membri cu $\lambda_l^{(r)}$ şi sumare după l ţinînd cont de relaţiile (III.5) :

(b)
$$[H_i, E_\alpha]_+ = \overline{\alpha}_i E_\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)^{1/2}} (\lambda_m^{(i)} + \lambda_n^{(i)}) E_\alpha, \; \alpha = (mn) \; m \neq n$$

prin urmare obţinem :

$$\overline{\alpha}_i = \frac{1}{2} \frac{1}{(2n)^{1/2}} (\lambda_m^{(i)} + \lambda_n^{(i)}) \tag{III.7}$$

(c)
$$[E_\alpha, E_{-\alpha}]_+ = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{\alpha}^i H_i,$$

cu

$$\overline{\alpha}^i = \overline{\alpha}_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)^{1/2}} (\lambda_m^{(i)} + \lambda_n^{(i)}), \; m \neq n \tag{III.8}$$

(d) În sfîrşit, calculînd

$$[E_\alpha, E_\beta]_+ = \overline{N}_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta} E_{\alpha+\beta}$$

obţinem :

$$\overline{N}_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)^{1/2}}, \tag{III.9}$$

dacă $\alpha + \beta$ este rădăcină diferită de zero a ecuației (I.17) din [1].

$$\overline{N}_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta} = 0$$

dacă $\alpha + \beta$ nu este rădăcină.

Din relațiile (III.6′), (III.7), (III.8) se observă că proprietățile rădăcinilor, stabilite în [2], rezultă imediat.

Din relațiile (III.5) și (III.7) se obține :

$$|\overline{\alpha}| = |\overline{\beta}| = \ldots = \frac{1}{2\sqrt{n}}. \tag{III.10}$$

Prin urmare raportul rădăcinilor fiind egal cu unitatea, se stabilește, fie pe baza consecinței I.2, fie prin calcul direct, că

$$\cos(\widehat{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}) = \frac{1}{2}. \tag{III.11}$$

Stabilind prin același procedeu rădăcinile algebrei Lie a matricilor $n \times n$ găsim :

$$\gamma_{ij}^{n} = 0$$

$$\alpha^i = \alpha_i = \frac{1}{(2n)^{1/2}} (\lambda_m^{(i)} - \lambda_n^{(i)}), \qquad m \neq n \tag{III.12}$$

$$\alpha^0 = \alpha_0 = 0$$

Și în acest caz se obține :

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha\,\alpha} = 1, \quad \cos(\widehat{\alpha\,\beta}) = \frac{1}{2}, \quad |\alpha| = |\beta| = \ldots = \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{III.13}$$

α și β au fost aleși astfel :

$$\alpha_i = \frac{1}{(2n)^{1/2}} (\lambda_m^{(i)} - \lambda_n^{(i)}) \qquad m \neq n \tag{III.13′}$$

$$B_i = \frac{1}{(2n)^{1/2}} (\lambda_m^{(i)} - \lambda_l^{(i)}) \qquad m \neq l.$$

Din (III.7), (III.12), (III.13′) și (III.5) se obține :

$$\begin{gathered} 2(\overline{\alpha}_i - \overline{\beta}_i) = \beta_i - \alpha_i = \gamma_i \\ \alpha\,\overline{\alpha} = \beta\,\overline{\beta} = \ldots = 0 \\ \cos(\widehat{\alpha\,\overline{\beta}}) = \cos(\widehat{\overline{\alpha}\,\beta}) = \frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{III.14}$$

Pe baza relațiilor (III.6′), (III.7), (III.12) și utilizînd (III.5) se verifică următoarele relații de sumare :

$$\begin{gathered} \overline{\gamma}_{ij}^{k}\, \alpha_k = \alpha_i\, \overline{\alpha}_j + \overline{\alpha}_i\, \alpha_j \\ \overline{\gamma}_{ij}^{k}\, \overline{\alpha}_k = \overline{\alpha}_i\, \overline{\alpha}_j + \frac{1}{4}\, \alpha_i \alpha_j. \end{gathered} \tag{III.15}$$

Relaţiile (III.15) se obţin pe baza identităţilor (I.7) şi (I.8) din [1] scrise pentru elementele (E_α, H_i, H_j) şi dezvoltate cu ajutorul relaţiilor (I.20) din [1].

Specificăm că, proprietăţile (III.14) şi (III.15) pot fi de asemenea obţinute în general pe baza identităţilor (I.7), (I.8), (I.9) şi a relaţiilor (I.20) din [1].

În încheiere ţin să mulţumesc Dr. C. Teleman şi Dr. Eleonora Mihul pentru discuţiile şi îndrumările acordate.

Primită la redacţie la 6 martie 1967 Institutul de Fizică atomică Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. D. B. Ion, St. cerc. mat. **17**, 301–310 (1965).
2. D. B. Ion, St. cerc. mat. **18**, 309–313 (1966).
3. L. C. Biedenharn, J. Math. Phys., **4** 436 (1963).

PERTURBAREA CÎMPULUI MAGNETIC ÎN CAZUL MIȘCĂRII FLUIDULUI ELECTROCONDUCTOR ÎN JURUL OBSTACOLULUI CIRCULAR

DE

N. MARCOV

Se consideră mişcarea plană a fluidului perfect, incompresibil, electroconductor în jurul obstacolului circular. Presupunînd parametrul de interacţiune mic, mişcarea fluidului electroconductor este aproximativ mişcarea potenţială a fluidului neconductor. Trecînd în planul potenţialului complex pentru mişcarea fluidă, problema determinării cîmpului magnetic indus este redusă la rezolvarea a două ecuaţii integrale.

Problema mişcării plane a fluidului perfect, incompresibil, electroconductor în jurul unui obstacol simetric în raport cu direcţia vitezei de la infinit, în ipoteza parametrului de interacţiune mic, a fost pusă în generalitatea ei, şi rezolvată pentru obstacolul circular, de către E. Seebass şi K. Tamada [1]. În cele ce urmează considerăm mişcarea fluidului în jurul cilindrului circular, dar fără a mai presupune că la infinit intensitatea cîmpului magnetic este paralelă vitezei fluidului. Dată fiind această singură modificare a condiţiilor problemei, vom aborda problema pusă cu metoda folosită în [1].

Ecuaţiile de mişcare şi cîmpul vitezelor. Scriem ecuaţiile de mişcare în următoarele ipoteze : fluidul este perfect, incompresibil, electroconductor de conductibilitate σ ; cilindrul circular este format dintr-un material de conductibilitate σ_0 finită ; fluidul şi materialul cilindrului sînt omogeni şi izotropi din punct de vedere electric şi au aceeaşi permeabilitate magnetică μ ; mişcarea este permanentă ; la infinit cîmpul magnetic şi cîmpul vitezelor sînt uniforme şi perpendiculare pe axa cilindrului. Alegem drept sistem de referinţă un sistem cartezian drept $O\,\tilde{x}\,\tilde{y}\,\tilde{z}$, axa $O\tilde{z}$ avînd direcţia vitezei de la infinit a fluidului. Trecînd la variabilele adimensionale [2], ecuaţiile de mişcare se scriu :

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 7, P. 1039–1046, BUCUREȘTI, 1967

— pentru domeniul D în care este situat fluidul

$$(\vec{v}\ \mathrm{grad})\,\vec{v} = -\,\mathrm{grad}\,P + R_p\,(\vec{h}\ \mathrm{grad})\,\vec{h}, \quad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \tag{1}$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{h} = R_m\,(\vec{e} + \vec{v} \times \vec{h}), \quad \mathrm{rot}\,\vec{e} = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{h} = 0\,;$$

— pentru domeniul D_0 al cilindrului circular

$$\mathrm{rot}\,\vec{h} = R_{0m}\,\vec{e}, \quad \mathrm{rot}\,\vec{e} = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{h} = 0, \tag{2}$$

unde

$$P = p + \frac{1}{2} R_p h^2, \quad R_p = \mu H_\infty^2/\rho V_\infty^2\,, \quad R_m = \sigma \mu L V_\infty\,, \quad R_{0m} = \sigma_0 \mu L V_\infty\,.$$

Mărimile V_∞ şi H_∞ caracterizează cîmpul vitezelor, respectiv cîmpul magnetic la infinit. Lungimea caracteristică L se consideră egală cu raza cilindrului.

Presupunem mişcarea plană, toate mărimile fiind independente de variabila $\widetilde{z}$. Din ecuaţiile

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{h} = 0$$

obţinem

$$\vec{v} = \mathrm{rot}\,y\,(\widetilde{x}, \widetilde{y})\,\vec{k}, \quad \vec{h} = \mathrm{rot}\,\chi\,(\widetilde{x}, \widetilde{y})\,\vec{k}. \tag{3}$$

Funcţia y este funcţia de curent pentru cîmpul vitezelor şi este definită în domeniul D, iar funcţia χ este funcţia de forţă pentru cîmpul magnetic, definită în D şi D_0. Notăm

$$\Omega\,\vec{k} = \mathrm{rot}\,\vec{v}.$$

Înlocuind (3) în (1) şi (2), se obţine

$$\vec{e} = e_\infty\,\vec{k}$$

$$\Delta\chi = \begin{cases} R_m \left[-\,e_\infty + \dfrac{\partial\,(\chi, y)}{\partial\,(\widetilde{x}, \widetilde{y})} \right] & \text{în } D \\ R_{0m}\,(\,-\,e_\infty) & \text{în } D_0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\frac{\partial\,(\Omega, y)}{\partial\,(\widetilde{x}, \widetilde{y})} + R_p \frac{\partial\,(\Delta\chi, \chi)}{\partial\,(\widetilde{x}, \widetilde{y})} = 0 \qquad \Delta y = -\,\Omega.$$

În cele ce urmează se presupune parametrul de interacţiune $R_p R_m$ mic. Eliminînd pe $\Delta\chi$ obţinem

$$\frac{\partial\,(\Omega, y)}{\partial\,(\widetilde{x}, \widetilde{y})} = 0 \quad (R_p R_m) \cong 0.$$

Din uniformitatea de la infinit a cîmpului vitezelor, obţinem

$$\Omega \cong 0.$$

Astfel mişcarea fluidului electroconductor este aproximativ mişcarea potenţială a fluidului neconductor. Notînd cu x potenţialul vitezelor, obţinem pentru cercul unitate rezultatul cunoscut

$$x + iy = f(\tilde{z}) = \tilde{z} + \frac{1}{\tilde{z}}, \quad \text{unde } \tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}. \tag{5}$$

Ecuaţia pe care o satisface funcţia de forţă χ. Deoarece fluidul şi cilindrul au aceeaşi permeabilitate magnetică μ, este necesară continuitatea cîmpului magnetic, deci a derivatelor prime ale funcţiei de forţă χ pe conturul Γ al obstacolului. Fie α şi β componentele intensităţii magnetice de la infinit. Obţinem

$$\vec{h}_\infty = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}, \quad e_\infty = (-\vec{v} \times \vec{h})|_\infty \cdot \vec{k} = -\beta.$$

Din relaţia (4) şi din aceste condiţii, obţinem pentru funcţia de forţă ecuaţia

$$\Delta\chi = \begin{cases} R_m \left[\beta + \dfrac{\partial(\chi, y)}{\partial(\tilde{x}\,\tilde{y})}\right] & \text{în } D \\ R_{0m}\,\beta & \text{în } D_0 \end{cases} \tag{6}$$

$$[\chi]|_\Gamma = 0, \quad \left[\frac{d\chi}{dn}\right]\Big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial\chi}{\partial\tilde{y}}\Big|_\infty = \alpha, \quad -\frac{\partial\chi}{\partial\tilde{x}}\Big|_\infty = \beta.$$

În cele ce urmează considerăm cazul obstacolului circular. Astfel conturul Γ este cercul unitate, funcţia de curent y fiind dată de relaţia (5).

Ecuaţiile integrale ataşate problemei la limită. De la planul fizic adimensional trecem la planul potenţialului complex dat în (5). Astfel domeniul $D\,(D_0)$ se transformă în planul xOy cu tăietură pe segmentul $[-2,+2]$ al axei reale. Fie φ funcţia de forţă pentru interiorul conturului Γ (domeniul cercului obstacol) şi fie χ funcţia de forţă pentru exteriorul conturului Γ (domeniul fluidului). Prin transformarea efectuată, din ecuaţia (6), obţinem următoarele ecuaţii pentru planul xOy cu tăietură pe segmentul $[-2, +2]$

$$\Delta\chi - 2k\frac{\partial\chi}{\partial x} = 2k\beta V^{-2}, \quad \frac{\partial\chi}{\partial y}\Big|_\infty = \alpha, \quad -\frac{\partial\chi}{\partial x}\Big|_\infty = \beta, \tag{7}$$

$$\Delta\varphi = 2k_0\beta V_0^{-2}. \tag{8}$$

Ecuaţia (6) arată că funcţia de forţă este determinată în afara unei constante aditive. Astfel se poate considera că funcţia de forţă se anulează în originea planului fizic. Aşadar funcţia φ se anulează în punctul de la infinit din planul potenţialului complex :

$$\varphi|_\infty = 0.$$

Pe tăietura $(-2, +2)$ a axei reale trebuie să se verifice condiţiile

$$(9) \qquad \chi(x, \pm 0) = \varphi(x, \mp 0), \qquad \frac{\partial \chi}{\partial y}(x, \mp 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, \pm 0).$$

În ecuaţiile (7), (8) s-a folosit notaţia

$$R_m = 2k, \quad V^2 = \left|\frac{d f}{d \widetilde{z}}\right|^2 \quad \text{pentru } |\widetilde{z}| \geqslant 1$$

$$R_{0m} = 2k_0, \quad V_0^2 = \left|\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} \widetilde{z}}\right|^2 \quad \text{pentru } |\widetilde{z}| \leqslant 1.$$

Utilizînd reprezentarea prin potenţiali pentru ecuaţia (7), se arată că o funcţie particulară χ_1 care satisface ecuaţiei (7) neomogene şi condiţiei de la infinit este

$$(10) \quad \chi_1(x, y) = -\beta \widetilde{x} + \alpha y - k \beta \frac{1}{\pi} \iint (1 - u) V^{-2}|_Q \, \mathrm{e}^{k(x-\xi)} K_0(k r_{PQ}) \, d\sigma_Q$$

unde

$$u - \mathrm{i} v = \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} \widetilde{z}}, \quad r_{PQ}^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

$$(10') \quad (1 - u) V^{-2}|_Q = \frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)\{(\xi^2 + \eta^2)^2 - 8(\xi^2 - \eta^2) + 16\}^{-1} - \frac{1}{4}.$$

Funcţia $K_0(z)$ este funcţia Bessel de ordin zero, argument imaginar şi speţa a doua. Integrala este considerată pe tot planul xOy, şi reprezintă o funcţie continuă inclusiv în punctele $(\pm 2, 0)$, avînd derivata normală continuă pe segmentul $(-2, +2)$. Deoarece expresia (10′) este o funcţie pară în η, se arată că integrala este o funcţie pară de y. Astfel derivata integralei în raport cu y se anulează pentru $y = 0$

$$(10'') \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial y}(x, \pm 0) = \alpha - \beta \frac{\partial \widetilde{x}}{\partial y}(x, \pm 0) = \alpha \mp \beta \frac{x}{2\sqrt{4 - x^2}}, \quad x \in (-2, +2).$$

Deoarece funcţia $\widetilde{x}(x, y)$ este continuă, rezultă că funcţia χ_1 este continuă pe $(-2, +2)$.

Analog, o funcţie particulară φ_1 care satisface ecuaţia (8) neomogenă şi condiţia de la infinit este

$$(11) \qquad \varphi_1(x, y) = \frac{1}{2} k_0 \beta (\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 - 1).$$

Această funcţie este continuă pe tăietura $(-2, +2)$, însă are derivată normală discontinuă şi anume

$$(11') \qquad \varphi_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, \pm 0) = \mp k_0 \beta \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Soluţia ecuaţiilor (7) şi (8) cu condiţiile (9) poate fi pusă sub forma

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{+2}\left\{\frac{-y f(\xi)}{r^2} + m(\xi)\log\frac{1}{r}\right\}\mathrm{d}\xi$$

$$(12) \qquad \chi(x, y) = \chi_1(x, y) + c_1 +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{+2}\left\{\frac{y f(\xi)}{r^2}\, kr\, K_1(kr) + g(\xi)\, K_0(kr)\right\}\mathrm{e}^{k(x-\xi)}\,\mathrm{d}\xi,$$

unde

$$r^2 = (x - \xi)^2 + y^2.$$

Deoarece φ trebuie să se anuleze la infinit, este necesar

$$\int_{-2}^{+2} m(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Funcţia $K_1(z)$ este funcţia Bessel de ordin unu, argument imaginar şi speţa a doua.

Presupunem că funcţiile $f(\xi)$, $g(\xi)$, $m(\xi)$ au derivate hölderiene pe segmentul $(-2, +2)$. În acest caz impunem funcţiilor φ şi χ date de (12), prima din condiţiile (9) şi obţinem relaţiile

$$\chi_1(x, 0) + c_1 \mp f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{+2} g(\xi)\,\mathrm{e}^{k(x-\xi)}\,K_0(k|x - \xi|)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \mp f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{+2} m(\xi)\log|x - \xi|\,\mathrm{d}\xi.$$

Fiecare membru al acestei egalităţi reprezintă valorile funcţiei de forţă pe tăietura $[-2, +2]$. În punctele $(\pm 2{,}0)$ funcţia de forţă trebuie să aibe valori determinate. Astfel sînt necesare condiţiile

$$f(-2) = f(+2) = 0.$$

Impunem acum a doua condiţie din (9) ţinînd seama de relaţia (10′). Se obţine

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{+2}\frac{f'(\xi)}{x - \xi}\,\mathrm{e}^{k(x-\xi)}\,\{k|x-\xi|\,K_1(k|x-\xi|) + k(x-\xi)\,K_0(k|x-\xi|)\}\,\mathrm{d}\xi +$$

$$+ \alpha \mp \beta\frac{x}{2\sqrt{4 - x^2}} \pm m(x) = \mp k_0\,\beta\frac{1}{\sqrt{4 - x^{-2}}} + \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{+2}\frac{f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{x - \xi} \mp g(x).$$

Astfel pe tăietura $(-2, +2)$ avem următoarele ecuaţii pentru funcţiile f, g, m:

$$(13) \qquad m(x) + g(x) + \beta\frac{2k_0 - x}{2\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{+2}\frac{f(\xi)}{x-\xi}\{1+\mathrm{e}^{k(x-\xi)}[k|x-\xi|K_1(k|x-\xi|)+ \tag{14}$$

$$+k(x-\xi)K_0(k|x-\xi|)]\}\,\mathrm{d}\xi=\alpha$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{+2}g(\xi)\{\mathrm{e}^{k(x-\xi)}K_0(k|x-\xi|)-\log|x-\xi|\}\,\mathrm{d}\xi= \tag{15}$$

$$=-\chi_1(x,0)-c_1-\frac{1}{2}\beta x,$$

funcţia χ_1 fiind dată de (10).

Ecuaţia integrală (14) poate fi adusă la forma ecuaţiei Fredholm. Pentru aceasta se introduce funcţia

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_{-2}^{+2}\frac{f'(\xi)}{x-\xi}\,\mathrm{d}\xi. \tag{16}$$

Inversarea acestei integrale se efectuează ţinînd seama de comportamentul funcţiei $f'(\xi)$ la capetele intervalului de integrare şi se obţine

$$f'(\xi)=\frac{1}{2\pi\sqrt{4-\xi^2}}\int_{-2}^{+2}\frac{F(\eta)\sqrt{4-\eta^2}}{\eta-\xi}\,\mathrm{d}\eta. \tag{17}$$

Introducînd expresiile (16) şi (17) în ecuaţiile (14), permutînd ordinea de integrare ţinînd seama de formula lui Poincaré Bertrand [3], se obţine ecuaţia

$$F(x)+\frac{1}{2\pi^2}\int_{-2}^{+2}F(\eta)\sqrt{4-\eta^2}\,I_{+}(k,\eta,x)\,\mathrm{d}\eta=\alpha, \tag{18}$$

unde

$$I_{\pm}(k,\eta,x)=\int_{-2}^{+2}\frac{1}{\sqrt{4-\xi^2}}\left\{\frac{\mathrm{e}^{k(x-\xi)}k|x-\xi|K_1(k|x-\xi|)-1}{x-\xi}\pm\right. \tag{19}$$

$$\left.\pm k\,\mathrm{e}^{k(x-\xi)}K_0(k|x-\xi|)\right\}\frac{\mathrm{d}\xi}{\eta-\xi}.$$

Ecuaţia (15) poate fi adusă la forma ecuaţiei lui Fredholm. Introducem funcţia

$$G(x)=-\frac{2}{\pi}\int_{-2}^{+2}g(\xi)\log|x-\xi|\,\mathrm{d}\xi. \tag{20}$$

Aşa cum se arată în [4], inversa acestei integrale are expresia

$$g(\xi)=\frac{1}{2\pi\sqrt{4-\xi^2}}\int_{-2}^{+2}\frac{G'(\eta)\sqrt{4-\eta^2}}{\xi-\eta}\,\mathrm{d}\eta-\frac{\Gamma}{\pi\sqrt{4-\xi^2}}, \tag{21}$$

unde

$$\Gamma = -\int_{-2}^{+2} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-2}^{+2}\left\{m(\xi) + \beta\frac{2k_0 - \xi}{2\sqrt{4-\xi^2}}\right\}\mathrm{d}\xi = \beta k_0 \pi.$$

Multiplicînd relația (20) cu $(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ și integrînd se obține condiția

$$\int_{-2}^{+2}\frac{G(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = 0. \tag{20'}$$

Înlocuind (20) și (21) in (15) se obține

$$G(x) + \frac{1}{2\pi^2}\int_{-2}^{+2} G'(\eta)\sqrt{4-\eta^2}\,N(k,\eta,x)\,\mathrm{d}\eta = -a(x), \tag{22}$$

unde

$$\begin{aligned} N(k,\eta,x) &= \int_{-2}^{+2}\frac{1}{\sqrt{4-\xi^2}}[\mathrm{e}^{k(x-\xi)}K_0(k|x-\xi|) + \log|x-\xi|]\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-\eta} \\ a(x) &= \chi_1(x,0) + c_1 + \frac{1}{2}\beta x - \beta k_0\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{+2}\frac{1}{\sqrt{4-\xi^2}}\mathrm{e}^{k(x-\xi)}K_0(k|x-\xi|)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{23}$$

Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial x}N(k,\eta,x) = I_-(k,\eta,x),$$

derivînd relația (22) obținem

$$G'(x) + \frac{1}{2\pi^2}\int_{-2}^{+2} G'(\eta)\sqrt{4-\eta^2}\,I_-(k,\eta,x)\,\mathrm{d}\eta = -a'(x). \tag{24}$$

Ecuația (18) a fost obținută și rezolvată aproximativ în [1], pentru cazul în care cîmpul magnetic este paralel cu cîmpul vitezelor, la infinit. În cazul în care cîmpul magnetic nu este paralel cîmpului vitezelor, este necesar să se rezolve și ecuația (24) pentru funcția $G'(x)$. Rezolvarea ecuațiilor (18), (24) și utilizarea relațiilor (17), (21) dă posibilitatea obținerii funcțiilor $f(\xi)$ și $g(\xi)$. În acest fel se obține expresia funcției de forță în planul potențialului complex.

Primită la redacție la 13 martie 1967

Facultatea de matematică și mecanică
a Universității din București
Str. Academiei nr. 14.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Seebass şi K. Tamada, *The distortion of a magnetic field by the flow of a conducting fluid past a circular cylinder.* J. Fluid Mech. **22**, 561 (1965).
2. L. Dragoş, *Théorie des profils minces en magnétoaérodynamique.* Journal de Mecanique, **II**, 3, Septembre (1963).
3. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения.* Moscova, 1962.
4. W. Schmeidler, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik.* Leipzig, 1955.
5. G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions.* Cambridge, 1922.

O SCHEMĂ CU GRADUL DE EXACTITATE PATRU ÎN METODA DREPTELOR APLICATĂ LA REZOLVAREA APROXIMATIVĂ A UNOR PROBLEME LA LIMITĂ ASUPRA ECUAȚIILOR DE TIP PARABOLIC

DE

FLORICA MUNTEANU PASCAL

Pentru rezolvarea aproximativă a primei probleme la limite referitoare la ecuaţii cu derivate parţiale de tip parabolic cu coeficienţi constanţi şi variabili, se construiesc sisteme de ecuaţii diferenţiale care aproximează pe anumite drepte ecuaţiile cu derivate parţiale, cu o eroare de ordinul patru. La alcătuirea acestor sisteme se folosesc formule de derivare numerică ce sînt de asemenea date în lucrare. Se delimitează eroarea cu care soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale aproximează pe dreptele alese soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale corespunzătoare. Se constată că şi eroarea soluţiei este tot de ordinul patru.

În literatura de specialitate din ultimele decenii se indică la rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor cu derivate parţiale, alături de metoda diferenţelor finite şi metoda dreptelor, care are avantajul faţă de prima că furnizează soluţia aproximativă a problemei discret în raport cu o variabilă, dar continuu în raport cu cealaltă.

În cele ce urmează vom construi pentru ecuaţia parabolică un sistem de ecuaţii diferenţiale, a cărui soluţie aproximează, pe dreptele alese, soluţia problemei considerate cu o eroare de ordinul patru şi vom da şi o delimitare a acestei erori.

§ 1. Considerăm ecuaţia

$$\alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{1}$$

şi condiţiile

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= g(x) \\ u(0, t) &= \psi_1(t) \\ u(l, t) &= \psi_2(t) \end{aligned} \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 7, P. 1047–1062, BUCUREȘTI, 1967

în domeniul definit de inegalitățile

$$D: \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant l \\ 0 \leqslant t \leqslant T. \end{array}$$

Presupunem că funcțiile $f(x, t)$, $g(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ sînt astfel încît ecuația (1) cu condițiile (2) are soluție unică continuă împreună cu derivatele sale pînă la ordinul șase inclusiv în raport cu x și de ordinul întîi în raport cu t în domeniul

$$D_1: \begin{array}{l} -h_0 \leqq x \leqq l + h_0, \quad h_0 > 0 \\ 0 \leqq t \leqq T. \end{array}$$

Fie $h < h_0$ și o rețea de noduri echidistante $x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ din intervalul $(-h_0, l + h_0)$, unde $x_i = ih$, $(i = -1, 0, 1, \ldots, n + 1)$ și $h = \frac{l}{n}\cdot$ Notăm $u(x_i, t) = u_i(t)$, $(i = -1, 0, 1, \ldots, n + 1)$, $f(x_i, t) = f_i(t)$ și $g(x_i, t) = g_i(t)$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Scriem ecuația (1) în nodurile $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ adică

$$\alpha^2 \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right|_{x = x_i} + f(x_i, t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{3}$$

și înlocuim pe $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ prin formula

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x = x_i} = \frac{1}{12h^2}\Big[-u(x_{i-2}, t) + 16\,u(x_{i-1}, t) - 30\,u(x_i, t) + 16\,u(x_{i+1}, t) - u(x_{i+2}, t)\Big] + R_i, \tag{4}$$

unde

$$R_i = \frac{h^4}{90}\,\frac{\partial^6 u(\xi_i, t)}{\partial x^6}, \quad -h_0 < \xi_i < l + h_0. \tag{5}$$

Folosind notațiile introduse mai sus, obținem din (3) și (4) sistemul de ecuații

$$u_i' = \frac{1}{12h^2}(-u_{i-2} + 16\,u_{i-1} - 30\,u_i + 16\,u_{i+1} - u_{i+2}) + f_i + R_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n - 1). \tag{6}$$

Funcțiile $u_0(t)$ și $u_n(t)$ sînt cunoscute din condițiile la limită și anume

$$\begin{array}{l} u_0(t) = \psi_1(t) \\ u_n(t) = \psi_2(t) \end{array} \tag{7}$$

iar condiţia iniţială ne dă condiţii iniţiale pentru funcţiile necunoscute $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ ale sistemului (6) şi anume

$$u_i(0) = g_i, \qquad (i = 1,2, \ldots, n-1) \tag{8}$$

În sistemul (6) mai figurează funcţiile $u_{-1}(t)$ şi $u_{n+1}(t)$ pe care le vom exprima prin u_1 respectiv u_{n-1} şi datele problemei. Scriind formula lui Taylor pentru $u(-h, t)$ şi $u(h, t)$, avem

$$u(-h, t) = u(0, t) - \frac{h}{1!}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0} - \ldots + \frac{h^6}{6!}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\Big|_{x=\xi_1}$$

$$u(h, t) = u(0, t) + \frac{h}{1!}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0} - \ldots + \frac{h^6}{6!}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\Big|_{x=\xi_2}$$

din care prin adunare obţinem

$$u_{-1} + u_1 = 2\left(u_0 + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0} + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{x=0}\right) + \frac{h^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\Big|_{x=\xi_1} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\Big|_{x=\xi_2}\right), \tag{9}$$

unde

$$-h < \xi_1, \xi_2 < h.$$

Pe de altă parte, din ecuaţia (1) avem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=0} - f(0, t) = \alpha^2 \psi_1'(t) - f(0, t)$$

şi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha^2\frac{\partial u}{\partial t} - f(x, t)\right) = \alpha^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t} - f(x, t)\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

deci

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{x=0} = \alpha^4 \psi_1''(t) - \alpha^2 f_0'(t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{x=0}.$$

Cu acestea (9) devine

$$\begin{aligned} u_{-1} + u_1 = 2\Big\{\psi_1(t) + \frac{h^2}{2}\left[\alpha^2 \psi_1'(t) - f_0(t)\right] + \\ + \frac{h^4}{4!}\left[\alpha^4 \psi_1''(t) - \alpha^2 f_0'(t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{x=0}\right] + \frac{h^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\Big|_{x=\xi_1} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}{}_{=\xi_2}\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Notînd

$$\Phi_1(t) = 2\left\{\psi_1(t) + \frac{h^2}{2}[\alpha^2\psi_1'(t) - f_0(t)] + \right.$$

$$\left. + \frac{h^4}{4!}\left[\alpha^4\psi_1''(t) - \alpha^2 f_0'(t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{x=0}\right]\right\}$$

$$R_1^* = \frac{h^6}{6!}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\bigg|_{x=\xi_1} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\bigg|_{x=\xi_2}\right] \tag{11}$$

(10) devine

$$u_{-1} + u_1 = \Phi_1(t) + R_1^*. \tag{12}$$

În mod analog deducem

$$u_{n-1} + u_{n+1} = \Phi_2(t) + R_2^*, \tag{13}$$

unde

$$\Phi_2(t) = 2\left\{\psi_2(t) + \frac{h^2}{2}[\alpha^2\psi_2'(t) - f_0(t)] + \frac{h^4}{4!}\left[\alpha^4\psi_2''(t) - \alpha^2 f_n'(t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{x=l}\right]\right\}$$

şi

$$R_2^* = \frac{h^6}{6!}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\bigg|_{x=\eta_1} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\bigg|_{x=\eta_2}\right], \; l - h < \eta_1, \eta_2 < l + h. \tag{14}$$

Sistemul de ecuaţii (6) împreună cu ecuaţiile (12), (13) şi cu condiţiile iniţiale (8) determină soluţia $u_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ a ecuaţiei (1) cu condiţiile (2) pe dreptele de ecuaţii $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Dacă însă din ecuaţiile sus-amintite neglijăm termenii care conţin resturile $R_1, R_2 \ldots, R_{n-1}$ şi R_1^*, R_2^*, obţinem pentru determinarea unor valori aproximative ale funcţiilor $u_i(t)$ sistemul de ecuaţii

$$\alpha^2\tilde{u}_i' = \frac{1}{12h^2}(-\tilde{u}_{i-2} + 16\tilde{u}_{i-1} - 30\tilde{u}_i + 16\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_{i+2}) + f_i,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{15}$$

$$\tilde{u}_0(t) = u_0(t) = \psi_1(t), \qquad \tilde{u}_n(t) = u_n(t) = \psi_2(t)$$

$$\tilde{u}_{-1}(t) = -\tilde{u}_1(t) + \Phi_1(t), \; \tilde{u}_{n+1}(t) = -\tilde{u}_{n-1}(t) + \Phi_2(t)$$

şi condiţiile iniţiale

$$\tilde{u}_i(0) = g_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{16}$$

§ **2.** Evaluarea erorii cu care soluţia sistemului (15) cu cond. (16) aproximează pe dreptele de ecuaţii $x = x_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, soluţia ecuaţiei (1) cu condiţiile (2).

Notînd $\gamma_i(t) = u_i(t) - \widetilde{u}_i(t)$, $(i = -1, 0, 1, \ldots, n-1)$, şi scăzînd din ecuaţiile (6), (12), (13) ecuaţiile corespunzătoare ale sistemului (15), avem pentru $\gamma_i(t)$ sistemul

$$\alpha^2 \gamma_i' = \frac{1}{12h^2}(-\gamma_{i-2} + 16\gamma_{i-1} - 30\gamma_i + 16\gamma_{i+1} - \gamma_{i+2}) + R_i, \tag{17}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{-1} + \gamma_1 &= R_1^* \\ \gamma_{n-1} + \gamma_{n+1} &= R_2^* \end{aligned} \tag{18}$$

şi condiţiile

$$\gamma_i(0) = 0. \tag{19}$$

Folosind notaţia

$$\Delta^2 \gamma_k = \gamma_k - 2\gamma_{k+1} + \gamma_{k+2},$$

sistemul (17) se scrie astfel

$$\alpha^2 \gamma_i' = \frac{1}{12h^2}(-\Delta^2\gamma_{i-2} + 14\Delta^2\gamma_{i-1} - \Delta^2\gamma_i) + R_i. \tag{17'}$$

Ţinînd seama de faptul că $\gamma_0 = \gamma_n = 0$, pentru γ_k, $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, este adevărată inegalitatea

$$\gamma_k^2 \leqq h\frac{x_k(l - x_k)}{l}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\gamma_i - \gamma_{i-1})^2}{h^2}. \tag{20}$$

Pentru evaluarea erorii $\gamma_k(t)$ vom delimita suma din (20) introducînd funcţia auxiliară pozitivă

$$I(t) = 2\alpha^2\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^t \gamma_i'^2\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}\frac{(\gamma_i - \gamma_{i-1})^2}{h^2} + \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\Delta^2\gamma_{i-1}}{h}\right)^2 \tag{21}$$

care, după cum este uşor de observat, satisface inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(\gamma_i - \gamma_{i-1})^2}{h^2} < I$$

şi atunci din (20) avem

$$\gamma_k^2 \leqq h\frac{x_k(l - x_k)}{l} I.$$

Pentru a găsi o margine superioară pentru funcţia $I(t)$ derivăm (21) şi obţinem

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 2\alpha^2\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i'^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\gamma_i - \gamma_{i-1})^2}{h^2} + \frac{1}{12}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\Delta^2\gamma_{i-1}}{h}\right)^2 \tag{22}$$

dar

$$\frac{1}{h^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i-\gamma_{i-1})^2=-\frac{2}{h^2}\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i'\,\Delta^2\gamma_{i-1} \tag{23}$$

şi

$$\frac{1}{12h^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum(\Delta^2\gamma_{i-1})^2=\frac{2}{12h^2}\Bigg[\sum_{i=1}^{n-1}(\Delta^2\gamma_{i-2}-2\,\Delta^2\gamma_{i-1}+\Delta^2\gamma_i)\,\gamma_i'-$$

$$-\gamma_1'\,\Delta^2\gamma_{-1}-\gamma_{n-1}'\,\Delta^2\gamma_{n-1}\Bigg] \tag{24}$$

iar din sistemul (17′) avem

$$2\,\alpha^2\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i'^2=2\Bigg\{-\frac{1}{12h^2}\sum_{i=1}^{n-1}(\Delta^2\gamma_{i-2}-2\,\Delta^2\gamma_{i-1}+\Delta^2\gamma_i)\,\gamma_i'+$$

$$+\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i'\,\Delta^2\gamma_{i-1}+\sum_{i=1}^{n-1}R_i\,\gamma_i'\Bigg\} \tag{25}$$

şi din (18)

$$\begin{aligned}\Delta^2\gamma_{-1}&=\gamma_{-1}-2\,\gamma_0+\gamma_1=\gamma_{-1}+\gamma_1=R_1^*\\ \Delta^2\gamma_{n-1}&=\gamma_{n-1}-2\gamma_n+\gamma_{n+1}=\gamma_{n-1}+\gamma_{n+1}=R_2^*.\end{aligned} \tag{26}$$

Folosind ultimele relaţii, formula (22) devine

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{6h^2}(R_1^*\,\gamma_1'+R_2^*\,\gamma_{n-1}')+2\sum_{i=1}^{n-1}R_i\,\gamma_i'. \tag{27}$$

Ţinînd seama de expresiile lui R_i din (5) şi ale lui R_1^* şi R_2^* din (11) respectiv (14) şi notînd $M_6=\max\limits_{D_1}\left|\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right|$ obţinem

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{h^4}{43}M_6\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i'. \tag{28}$$

Pe de altă parte din definiţia lui $I\,(t)$ şi din condiţiile (19) avem $I\,(0)=0$; atunci putem scrie

$$I^2\,(t)=\left(\int_0^t\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right)^2,$$

unde aplicînd inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski avem

$$I^2\,(t)=t\int_0^t\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}t \tag{29}$$

sau, conform cu (28),

$$I^2\,(t)<t\,\frac{h^8}{43^2}\,M_6^2\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i'\right)^2\mathrm{d}t. \tag{30}$$

Dar

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i'\right)^2 \leqq (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i'^2$$

şi din (21) se vede că

$$\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i'^2\right) dt < \frac{I(t)}{2\,\alpha^2}, \tag{31}$$

atunci (30) devine

$$I^2(t) < \frac{h^8 (n-1) M_6^2}{2.43^2\alpha^2} t\, I < \frac{l\, h^7\, M_6^2}{2.43^2\alpha^2} t\, I$$

sau

$$I < \frac{l\, h^7\, M_6^2}{2.43^2\alpha^2} t$$

şi deci

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(\gamma_i - \gamma_{i-1})^2}{h^2} < \frac{l\, h^7 M_6^2}{2.43^2\alpha^2} t.$$

Cu acestea (20) devine

$$\gamma_k^2 < \frac{x_k (l - x_k)}{l} \frac{l\, h^8\, M_6^2}{2.43^2\alpha^2} t$$

şi prin urmare

$$|\gamma_k^2| < \frac{h^4}{60\alpha} \sqrt{\frac{x_k (l - x_k)\, t}{l}}\, M_6, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{32}$$

Delimitarea (32) arată că pentru $h \to \infty$, $\gamma_k \to 0$ deci $\tilde{u}_i(t) \to u_i(t)$. Pe de altă parte se vede că viteza de convergenţă este de ordinul lui h^4, adică ordinul erorii în soluţie este acelaşi ca al erorii cu care se aproximează ecuaţia pe dreptele $x = x_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$

§ **3.** ***Ecuaţia cu coeficienţi variabili.*** Să considerăm acum ecuaţia

$$p(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{33}$$

unde $p(x) \geqq p_0^2 > 0$ este o funcţie continuă în intervalul $[0, l]$ şi fie $P = \max\limits_{[0, l]} p(x)$. Ne propunem să căutăm o valoare aproximativă a soluţiei ecuaţiei (33) care satisface la condiţiile (2), folosind şi de data aceasta un sistem de ecuaţii diferenţiale care aproximează pe dreptele de ecuaţii $x = x_i$ ecuaţia (33) cu eroarea de ordinul lui h^4. Spre deosebire de cazul precedent, acum nu putem exprima pe u_{-1} şi u_{n+1} prin u_1 respectiv

u_{n-1} şi datele problemei, deoarece nu cunoaştem derivatele $\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=0}$ respectiv $\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=l}$. Din acest motiv pentru ecuaţia (33) vom construi un sistem de ecuaţii diferenţiale în care să nu figureze funcţiile $u_{-1}(t)$ şi $u_{n+1}(t)$, exprimînd derivata $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ în punctele x_1 şi x_{n-1} cu ajutorul unor formule de derivate numerică cu ordinul de exactitate h^4 în funcţie de $u_0, u_1, \ldots, u_5$ şi respectiv $u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-5}$. Vom determina în prealabil astfel de formule folosind metoda din lucrarea [1].

§ 4. *Deducerea formulei de derivare numerică.* Fie $f(x)$ o funcţie de clasă C^6 pe intervalul $[x_0, x_5]$ şi fie x_1, x_2, x_3, x_4 noduri echidistante ce împart intervalul $[x_0, x_5]$ în cinci părţi egale de lungime $h = \frac{x_5 - x_0}{5}$.

Vom construi o formulă de derivare numerică. de forma

$$f''(x_1) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_5 f(x_5) + R. \tag{34}$$

Pentru determinarea coeficienţilor şi restului formulei (34) vom folosi metoda lui D. V. Ionescu [1].

Ataşăm fiecărui interval $[x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, cîte o funcţie $\varphi_i(x)$ care satisface ecuaţia $\varphi_i^{\mathrm{VI}}(x) = 0$ şi condiţiile

$$\begin{aligned}
&\varphi_1^{(k)}(x_0) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)\\
&\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1), \ \varphi_1'(x_1) = \varphi_2'(x_1), \ \varphi_1''(x_1) = \varphi_2''(x_1),\\
&\qquad\qquad \varphi_1^{\mathrm{IV}}(x_1) = \varphi_2^{\mathrm{IV}}(x_1)\\
&\varphi_i^{(k)}(x_i) = \varphi_{i+1}^{(k)}(x_i), \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4), \ (i = 2, 3, 4)\\
&\varphi_5^{(k)}(x_5) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).
\end{aligned} \tag{35}$$

Notăm cu $\varphi(x)$ funcţia ce coincide pe intervalele $[x_{i-1}, x_i]$ cu $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Aplicînd integralei

$$\int_{x_0}^{x_5} \varphi^{\mathrm{VI}}(x) f(x)\, \mathrm{d}x$$

formula de integrare prin părţi generalizată şi ţinînd seama de faptul că $\varphi_i^{\mathrm{VI}}(x) = 0$ şi de condiţiile (35), obţinem formula

$$\begin{aligned}
&-\varphi_1^{\mathrm{V}} f(x_0) + (\varphi_1^{\mathrm{V}} - \varphi_2^{\mathrm{V}}) f(x_1) + (\varphi_2^{\mathrm{V}} - \varphi_3^{\mathrm{V}}) f(x_2) + (\varphi_3^{\mathrm{V}} - \varphi_4^{\mathrm{V}}) f(x_3) +\\
&+ (\varphi_4^{\mathrm{V}} - \varphi_5^{\mathrm{V}}) f(x_4) + \varphi_5^{\mathrm{V}} f(x_5) + [\varphi_1'''(x_1) - \varphi_2'''(x_1)]\, f''(x_1) = -\\
&\qquad -\int_{x_0}^{x_5} \varphi(x) f^{\mathrm{VI}}(x)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{36}$$

Coeficienţii şi restul formulei (36) sînt daţi de funcţia $\varphi(x)$ şi de derivatele sale. Observăm că polinoamele

$$\varphi_1 = \lambda \frac{(x - x_0)^5}{5!}$$

$$\varphi_2 = \mu_0 \frac{(x - x_5)^5}{5!} + \mu_1 \frac{(x - x_4)^5}{5!} + \mu_2 \frac{(x - x_3)^5}{5!} + \mu_3 \frac{(x - x_2)^5}{5!}$$

$$\varphi_3 = \mu_0 \frac{(x - x_5)^5}{5!} + \mu_1 \frac{(x - x_4)^5}{5!} + \mu_2 \frac{(x - x_3)^5}{5!}$$

$$\varphi_4 = \mu_0 \frac{(x - x_5)^5}{5!} + \mu_1 \frac{(x - x_4)^5}{5!}$$

$$\varphi_5 = \mu_0 \frac{(x - x_5)^5}{5!}$$

verifică ecuaţiile diferenţiale $\varphi_i^{VI} = 0$ şi condiţiile din punctele x_0, x_2, x_3, x_4, x_5. Scriind condiţiile în punctul x_1 vom determina valorile parametrilor λ, μ_0, μ_1, μ_2, μ_3 din sistemul

$$\begin{aligned} \lambda &= -4^5 \mu_0 - 3^5 \mu_1 - 2^5 \mu_2 - \mu_3 \\ \lambda &= 4^4 \mu_0 + 3^4 \mu_1 + 2^4 \mu_2 + \mu_3 \\ \lambda &= -4^3 \mu_0 - 3^3 \mu_1 + 2^3 \mu_2 + \mu_3 \\ \lambda &= -4 \mu_0 - 3 \mu_1 - 2\mu_2 - \mu_3 \end{aligned} \tag{38}$$

care dă

$$\mu_0 = -\frac{1}{10}\lambda, \ \mu_1 = \frac{3}{5}\lambda, \ \mu_2 = -\frac{7}{5}\lambda, \ \mu_3 = \frac{2}{5}\lambda.$$

Pentru $\lambda = 10$ avem $\mu_0 = -1$, $\mu_1 = 6$, $\mu_2 = -14$, $\mu_3 = 4$. Cu acestea funcţiile (37) devin

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 10 \frac{(x - x_0)^5}{5!} \\ \varphi_2 &= -\frac{(x - x_5)^5}{5!} + 6 \frac{(x - x_4)^5}{5!} - 14 \frac{(x - x_3)^5}{5!} + 4 \frac{(x - x_2)^5}{5!} \\ \varphi_3 &= -\frac{(x - x_5)^5}{5!} + 6 \frac{(x - x_4)^5}{5!} - 14 \frac{(x - x_3)^5}{5!} \\ \varphi_4 &= -\frac{(x - x_5)^5}{5!} + 6 \frac{(x - x_4)^5}{5!} \\ \varphi_5 &= -\frac{(x - x_5)^5}{5!} \end{aligned} \tag{39}$$

şi calculînd coeficienţii formulei (36) obţinem

$$f''(x_1) = \frac{1}{12h^2}\,[10\,f(x_0) - 15\,f(x_1) - 4\,f(x_2) + 14\,f(x_3) - \tag{40}$$
$$- 6\,f(x_4) + f(x_5)] + R,$$

unde

$$R = -\frac{1}{12h^2}\int_{x_0}^{x_5} \varphi(x)\, f^{\mathrm{VI}}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{41}$$

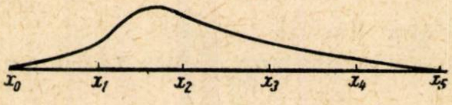
Vom arăta că funcţia $\varphi(x)$ păstrează semn constant pe intervalul $[x_0, x_5]$, fapt care ne va fi util la delimitarea restului. Din definiţia (37) a funcţiilor $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_5(x)$ se vede că ele sînt pozitive pe intervalele $(x_0, x_1]$ respectiv $[x_4, x_5)$.

Pentru studiul semnului funcţiilor $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ şi $\varphi_4(x)$ în intervalele lor de definiţie, vom trasa tabelul 1 care indică semnul derivatelor acestor funcţii din care apoi se deduce şi semnul funcţiilor respective.

Tabelul 1

	φ_2	φ_3	φ_4
x	x_1 x_2	x_2 x_3	x_3 x_4
φ^{V}	$-$ $-$ $-$	$-$ $-$ $-$	$+$ $+$ $+$
φ^{IV}	$+$ $+$ $+$	$+$ $+$ 0 $-$ $-$	$-$ $-$ 0 $+$ $+$
φ'''	$-$ $-$ 0 $+$ $+$	$+$ $+$ $+$	$+$ $+$ 0 $-$ $-$
φ''	$+$ $+$ 0 $-$ $-$	$-$ $-$ 0 $+$ $+$	$+$ $+$ $+$
φ'	$+$ $+$ 0 $-$ $-$	$-$ $-$ $-$	$-$ $-$ $-$
φ	$+$ $+$ M $+$ $+$	$+$ $+$ $+$	$+$ $+$ $+$

Cu acestea am demonstrat că funcţia $\varphi(x)$ este pozitivă în intervalul (x_0, x_5) şi graficul ei este cel indicat de figură.



Ţinînd seama că $\varphi(x)$ păstrează semn constant în (x_0, x_5), putem aplica la integrala din (41) formula mediei obţinînd

$$R = -\frac{1}{12h^2} f^{\mathrm{VI}}(\xi)\int_{x_0}^{x_5} \varphi(x)\mathrm{d}x, \tag{42}$$

unde

$$x_0 \leqq \xi \leqq x_5.$$

Pentru calculul integralei din (42) vom utiliza chiar formula (40) în care punem

$$f(x) = \frac{1}{6\,!} \prod_{i=0}^{5} (x - x_i).$$

Atunci

$$f''(x_i) = -\frac{13}{180} h^4$$

și prin urmare

$$-\frac{1}{12h^2} \int_{x_0}^{x_5} \varphi(x)\, dx = \frac{13}{180} h^4$$

iar din (42) avem

$$R = \frac{13h^4}{180} f^{\text{VI}}(\xi). \tag{43}$$

Notînd

$$M_6 = \max_{[x_0,\, x_5]} |f^{\text{VI}}(x)|$$

avem pentru R delimitarea

$$|R| \leqq \frac{13h^4}{180} M_6. \tag{44}$$

Dacă în cele ce preced luăm nodurile în ordine descrescătoare, toate raționamentele își păstrează valabilitatea cu deosebirea că vom înlocui pe h cu $-h$. În acest caz în locul formulei (40) vom avea formula :

$$\begin{aligned} f''(x_4) = \frac{1}{12h^2} [f(x_5) - 15 f(x_4) - 4 f(x_3) + 14 f(x_2) - 6 f(x_1) + \\ + f(x_0)] + \overline{R}, \end{aligned} \tag{40'}$$

unde $\overline{R}$ are delimitarea dată de formula (44).

Formulele (40) și (40′) le vom utiliza în cele ce urmează.

§ 5. *Construirea sistemului de ecuații diferențiale pentru ecuația* (33). Considerăm din nou nodurile $x_i = ih$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și $h = \frac{l}{n}$ și scriem ecuația (33) în aceste noduri

$$p(x_i) \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} + f(x_i, t), \; (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{45}$$

Folosind notaţiile din § 1 şi în plus notaţia $p(x_i) = p_i$, şi înlocuind în (45) derivata de ordinul doi în punctele $x_2, x_3, \ldots, x_{n-2}$ prin formula (4), iar în punctele x_1 şi x_{n-1} prin formulele deduse din (40) şi (40′) :

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_1} = \frac{1}{12h^2}(-10\,u_0 - 15\,\mu_1 - 4\,u_2 + 14\,u_3 - 6u_4 + u_5) + R_1$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_{n-1}} = \frac{1}{12h^2}(u_{n-5} - 6\,u_{n-4} + 14\,u_{n-3} - 4\,u_{n-2} - 15\,u_{n-1} - 10\,u_n) + R_{n-1},$$

unde, conform cu (44),

$$(46)\qquad |R_1| \text{ şi } |R_n| \leqq \frac{3}{180}\,h^4 M_6,\ M_6 = \max_{D}\left|\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right|,$$

obţinem sistemul de ecuaţii

$$p_1 u_1' = \frac{1}{12h^2}(-10\,u_0 - 15\,u_1 - 4\,u_2 + 14\,u_3 - 6\,u_4 + u_5) + f_1 + R_1$$

$$p_i u_i' = \frac{1}{12h^2}(-u_{i-2} + 16\,u_{i-1} - 30\,u_i + 16\,u_{i+1} - u_{i+2}) + f_i + R_i,$$

$$(i = 2, 3, \ldots, n-2),$$

$$p_{n-1}\,u_{n-1}' = \frac{1}{12h^2}(u_{n-5} - 6\,u_{n-4} + 14\,u_{n-3} - 4\,u_{n-2} - 15\,u_{n-1} -$$

$$(47)\qquad - 10\,u_n) + f_{n-1} + R_{n-1}.$$

Din condiţiile la limită (2) deducem că

$$u_0 = \psi_1 \text{ şi } u_n = \psi_2$$

iar din condiţia iniţială obţinem pentru funcţiile $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{n-1}(t)$ condiţiile iniţiale

$$(48)\qquad u_i(0) = g_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Soluţia sistemului (47) cu condiţia (48) reprezintă pe dreptele de ecuaţii $x = x_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, soluţia ecuaţiei (33) cu condiţiile (2). Dar deoarece resturile R_i sînt necunoscute, vom lua în locul lui (47) sistemul

$$p_1 \tilde{u}_1' = \frac{1}{12h^2}(-10\,u_0 - 15\,\tilde{u}_1 - 4\,\tilde{u}_2 + 14\,\tilde{u}_3 - 6\,\tilde{u}_4 + \tilde{u}_5) + f_1$$

$$p_i \tilde{u}_i' = \frac{1}{12h^2}(-\tilde{u}_{i-2} + 16\,\tilde{u}_{i-1} - 30\,\tilde{u}_i + 16\,\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_{i+2}) + f_i,$$

$$(i = 2, 3, \ldots, n-2)$$

$$p_{n-1}\,\tilde{u}_{n-1}' = \frac{1}{12h^2}(\tilde{u}_{n-5} - 6\,\tilde{u}_{n-4} + 14\,\tilde{u}_{n-3} - 4\,\tilde{u}_{n-2} - 15\,\tilde{u}_{n-1} - 10\,u_n) + f_{n-1}$$

(49)

cu condiţiile

$$\widetilde{u}_i(0) = g_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{50}$$

Notînd ca mai sus $u_i(t) - \widetilde{u}_i(t) = \gamma_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, şi scăzînd (49) din (48) observăm că erorile $\gamma_i(t)$ satisfac sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} p_1 \gamma_1' &= \frac{1}{12h^2}(10\,\Delta^2 \gamma_0 + 5\,\Delta^2 \gamma_1 - 4\,\Delta^2 \gamma_2 + \Delta^2 \gamma_3) + R_1 \\ p_i \gamma_i' &= \frac{1}{12h^2}(-\Delta^2 \gamma_{i-2} + 14\,\Delta^2 \gamma_{i-1} - \Delta^2 \gamma_i) + R_i, \quad (i = 2, 3, \ldots, n-2) \\ p_{n-1} \gamma_{n-1}' &= \frac{1}{12h^2}(\Delta^2 \gamma_{n-5} - 4\,\Delta^2 \gamma_{n-4} + 5\,\Delta^2 \gamma_{n-3} + 10\,\Delta^2 \gamma_{n-2}) + R_{n-1} \end{aligned} \tag{51}$$

şi condiţiile iniţiale

$$\gamma_i(0) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Pentru evaluarea erorilor $\gamma_i(t)$ folosim şi de data aceasta inegalitatea (20), iar în locul funcţiei $I(t)$ definită de (21) vom considera funcţia

$$\begin{aligned} I_1(t) = 2\sum_{i=1}^{n-1} \int_0^t p_i \gamma_i'^2 \, dt + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{h}\right)^2 + \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\Delta^2 \gamma_{i-1}}{h}\right)^2 + \\ + \frac{1}{12h^2}(\gamma_1^2 + \gamma_{n-1}^2), \end{aligned} \tag{52}$$

care, după cum se vede, satisface inegalitatea

$$I_1(t) > \sum_{i=1}^{n} \frac{(\gamma_i - \gamma_{i-1})^2}{h^2}$$

şi prin urmare din (20) avem

$$\gamma_k^2 \leqq h\,\frac{x_k\,(l - x_k)}{l}\, I_1. \tag{53}$$

Derivînd acum funcţia I_1 dată de (52) avem

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n-1} p_i \gamma_i'^2 + \frac{1}{h^2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i - \gamma_{i-1})^2 + \\ + \frac{1}{12h^2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n-1}(\Delta^2 \gamma_{i-1})^2 + \frac{1}{6h^2}(\gamma_1 \gamma_1' + \gamma_{n-1}\gamma_{n-1}'). \end{aligned} \tag{54}$$

Pe de altă parte, adunînd ecuaţiile sistemului (51) obţinem :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^{n-1} p_i \gamma_i'^2 = 2 \Big\{ & - \frac{1}{12h^2} \sum_{i=2}^{n-2} (\Delta^2 \gamma_{i-2} - 2\, \Delta^2 \gamma_{n-1} + \Delta^2 \gamma_i) \gamma_i' + \\ & + \frac{1}{h^2} \sum_{i=2}^{n-2} \gamma_i' \, \Delta^2 \gamma_{i-1} + \sum_{i=1}^{n} R_i \gamma_i' \Big\} + \\ & + \frac{1}{6h^2} [(10\, \Delta^2 \gamma_0 + 5 \Delta^2 \gamma_1 - 4\, \Delta^2 \gamma_2 + \Delta^2 \gamma_3) \gamma_1' + \\ & + (\Delta^2 \gamma_{n-5} - 4\, \Delta^2 \gamma_{n-4} + 5\, \Delta^3 \gamma_{n-3} + 10\, \Delta^2 \gamma_{n-2}) \gamma_{n-1}'] . \end{aligned} \tag{55}$$

Înlocuind (55) în (54) şi ţinînd seama de formulele (23) şi (24) obţinem pentru $\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$ următoarea formulă

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{6h^2} & [(-4\, \Delta^2 \gamma_0 + 6\, \Delta^2 \gamma_1 - 4\, \Delta^2 \gamma_2 + \Delta^2 \gamma_3 + \gamma_1) \gamma_1' + \\ & + (\Delta^2 \gamma_{n-5} - 4\, \Delta^2 \gamma_{n-4} + 6\, \Delta^2 \gamma_{n-3} - 4\, \Delta^2 \gamma_{n-2} + \gamma_{n-1}) \gamma_{n-1}'] + \\ & + 2 \sum_{i=1}^{n-1} R_i \gamma_i' . \end{aligned} \tag{56}$$

Observăm că coeficienţii lui γ_1' respectiv γ_{n-1}' din (56) se mai pot scrie astfel :

$$\begin{aligned} \gamma_1 - 4\, \Delta^2 \gamma_0 + 6\, \Delta^2 \gamma_1 - 4\, \Delta^2 \gamma_2 + \Delta^2 \gamma_3 = \Delta^2 \gamma_{-1} - 4 \Delta^2 \gamma_0 + \\ + 6 \Delta^2 \gamma_1 - 4\, \Delta^2 \gamma_2 + \Delta^2 \gamma_3 \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \Delta^2 \gamma_{n-5} - 4\, \Delta^2 \gamma_{n-4} + 6\, \Delta^2 \gamma_{n-3} - 4\, \Delta^2 \gamma_{n-2} + \gamma_{n-1} = \Delta^2 \gamma_{n-5} - 4 \Delta^2 \gamma_{n-4} + \\ + 6\, \Delta^2 \gamma_{n-3} - 4\, \Delta^2 \gamma_{n-2} + \Delta^2 \gamma_{n-1} \end{aligned} \tag{57}$$

unde am notat

$$\begin{aligned} \Delta^2 \gamma_{-1} &= \gamma_{-1} - 2\gamma_0 + \gamma_1 \\ \Delta^2 \gamma_{n-1} &= \gamma_{n-1} - 2\gamma_n + \gamma_{n+1} \end{aligned} \tag{58}$$

şi

$$\gamma_0 = \gamma_{-1} = 0, \quad \gamma_n = \gamma_{n+1} = 0 .$$

Dar sumele din (57) sînt diferenţele finite de ordinul şase ale mărimilor 0, 0, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ respectiv $\gamma_{n-5}, \gamma_{n-4}, \gamma_{n-3}, \gamma_{n-2}, \gamma_{n-1}$, 0, 0. Prin urmare notînd cu $\Delta^6 \gamma_{-1}$ şi cu $\Delta^6 \gamma_{n-5}$ aceste diferenţe, (56) se scrie astfel

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{6h^2} (\gamma_{-1}' \, \Delta^6 \gamma_{-1} + \gamma_{n-1}' \, \Delta^6 \gamma_{n-5}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} R_i \gamma_i' . \tag{59}$$

Introducînd acum diferențele divizate ale mărimilor amintite mai sus și anume

$$\delta_1\,[0,\ 0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \gamma_5] = \frac{\Delta^6\,\gamma_{-1}}{h^6}$$

$$\text{și } \delta_2\,[\gamma_{n-5},\ \gamma_{n-4},\ \gamma_{n-3},\ \gamma_{n-2},\ \gamma_{n-1},\ 0,\ 0] = \frac{\Delta^6\,\gamma_{n-5}}{h^6},$$

(59) devine

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = \frac{h^4}{6}\,\delta_1\,\gamma_1' + \frac{h^4}{6}\,\delta_2\,\gamma_{n-1}' + 2\sum_{i=1}^{n-1} R_i\,\gamma_i'.$$

Folosind delimitările resturilor date de relațiile (5) și (46) avem

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \leqq \left(\frac{\delta_1}{6} + \frac{13}{90}\,M_6\right)\gamma_i' + \left(\frac{\delta_2}{6} + \frac{13}{90}\,M_2\right)\gamma_{n-1}' + \frac{1}{45}\,M_6\sum_{i=2}^{n-2}\gamma_i'$$

și notînd

$$M_6^* = \frac{15}{2}\,\delta + \frac{13}{2}\,M_6, \tag{60}$$

unde

$$\delta = \max\,\{\delta_1,\ \delta_2\},$$

avem pentru I_1 o relație analogă cu (28), anume

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} < \frac{h^4}{45}\,M_6^*\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i'.$$

Mai departe, urmînd raționamentele din § 2 cu mențiunea că în loc de (31) avem

$$2\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i'^2\right)\mathrm{d}t < \frac{I\,(t)}{p_0^2} \tag{61}$$

obținem pentru γ_k o delimitare analogă cu cea dată de (32), anume

$$|\gamma_k| < \frac{M_6^*}{63\,p_0}\sqrt{\frac{x_k\,(l - x_k)\,t}{l}}\,h^4, \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{62}$$

Relația (62) ne arată că și în acest caz ordinul erorii cu care s-a aproximat ecuația cu derivate parțiale, pe dreptele alese, se menține în eroarea soluției. Coeficientul M_6^* conține în definiția sa delimitări ale diferențelor divizate de ordinul șase introduse mai sus. Deoarece soluția problemei tratate este presupusă ca avînd derivate, în raport cu x, pînă la ordinul șase inclusiv, continue, ne așteptam ca funcțiile δ_1 și δ_2 să tindă spre valori finite atunci cînd $h \to 0$. Pe de altă parte, avînd în vedere faptul că mărimea M_6 nu se poate cunoaşte, pentru a avea o indicaţie a delimitării erorii date de (32) sau (62) se ia în loc de această mărime, o margine superioară a diferenţelor de ordinul şase ale funcţiilor $\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_n$.

Primită la redacţie la 22 iunie 1966

Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej”
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *Aplicarea formulelor de derivare numerică la integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale.* St. cerc. mat. Cluj, **10**, *2*, 259–315 (1959).
2. I. S. Berezin, N. L. Jidkov, *Metodi vicislenii.* t. II, Moscova, 1962.
3. Н. В. Фадеева, *Метод прямых применений к краевым задачам*, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **28**, (1949).

ASUPRA UNEI METODE DE CONSTRUCȚIE A ALGEBRELOR LUKASIEWICZ TRIVALENTE

DE

GH. S. NADIU

(Oradea)

În această lucrare se introduce noțiunea de filtru cuantificat într-o algebră Boole monadică. Se arată că factorizînd algebra Boole printr-un filtru cuantificat și definind operațiile în mod convenabil, se obține o algebră Lukasiewicz trivalentă.

A. Monteiro a găsit o metodă de construcție a algebrelor Lukasiewicz trivalente, pornind de la o algebră Boole, prin intermediul N- laticilor. L. Monteiro și L. Capole [3] demonstrează teorema lui A. Monteiro, pornind de la o algebră Boole monadică. Noi studiem această problemă cu ajutorul unei relații de echivalență generate de un filtru cuantificat 2.1. În lucrare întrebuințăm terminologia din [3] și [4].

1. Sholander caracterizează un reticul distributiv printr-un sistem $(A, \wedge, \vee)$ format dintr-o mulțime nevidă A, două operații binare $\wedge$, $\vee$ definite peste A, care verifică axiomele :

$$\text{A1)} \quad x \wedge (x \vee y) = x$$

$$\text{A2)} \quad x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x).$$

O algebră Boole este un reticul distributiv, complementat, cu prim și ultim element.

1.1. Definiție. Numim cuantificator existențial într-o algebră Boole o funcție ∇ ; $A \to A$, care verifică condițiile ;

$$\text{E0)} \quad \nabla 0 = 0$$

$$\text{E1)} \quad x \wedge \nabla x = x$$

$$\text{E2)} \quad \nabla (x \wedge \nabla y) = \nabla x \wedge \nabla y$$

pentru orice $x, y \in A$.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 7, P. 1063–1070, BUCUREȘTI, 1967

1.2. Definiţie. O algebră Boole monadică este un sistem (A, ∇) format dintr-o algebră Boole A, şi un cuantificator existenţial ∇, definit pe A.

1.3. Definiţie. Numim cuantificator universal într-o algebră Boole monadică, operaţia $\triangle$, definită prin formula :

$$\triangle x = - \nabla - x.$$

Indicăm, după [3], lista regulilor de calcul valabile într-o algebră Boole monadică :

S0) $1 \vee x = 1$	10) $0 \wedge x = 0$
S1) $0 \vee x = x$	11) $1 \wedge x = x$
S2) $x \vee y = y \vee x$	12) $x \wedge y = y \wedge x$
S3) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	13) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
S4) $x \vee (x \wedge y) = x$	14) $x \wedge (x \vee y) = x$
S5) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	15) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
S6) $x \vee - x = 1$	16) $x \wedge - x = 0$
S7) $-(x \vee y) = - x \wedge - y$	17) $-(x \wedge y) = - x \vee - y$
S8) $x \vee (- x \wedge y) = x \vee y$	18) $x \wedge (- x \vee y) = x \wedge y$
S9) $x \leqslant y \rightleftarrows - x \vee y = 1$	19) $x \leqslant y \rightleftarrows x \wedge - y = 0$

10) $- - x = x$

E0) $\nabla 0 = 0$	U0) $\triangle 1 = 1$
E1) $x \wedge \nabla x = x$	U1) $x \vee \triangle x = x$
E2) $\nabla (x \wedge \nabla y) = \nabla x \wedge \nabla y$	U2) $\triangle (x \vee \triangle y) = \triangle x \vee \triangle y$
E3) $\nabla 1 = 1$	U3) $0 \triangle = 0$
E4) $\nabla \nabla x = \nabla x$	U4) $\triangle \triangle x = \triangle x$
E5) $\nabla (x \vee y) = \nabla x \wedge \nabla y$	U5) $\triangle (x \wedge y) = \triangle x \wedge \triangle y$
E6) $\nabla \triangle x = \triangle x$	U6) $\triangle \nabla x = \nabla x$
E7) $\nabla (x \wedge \triangle y) = \nabla x \wedge \triangle y$	J7) $\triangle (x \vee \nabla y) = \triangle x \vee \triangle y$
E8) $- \nabla x = \triangle - x$	U8) $- \triangle x = \triangle - x$
E9) $\nabla x > \triangle x = \nabla x$	U9) $\triangle x \wedge \nabla x = \triangle x$
E10) $x \leqslant y \rightarrow \nabla x \leqslant \nabla y$	U10) $x \leqslant y \rightarrow \triangle x \leqslant \triangle y$

11) $\triangle x \leqslant x \leqslant \nabla x.$

Considerăm noţiunea de algebră Lukasiewicz trivalentă [1], în formularea dată de A. Monteiro [2].

1.4. Definiție. O algebră Lukasiewicz trivalentă este un sistem $(L, 1, \sim, \nabla, \cap, \cup)$ astfel că :

1) L este un reticul distributiv față de $\cap$ și $\cup$, iar 1 este ultimul element al lui L.

2) Negația $\sim$, verifică condițiile :

N1) $\sim\sim x = x$

N2) $\sim(x \cap y) = \sim x \cup \sim y$.

3) Operația ∇, verifică condițiile :

∇1) $\sim x \cup \nabla x = 1$

∇2) $x \cap \sim x = \sim x \cap \nabla x$

∇3) $\nabla(x \cap y) = \nabla x \cap \nabla y$.

2. Fie (A, ∇) o algebră Boole monadică. Deoarece orice algebră Boole este o algebră pseudobooleană [4], avem :

$$(*) \forall x, y \ [x, y \in A \rightarrow \exists\, (x \Rightarrow y)\ (x \Rightarrow y = -x \vee y)]$$

adică există pseudocomplementul lui x relativ la y, $x \Rightarrow y$.

Fie U un filtru (A, ∇). Introducem noțiunea de filtru cuantificat prin :

2.1. Definiție. Numim filtru cuantificat în algebra monadică (A, ∇), un filtru U, care verifică condițiile :

$$\text{FC1)}\ \forall x\, (x \in U \rightarrow \triangle x \in U)$$

$$\text{FC2)}\ \forall x\, (\nabla x \in U \rightarrow x \in U).$$

Ținînd seama de relațiile (11) și de definiția filtrului, rezultă ușor că FC1) și FC2) sînt echivalente cu următoarele condiții :

$$\text{FC1}')\ x \in U \rightleftarrows \triangle x \in U$$

$$\text{FC2}')\ x \in U \rightleftarrows \nabla x \in U.$$

Se poate demonstra atunci următoarea teoremă :

2.2. Teoremă. *Condiția necesară și suficientă ca mulțimea $U \subset A$, să fie un filtru cuantificat, este ca elementul $1 \in U$ și să fie verificată următoarea proprietate* :

(1) *Dacă* $x \in U$ *și* $\triangle x \Rightarrow \nabla y \in U$, *atunci* $y \in U$.

Înainte de a trece la demonstrația teoremei 2.2 să observăm că are loc următoarea propoziție :

2.3. Dacă U este un filtru cuantificat, atunci $\nabla x \Rightarrow \nabla y \in U$, dacă și numai dacă $x \Rightarrow y \in U$.

Într-adevăr, $\triangle x \Rightarrow \nabla y = -\triangle x \vee \nabla y = \nabla -x \vee \nabla y = \nabla\, (-x \vee y)$. Prin urmare $\triangle x \Rightarrow \nabla y \in U$, dacă și numai dacă $\nabla\, (-x \vee y) \in U$, ceea ce, conform condiției FC2'), este echivalent cu $x \Rightarrow y \in U$.

Demonstrația teoremei 2.2. Fie U un filtru cuantificat, rezultă $1 \in U$. Fie $x \in U$ și $\triangle x \Rightarrow \nabla y \in U$. Rezultă atunci din 2.3 $x \Rightarrow y \in U$; urmează, conform teoremei 1.13. 1 din [4], că $y \in U$.

Invers, fie U o mulțime satisfăcînd condițiile $1 \in U$ și $(x \in U \,\&\, \triangle x \Rightarrow \Rightarrow \nabla y \in U \rightarrow y \in U)$.

Observăm mai întîi că dacă $x \in U$ și $x \leqslant y$, atunci $\triangle x \Rightarrow \triangle y = = \nabla(-x \vee y) = \nabla 1 = 1 \in U$, deci $y \in U$.

Fie acum x și y două elemente astfel încît $x \in U$ și $x \Rightarrow y \in U$. Atunci $\nabla x \Rightarrow \nabla y = \nabla(-x \vee y) \geqslant -x \vee y = x \Rightarrow y$, deci $\triangle x \Rightarrow \nabla y \in U$, deci $y \in U$. Conform teoremei I.13. 1 din [4], rezultă că U este un filtru.

Dacă $x \in U$, atunci $\triangle x \Rightarrow \nabla \triangle x = -\triangle x \vee \triangle x = 1 \in U$, deci $\triangle x \in U$. Dacă $\nabla x \in U$, atunci $\triangle \nabla x \Rightarrow \nabla x = -\nabla x \vee \nabla x = 1 \in U$, deci $x \in U$.

3. Fie U un filtru cuantificat în algebra Boole monadică (A, ∇). Să considerăm atunci relația $\leqslant_c$ definită prin :

3.1. $\forall x, y\ [x, y \in A \rightarrow (x \leqslant_c y$ dacă și numai dacă $\triangle x \Rightarrow \nabla y \in U)]$. Relația $\geqslant_c$ astfel definită, este o relație de cvasiordine [4], pag. 63]. Să notăm cu $\sim_c$ relația de echivalență ;

$x \sim_c y$ dacă și numai dacă $(x \leqslant_c y) \,\&\, (y \leqslant_c x)$ care coincide cu relația $\sim_\nabla$ din [4], pag. 63.

Să notăm cu A/U mulțimea claselor de echivalență relativ la $\sim_c$, iar elementele lui A/U cu $|x|$ $(x \in A)$. Cvasiordinea $\leqslant_c$ determină în mod unic [4] în A/U o relație de ordonare $\leqslant$, definită astfel :

$$|x| \leqslant |y| \text{ dacă și numai dacă } x \leqslant_c y.$$

4. Să considerăm operațiile binare $\cap$ și $\cup$, introduse de A. Monteriro [3], în construcția sa, dată algebrelor Lukasiewicz trivalente.

4.1. DEFINIȚIE. Punem :

$$\text{D)}\ x \cup y = \triangle x \vee y \vee (x \wedge \triangle - y).$$

$$\text{C)}\ x \cap y = \nabla x \wedge y \wedge (x \vee \nabla - y).$$

După regulile de calcul din algebra Boole monadică, D) și C), sînt echivalente cu :

$$\text{D}')\ x \cup y = (x \vee y) \wedge (\triangle x \vee y \vee \triangle - y)$$

$$\text{C}')\ x \cap y = (x \wedge y) \vee (\nabla x \wedge y \wedge \nabla - y).$$

După L. Monteiro și L. Capole [3] avem :

4.2. $\nabla(x \cup y) = \nabla x \vee \nabla y$

4.3. $\triangle(x \cup y) = \triangle x \vee \triangle y$

4.4. $\nabla(x \cap y) = \nabla x \wedge \nabla y$

4.5. $\triangle(x \cap y) = \triangle x \wedge \triangle y$.

Să considerăm sistemul algebric $(A/U, 1, -, \nabla, \cap, \cup)$. Vom demonstra următoarea teoremă [3] :

4.6. TEOREMĂ. *Relația de echivalență* $\sim_c$ *este compatibilă cu operațiile* $-, \nabla, \cap, \cup$.

Dacă punem $I = |1|$, $\sim |x| = |-x,|$, $\triangledown |x| = |\triangledown x|$, $|x| \cap |y| = |x \cap y|$, $|x| \cup |y| = |x \cup y|$, atunci sistemul $(A/U,\ I,\ \sim,\ \triangledown,\ \cap,\ \cup)$ este o algebră Lukasiewicz trivalentă.

5. *Demonstraţia teoremei 4. 6.* Pentru simplificare vom demonstra iniţial propoziţiile care urmează :

5.1. LEMĂ. *Relaţia* $\sim_c$ *este compatibilă cu operaţiile* $-,\ \vee,\ \wedge,\ \triangledown,\ \cap,\ \cup$.

Într-adevăr, conform definiţiei relaţiei $\sim_c$ şi teoremei I.13.2 din [4], urmează că $\sim_c$ este compatibilă cu operaţiile $-,\ \vee,\ \wedge$. Compatibilitatea relaţiei $\sim_c$ cu $\triangledown$ se arată uşor. Într-adevăr, fie $x \sim_c y$. Atunci $\triangledown x \Rightarrow \triangledown y = - \triangledown x \vee \triangledown y = \triangle - x \vee \triangle \triangledown y = \triangle(-x \vee \triangle \triangledown y) = \triangle(-x \vee \triangledown y) \geqslant \triangle(-x \vee y) \in U$, căci $-x \vee y \in U$. Urmează că $\triangledown x \Rightarrow \triangledown y \in U$, adică $\triangledown x \leqslant_c \triangledown y$; în mod analog se arată $\triangledown y \leqslant_c \triangledown x$, de unde rezultă $\triangledown x \sim_c \triangledown y$.

5.2. LEMĂ. *Sistemul* $(A/U,\ \cup,\ \cap)$ *este un reticul distributiv.*

Demonstrarea lemei 5.2 presupune verificarea axiomelor A1) şi A2) a lui Sholander [5].

Să demonstrăm că

$$\text{A1)}\quad |x| \cap (|x| \cup |y|) = |x|$$

care este echivalentă cu $|x \cap (x \cup y|) = |x|$. Pentru a demonstra egalitatea acestor elemente, vom arăta că $x \cap (x \cup y) \sim_c x$.

Într-adevăr :

$$\triangle[x \cap (x \cup y)] \Rightarrow \triangledown x = -[\triangle x \wedge (\triangle x \vee \triangle y)] \vee \triangledown x =$$
$$= - \triangle x \vee \triangledown x = \triangle x \Rightarrow \triangledown x \in U, \text{ căci } x \leqslant_c x,$$

iar pe de altă parte,

$$\triangle x \Rightarrow \triangledown [x \cap (x \cup y)] = - \triangle x \vee [\triangledown x \wedge (\triangledown x \vee \triangledown y)] =$$
$$= - \triangle x \vee \triangledown x = \triangle x \Rightarrow \triangledown x \in U,$$

deci $x \cap (x \cup y) \sim_c x$.

Pentru a demonstra că axioma A2) este verificată, este suficient să arătăm echivalenţa $x \cap (y \cup z) \sim_c (z \cap x) \cup (y \cap x)$.

Într-adevăr,

$$\triangledown[x \cap (y \cup z)] \Rightarrow \triangledown[(z \cap x) \cup (y \cap x)] = -[\triangledown x \wedge (\triangle y \vee \triangle z)] \vee$$
$$\vee [(\triangledown z \wedge \triangledown x) \vee (\triangledown y \wedge \triangledown x)] = \triangledown - x \vee (\triangledown - y \wedge \triangledown - z) \vee$$
$$\vee [\triangledown x \wedge (\triangledown z \vee \triangledown y) \geqslant - x \vee (-y \wedge -z) \vee [x \wedge (z \vee y)] =$$
$$= -[x \wedge (y \vee z)] \vee [x \wedge (y \vee z)] = 1,$$

deci

$$\triangle[x \cap (y \cup z] \Rightarrow \triangledown[z \cap x) \cup (y \cap x)] = 1 \in U,$$
$$\triangle[(z \cap x) \cup (y \cap x)] \Rightarrow \triangledown[x \cap (y \cup z)] =$$
$$= -[(\triangle z \wedge \triangle x) \vee (\triangle y \wedge \triangle x)] \vee [\triangledown x \wedge (\triangledown y \vee \triangledown z)] =$$
$$= [(\triangledown - z \vee \triangledown - x) \wedge (\triangledown - y \vee \triangledown - x)] \vee [(\triangledown x \wedge \triangledown y) \vee (\triangledown x \wedge \triangledown z)] \geqslant$$
$$\geqslant [(-z \vee -x) \wedge (-y \vee -x)] \vee [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] =$$
$$= -[z \wedge x) \vee (y \wedge x)] \vee [(z \wedge x) \vee (y \wedge x)] = 1,$$

deci

$$\triangle[(z\cap x)\cup(y\cap x)]\Rightarrow\triangledown[(x\cap(y\cup z))]=1,$$

deci

$$x\cap(y\cup z)\sim_c(z\cap x)\cup(y\cap x).$$

5.3. LEMĂ. *I este ultimul element al reticulului* $(A/U, \cap, \cup)$.

Pentru a demonstra lema 5.3, este suficient să arătăm că $|x|\cap I = |x|$, pentru orice $|x|\in A/U$, ceea ce este echivalent cu $|x\cap 1|=|x|$, adică $x\cap 1\sim_c x$, pentru orice $x\in A$. Într-adevăr,

$$\triangle(x\cap 1)\Rightarrow\triangledown x=(\triangle x\wedge\triangle 1)\Rightarrow\triangle x=(\triangle x\wedge 1)\Rightarrow\triangledown x=$$
$$=\triangle x\Rightarrow\triangledown\ x\in U,\ \text{căci}\ x\leqslant_c x$$

şi

$$\triangle x\Rightarrow\triangledown\ (x\cap 1)=\triangle x\Rightarrow(\triangledown x\wedge\triangledown 1)=\triangle x\Rightarrow(\triangledown x\wedge 1)=$$
$$=x\triangle\Rightarrow\triangledown x\in U,\ \ \text{căci}\ \ x\leqslant_c x.$$

Se observă uşor că din teorema 1.13.2 [4] urmează imediat că $I=U$.

5.4. LEMĂ. *Operaţia* $\sim$ *definită pe* A/U, *verifică axiomele* $N1$) *şi* $N2$)

Să verificăm axioma :

$$\text{N1)}\quad\sim\sim|x|=|x|$$

care, după definiţia operaţiei $\sim$, este echivalentă cu $|--x|=|x|$ sau $[x]=|x|$, ceea ce este evident.

Axioma

$$\text{N2)}\quad\sim(|x|\cap|y|)=\sim|x|\cup\sim|y|$$

este echivalentă cu egalitatea $|-(x\cap y)|=|-x\cup -y|$, adică pentru verificarea axiomei N2), este suficient să arătăm echivalenţa :

$$-(x\cap y)\sim_c -x\cup -y.$$

Într-adevăr,

$$\triangle[-(x\cap y)]\Rightarrow\triangledown(-x\cup -y)=\triangle-(x\cap y)\Rightarrow(\triangledown -x\vee\triangledown -y)=$$
$$=-(x\cap y)\Rightarrow(\triangledown -x\vee\triangledown -y)=--(\triangledown x\wedge\triangledown y)\vee\triangledown -x\vee\triangledown -y=$$
$$=(\triangledown x\wedge\triangledown y)\vee\triangledown -x\vee\triangledown -y=[\triangledown(x\vee -x)\wedge(\triangledown y\vee\triangledown -x)]\vee\triangledown -y=$$
$$=\triangledown y\vee\triangledown -x\vee\triangledown -y=\triangledown(y\vee -y)\vee\triangledown -x=1\vee\triangledown -x=1\in U$$

şi

$$\triangledown(-x\cup -y)\Rightarrow\triangledown-(x\cap y)=(-\triangle -x\wedge -\triangle -y)\vee -\triangle(x\cap y)=$$
$$=(\triangledown x\wedge\triangledown y)\vee -\triangle x\vee -\triangle y=(\triangledown x\wedge\triangledown y)\vee\triangledown -x\vee\triangledown -y=$$
$$=[\triangledown(x\vee -x)\wedge(\triangledown y\vee\triangledown -x)]\vee\triangledown -y=\triangledown y\vee\triangledown -x\vee\triangledown -y=$$
$$=\triangledown(y\vee -y)\vee\triangledown -x=1\vee\triangledown -x=1\in U.$$

5.5. LEMĂ. *Operaţia* ∇, *verifică axiomele* $\nabla 1)$, $\nabla 2)$, $\nabla 3)$.

Să arătăm că axioma $\nabla 1)$ este verificată.

$$\nabla 1) \quad \sim |x| \cup \nabla |x| = I$$

ceea ce este echivalent cu egalitatea $|-x \cup \nabla x| = I$ sau $-x \cup \nabla x \sim_c 1$.

Într-adevăr,

$$\triangle(-x \cup \nabla x) \Rightarrow \nabla 1 = (-\triangle -x \wedge -\nabla x) \vee \nabla 1 = (\nabla x \wedge -\nabla x) \vee 1 = 1 \in U$$

şi

$$\nabla 1 \Rightarrow \nabla(-x \cup \nabla x) = -\triangle 1 \vee \nabla -x \vee \nabla x = 0 \vee \nabla(x \vee -x) = \nabla 1 = 1 \in U$$

adică axioma $\nabla 1)$ este verificată.

Se vede uşor că pentru verificarea axiomei $\nabla 2)$,

$$\nabla 2) \quad |x| \cap \sim |x| = \sim |x| \cap \nabla |x|$$

este suficient să arătăm echivalenţa: $x \cap -x \sim_c -x \cap \nabla x$. Dar

$$\triangle(x \cap -x) \Rightarrow \nabla(-x \cap \nabla x) = -[\triangle x \wedge \triangle -x] \vee [\nabla -x \wedge \nabla x)] =$$
$$= -\triangle x \vee -\triangle -x \vee (\nabla -x \wedge \nabla x) = \nabla -x \vee \nabla x \vee (\nabla -x \wedge \nabla x)$$
$$= \nabla -x \vee \nabla x = \nabla(-x \vee x) = \nabla 1 = 1 \in U$$

şi

$$\nabla(-x \cap \nabla x) \Rightarrow \nabla(x \cap -x) = -\triangle -x \vee -\triangle \nabla x \vee (\nabla x \wedge \nabla -x) =$$
$$= \nabla x \vee -\nabla x \vee (\nabla x \wedge \nabla -x) = \nabla x \vee -\nabla x = 1 \in U.$$

adică afirmaţia noastră este corectă.

Analog obţinem că verificarea axiomei,

$$\nabla 3) \quad \nabla(|x| \cap |y|) = \nabla |x| \cap \nabla |y|$$

este echivalentă cu demonstrarea echivalenţei:

$$\nabla(x \cap y) \sim_c \nabla x \cap \nabla y.$$

Într-adevăr,

$$\triangle \nabla(x \cap y) \Rightarrow \nabla(\nabla x \cap \nabla y) = \nabla(x \cap y) \Rightarrow (\nabla x \wedge \nabla y) =$$
$$= -\nabla x \vee -\nabla y \vee (\nabla x \wedge \nabla y) = -\nabla x \vee -\nabla y \vee \nabla =$$
$$= -\nabla x \vee \nabla x \vee \nabla -y = 1 \in U,$$

şi

$$\triangle(\nabla x \cap \nabla y) \Rightarrow \nabla \nabla(x \cap y) = -(\nabla x \wedge \nabla y) \vee (\nabla x \wedge \nabla y) =$$
$$= -\nabla x \vee -\nabla y \vee (\nabla x \wedge \nabla y) = 1 \in U,$$

adică axioma $\nabla 3)$ este verificată.

Din lemele 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, rezultă imediat demonstraţia teoremei 4.6, adică sistemul $(A/U, I, \sim, \nabla, \cap, \cup)$, formează o algebră Lukasiewicz trivalentă.

Primită la redacţie la 12 decembrie 1966

Institutul pedagogic Oradea

BIBLIOGRAFIE

1. Gr. C. Moisil, *Încercări vechi şi noi de logică neclasică*. Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1965.
2. A. Monteiro, *Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes*. Bull. math. de la soc. des sci. math., **7** (55) nr. 1—2.
3. L. Monteiro, et Lorenzo Gonzales Capole, *Un théoreme sur les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*. Notas de Logica mathematica, Instituto de matematica Universidad nacional del Sur Bahia Bianka *17* (1964).
4. H. Rasiowa an Roman Sikorski, *The mathematics of matamathematics*, Warszawa, 1963.
5. Sholander (Marlow) *Postulates for distributives latices*. Canadian Journal of Mathematics 3 (1951).

CONEXIUNI INVARIANTE PE SPAŢII RIEMANNIENE CU METRICA NEDEFINITĂ CU CURBURA CONSTANTĂ

DE

MARIUS I. STOKA

În această lucrare se determină conexiunile afine invariante pe spaţiile riemanniene V_2, V_3 şi V_4 cu metrica nedefinită cu curbura constantă.

Fie V_n un spaţiu riemannian a cărui metrică este

$$ds^2 = a_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j, \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

şi care admite ca grup total de mişcări grupul G_r definit de operatorii

$$X_h f = \xi_h^i\, \partial_i f.$$

Conexiunea Γ_{jk}^i este invariantă pe spaţiul V_n dacă

$$\partial_{jk}^2\, \xi_h^i = \xi_h^r\, \partial_r \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{js}^i\, \partial_k\, \xi_h^s + \Gamma_{sk}^i\, \partial_j\, \xi_h^s - \Gamma_{jk}^r\, \partial_r\, \xi_h^i. \tag{2}$$

Dacă notăm cu $\overline{\Gamma}_{jk}^i$ conexiunea lui Levi-Civita a spaţiului V_n, (1), adică

$$\overline{\Gamma}_{jk}^i = - \left| {}_{jk}^{\,i} \right|,$$

atunci conexiunea $\overline{\Gamma}_{jk}^i$ satisface sistemul (2), deci este o conexiune invariantă pe spaţiul V_n. Presupunînd că sistemul (2) admite şi o altă soluţie $\Gamma_{jk}^i \neq \overline{\Gamma}_{jk}^i$, notăm

$$R = a^{ij}\, P_{ij}\,, \quad \overline{R} = a^{ij}\, \overline{P}_{ij}, \quad T = a^{ij}\, (T_l\, T_{ij}^l - T_{ij}), \tag{3}$$

unde a^{ij} sînt reciprocii elementelor a_{ij} şi

$$P_{ij} = \frac{\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}}{2}, \quad (\Gamma_{ij} = \Gamma_{ilj}^l),$$

Γ_{jkl}^i fiind tensorul de curbură al conexiunii Γ_{jk}^i şi

$$T_l = T_{li}^i, \quad T_{ij} = T_{kj}^l\, T_{il}^k,$$

unde $T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \overline{\Gamma}_{jk}^i$.

ST. CERC. MAT., TOM., 19, NR. 7, P. 1071–1079, BUCUREŞTI, 1967

G. Tallini a demonstrat [5] că expresia

$$R - \overline{R} - T$$

este un invariant al spațiului, care dacă este nul, conexiunea Γ^i_{jk} este compatibilă cu un spațiu V_n compact și orientabil.

G. Vrănceanu a arătat că [6] pe un spațiu V_2 cu metrica definită cu curbură constantă negativă nu există nici o conexiune invariantă în afară de conexiunea lui Levi-Civita. În lucrarea [1] am demonstrat o proprietate analogă pentru spațiile V_2 cu metrica definită cu curbura constantă pozitivă și am determinat conexiunile afine invariante pe spațiile V_3 cu metrica definită și curbura constantă și pe spațiile V_3 cu metrica definită care admit ca grup total de mișcări un grup G_4. În lucrările [2] și [3] am determinat conexiunile invariante pe spațiile V_3 cu metrica definită care admit ca grup total de mișcări un grup G_3 tranzitiv respectiv intranzitiv.

În această lucrare vom determina conexiunile afine invariante pe spațiile V_2, V_3 și V_4 cu metrica nedefinită și curbura constantă.

I

Fie V_2 un spațiu riemannian cu metrica nedefinită și curbura nulă a cărui metrică este

$$ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2.$$

Grupul de mișcări al acestui spațiu este definit de operatorii

$$X_1 f = \partial_1 f,\ X_2 f = \partial_2 f,\ X_3 f = x^2\partial_1 f + x^1\partial_2 f. \tag{4}$$

Pentru $h = 1$ și $h = 2$, sistemul (2) ne dă

$$\Gamma^i_{jk} = a^i_{jk},\ \text{(const)}.$$

Cu aceste valori, sistemul (2) cu $h = 3$ ne dă

$$\Gamma^i_{jk} = 0.$$

Avem deci :

TEOREMA 1. *Nu există nici o conexiune invariantă pe spațiul riemannian V_2 cu metrica nedefinită și curbură nulă.*

Să considerăm acum un spațiu V_2 cu metrica nedefinită și curbura constantă pozitivă $K > 0$. Metrica acestui spațiu se poate scrie [4] ¹)

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 - (dx^2)^2}{K\,(x^2)^2},$$

avînd ca grup de mișcări grupul G_3 definit de operatorii [4] ²)

$$X_1 f = \partial_1 f,\ X_2 f = [(x^1)^2 + (x^2)^2]\partial_1 f + 2x^1x^2\partial_2 f,\ X_3 f = x^1\partial_1 f + x^2\partial_2 f.$$

---

¹) Pag. 603.

²) Pag. 607.

Pentru $h = 1$, sistemul (2) se scrie

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^1} = 0,$$

deci

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^2).$$

Cu această valoare sistemul (2) pentru $h = 3$ devine

$$x^2 \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^2} + \Gamma^i_{jk} = 0,$$

de unde deducem

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{a^i_{jk}}{x^2}, \quad (a^i_{jk} = \text{const.}).$$

În sfîrşit, sistemul (2) pentru $h = 2$ ne dă

$$a^1_{11} = a^1_{22} = a^2_{12} = a^2_{21} = 0, \quad a^1_{12} = a^1_{21} = a^2_{11} = a^2_{22} = 1.$$

Deci, conexiunea invariantă pe spaţiul (4) are componentele

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \frac{1}{x^2}.$$

Dar aceasta este tocmai conexiunea lui Levi-Civita a spaţiului (4). Rezultă

TEOREMA 2. *Singura conexiune afină invariantă pe spaţiul V_2 cu metrica nedefinită şi curbura constantă pozitivă este conexiunea lui Levi-Civita a spaţiului.*

Ne vom ocupa acum de spaţiul V_2 cu metrica nedefinită şi curbura constantă negativă $K < 0$, a cărui metrică se poate scrie [4] 3)

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 - (dx^2)^2}{-K(x^1)^2}, \tag{5}$$

avînd ca grup de mişcări grupul definit de operatorii [4] 4)

$$X_1 f = \partial_2 f, \quad X_2 f = x^1 \partial_1 f + x^2 \partial_2 f, \quad X_3 f = 2x^1 x^2 \partial_1 f + [(x^1)^2 + (x^2)^2]\, \partial_2 f.$$

Scriind sistemul (2) pentru $h = 1, 2, 3$, deducem

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{x_1}, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0,$$

care sînt tocmai componentele conexiunii lui Levi-Civita a spaţiului (5).

Avem deci :

TEOREMA 3. *Singura conexiune afină invariantă pe spaţiul V_2 cu metrica nedefinită şi curbura constantă negativă este conexiunea lui Levi-Civita a spaţiului.*

---

3) Pag. 603.

4) Pag. 611.

II

Să ne ocupăm de spaţiile V_3 cu curbura constantă.

Fie V_3 un spaţiu riemannian cu metrica nedefinită şi curbura nulă cu metrica

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{6}$$

Grupul de mişcări al acestui spaţiu este definit de operatorii [4] [5]:

$$X_i f = \partial_i f,\ (i=1,2,3),\ X_4 f = x^2\partial_1 f - x^1\partial_2 f,\ X_5 f = x^3\partial_1 f + x^1\partial_3 f, X_6 f = x^3\partial_2 f + x^2\partial_3 f.$$

Pentru $h = 1, 2, 3$, sistemul (2) ne dă

$$\Gamma^i_{jk} = a^i_{ik}, \qquad \text{(const.)}.$$

Cu aceste valori, din sistemul (2) cu h = 4, 5, 6 deducem

$$a^1_{11} = a^1_{22} = a^1_{33} = a^1_{12} = a^1_{21} = a^1_{13} = a^1_{31} = a^2_{11} = a^2_{22} = a^2_{33} = a^2_{12} = a^2_{21} = a^2_{23} = a^2_{32} =$$

$$= a^3_{11} = a^3_{22} = a^3_{33} = a^3_{13} = a^3_{31} = a^3_{23} = a^3_{32} = 0,$$

$$a^1_{23} = -a^1_{32} = -a^2_{13} = a^2_{31} = -a^3_{12} = a^3_{21}.$$

Deci, dacă notăm $a^1_{23} = \lambda$, conexiunea afină invariantă pe spaţiul (6) are componentele

$$\Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = -\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = -\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21},$$

componentele nescrise fiind nule.

Conexiunea lui Levi-Civita ataşată spaţiului are toate componentele nule.

Cu aceste valori avem

$$R = 6\lambda^2,\ \overline{R} = 0,\quad T = 6\lambda^2,$$

de unde rezultă

$$R - \overline{R} - T = 0.$$

Avem deci

TEOREMA 4. *Conexiunile afine invariante pe spaţiul V_3 cu metrica nedefinită şi curbura nul depind de o constantă arbitrară, fiind compatibile cu un spaţiu V_3 compact şi orientabil.*

Să considerăm acum un spaţiu V_3 cu metrica nedefinită şi curbura constantă pozitivă $K > 0$, a cărui metrică se scrie [4] [6])

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2}{K\,(x^3)^2}. \tag{7}$$

---

[5]) Pag. 611.

[6]) Pag. 603.

Grupul de mișcări al acestui spațiu este definit de operatorii [4] [7]:

$$X_j f = \partial_j f,\ (j=1,2),\quad X_3 f = x^i \partial_i f,\ (i=1,2,3),\quad X_4 f = x^2\partial_1 f - x^1\partial_2 f,$$

$$X_5 f = [(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2]\,\partial_1 f + 2x^1x^2\partial_2 f + 2x^1x^3\partial_3 f,$$

$$X_6 f = 2x^1x^2\partial_1 f + [-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]\,\partial_2 f + 2x^2x^3\partial_3 f.$$

Pentru $h = 1,\ 2$, sistemul (2) ne dă

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^3),$$

care înlocuită în sistemul (2) cu $h = 3$ ne conduce la

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{a^i_{jk}}{x^3},\quad (a^i_{jk} = \text{const.})$$

Cu aceste valori, sistemul (2) cu $h = 4,\ 5,\ 6$ ne dă

$$a^1_{11}=a^1_{12}=a^1_{21}=a^1_{22}=a^2_{11}=a^2_{12}=a^2_{21}=a^2_{22}=a^1_{33}=a^2_{33}=a^3_{13}=a^3_{31}=a^3_{23}=a^3_{32}=0,$$

$$a^1_{13}=a^1_{31}=a^2_{23}=a^2_{32}=a^3_{11}=a^3_{22}=a^3_{33}=1,$$

$$a^1_{23}=-a^1_{32}=-a^2_{13}=a^2_{31}=-a^3_{12}=a^3_{21}.$$

Dacă notăm $a^1_{23} = \lambda$, rezultă că, componentele nenule ale conexiunii invariante pe spațiul (7) sînt

$$\Gamma^1_{13}=\Gamma^1_{31}=\Gamma^2_{23}=\Gamma^2_{32}=\Gamma^3_{11}=\Gamma^3_{22}=\Gamma^3_{33}=\frac{1}{x^3},$$

$$\Gamma^1_{23}=-\Gamma^1_{32}=-\Gamma^2_{13}=\Gamma^2_{31}=-\Gamma^3_{12}=\Gamma^3_{21}=\frac{\lambda}{x^3}.$$

Conexiunea lui Levi-Civita atașată spațiului (7) are componentele

$$\overline{\Gamma}^1_{13}=\overline{\Gamma}^1_{31}=\overline{\Gamma}^2_{23}=\overline{\Gamma}^2_{32}=\overline{\Gamma}^3_{11}=\overline{\Gamma}^3_{22}=\overline{\Gamma}^3_{33}=\frac{1}{x^3}.$$

Cu aceste valori avem

$$R = 6k\,(1 + \lambda^2),\quad \overline{R} = 6k,\quad T = 6k\,\lambda^2,$$

de unde deducem

$$R - \overline{R} - T = 0.$$

Rezultă

TEOREMA 5. *Conexiunile afine invariante pe spațiul V_3 cu metrica nedefinită și curbura constantă pozitivă depind de o constantă arbitrară, fiind compatibile cu un spațiu V_3 compact și orientabil.*

Fie acum spațiul V_3 cu metrica nedefinită și curbura constantă negativă $K < 0$, a cărui metrică este [4] [8]:

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2+(dx^2)^2-(dx^3)^2}{-K\,(x^1)^2} \tag{8}$$

---

[7] Pag. 607.

[8] Pag. 603.

şi al cărui grup de mişcări este definit de operatorii [4] ⁹)

$$X_1f=\partial_2 f,\ X_2f=\partial_3 f,\ X_3f=x^i\partial_i f,\ (i=1,2,3),\ X_4f=x^3\partial_2 f+x^2\partial_3 f,$$

$$X_5f=2x^1x^2\partial_1 f+[-(x^1)^2)+(x^2)^2+(x^3)^2]\partial_2 f+2x^2x^3\partial_3 f,$$

$$X_6f=2x^1x^3\partial_1 f+2x^2x^3\partial_2 f+[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2]\,\partial_3 f.$$

Scriind sistemul (2) pentru $h=1,\ 2$, obţinem

$$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}(x^1),$$

care înlocuită în (2) cu $h=3$ ne dă

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{a^i_{jk}}{x^1}.$$

Cu aceste valori, din sistemul (2) pentru $h=4,\ 5,\ 6$, deducem

$$a^1_{12}=a^1_{21}=a^1_{13}=a^1_{31}=a^2_{11}=a^3_{11}=a^2_{22}=a^2_{23}=a^2_{32}=a^2_{33}=a^3_{22}=a^3_{23}=a^3_{32}=a^3_{33}=0,$$

$$a^1_{11}=a^1_{22}=a^1_{33}=a^2_{12}=a^2_{21}=a^3_{13}=a^3_{31}=1,\ a^1_{23}=-a^1_{32}=-a^2_{13}=a^2_{31}=-a^3_{12}=a^3_{21}.$$

Dacă notăm $a^1_{23}=\lambda$, rezultă că, componentele nenule ale conexiunii invariante pe spaţiul (8) sînt

$$\Gamma^1_{11}=-\Gamma^1_{22}=\Gamma^1_{33}=\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=\frac{1}{x^1},$$

$$\Gamma^1_{23}=-\Gamma^1_{32}=-\Gamma^2_{13}=\Gamma^2_{31}=-\Gamma^3_{12}=\Gamma^3_{21}=\frac{\lambda}{x^1}.$$

Componentele nenule ale conexiunii Levi-Civita ataşată spaţiului (8) sînt

$$\overline{\Gamma}^1_{11}=-\overline{\Gamma}^1_{22}=\overline{\Gamma}^1_{33}=\overline{\Gamma}^2_{12}=\overline{\Gamma}^2_{21}=\overline{\Gamma}^3_{13}=\overline{\Gamma}^3_{31}=\frac{1}{x^1}.$$

Cu aceste valori obţinem

$$R=6K(1-\lambda^2),\quad \overline{R}=6K,\ T=-6K\lambda^2,$$

deci

$$R-\overline{R}-T=0.$$

Rezultă

TEOREMA 6. *Conexiunile afine invariante pe spaţiul V_3 cu metrica nedefinită şi curbura constantă negativă depinde de o constantă arbitrară, fiind compatibile cu un spaţiu V_3 compact şi orientabil.*

---

⁹) Pag. 611.

III

Să ne ocupăm acum de spaţiile V_4 cu curbura constantă.

Metrica unui spaţiu V_4 cu metrica nedefinită şi curbura nulă poate fi de două forme şi anume

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 - (\mathrm{d}x^4)^2, \tag{9}$$

şi

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 - (\mathrm{d}x^4)^2. \tag{10}$$

Spaţiul (9) are ca grup de mişcări grupul definit de operatori [4] [10]:

$$X_i f = \partial_i f,\ (i = 1, 2, 3, 4),\ X_5 f = x^2\partial_1 f - x^1\partial_2 f,\ X_6 f = x^3\partial_2 f - x^2\partial_3 f,$$
$$X_7 f = x^1\partial_3 f - x^3\partial_1 f,\ X_8 f = x^4\partial_1 f + x^1\partial_4 f,\ X_9 f = x^4\partial_2 f + x^2\partial_4 f,$$
$$X_{10} f = x^4\partial_3 f + x^3\partial_4 f.$$

Pentru $h = 1, \ldots 4$, sistemul (2) se scrie

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} = 0,$$

de unde

$$\Gamma^i_{jk} = a^i_{jk},\ (\text{const.}).$$

Înlocuind aceste valori în sistemul (2) cu $h = 5, \ldots 10$, rezultă

$$a^i_{jk} = 0.$$

Deci, nu există nici o conexiune invariantă pe spaţiul riemannian (9).

Spaţiul (10) are ca grup de mişcări grupul definit de operatorii [4] [11]

$$X_i f = \partial_i f,\ (i = 1, \ldots, 4),\ X_5 f = x^2\partial_1 f - x^1\partial_2 f,\ X_6 f = x^4\partial_3 f - x^3\partial_4 f,$$
$$X_7 f = x^3\partial_1 f + x^1\partial_3 f,\ X_8 f = x^4\partial_1 f + x^1\partial_4 f,\ X_9 f = x^3\partial_1 f + x^2\partial_3 f.$$
$$X_{10} f = x^4\partial_2 f + x^2\partial_4 f.$$

Pentru $h = 1, \ldots 4$, sistemul (2) ne dă

$$\Gamma^i_{jk} = a^i_{ik}, \qquad (\text{const.}).$$

Înlocuind aceste valori în sistemul (2) cu $h = 5, \ldots 10$, obţinem

$$a^i_{jk} = 0.$$

Deci nu există nici o conexiune invariantă pe spaţiul riemannian (10). Rezultă

TEOREMA 7. *Nu există nici o conexiune invariantă pe spaţiile riemanniene V_4 cu metrica nedefinită şi curbura nulă.*

---

[10] Pag. 611.

[11] Pag. 603.

Să considerăm acum un spaţiu riemannian V_4 cu metrica nedefinită şi curbura constantă pozitivă $K > 0$. Metrica unui astfel de spaţiu poate fi scrisă sub una din formele [4] ¹¹)

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 - (\mathrm{d}x^4)^2}{K(x^4)^2}, \tag{11}$$

sau

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 - (\mathrm{d}x^4)^2}{K(x^4)^2}.$$

Grupul de mişcări al spaţiului (11) este definit de operatorii [4] ¹²) :

$$X_j f = \partial_j f, \quad (j=1, 2, 3,), \quad X_4 f = x^2 \partial_1 f - x^1 \partial_2 f, \quad X_5 f = x^3 \partial_2 f - x^2 \partial_3 f,$$

$$X_6 f = x^3 \partial_1 f - x^1 \partial_3 f, \quad X_7 f = x^i \partial_i f, \quad (i = 1, \ldots, 4),$$

$$X_8 f = [(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 + (x^4)^2]\, \partial_1 f + 2x^1 x^2 \partial_2 f + 2x^1 x^3 \partial_3 f + 2x^1 x^4 \partial_4 f.$$

$$X_9 f = 2x^1 x^2 \partial_1 f + [-(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + (x^4)^2] \partial_2 f + 2x^2 x^3 \partial_3 f + 2x^2 x^4 \partial_4 f,$$

$$X_{10} f = 2x^1 x^3 \partial_1 f + 2x^2 x^3 \partial_2 f + [-(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2] \partial_3 f + 2x^3 x^4 \partial_4 f.$$

Pentru $h = 1, 2, 3$, sistemul (2) ne dă

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{fk}\,(x^4).$$

Înlocuind această valoare în sistemul (2) cu $h = 7$, obţinem

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{a^i_{jk}}{x^4} \qquad (a^i_{jk} = \text{const.}).$$

Cu aceste valori, din sistemul (2) pentru $h = 4, 5, 6, 8, 9, 10$, deducem

$$a^1_{14} = a^1_{41} = a^2_{24} = a^2_{42} = a^3_{34} = a^3_{43} = a^4_{11} = a^4_{22} = a^4_{33} = a^4_{44} = 1,$$

celelalte constante fiind nule.

Deci, conexiunea invariantă pe spaţiul (11) are singurele componente nenule

$$\Gamma^1_{14} = \Gamma^1_{41} = \Gamma^2_{24} = \Gamma^2_{42} = \Gamma^3_{34} = \Gamma^3_{43} = \Gamma^4_{11} = \Gamma^4_{22} = \Gamma^4_{33} = \Gamma^4_{44} = \frac{1}{x^4},$$

fiind tocmai conexiunea lui Levi-Civita a spaţiului.

Rezultă că, singura conexiune afină invariantă pe spaţiul (11) este conexiunea Levi-Civita.

---

¹¹) Pag. 603.
¹²) Pag. 607.

Să ne ocupăm acum de spaţiul (12). Grupul lui de mişcări este definit de operatorii [4][13]:

$$X_j f=\partial_j f,\ (j=1,\ 2,\ 3),\ X_4 f=x^i\partial_i f,\ X_5 f=x^2\partial_1 f-x^1\partial_2 f,$$

$$X_6 f=x^3\partial_1 f+x^1\partial_3 f,\ X_7 f=x^3\partial_2 f+x^2\partial_3 f,$$

$$X_8 f=[(x^1)^2-(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2]\,\partial_1 f+2x^1x^2\partial_2 f+2x^1x^3\partial_3 f+2x^1x^4\partial_4 f,$$

$$X_9 f=2x^1x^2\partial_1 f+[-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2]\partial_2 f+2x^2x^3\partial_3 f+2x^2x^4\partial_4 f,$$

$$X_{10} f=2x^1x^3\partial_1 f+2x^2x^3\partial_2 f+[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2]\,\partial_3 f+2x^3x^4\partial_4 f.$$

Pentru $h=1,\ 2,\ 3,$ sistemul (2) ne dă

$$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}(x^4).$$

iar pentru $h=4$

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{a^i_{jk}}{x^4},\quad (a^i_{jk}=\text{const.}).$$

Înlocuind aceste valori în sistemul (2) cu $h=5,\ldots 10$, obţinem

$$a^1_{14}=a^1_{41}=a^2_{24}=a^2_{42}=a^3_{34}=a^3_{43}=a^4_{11}=a^4_{22}=-a^4_{33}=a^4_{44}=1,$$

constantele nescrise fiind nule.

Conexiunea invariantă pe spaţiul (12) este deci conexiunea lui Levi-Civita a spaţiului.

Rezultă

TEOREMA 8. *Singura conexiune invariantă pe un spaţiu V_4 cu metrica nedefinită cu curbura constantă pozitivă este conexiunea lui Levi-Civita a spaţiului.*

În mod analog obţinem

TEOREMA 9. *Singura conexiune invariantă pe un spaţiu V_4 cu metrica nedefinită şi curbura constantă negativă este conexiunea lui Levi-Civita a spaţiului.*

Primită la redacţie la 3 februarie 1967

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. STOKA M., *Connexions invariantes sur un espace riemannien V_n.* Revue Roumaine de math. pures et appliq., **10**, *9* (1965).
2. — *Connexions invariantes sur un espace riemannien V_3.* I. Bulletin de l'Ac. R. de Belgique, **50**, *18* (1964).
3. — *Connexions invariantes sur un espace riemannien V_3.* II. Revue Roum. de math., pures et appliq., **10**, *8* (1965).
4. — *Asupra spaţiilor riemanniene cu metrica nedefinită, cu curbura constantă.* St. cerc. matem., **14**, *4* (1963).
5. TALLINI G., *Una proprietà in grande della varietà a connessione affine compotte con applicazioni alle varietà a connessione proiettiva.* Rend. Acc. Lincei, **32**, 644—618 (1962).
6. VRĂNCEANU G., *Sur quelques théorèmes de géometrie différentielle globale.* Revue Roum. de math. pures et appliq., **10**, *2* (1965).

---

[13] Pag. 607.

ASUPRA GRUPURILOR IZOMORFE CU GRUPUL PROIECTIV DIN PLAN ŞI CU SUBGRUPURILE LUI

DE

MARIUS I. STOKA

În această lucrare se determină formele canonice ale grupurilor tranzitive în două şi trei variabile, izomorfe cu grupul proiectiv din plan şi cu subgrupurile lui.

Grupul proiectiv din planul de coordonate x, y este definit de transformările infinitezimale

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & X_1 f = p,\ X_2 f = q,\ X_3 f = xp,\ X_4 f = yp,\ X_5 f = xq,\ X_6 f = yq,\\
& X_7 f = x^2 p + xyq,\ X_8 f = xyp + y^2 p,
\end{aligned}
$$

unde $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ avînd structura

$$
\begin{aligned}
& (X_1 X_3) = X_1, (X_1 X_5) = X_2, (X_1 X_7) = 2X_3 + X_6, (X_1 X_8) = X_4,\\
& (X_2 X_4) = X_1, (X_2 X_6) = X_2, (X_2 X_7) = X_5, (X_2 X_8) =\\
& = X_3 + 2X_6, (X_3 X_4) = - X_4, (X_3 X_5) = X_5, (X_3 X_7) =\\
& = X_7, (X_4 X_5) = X_6 - X_3, (X_4 X_6) = - X_4, (X_4 X_7) =\\
& = X_8, (X_5 X_6) = X_5, (X_5 X_8) = X_7, (X_6 X_8) = X_8, (X_1 X_2) =\\
& = (X_1 X_4) = (X_1 X_6) = (X_2 X_3) = X_2 X_5 = (X_3 X_6) = (X_3 X_8) =\\
& = (X_4 X_8) = (X_5 X_7) = (X_6 X_7) = (X_7 X_8) = 0.
\end{aligned}
$$

G. Kowalewski a determinat [1]¹) toate subgrupurile grupului (1).

În această lucrare vom determina formele canonice la care pot fi reduse grupurile tranzitive în două şi trei variabile, izomorfe cu grupul (1)

---

¹) Pag. 384–389.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 7, P. 1081–1104, BUCUREŞTI, 1967

și subgrupurile lui. Aceste forme canonice ne sînt necesare la anumite probleme de geometrie integrală.

I

Fie R^2 un spațiu cu două dimensiuni de coordonate x^1, x^2 și $Y_h f = \xi^i_h(x) p_i$, $(i = 1, 2\,;\ h = 1, \ldots, 8)$, operatorii unui grup G_8 izomorf cu grupul (1), unde am pus $p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$.

Vom presupune întîi că subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv. În acest caz, printr-o schimbare de variabile, putem presupune că

$$Y_1 f = p_1, \qquad Y_2 f = p_2. \tag{2}$$

Cu aceste valori, ecuațiile $(Y_1 Y_3) = Y_1$, $(Y_2 Y_3) = 0$ ne dau

$$\xi'_3 = x + k_1, \qquad \xi^2_3 = k_2, \qquad (k_1, k_2 = \text{const.})$$

și printr-o schimbare de parametri obținem $k_1 = k_2 = 0$, adică

$$Y_3 f = x^1 p_1. \tag{3}$$

Ținînd seama de (2) și (3) în ecuațiile $(Y_1 Y_4) = 0$, $(Y_2 Y_4) = Y_1$, $(Y_3 Y_4) = -Y_4$, deducem

$$\xi^1_4 = x^2 + k, \qquad \xi^2_4 = 0$$

și făcînd o schimbare de parametri găsim $k = 0$, de unde

$$Y_4 f = x^2 p_1. \tag{4}$$

Înlocuind expresiile (2), (3), (4) în celelalate ecuații de structură, deducem

$$Y_5 f = x^1 p_2,\ Y_6 f = x^2 p_2,\ Y_7 f = x^1 (x^1 p_1 + x^2 p_2),\ X_8 f = x^2 (x^1 p_1 + x^2 p_2).$$

Deci, dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, grupul G_8 se reduce la forma (1).

Să presupunem acum că subgrupul G_2 este intranzitiv, adică

$$\xi^i_2 = \lambda(x^1, x^2)\, \xi^i_1, \ (i = 1, 2).$$

Printr-o schimbare de variabile putem obține

$$Y_1 f = p_1 \tag{5}$$

și deci

$$Y_2 f = \lambda(x^1, x^2)\, p_1, \qquad (\lambda \neq 0).$$

Cu aceste valori ecuația $(Y_1 Y_2) = 0$ ne dă

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^1} = 0.$$

adică $\lambda = \lambda(x^2)$.

Ecuaţiile $(Y_1 Y_3) = Y_1$ ne dă

$$\xi_3^1 = x^1 + \alpha_1(x^2), \quad \xi_3^2 = \alpha_2(x^2),$$

iar ecuaţia $(Y_2 Y_3) = 0$,

$$\lambda - \alpha_2 \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{6}$$

de unde rezultă că $\alpha_2 \neq 0$.

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^1 + \varphi_1(x^2), \quad \overline{x}^2 = \varphi_2(x^2),$$

care păstrează forma operatorilor $Y_1 f$, $Y_2 f$, obţinem

$$Y_3 f = \overline{x}^1 + \alpha_2 \varphi_1' - \varphi_1 + \alpha_1) p_{\bar{1}} + \alpha_2 \varphi_2' p_{\bar{2}},$$

unde $p_{\bar{i}} = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{x}^1}$.

Deci putem determina funcţiile $\varphi_i(x^2)$ cu condiţiile

$$\alpha_2 \varphi_1' - \varphi_1 + \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 \varphi_2' = 1.$$

Rezultă că putem reduce pe $Y_3 f$ la forma

$$Y_3 f = x^1 p_1 + p_2, \tag{7}$$

cu care valoarea, ecuaţia (6) ne dă

$$\lambda = k\,\mathrm{e}^{x^2}, \quad (k = \text{const.}).$$

Deci, printr-o schimbare de parametri avem

$$Y_2 f = \mathrm{e}^{x^2} p_1. \tag{8}$$

Înlocuind expresiile (5), (7), (8) în ecuaţiile $(Y_1 Y_4) = 0$, $(Y_2 Y_4) = Y_1$, $(Y_3 Y_4) = Y_4$, deducem

$$\xi_4^1 = k, \qquad \xi_4^2 = -\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

de unde rezultă că, printr-o schimbare de parametri, obţinem

$$Y_4 f = -\,\mathrm{e}^{-x^2} p_2. \tag{9}$$

De asemenea ecuaţiile $(Y_1 Y_5) = Y_2$, $(Y_2 Y_5) = 0$, $(Y_3 Y_5) = Y_5$ ne dau

$$Y_5 f = (x^1 \mathrm{e}^{x^2} + k\mathrm{e}^{2x^2}) p_1 + \mathrm{e}^{x^2} p_2, \quad (k = \text{const.})$$

iar ecuaţiile $(Y_1 Y_6) = 0$, $(Y_2 Y_6) = Y_3$, $(Y_3 Y_6) = 0$, $(Y_4 Y_6) = -\,Y_4$

$$Y_6 f = -\,p_2. \tag{10}$$

Cu aceste valori, ecuaţia $(Y_5 Y_6) = Y_5$ ne dă $k = 0$, adică

$$Y_5 f = x^1 \mathrm{e}^{x^2} p_1 + \mathrm{e}^{x^2} p_2. \tag{11}$$

Înlocuind expresiile (5), (7), (8), (9), (10), (11) în celelalte ecuaţii de structură, obţinem o relaţie imposibilă.

Deci, dacă subgrupul $[Y_1, Y_2]$ al grupului G_8 este intranzitiv, grupul G_8 nu poate fi izomorf cu grupul (1).

Rezultă teorema:

Orice grup în două variabile, izomorf cu grupul transformărilor proiective din plan, poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri la forma (1).

Grupul (1) are două subgrupuri cu șase parametri și anume

$$G'_6 \equiv [X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6], \; G''_6 \equiv [X_1, X_2, X_3, X_5, X_6, X_7].$$

Să considerăm în spațiul R^2, grupul definit de operatorii

$$Y_h f = \xi^i_h(x) p_i, \qquad (i = 1,2 \,;\; h = 1, \ldots, 6). \tag{12}$$

Dacă acest grup este izomorf cu grupul G'_6, ținînd seama de calculele făcute mai sus rezultă:

Orice grup în două variabile, izomorf cu grupul transformărilor afine din plan, poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele

$$\text{[I]} \quad X_1 f = p_1, Y_2 f = p_2, Y_3 f = x^1 p_1, Y_4 f = x^2 p_1, Y_5 f = x^1 p_2, Y_6 f = x^2 p_2$$

$$\text{[II]} \quad Y_1 f = p_1, Y_2 f = e^{x^2} p_1, Y_3 f = x^1 p_1 + p_2, Y_4 f = -e^{-x^2} p_2, Y_5 f =$$
$$= x^1 e^{x^2} p_1 + e^{x^2} p_2, Y_6 f = -p_2.$$

Să presupunem acum că grupul (12) este izomorf cu grupul G''_6.

Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, putem presupune, printr-o schimbare de variabile, că

$$Y_1 f = p_1, Y_2 f = p_2.$$

Cu aceste valori, ecuațiile de structură ale grupului ne conduc la:

$$Y_3 f = x^1 p_1, Y_4 f = x^1 p_2, Y_5 f = x^2 p_2, Y_6 f = x^1 (x^1 p_1 + x^2 p_2).$$

Dacă subgrupul G_2 este intranzitiv, printr-o schimbare de variabile obținem

$$Y_1 f = p_1, Y_2 f = e^{x^2} p_1, Y_3 f = x^1 p_1 + p_2. \tag{13}$$

Cu aceste valori, ecuațiile $(Y_1 Y_4) = Y_2$, $(Y_2 Y_4) = 0$, $(Y_3 Y_4) = Y$ ne dau

$$Y_4 f = (x^1 e^{x^2} + k_1 e^{2x^2}) p_1 + e^{x^2} p_2, \; (k = \text{const.}) \tag{14}$$

iar ecuațiile $(Y_1, Y_5) = 0$, $(Y_2 Y_5) Y_2$, $(Y_3 Y_5) = 0$

$$Y_5 f = k_2 e^{x^2} p_1 - p_2. \tag{15}$$

Ținînd seama de (14) și (15), ecuația $(Y_4 Y_5) = Y_4$ ne dă

$$k_1 = 0.$$

Cu aceste valori, celelalte ecuații de structură ne dau

$$Y_6 f = (x^1 + k_2 e^{x^2})(x^1 p_1 + p_2).$$

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$\bar{x}^1 = x^1 + k_2 e^{x^2}, \ \bar{x}^2 = x^2,$$

putem presupune $k_2 = 0$.

Deci, orice grup în două variabile izomorfe cu grupul G_6'' poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele

$$[\mathrm{I}] \quad Y_1 f = p_1, \ Y_2 f = p_2, \ Y_3 f = x^1 p_1, \ Y_4 f = x^1 p_2, \ Y_5 f = x^2 p_2,$$
$$Y_6 f = x^1 (x^1 p_1 + x^2 p_2),$$
$$[\mathrm{II}] \quad Y_1 f = p_1, \ Y_2 f = e^{x^2} p_1, \ Y_3 f = x^1 p_1 + p_2, \ Y_4 f = e^{x^2} (x^1 p_1 + p_2),$$
$$Y_5 f = - p_2, \ Y_6 f = x^1 (x^1 p_1 + p_2).$$

Grupul (1) are trei subgrupuri cu cinci parametri și anume

$$G_5' \equiv [X_1, X_2, X_3, X_5, X_6]$$
$$G_5'' \equiv [X_1, X_2, X_5, 2X_3 + X_6, X_7],$$
$$G_5''' \equiv [X_1, X_2, X_4, X_5, X_3 - X_6].$$

Să considerăm în spațiul R^2 un grup G_5 definit de operatorii

$$(16) \qquad Y_h f = \xi_h^i (x) p_i, \qquad (i = 1, 2 \, ; \ h = 1, \ldots, 5).$$

Dacă acest grup este izomorf cu grupul G_5', ținînd seama de rezultatul anterior, deducem :

Orice grup în două variabile izomorf cu grupul G_5' poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri la una din formele

$$[\mathrm{I}] \quad Y_1 f = p_1, \ Y_2 f = p_2, \ Y_3 f = x^1 p_1, \ Y_4 f = x^1 p_2, \ Y_5 f = x^2 p_2,$$
$$[\mathrm{II}] \quad Y_1 f = p_1, \ Y_2 f = e^{x^2} p_1, \ Y_3 f = x^1 p_1 + p_2, \ Y_4 f = e^{x^2} (x^1 p_1 + p_2),$$
$$Y_5 f = - p_2.$$

Să presupunem acum că grupul (16) este izomorf cu grupul G_5''.

Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, atunci putem presupune că

$$Y_1 f = p_1, \ Y_2 f = p_2.$$

Cu aceste valori, ecuațiie $(Y_1 Y_3) = Y_2$, $(Y_2 Y_3) = 0$ ne dau

$$\xi_3^1 = a, \ \xi_3^2 = x^1 + b, \qquad (a, b = \text{const.})$$

și printr-o schimbare de parametri putem lua $a = b = 0$, adică

$$Y_3 f = x^1 p_2.$$

Ecuațiile $(Y_1 Y_4) = 2Y_1$, $(Y_2 Y_4) = Y_2$, $(Y_3 Y_4) = - Y_4$ ne dau, după o schimbare de parametri,

$$Y_4 f = 2x^1 p_1 + x^2 p_2.$$

În sfîrșit, celelalte ecuații de structură ne conduc la

$$Y_5 f = x^1 (x^1 p_1 + x^2 p_2).$$

Dacă subrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este intranzitiv, putem presupune că

$$Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = \lambda_1(x^2)\, p_1. \tag{17}$$

Ecuaţia $(Y_1 Y_3) = Y_2$ ne dă în acest caz

$$\xi_3^1 = \lambda_1(x^2)\, x^1 + \lambda_2(x^2), \; \xi_3^2 = \lambda_3(x^2).$$

Cu aceste valori, ecuaţia $(Y_2 Y_3) = 0$ ne conduce la

$$\lambda_1^2 - \lambda_3 \lambda_1' = 0, \tag{18}$$

de unde rezultă că $\lambda_3 \neq 0$.

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^1 + \varphi_1(x^2), \; \overline{x}^2 = \varphi_2(x^2)$$

care păstrează forma operatorilor $Y_1 f$, $Y_2 f$, putem presupune că $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Cu aceste valori ecuaţia (18) ne dă

$$\lambda_1 = -\frac{1}{x^2 + k}, \quad (k = \text{const.})$$

şi prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^1, \; \overline{x}^2 = x^2 + k,$$

putem considera că $k = 0$.

Deci

$$Y_2 f = -\frac{1}{x^2}\, p_1, \; Y_3 f = -\frac{x^1}{x^2}\, p_1 + p_2. \tag{19}$$

Cu aceste valori, ecuaţiile $(Y_1 Y_4) = 2 Y_1$, $(Y_2 Y_4) = Y_2$, $(Y_3 Y_4) = -Y_3$ ne dau

$$Y_4 f = \left(2x^1 + \frac{k}{x^2}\right) p_1 - x^2 p_2.$$

Ţinînd seama de expresiile operatorilor $Y_1 f, \ldots, Y_4 f$ în celelalte ecuaţii de structură, obţinem

$$Y_5 f = \left[(x^1)^2 + \frac{k x^1}{x^2}\right] p_1 - (x^1 x^2 + k)\, p_2.$$

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^1 + \frac{k}{x^2}, \; \overline{x}^2 = x^2,$$

putem presupune $k = 0$. Deci :

Orice grup în două variabile izomorf cu grupul G''_5 poate fi redus prin schimbări de variabile şi parametri la una din formele

[I] $Y_1 f = p_1$, $Y_2 f = p_2$, $Y_3 f = x^1 p_2$, $Y_4 f = 2x^1 p_1 + x^2 p_2$, $Y_5 f = x^1(x^1 p_1 + x^2 p_2)$,

[II] $Y_1 f - p_1$, $Y_2 f = -\frac{1}{x^2}\, p_1$, $Y_3 f = -\frac{x^1}{x^2}\, p_1 + p_2$, $Y_4 f = 2x^1 p_1 - x^2 p_2$,
$Y_5 f = x^1 (x^1 p_1 - x^2 p_2)$.

Să considerăm acum cazul în care grupul (16) este izomorf cu grupul G_5'''.

Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, putem presupune că

$$Y_1f = p_1,\ Y_2f = p_2.$$

Cu aceste valori, ecuațiile $(Y_1Y_3) = 0$, $(Y_2Y_3) = Y_1$ ne dau

$$\xi_3^1 = x^2 + a, \quad \xi_3^2 = b, \qquad (a, b = \text{const.})$$

și deci, printr-o schimbare de parametri avem

$$Y_3f = x^2 p_1.$$

Înlocuind aceste valori în celelalte ecuații de structură, deducem

$$Y_4f = x^1p_2,\ Y_5f = x^1p_1 - x^2p_2.$$

Dacă subgrupul G_2 este intranzitiv, putem presupune că

$$Y_1f = p_1,\ Y_2f = \lambda_1(x^2)\,p_1.$$

Ecuațiile $(Y_1Y_3) = 0$, $(Y_2Y_3) = Y_1$, ne dau în acest caz

$$\xi_3^1 = \lambda_2(x^2),\ \xi_3^2 = \lambda_3(x^2),$$

unde

$$\lambda_3 \frac{d\lambda_1}{dx^2} = -1. \tag{20}$$

De aici rezultă că $\xi_3^2 \neq 0$ și printr-o schimbare de parametri de forma

$$\overline{x}^1 = x^1 + \mu_1(x^2),\ \overline{x}^2 = \mu_2(x^2),$$

putem presupune că $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, adică

$$Y_3f = p_2.$$

Cu aceasta, ecuația (20) ne dă

$$\lambda_1 = -x^2 + k$$

și deci, printr-o schimbare de parametri, avem

$$Y_2f = -x^2p_1.$$

Celelalte ecuații de structură ne conduc la

$$Y_4f = -x^2(x^1p_1 + x^2p_2),\ Y_5f = x^1p_1 + 2x^2p_2.$$

Deci:

Orice grup în două variabile, izomorfe cu grupul G'''_5 poate fi redus, prin schimbări de variabile și de parametri, la una din formele:

[I] $Y_1f = p_1,\ Y_2f = p_2,\ Y_3f = x^2p_1,\ Y_4f = x^1p_2, Y_5f = x^1p_1 - x^2p_2,$

[II] $Y_1f = p_1,\ Y_2f = -x^2p_1, Y_3f = p_2,\ Y_4f = -x^2(x^1p_1 + x^2p_2),$
$Y_5f = x^1p_1 + 2x^2p_2.$

Grupul (1) are cinci subgrupuri cu patru parametri și anume

$$G_4' \equiv [X_1, X_2, X_3, X_4], G_4'' \equiv [X_1, X_2, X_5, X_3 + cX_6],$$

$$G_4''' \equiv [X_1, X_2, X_3, X_6], G_4''' \equiv [X_1, X_3, X_4, X_6],$$

$$G_4^{V} \equiv [X_1, X_3, X_6, X_7].$$

Să considerăm în spațiul R^2 grupul definit de operatorii

$$Y_h f = \xi_h^i (x) p_i, \qquad (i = 1, 2; h = 1, \ldots, 4). \tag{21}$$

Dacă acest grup este izomorf cu grupul G_4', ținînd seama de rezultatele de mai sus, rezultă că orice grup în două variabile izomorf cu grupul G_4' îl putem reduce la forma

$$Y_1 f = p_1, Y_2 f = p_2, Y_3 f = x^1 p_1\ Y_4 f = x^2 p_2.$$

Să presupunem acum că grupul (21) este izomorf cu grupul G_4''. Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, Y_2 f = p_2.$$

Cu aceste valori, celelalte ecuații de structură ne dau

$$Y_3 f = x^1 p_2, Y_4 f = x^1 p_1 + cx^2 p_2.$$

Să presupunem acum că subgrupul G_2 este intranzitiv. În acest caz, ținînd seama de calculele făcute în cazul grupului izomorf cu G_5'', rezultă că putem lua

$$Y_1 f = p_1, Y_2 f = -\frac{1}{x^2} p_1, Y_3 f = -\frac{x'}{x^2} p_1 + p_2.$$

Cu aceste valori, celalalte ecuații de structură ne dau

$$Y_4 f = \left(x^1 + \frac{k}{x^2}\right) p_1 + (c-1) x^2 p_2, \qquad (k = \text{const.})$$

și printr-o schimbare de parametri putem considera că $k = 0$.

Deci :

Orice grup în două variabile, izomorf cu grupul G_4'', îl putem reduce, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele

$$[\text{I}]\ Y_1 f = p_1, Y_2 f = p_2, Y_3 f = x^1 p_2, \ Y_4 f = x^1 p_1 + cx^2 p_2,$$

$$[\text{II}]\ Y_1 f = p_1, Y_2 f = -\frac{1}{x^2} p_1, Y_3 f = \frac{x^1}{x^2} p_1 + p_2,$$

$$Y_4 f = x^1 p_1 + (c-1) x^2 p_2.$$

Să presupunem acum că grupul (21) este izomorf cu grupul G_4'''.

Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, ținînd seama de rezultatele de mai sus obținem

$$Y_1 f = p_1, Y_2 f = p_2, Y_3 f = x^1 p_1, Y_4 f = x^2 p_2. \tag{22}$$

Dacă subgrupul G_2 este intranzitiv, obţinem o relaţie imposibilă. Deci :

Orice grup în două variabile izomorf cu grupul G_4''' poate fi redus, prin schimbări de variabile şi parametri, la forma (22).

Să presupunem acum că grupul (21) este izomorf cu grupul G_4^{IV}.

Să considerăm întîi că subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv. Atunci, printr-o schimbare de variabile, putem presupune că

$$Y_1 f = p_1, \ Y_2 f = x^1 p_1 + p_2.$$

Cu aceste valori, celelalte ecuaţii de structură ne dau

$$Y_3 f = \mathrm{e}^{-x^2} p_2, \ Y_4 f = -p_2.$$

Dacă subgrupul G_2 este intranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, Y_2 f = [x^1 + \lambda(x^2)] p_1$$

şi printr-o schimbare de variabile putem presupune că $\lambda = 0$, adică

$$Y_2 f = x^1 p_1.$$

Cu aceste valori, celelalte ecuaţii de structură ne conduc la

$$Y_3 f = x^2 p_1, \ Y_4 f = x^2 p_2.$$

Deci :

Orice grup, în două variabile, izomorf cu grupul G_4^{IV} poate fi redus, prin schimbări de variabile şi parametri, la una din formele

$$[\mathrm{I}] \ Y_1 f = p_1, \ Y_2 f = x^1 p_1 + p_2, \ Y_3 f = \mathrm{e}^{-x^2} p_2, \ Y_4 f = -p_2,$$

$$[\mathrm{II}] \ Y_1 f = p_1, Y_2 f = x^1 p_1, Y_3 f = x^2 p_1, Y_4 f = x^2 p_2.$$

În sfîrşit, să presupunem că grupul (21) este izomorf cu grupul G_4^{V}.

Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, Y_2 f = x^1 p_1 + p_2.$$

Cu aceste valori, ecuaţiile de structură ne dau

$$Y_3 f = a_1 \mathrm{e}^{x^2} p_1 + a_2 p_2, \ Y_4 f = [(x^1)^2 + a_1 x^1 \mathrm{e}^{x^2} + b_1 \mathrm{e}^{2x^2}] p_1 + [(2 + a_2) x^1 + b_2 \mathrm{e}^{x^2}] p_2,$$

unde

$$2a_1 + a_1 a_2 + a_2 b_2 = 0, \ a_1^2 + 2a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0. \tag{23}$$

De aici rezultă că $a_2 \neq 0$ şi prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^1 - \frac{a_1}{a_2} \mathrm{e}^{x^2}, \ \overline{x}^2 = x^2$$

urmată de o schimbare de parametri, putem presupune $a_1 = 0, a_2 = 1$, care înlocuite în (23) ne dau $b = b = 0$, adică

$$Y_3 f = p_2, Y_4 f = (x^1)^2 p_1 + 3x^1 p_2.$$

Dacă subgrupul G_2 este intranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, \ Y_2 f = x^1 p_1.$$

Cu aceste valori, ecuațiile de structură ne dau

$$Y_3 f = x^2 p_2, \; Y_4 f = (x^1)^2 p_1 + x^1 x^2 p_2 .$$

Deci :

Orice grup în două variabile izomorf cu grupul G_4^{V} poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele

$$[\mathrm{I}] \; Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = x^1 p_1 + p_2, \; Y_3 f = p_2, \; Y_4 f = (x^1)^2 \, p_1 + 3x^1 p_2,$$

$$[\mathrm{II}] \; Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = x^1 p_1, \; Y_3 f = x^2 p_2, \; Y_4 f = x^1 (x^1 p_1 + x^2 p_2).$$

Grupul (1) are unsprezece subgrupuri cu trei parametri și anume

$$G_3' \equiv [X_1, X_2, X_3 + X_6], \; G_3'' \equiv [X_1, X_2, (c+1)\, X_3 + (c-1)\, X_6],$$

$$G_3''' \equiv [X_1, X_2, X_5], G_3^{\mathrm{IV}} \equiv [X_1, X_2, X_3 + X_5 + X_6], G_3 \equiv [X_1, 2X_3 + X_6, X_7],$$

$$G_3^{\mathrm{VI}} \equiv [X_1, X_2 + X_3, X_4], G^{\mathrm{VII}} \equiv [X_1, X_3, X_6], \; G^{\mathrm{VIII}} \equiv [X_1, X_4, cX_3 + X_6],$$

$$G_3^{\mathrm{IX}} \equiv [X_1, X_2 - X_4, 2X_3 + X_6], G_3^{\mathrm{X}} \equiv [X_1 + X_8, X_2 + X_7, X_3 - X_6],$$

$$G_3^{\mathrm{XI}} \equiv [X_1, X_3, X_4].$$

Să considerăm în spațiul R^2 grupul diferit de operatorii

$$Y_h f = \xi_h^i (x) \, p_i, \qquad (i = 1, 2 \, ; \; h = 1, 2, 3). \tag{24}$$

Dacă acest grup este izomorf cu grupul G_3', ținînd seama de rezultatele de mai sus rezultă că :

Orice grup în două variabile izomorf cu grupul G_3' poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele

$$[\mathrm{I}] \; Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = p_2, \; Y_3 f = x^1 p_1 + x^2 p_2,$$

$$[\mathrm{II}] \; Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = \mathrm{e}^{2x^2} p_1, \; Y_3 f = x p_1 + p_2 .$$

Să presupunem acum că grupul (24) este izomorf cu grupul G_3''. Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = p_2 .$$

Cu aceste valori ecuațiile de structură ne dau, după o schimbare de parametri,

$$Y_3 f = (c + 1) \, x^1 p_1 + (c - 1) \, x^2 p_2 .$$

Dacă subgrupul G_2 este intranzitiv, obținem

$$Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = \mathrm{e}^{2x^2} p_1, \; Y_3 f = (c+1) \, x^1 p_1 + p_2 .$$

Deci :

Orice grup în două variabile izomorf cu grupul G_3'', poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele

$$[\mathrm{I}] \; Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = p_2, \; Y_3 f (c + 1) \, x^1 p_1 + (c-1) \, x^2 p_2,$$

$$[\mathrm{II}] \; Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = \mathrm{e}^{2x^2} p_1, \; Y_3 f = (c + 1) \, x^1 p_1 + p_2 .$$

Să considerăm acum cazul în care grupul (24) este izomorf cu grupul G_3'''.

Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, obținem

$$Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = p_2, \; Y_3 f = x^1 p_2, \tag{25}$$

iar dacă subgrupul G_2 este intranzitiv,

$$Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = -\frac{1}{x^2} p_1, \; Y_3 f = -\frac{x^1}{x^2} p_1 + p_2. \tag{25'}$$

Deci :

Orice grup în două variabile izomorf cu grupul G''', poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele (25) sau (25′).

În cazul grupului G^{IV} obținem :

Orice grup în două variabile izomorf cu grupul G_3^{IV}, poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele

$$[\mathrm{I}] \; Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = p_2, \; Y_3 f = x^1 p_1 + (x^1 + x^2) p_2,$$

$$[\mathrm{II}] \; Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = -\frac{1}{x^2} p_1, \; Y_3 f = \frac{x^1 (x^2 - 1)}{x^2} p_1 + p_2.$$

Să presupunem acum că grupul (24) este izomorf cu grupul G^{V}. Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, printr-o schimbare de variabile putem presupune că

$$Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = 2x^1 p_1 + p_2.$$

Cu aceste valori, ecuațiile de structură ne dau

$$Y_3 f = [(x^1)^2 + a\,\mathrm{e}^{4x^2}]\, p_1 + (x^1 + b\,\mathrm{e}^{2x^2})\, p_2, \quad (a, b = \text{const.})$$

Făcînd o schimbare de variabile de forma

$$\overline{x}^1 = x^1 + b\mathrm{e}^{2x^2}, \; \overline{x}^2 = x^2 + k,$$

putem presupune că $b = 0$ și $a = 0$ sau $a = \pm 1$. Deci

$$Y_3 f = [(x^1)^2 + \eta\,\mathrm{e}^{4x^2}]\, p_1 + x^1 p_2, \qquad (\eta = 0, \pm 1).$$

Dacă subgrupul G_2 este intranzitiv, printr-o schimbare de variabile putem lua

$$Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = 2x^1 p_1$$

iar celelalte ecuații de structură ne dau

$$Y_3 f = (x^1)^2 p_1,$$

deci grupul este intranzitiv.

Rezultă că :

Orice grup tranzitiv în două variabile, izomorf cu grupul G_3^{V} poate fi adus, prin schimbări de variabile și parametri, la forma

$$Y_1 f = p_1, Y_2 f = 2x^1 p_1 + p_2, \; Y_3 f = [(x^1)^2 + \eta\,\mathrm{e}^{4x^2}]\, p_1 + x^1 p_2, \quad (\eta = 0, \pm 1).$$

Să considerăm acum cazul în care grupul (24) este izomorf cu grupul G_3^{VI}.

Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = x^1 p_1 + p_2.$$

Cu aceste valori, ecuațiile $(Y_1 Y_3) = 0$, $(Y_2 Y_3) = Y_1 - Y_3$ ne dau

$$Y_3 f = x^2 p_1 + k e^{-x^2} p_2, \qquad (k = \text{const.}).$$

Printr-o schimbare de variabile de forma

$$\overline{x}^1 = x^1 + a e^{x^2}, \; \overline{x}^2 = x^2 + ak,$$

putem presupune că $k = 0$ sau $k = \pm 1$.

Dacă subgrupul G_2 este intranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = x^1 p_1.$$

În acest caz ecuațiile de structură ne dau $\xi_3^2 = 0$, deci grupul este intranzitiv.

Rezultă că :

Orice grup tranzitiv în două variabile, izomorf cu grupul G^{VI} poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la forma

$$Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = x^1 p_1 + p_2, \; Y_3 f = x^2 p_1 + \eta e^{-x^2} p_2, \qquad (\eta = 0, \pm 1).$$

Să presupunem acum că grupul (24) este izomorf cu grupul G^{VII}.

Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = x^1 p_1 + p_2$$

iar ecuațiile de structură ale grupului ne dau

$$Y_3 f = a e^{x^2} p_1 + b p_2.$$

Printr-o schimbare de variabile putem considera că $a = 1$, $b = 0$ sau $a = 0$, $b = 1$.

Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este intranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = x^1 p_1.$$

Ecuațiile de structură ne dau în acest caz $\xi_3^2 = 0$, deci grupul este intranzitiv.

Rezultă că :

Orice grup tranzitiv în două variabile, izomorf cu grupul G_3^{VII} poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele

$$[\mathrm{I}] \qquad Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = x^1 p_1 + p_2, \quad Y_3 f = e^{x^2} p_1,$$

$$[\mathrm{II}] \qquad Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = x^1 p_1 + p_2, \; Y_3 f = p_2.$$

Să considerăm acum cazul în care grupul (24) este izomorf cu grupul G^{VIII}.

Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, luăm

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2,$$

iar ecuațiile de structură ale grupului ne dau

$$Y_3 f = c x^1 p_1 + (c-1)\, x^2 p_2.$$

Dacă subgrupul G_2 este intranzitiv, obținem

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = \mathrm{e}^{2x^2} p_1, \quad Y_3 f = c x^1 p_1 + p_2.$$

Deci :

Orice grup în două variabile izomorf cu grupul G^{VIII} poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele

$$[\mathrm{I}] \quad Y_1 f = p_1,\ Y_2 f = p_2,\ Y_3 f = c x^1 p_1 + (c-1)\, x^2 p_2,$$

$$[\mathrm{II}] \quad Y_1 f = p_1,\ Y_2 f = \mathrm{e}^{2x^2} p_1,\ Y_3 f = c x^1 p_1 + p_2.$$

În cazul în care grupul (24) este izomorf cu grupul G^{IX}, obținem în mod analog :

Orice grup în două variabile izomorf cu grupul G^{IX} poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele

$$[\mathrm{I}] \quad Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = 2x^1 p_1 + x^2 p_2,$$

$$[\mathrm{II}] \quad Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = \mathrm{e}^{2x^2} p_1, \quad Y_3 f = 2x^1 p_1 + p_2.$$

Să presupunem acum că grupul (24) este izomorf cu grupul G^{x}. Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_3]$ este tranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + p_2$$

și ecuațiile de structură ale grupului ne dau

$$Y_2 f = \left[\frac{(x^1)^2}{2} + a\, \mathrm{e}^{2x^2}\right] p_1 + (x^1 + b\mathrm{e}^{x^2})\, p_2.$$

Printr-o schimbare de variabile de forma

$$\overline{x}^1 = x^1 + b\mathrm{e}^{x^2}, \quad \overline{x}^2 = x^2 + k,$$

putem presupune că $b = 0$, $a = \eta$, $(\eta = 0, \pm 1)$.

Dacă subgrupul G_2 este intranzitiv, luăm

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_3 f = x^1 p_1$$

și ecuațiile de structură ale grupului ne dau $\xi_2^2 = 0$, deci grupul este intranzitiv.

Rezultă :

Orice grup tranzitiv în două variabile izomorf cu grupul G_3^{X} poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = \left[\frac{(x^1)^2}{2} + \eta\, \mathrm{e}^{2x^2}\right] p_1 + x^1 p_2,$$

$$Y_3 f = x^1 p_1 + p_2, \quad (\eta = 0, \pm 1).$$

În sfîrșit, să considerăm că grupul (24) este izomorf cu grupul G^{XI}. Dacă subgrupul $G_2 \equiv [Y_1, Y_2]$ este tranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = x^1 p_1 + p_2$$

și ecuațiile de structură ne dau

$$Y_3 f = a\, p_1 + b \mathrm{e}^{-x^2} p_2$$

și printr-o schimbare de parametri putem presupune că $a = 0$, $b = 1$.

Dacă subgrupul G_2 este intranzitiv, luăm

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = x^1 p_1$$

și ecuațiile de structură ne dau $\xi_3^2 = 0$, deci grupul este intranzitiv.

Rezultă că :

Orice grup tranzitiv în două variabile izomorf cu grupul G_3^{XI} poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = x^1 p_1 + p_2, \quad Y_3 f = \mathrm{e}^{-x^2} p_2 .$$

Grupul (1) are unsprezece subgrupuri cu doi parametri și anume

$$G_2' \equiv [X_1, X_2], G_2'' \equiv [X_3, X_6], G_2''' \equiv [X_1, X_5], G_2^{\mathrm{IV}} \equiv [X_1, X_2 + X_4],$$
$$G_2^{\mathrm{V}} \equiv [X_1, X_3 + X_6], G_2^{\mathrm{VI}} \equiv [X_1, X_3 + cX_6], (c \neq 0,1)\; G_2^{\mathrm{VII}} \equiv [X_1, X_2 + X_3],$$
$$G_2^{\mathrm{VIII}} \equiv [X_1, X_3 + X_4 + X_6], G_2^{\mathrm{IX}} \equiv [X_1 - 2X_5, X_3 + 2X_6],$$
$$G_2^{\mathrm{X}} \equiv [X_1\, X_3], \quad G^{\mathrm{XI}} \equiv [X_1, X_4].$$

Ținînd seama de rezultatele de mai sus, rezultă că :

Orice grup tranzitiv în două variabile izomorf cu unul din grupurile $G_1', G_2'', G_2''', G_2^{\mathrm{IV}}$ sau G_2^{XI}, poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2$$

și orice grup tranzitiv în două variabile izomorf cu unul din grupurile $G_2^{\mathrm{V}}, \ldots, G_2^{\mathrm{X}}$, poate fi redus prin schimbări de variabile și parametri la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = x^1 p_1 + p_2 .$$

II

Fie R^3 un spațiu cu trei dimensiuni de coordonate x^1, x^2, x^3 și G_8 un grup tranzitiv izomorf cu grupul (1) definit de operatorii

$$Y_h f = \xi_h^i (x)\, p_i, \qquad (i = 1, 2, 3; \quad h = 1, \ldots, 8),$$

unde $p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Vom considera întîi cazul în care subgrupul $G_3 \equiv [Y_1, Y_2, Y_3]$ este tranzitiv.

În acest caz printr-o schimbare de variabile putem presupune că

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2 . \tag{26}$$

Cu aceste valori, ecuațiile $(Y_1 Y_3) = Y_1$, $(Y_2 Y_3) = 0$, ne dau

$$\xi_3^1 = x^1 + \alpha_1(x^3), \quad \xi_3^2 = \alpha_2(x^3), \quad \xi_3^3 = \alpha_3(x^3),$$

iar condiția ca subgrupul G_3 să fie tranzitiv devine $\alpha_3 \neq 0$.

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$\bar{x}^1 = x^1 + \lambda_1(x^3), \quad \bar{x}^2 = x^2 + \lambda_2(x^3), \quad \bar{x}^3 = \lambda_3(x^3),$$

care nu schimbă forma operatorilor $Y_1 f$, $Y_2 f$, obținem

$$Y_3 f = (\bar{x}^1 + \alpha_3 \lambda_1' - \lambda_1 + \alpha_1) p_{\bar{1}} + (\alpha_3 \lambda_1' + \alpha_2) p_{\bar{2}} + \alpha_3 \lambda_3' p_{\bar{3}}.$$

Ținînd seama că $\alpha_3 \neq 0$, rezultă că putem determina funcțiile $\lambda_i(x^3)$ cu condițiile

$$\alpha_3 \lambda_1' - \lambda_1 + \alpha_1 = 0, \quad \alpha_3 \lambda_3' + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 \lambda_3' = 1.$$

Deci, putem presupune că

$$Y_3 f = x^1 p_1 + p_3. \tag{27}$$

Înlocuind expresiile (26) și (27) în ecuațiile $(Y_1 Y_4) = 0$, $(Y_2 Y_4) = Y_1$, $(Y_3 Y_4) = -Y_4$, obținem

$$\xi_4^1 = x^2 + a_1, \quad \xi_4^2 = a_2 e^{-x^2}, \quad \xi_4^3 = a_3 e^{-x^3}.$$

Printr-o schimbare de parametri putem presupune $a_1 = 0$ și deci

$$Y_4 f = x^2 p_1 + e^{-x^3}(a_2 p_2 + a_3 p_3). \tag{28}$$

Ecuațiile $(Y_1 Y_5) = Y_2$, $(Y_2 Y_5) = 0$, $(Y_3 Y_5) = Y_5$ ne dau

$$Y_5 f = b_1 e^{2x^3} p_1 + (x^1 + b_2 e^{x^3} p_2 + b_3 e^{x^3} p_3. \tag{29}$$

Din ecuațiile $(Y_1 Y_6) = (Y_3 Y_6) = 0$, $(Y_2 Y_c) = Y_2$ deducem

$$\xi_6^1 = c_1 e^{x^3}, \quad \xi_6^2 = x^2 + c_2, \quad \xi_6^3 = c_3$$

și printr-o schimbare de parametri putem presupune că $c_2 = 0$, adică

$$Y_6 f = c_1 e^{x^3} p_1 + x^2 p_2 + c_3 p_3. \tag{30}$$

Înlocuind expresiile (28), (29), (30) în ecuațiile $(Y_4 Y_6) = -Y_4$, $(Y_4 Y_5) = Y_6 - Y_3$, $(Y_5 Y_6) = Y_5$, obținem

$$a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = 0, \quad c_3 = 1$$

și deci

$$Y_4 f = x^2 p_1, \quad Y_5 f = x^1 p_2, \quad Y_6 f = x^2 p_2 + p_3. \tag{31}$$

În sfîrșit, ținînd seama de (16), (17), (31) în celelalte ecuații de structură obținem

$$Y_7 f = x^1(x^1 p_1 + x^2 p_2 + 3p_3), \quad Y_8 f = x^2(x^1 p_1 + x^2 p_2 + 3p_3). \tag{32}$$

Deci, dacă subgrupul G_3 este tranzitiv, grupul G_8 este definit de operatorii (26), (27), (31), (32).

Să considerăm acum cazul în care subgrupul $G_3 \equiv [Y_1, Y_2, Y_3]$ este intranzitiv.

Printr-o schimbare de variabile putem presupune că

$$Y_1 f = p_1. \tag{33}$$

Cu această valoare ecuațiile $(Y_1 Y_2) = 0$ și $(Y_1 Y_3) = Y_1$ ne dau

$$Y_2 f = \alpha^i (x^2, x^3)\, p_i, \quad Y_3 f = [x^1 + \beta^1 (x^2, x^3)]\, p_1 + \\ + \beta^2 (x^2, x^3)\, p_2 + \beta^3 (x^2, x^3)\, p_3. \tag{34}$$

Condiția ca subgrupul G_3 să fie intranzitiv devine

$$\beta^k = \lambda (x^2, x^3)\, \alpha^k, \qquad (k = 2,3). \tag{35}$$

Ținînd seama de aceste valori în ecuația $(Y\ Y) = 0$, obținem

$$\alpha^1 + \alpha^k \frac{\partial \beta^1}{\partial x^k} - \lambda \alpha^k \frac{\partial \alpha^1}{\partial x^k} = 0, \quad \alpha^2 \alpha^k \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} = 0, \quad \alpha^3 \alpha^k \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} = 0. \tag{36}$$

Dacă $\alpha^2 = \alpha^3 = 0$, de aici rezultă că $\alpha^1 = 0$, ceea ce este imposibil. Deci $(\alpha^2)^2 + (\alpha^3)^2 \neq 0$ și putem presupune că $\alpha^2 \neq 0$. În acest caz, printr-o schimbare de variabile de forma

$$\bar{x}^1 = x^1 + \eta^1 (x^2, x^3)\ \bar{x}^k = \eta^k (x^2, x^3),$$

putem presupune că $\alpha^1 = \alpha^3 = 0$, $\alpha^2 = 1$, adică

$$Y_2 f = p_2. \tag{37}$$

Cu această valoare ecuațiile (36) ne dau

$$\lambda = \lambda (x^2), \quad \beta^1 = \beta^1 (x^2),$$

iar (21)

$$\beta^2 = \lambda, \quad \beta^3 = 0.$$

Deci

$$Y_3 f = [x^1 + \beta^1 (x^2)]\, p_1 + \beta^2 (x^2)\, p_2.$$

Ecuațiile $(Y_1\, Y_4) = 0$, $(Y_2 Y_4) = Y_1$, ne dau

$$\xi_4^1 = x^2 + \gamma^1 (x^3), \quad \xi_4^k = \gamma^k (x^3),$$

iar ecuația $(Y_3 Y_4) = -\, Y_4$ ne conduce la

$$\gamma^3 = 0, \quad \gamma^2 \left(\frac{\mathrm{d}\beta^2}{\mathrm{d}x^2} - 1 \right) = 0, \quad \beta^2 (x^2) = \gamma^2 (x^3) \frac{\mathrm{d}\beta^1}{\mathrm{d}x^2}. \tag{38}$$

Să presupunem întîi că $\gamma^2 \neq 0$. Atunci din (38) rezultă

$$\beta^2 = x^2 + a_1, \quad \gamma^2 = a_2, \quad \beta' = \frac{(x^2)^2}{2a_2} + \frac{a_1}{a_2} x^2 + a_3.$$

Înlocuind aceste valori în celelalte ecuații de structură, obținem $a_2 = 0$, ceea ce este exclus.

Deci avem $\gamma^2 = 0$. Cu această valoare din a treia ecuație (38) rezultă $\beta^2 = 0$, adică

$$Y_3 f = [x^1 + \beta (x^2)]\, p_1, \quad Y_4 f = [x^2 + \gamma (x^3)]\, p_1. \tag{39}$$

Ecuațiile $(Y_1 Y_5) = Y_2$ și $(Y_2 Y_5) = 0$ ne dau

$$\xi_5^1 = \lambda^1 (x^3), \quad \xi_5^2 = x^1 + \lambda^2 (x^3), \quad \xi_5^3 = \lambda^3 (x^3),$$

iar ecuația $(Y_3 Y_5) = 0$ ne dă

$$\lambda^1 = \lambda^3 = 0, \quad \beta = a, \quad \lambda^2 = a$$

și printr-o schimbare de parametri putem lua $a = 0$, adică

$$Y_3 f = x^1 p_1, \quad Y_5 f = x^1 p_2. \tag{40}$$

Cu aceste valori, ecuațiile $(Y_1 Y_6) = (Y_3 Y_6) = 0$, $(Y_2 Y_6) = Y_2$, $(Y_4 Y_6) = - Y_4$, $(Y_5 Y_6) = Y_5$, $(Y_4 Y_5) = Y_6 - Y_3$ ne dau

$$Y_6 f = [x^2 + \gamma (x^3)]\, p_2. \tag{41}$$

Ținînd seama de (33), (37), (39), (40) și (41) în celelalte ecuații de structură, rezultă

$$Y_7 f = x^1 [x^1 p_1 + (x^2 + \gamma)]\, p_2, \quad Y_8 f = (x^2 + \gamma) [x^1 p_1 + (x^2 + \gamma)\, p_2],$$

deci grupul este intranzitiv.

Rezultă teorema :

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul (1) poate fi adus, prin schimbări de variabile și parametri, la forma

$$Y_1 f = p_1,\ Y_2 f = p_2,\ Y_3 f = x^1 p_1 + p_3,\ Y_4 f = x^2 p_1,\ Y_5 f = x^1 p_2,$$
$$Y_6 f = x^2 p_2 + p_3, \quad Y_7 f = x^1 (x^1 p_1 + x^2 p_2 + 3p_3),$$
$$Y_8 f = x^2 (x^1 p_1 + x^2 p_2 + 3p_3).$$

Să considerăm acum în spațiul R^3 grupul definit de operatorii

$$Y_k f = \xi_h^1 (x)\, p_i \qquad (i = 1, 2, 3;\ h = 1, \ldots, 6). \tag{42}$$

Dacă acest grup este izomorf cu grupul G'_6, ținînd seama de rezultatele de mai sus , rezultă :

Orice grup tranzitiv în trei variabile, izomorf cu gupul G'_6, poate fi adus, prin schimbări de variabile și parametri, la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + p_3, \quad Y_4 f = x^2 p_1,$$
$$Y_5 f = x^1 p_2, \quad Y_6 f = x^2 p_2 + p_3.$$

Să presupunem acum că grupul (42) este izomorf cu grupul G''_6. Dacă subgrupul $G_3 \equiv [Y_1, Y_2, Y_3]$ este tranzitiv putem lua

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + p_3.$$

Cu aceste valori, ecuațiile $(Y_1 Y_4) = Y_2$, $(Y_2 Y_4) = 0$, $(Y_3 Y_4) = Y_4$, ne dau

$$Y_4 f = a_1 e^{2x^3} p_1 + (x^1 + a_2 e^{x^3})\, p_2 + a_3 e^{x^3} p_3.$$

Printr-o schimbare de variabile putem presupune că $a_2 = 0$, deci

$$Y_4 f = a_1 \mathrm{e}^{2x^3} p_1 + x^1 p_2 + a_3 \mathrm{e}^{x^3} p_3 .$$

Ecuațiile $(Y_1 Y_5) = 0$, $(Y_2 Y_5) = Y_2$, $(Y_3 Y_5) = 0$, $(Y_4 Y_5) = Y_4$, ne dau

$$Y_5 f = x^2 p_2 + b p_3 ,$$

unde

$$a_1 (2b + 1) = 0, \quad a_3 (b + 1) = 0. \tag{43}$$

Cu aceste valori, celelalte ecuații de structură ne dau

$$Y_6 f = (x^1)^2 p_1 + (x^1 x^2 + c_1 \mathrm{e}^{x^3}) p_2 + [(2 + b) x^1 + (a_3 x^2 + x_2) \mathrm{e}^{x^3}] p_3 .$$

și

$$a_1 = 0, \quad a_3 c_1 = 0, \quad c_1 (b - 1) = 0, \quad b c_2 = 0. \tag{43'}$$

Sistemul (43), (43′) are următoarele soluții :

$$a_3 \neq 0, \quad b = -1, \quad c_1 = c_2 = 0 ; \tag{44}$$

$$a_3 = 0, \quad c_1 \neq 0, \quad b = 1, \quad c_2 = 0 ; \tag{44'}$$

$$a_3 = 0, \quad c_1 = 0, \quad b = 0 ; \tag{44''}$$

$$a_3 = 0 \quad c_1 = 0, \quad b \neq 0, \quad c_2 = 0. \tag{44'''}$$

Printr-o schimbare de variabile putem presupune în cazul (44) că $a = \pm 1$, în cazul (44′) $c = \pm 1$ și în cazul (44″) $c_2 = \eta$, $(\eta = 0, \pm 1)$. Deci dacă subgrupul G_3 este tranzitv, avem grupurile

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + p_3, \quad Y_4 f = x^1 p_2 \pm \mathrm{e}^{x^3} p_3, \\ Y_5 f = x^2 p_2 - p_3, \quad Y_6 f = (x^1)^2 p_1 + x^1 x^2 p_2 + (x^1 \pm x^2 \mathrm{e}^{x^3}) p_3 ; \end{array} \right. \tag{45}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + p_3, \quad Y_4 f = x^1 p_2, \\ Y_5 f = x^2 p_2 + p_3, \quad Y_6 f = (x^1)^2 p_1 + (x^1 x^2 \pm \mathrm{e}^{x^3}) p_2 + 3x^1 p_3 ; \end{array} \right. \tag{45'}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + p_3, \quad Y_4 f = x^1 p_2, \\ Y_5 f = x^2 p_2, \quad Y_6 f = (x^1)^2 p_1 + x^1 x^2 p_2 + (2x^1 + \eta \mathrm{e}^{x^3}) p_3 ; \end{array} \right. \tag{45''}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + p_3, \quad Y_4 f = x^1 p_2, \\ Y_5 f = x^2 p_2 + k p_3, \quad Y_6 f = (x^1)^2 p_1 + x^1 x^2 p_2 + (2+k) x^1 p_3, \ (k \neq 0). \end{array} \right. \tag{45'''}$$

Dacă subgrupul G_3 este intranzitiv, putem presupune că

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = [x^1 + \beta_1(x^2)] p_1 + \beta_2(x^2) p_2 .$$

Înlocuind aceste valori cu ecuațiile $(Y_1 Y_4) = Y_2$, $(Y_2 Y_4) = 0$, $(Y_3 Y_4) = Y_4$, obținem

$$Y_4 f = (x^1 + k_1) p_2$$

și

$$\beta_1 = k_1, \quad \beta_2 = k_2 .$$

Printr-o schimbare de parametri putem considera că $k_1 = k_2 = 0$, adică

$$Y_3 f = x^1 p_1, \quad Y_4 f = x^1 p_2.$$

Cu aceste valori ecuaţiile de structură ne dau

$$Y_5 f = [x^2 + \alpha_1(x^3)]\, p_2 + \alpha_2(x^3)\, p_3, \quad Y_6 f = (x^1)^2 p_1 + x^1 [x^2 + \alpha_1(x^3)]\, p_2 + x^1 \alpha_2(x^3)\, p_3.$$

Ţinînd seama că grupul (42) este tranzitiv, rezultă $\alpha_2 \neq 0$ şi printr-o schimbare de variabile putem presupune că $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$.

Rezultă că:

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorfe cu grupul G_6'' poate fi redus, prin schimbări de variabile şi parametri, la una din formele (45), (45′), (45″), (45‴) sau

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_1, \quad Y_4 f = x^1 p_2, \quad Y_5 f = x^2 p_2 + p_3,$$
$$Y_6 f = (x^1)^2 p_1 + x^1 x^2 p_2 + x^1 p_3.$$

Să considerăm acum în spaţiul R^3 grupul definit de operatorii

$$(46) \qquad Y_h f = \xi_h^i(x)\, p_i, \qquad (i = 1, 2, 3;\ h = 1, \ldots, 5).$$

Ţinînd seama de rezultatele de mai sus deducem:

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G_5' poate fi redus, prin schimbări de variabile şi parametri, la una din formele

$$[\mathrm{I}] \quad Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + p_3, \quad Y_4 f = x^1 p_2,$$
$$Y_5 f = x^2 p_2 + k p_3;$$

$$[\mathrm{II}] \quad Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + p_3,$$
$$Y_4 f = x^1 p_2 + e^{x^3} p_3, \quad Y_5 f = x^2 p_2 - p_3;$$

$$[\mathrm{III}] \quad Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + p_3,$$
$$Y_4 f = \pm\, e^{2x^3} p_1 + x^1 p_2, \quad Y_5 f = x^2 p_2 - \frac{1}{2} p_3;$$

$$[\mathrm{IV}] \quad Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + p_3,$$
$$Y_4 f = x^1 p_2, \quad Y_5 f = x^2 p_2 + p_3.$$

Să presupunem acum că grupul (46) este izomorf cu grupul G_5''. Dacă subgrupul $G_3 \equiv [Y_1, Y_2, Y_3]$ este tranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_2 + p_3.$$

Cu aceste valori, ecuaţiile $(Y_1 Y_4) = 2 Y_1$, $(Y_2 Y_4) = Y_2$, $(Y_3 Y_4) = -Y_3$ ne dau

$$Y_4 f = (2x^1 + a_1)\, p_1 + (x^2 + a_1 x^3 + a_2)\, p_2 + (-x^3 + a_3)\, p_3.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x}^1 = x^1 + \frac{a_1}{2}, \quad \bar{x}^2 = x^2 + \frac{a_1}{2} x^3 + a_2 - \frac{a_1 a_3}{2}, \quad \bar{x}^3 = x^3 - a_3,$$

putem presupune că $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, adică

$$Y_4 f = 2x^1 p_1 + x^2 p_2 - x^3 p_3 .$$

Înlocuind aceste valori în celalte ecuaţii de structură obţinem

$$Y_5 f = \left[(x^1)^2 - \frac{3k}{(x^3)^4} \right] p_1 + \left[x^1 x^2 + \frac{k}{(x^3)^3} \right] p_2 + (x^2 - x^1 x^3) p_3 .$$

Dacă subgrupul G_3 este intranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = \beta_1 (x^3) p_1 + [x^1 + \beta_2 (x^3)] p_2 .$$

Înlocuind aceste valori în celalte ecuaţii de structură deducem $\xi^3_4 = \xi^3_5 = 0$, deci grupul (46) este intranzitiv.

Rezultă că :

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G_5'' poate fi redus, prin schimbări de variabile şi parametri, la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_2 + p_3, \quad Y_4 f = 2x^1 p_1 + x^2 p_2 - x^3 p_3,$$

$$Y_5 f = \left[(x^1)^2 - \frac{3k}{(x^3)^4} \right] p_1 + \left[x^1 x^2 + \frac{k}{(x^3)^3} \right] p_2 + (x^2 - x^1 x^3) p_3 .$$

Să presupunem acum că grupul (46) este izomorf cu grupul G_5'''. Dacă subgrupul $G_3 \equiv [Y_1, Y_2, Y_4]$ este tranzitiv, putem lua

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_4 f = x^1 p_2 + p_3 .$$

Înlocuind aceste valori în celelalte ecuaţii de structură, obţinem, după o schimbare de variabile şi parametri,

$$Y_3 f = x^2 p_1 - (x^3)^2 p_3, \quad Y_5 f = x^1 p_1 - x^2 p_2 - 2x^3 p_3 .$$

Dacă subgrupul G_3 este intranzitiv, luăm

$$Y_1 f = p_1, \; Y_2 f = p_2, \; Y_4 f = \beta_1 (x^3) p_1 + [x^1 + \beta_2 (x^3)] p_2$$

şi ecuaţiile de structură ne dau $\xi^3_3 = \xi^3_5 = 0$, deci în acest caz grupul (46) este intranzitiv.

Rezultă că :

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G_5''' poate fi adus, prin schimbări de variabile şi parametri, la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^2 p_1 - (x^3)^2 p_3, \quad Y_4 f = x^1 p_2 + p_3,$$
$$Y_5 f = x^1 p_1 - x^2 p_2 - 2x^3 p_3 .$$

Să considerăm acum în spaţiul R^3 grupul definit de operatorii

$$Y_h f = \xi^i_h (x) p_i, \qquad (i = 1, 2, 3 ; \; h = 1, 2, 3, 4). \tag{47}$$

Ţinînd seama de rezultatele de mai sus deducem :

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G'_4 poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele

$$[\mathrm{I}] \quad Y_1f = p_1, \quad Y_2f = p_2, \quad Y_3f = x^1 p_1 + p_3,$$

$$Y_4f = x^2 p_1 + \eta e^{-x^3} p_3, \quad (\eta = 0, \pm 1);$$

$$[\mathrm{II}] \quad Y_1f = p_1, \quad Y_2f = p_2, \quad Y_3f = x^1 p_1 + p_3,$$

$$Y_4f = x^2 p_1 + e^{-x^3}(+ p_2 + k p_3).$$

Să presupunem acum că grupul (47) este izomorf cu grupul G''_4. Dacă subgrupul $G_3 \equiv [Y_1, Y_2, Y_3]$ este tranzitiv, putem lua

$$Y_1f = p_1, \quad Y_2f = p_2, \quad Y_3f = x^1 p_2 + p_3.$$

Cu aceste valori, ecuațiile de structură ne dau

$$Y_4f = (x^1 + a_1) p_1 + (cx^2 + a_1 x^3 + a_2) p_2 + [(c-1) x^3 + a_3] p_3.$$

Printr-o schimbare de variabile și parametri putem lua $a_1 = a_2 = 0$ iar dacă $c \neq 1$, putem lua $a_3 = 0$.

Dacă subgrupul G este intranzitiv, putem presupune că

$$Y_1f = p_1, \quad Y_2f = p_2, \quad Y_3f = \beta_1(x^3) p_1 + [x^1 + \beta_2(x^3)] p_2$$

și ecuațiile de structură ne dau $\xi_4^3 = 0$, deci un grup intranzitiv.

Rezultă că:

Orice grup tranzitiv în trei variabile, izomorf cu grupul G''_4 pate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la forma

$$Y_1f = p_1, \quad Y_2f = p_2, \quad Y_3f = x^1 p_2 + p_3,$$

$$Y_4f = x^1 p_1 + cx^2 p_2 + (c-1) x^3 p_3,$$

dacă $c \neq 1$ și la forma

$$Y_1f = p_1, Y_2f = p_2, \quad Y_3f = x^1 p_2 + p_3, \quad Y_4 = x^1 p_1 + x^2 p_2 + k p_3,$$

dacă $c = 1$.

Să considerăm acum cazul în care grupul (47) este izomorf cu grupul G'''_4.

Dacă subgrupul $G_3 \equiv [Y_1, Y_2, Y_3]$ este tranzitiv, luăm

$$Y_1f = p_1, \quad Y_2f = p_2, \quad Y_3f = x^1 p_1 + p_3$$

iar ecuațiile de structură ne dau

$$Y_4f = a_1 e^{x^3} p_1 + x^2 p_2 + a_2 p_3.$$

Făcînd o schimbare de variabile putem lua $a_1 = 0$, dacă $a_2 \neq 0$ și $a_1 = \pm 1$ dacă $a_2 = 0$.

Dacă subgrupul G este intranzitiv, luăm

$$Y_1f = p_1, \quad Y_2f = p_2, \quad Y_3f = x^1 p_1 + \alpha(x^3) p_2$$

iar ecuațiile de structură ne dau, după o schimbare de variabile,

$$\alpha(x^3) = \eta e^{x^3}, \quad Y_4f = x^2 p_2 + p_3, \quad (\eta = 0, \pm 1).$$

Rezultă că:

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G''' poate fi redus, prin schimbrări de variabile și parametri, la una din formele

$$[\mathrm{I}]\quad Y_1f = p_1,\quad Y_2f = p_2,\quad Y_3f = x^1p_1 + p_3,$$
$$Y_4f = x^2p_2 + kp_3;$$
$$[\mathrm{II}]\quad Y_1f = p_1,\quad Y_2f = p_2,\quad Y_3f = x^1p_1 + p_3,$$
$$Y_4f = \pm e^{x^3}p_1 + x^2p_2;$$
$$[\mathrm{III}]\quad Y_1f = p_1,\quad Y_2f = p_2,\quad Y_3f = x^1p_1 + \eta e^{x^3}p_3,$$
$$Y_4f = x^2p_2 + p_3,\quad (\eta = 0, \pm 1)$$

Să presupunem acum că grupul (47) este izomorf cu grupul G_4^{IV}. Dacă subgrupul $G_3 \equiv [Y_1, Y_2, Y_4]$ este tranzitiv, putem lua

$$Y_1f = p_1,\quad Y_2f = x^1p_1 + p_2,\quad Y_4f = p_3.$$

Cu aceste valori, ecuațiile de structură ne dau

$$Y_3f = k_1e^{x^3}p_1 + e^{x^3-x^2}(k_2p_2 + k_3p_3).$$

Făcînd o schimbare de variabile putem considera că, dacă $k_2 \neq 0$, avem $k_1 = 0, k_2 = 1$, dacă $k_1k_2 = 0$, avem $k_3 = 1$, iar dacă $k_2 = 0$, $k_1 \neq 0$, avem $k_1 = 1$, $k_3 = \eta$, $(\eta = 0, + 1)$.

Dacă subgrupul G_3 este intranzitiv, luăm

$$Y_1f = p_1,\quad Y_2f = x^1p_1 + \alpha(x^3)p_2,\quad Y_4f = p_2.$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile de structură obținem

$$\alpha == -1,\quad Y_3f = e^{x^2}[\beta_2(x^3)p_2 + \beta_3(x^3)p_3],\quad (\beta_3 \neq 0).$$

Printr-o schimbare de variabile putem considera că $\beta_2=0$, $\beta_3 = 1$.

Rezultă că:

Orice grup tranzitiv în trei variabile, izomorf cu grupul G_4^{IV} poate fi redus prin schimbări de variabile, și parametri la una din formele

$$[\mathrm{I}]\quad Y_1f = p_1,\quad Y_2f = x^1p_1 + p_2,\quad Y_3f = e^{x^3-x^2}(p_2 + kp_3),$$
$$Y_4f = p_3;$$
$$[\mathrm{II}]\quad Y_1f = p_1,\quad Y_2f = x^1p_1 + p_2,\quad Y_3f = e^{x^3-x^2}p_3,\quad Y_4f = p_3;$$
$$[\mathrm{III}]\quad Y_1f = p_1,\quad Y_2f = x^1p_1 + p_2,\quad Y_3f = e^{x^3}p_1 + \eta e^{x^3-x^2}p_3,$$
$$Y_4f = p_3,\quad (\eta = 0, \pm 1);$$
$$[\mathrm{IV}]\quad Y_1f = p_1,\quad Y_2f = x^1p_1 - p_2,\quad Y_3f = e^{x^2}p_3,\quad Y_4f = p_2.$$

Să considerăm acum cazul în care grupul (47) este izomorf cu grupul G_4^{V}.

Dacă subgrupul $G_3 \equiv [Y_1, Y_2, Y_3]$ este tranzitiv, luăm

$$Y_1f = p_1,\quad Y_2f = x^1p_1 + p_2,\quad Y_3f = p_3.$$

Ecuațiile de structură ne dau în acest caz

$$Y_4 f = [(x^1)^2 + a_1 e^{2x^2}]\, p_1 + (2x^1 + a_2 e^{x^2})\, p_2 + (x^1 + a_3 e^{x^3})\, p_3 .$$

Printr-o schimbare de variabile putem presupune că sîntem în unul din cazurile

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 ; \quad a_1 = a_3 = 0, \quad a_2 = \pm 1 ; \quad a_3 = 0, \quad a_1 = \pm 1.$$

Dacă subgrupul G_3 este intranzitiv, luăm

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = x^1 p_1 + \alpha (x^3)\, p_2, \quad Y_3 f = p_2 .$$

Cu aceste valori, ecuațiile de structură ne dau $\xi_4^3 = 0$, deci grupul (47) este intranzitiv.

Rezultă că:

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G_4^{V} poate fi redus, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele

$$[\mathrm{I}] \quad Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = x^1 p_1 + p_2, \quad Y_3 f = p_3,$$

$$Y_4 f = (x^1)^2 p_1 + (2x^1 + \eta e^{x^2})\, p_2 + x^1 p_3 ;$$

$$[\mathrm{II}] \quad Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = x^1 p_1 + p_2, \quad Y_3 f = p_3,$$

$$Y_4 f = [(x^1)^2 + e^{2x^2}]\, p_1 + (2x^1 + k e^{x^2})\, p_2 + x^1 p_3 .$$

Să considerăm acum grupul definit de operatorii

$$Y_h f = \xi_h^i (x)\, p_i \qquad (i, h = 1,\ 2,\ 3). \tag{48}$$

Ținînd seama de rezultatele de mai sus rezultă

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G_3', poate fi adus la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + x^2 p_2 + p_3 .$$

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G_3'' poate fi adus la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = (c + 1)\, x^1 p_1 + (c - 1)\, x^2 p_2 + p_3 .$$

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G_3''' poate fi adus la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_2 + p_3 .$$

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G_3^{IV} poate fi adus la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + (x^1 + x^2)\, p_2 + p_3 .$$

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G_3^{V} poate fi adus la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = 2x^1 p_1 + p_2, \quad Y_3 f = (x^1)^2 p_1 + x^1 p_2 + e^{2x^2} p_3 .$$

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G_3^{VI} poate fi adus la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = x^1 p_1 + p_2, \quad Y_3 f = x^2 p_1 + e^{-x^2} p_3 .$$

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G_3^{VII} poate fi adus la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = x^1 p_1 + p_2, \quad Y_3 f = p_3.$$

Orice grup tranzitiv în trei variabile, izomorf cu grupul G_3^{VIII} poate fi adus la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = c x^1 p_1 + (c-1) x^2 p_2 + p_3.$$

Orice grup tranzitiv în trei variabile, izomorf cu grupul G_3^{IX} poate fi adus la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = p_2, \quad Y_3 f = 2x^1 p_1 + x^2 p_2 + p_3.$$

Orice grup tranzitiv în trei variabile, izomorf cu grupul G_3^{X} poate fi adus la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = \frac{(x^1)^2}{2} p_1 + e^{x^3} p_2 + x^1 p_3, \quad Y_3 f = x^1 p_1 + p_3.$$

Orice grup tranzitiv în trei variabile izomorf cu grupul G_3^{XI}, poate fi adus la forma

$$Y_1 f = p_1, \quad Y_2 f = x^1 p_1 + p_2, \quad Y_3 f = e^{-x^2} p_3.$$

Primită la redacție la 3 martie 1967

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. Kowalewski, G., *Einführung in die Theorie der Kontinuierlichen Gruppen.* Akad. Verlag, Leipzig, 1931.

PROBLEME DE GEOMETRIE INTEGRALĂ ALE REȚELELOR DINTR-UN SPAȚIU EUCLIDIAN E_3

DE

RODICA TRANDAFIR

În această lucrare se stabileşte o formulă integrală referitoare la reţelele dintr-un spaţiu euclidian E_3, cu ajutorul căreia se regăsesc pe o cale simplă unele teoreme ale lui S. Oshio [3] şi se obţin interpretări sugestive ale acestor teoreme. Se aplică rezultatele astfel obţinute la unele reţele uzuale din spaţiul E_3.

L.A. Santaló a făcut un studiu sistematic al problemelor de geometrie integrală referitoare la reţelele dintr-un plan euclidian obţinînd o serie de rezultate generale [6], [8] pe care le aplică la reţele construite cu ajutorul unor figuri regulate.

Anumite rezultate ale lui Santaló au fost extinse la reţelele din spaţiul E_3 și din spaţiul E_n de către S. Oshio [3], [4].

În această lucrare vom demonstra o formulă integrală generală pentru reţelele din spaţiul E_3 din care vom deduce rezultatele lui Oshio şi vom obţine o serie de rezultate noi pe care le vom aplica la reţele construite cu ajutorul anumitor figuri regulate spaţiale.

DEFINIȚIE. *Se numește rețea de domenii fundamentale în spațiul* E_3, *un șir de domenii* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *care satisfac următoarele condiții* :

1) *Orice punct* P *din spațiu aparține unui singur domeniu* α_i.

2) *Orice domeniu* α_i *poate fi suprapus peste domeniul* α_0 *printr-o mișcare* T_i *a spațiului care suprapune fiecare domeniu* α_h *peste un domeniu* α_k, *adică printr-o mișcare care lasă invariantă rețeaua dată.*

Numim domeniul α_0 *celulă fundamentală* a reţelei, iar domeniul oarecare α_i, *celulă* a reţelei.

Să considerăm acum o figură fixă K_0, care poate fi un domeniu, o suprafaţă, o curbă, un sistem de suprafeţe, un sistem de curbe, un sistem de suprafeţe şi curbe sau un sistem de puncte, (punctele pot fi considerate după împrejurare sfere de rază nulă). Presupunem că figura K_0 este conţinută în celula fundamentală α_0.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 7, P. 1105–1111, BUCUREȘTI, 1967

Fie integrala :

$$I = \int\limits_{K \cap K_0 \neq \emptyset} f(K_0 \cap K) \mathrm{d}K, \tag{1}$$

unde f este o funcţie integrabilă de figura $K_0 \cap K$, nulă în cazul în care $K_0 \cap K = \emptyset$, iar $\mathrm{d}K$ este măsura elementară cinematică în spaţiul E_3, invariantă la grupul mişcărilor din acest spaţiu, adică [2]1)

$$\mathrm{d}K = |\sin \theta| [\mathrm{d}P \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\psi], \tag{2}$$

P fiind un punct legat rigid de figura K, $(\cos\varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$ fiind cosinusurile directoare ale unei direcţii, iar ψ un unghi de rotaţie în jurul acestei direcţii.

Putem scrie :

$$I = \sum_i \int_{\alpha_i} f(K_0 \cap K) \, \mathrm{d}K .$$

Vom aplica acum spaţiului E_3 mişcarea T_i care suprapune celula α_i peste celula fundamentală α_0, adică $T_i \alpha_i = \alpha_0$. Această mişcare transformă figura K în figura congruentă $K^* = T_i K$.

Ţinînd seamă de invarianţa măsurii elementare cinematice la o mişcare a spaţiului, avem $\mathrm{d}K^* = \mathrm{d}K$ şi deci :

$$I = \sum_i \int_{\alpha_0} f(K_0 \cap T_i^{-1} K) \, \mathrm{d}K.$$

Avînd în vedere că figura $K_0 \cap T_i^{-1} K$ este congruentă cu figura $T_i K_0 \cap K$, rezultă :

$$I = \int_{\alpha_0} \left[\sum_i f(T_i K_0 \cap K) \right] \mathrm{d}K$$

De aici şi din (1) deducem formula :

$$\int\limits_{K_0 \cap K \neq \emptyset} f(K_0 \cap K) \mathrm{d}K = \int_{\alpha_0} \left[\sum_i f(T_i K_0 \cap K) \right] \mathrm{d}K. \tag{3}$$

Să presupunem că figura K_0 este un domeniu D_0 de volum V_0 şi a cărui frontieră ∂K_0 are aria S_0, iar figura K este un domeniu D de volum V şi a cărui frontieră ∂K are aria S. Notînd cu $\chi(D_0)$ caracteristica Euler-Poincaré a domeniului D_0 şi

$$\overline{H}_0 = \int_{\partial K_0} H_0 \, \mathrm{d}\sigma_0, \tag{4}$$

---

1) Pag. 60.

unde H_0 este curbura medie a suprafeței ∂K_0 iar $d\sigma_0$ este elementul de arie pe această suprafață, scriem relația cinematică principală a lui Blaschke [1][2])

$$(5)\qquad \int\limits_{D\cap D_0\neq\emptyset}\chi(D_0\cap D)\mathrm{d}K = 8\pi^2\,[\,V_0\,\chi(D) + V\chi(D_0)] + 2\pi\,(S_0\overline{H}+S\overline{H}_0).$$

Dacă luăm acum în (3) $f(D_0\cap D) = \chi(D_0\cap D)$ și ținem seama de (5), obținem :

$$(6)\qquad \int_{\alpha_0}\chi_{01}\,\mathrm{d}K = 8\pi^2[\,V_0\,\chi(D) + V\,\chi(D_0)] + 2\pi\,(S_0\overline{H} + S\overline{H}_0)\,,$$

unde χ_{01} este caracteristica lui Euler-Poincaré a intersecției lui D cu figurile $T_i D_0$, adică cu rețeaua generată de reproducerea lui D_0 în fiecare celulă α_i, integrala fiind extinsă la $P\in\alpha_0$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\psi\leqslant 2\pi$.

Pe de altă parte avem :

$$(7)\qquad \int_{\alpha_0}\mathrm{d}K = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\,\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\psi\int_{P\in\alpha_0}\mathrm{d}P = 8\pi^2 v_0,$$

unde v_0 este volumul celulei fundamentale α_0.

Din formulele (6) și (7) deducem că valoarea medie a lui χ_{01} este :

$$M\,[\,\chi_{01}] = \frac{\int_{\alpha_0}\chi_{01}\,\mathrm{d}K}{\int_{\alpha_0}\mathrm{d}K} = \frac{V_0\,\chi(D) + V\,\chi(D_0)}{v_0} + \frac{S_0\overline{H} + S\overline{H}_0}{4\pi v_0}.$$

Să considerăm acum drept figură K_0, o curbă (Γ_0) de lungime L_0 și drept figură K, o suprafață de arie S. În acest caz, notînd cu n numărul de puncte de intersecție dintre curba (Γ_0) și suprafața K, avem formula lui Santoló [5] :[3])

$$\int\limits_{K\cap\Gamma_0\neq\emptyset} n\mathrm{d}K = 4\,\pi^2\,SL_0\,.$$

Ținînd seama de această relație în (3), obținem formula lui Oshio[3][4]) :

$$\int_{\alpha_0} n\mathrm{d}K = 4\pi^2\,SL_0\,,$$

unde n reprezintă aici numărul de puncte de intersecție dintre suprafața K și rețeaua generată de reproducerea lui (Γ_0) în fiecare celulă α_i.

De aici și din (7) deducem :

$$(8)\qquad M\,[n] = \frac{SL_0}{2v_0}\,.$$

---

[2]) Pag. 547.

[3]) Pag. 39.

[4]) Pag. 39.

Din această formulă rezultă că *este totdeauna posibil să găsim o poziție a suprafeței* K, *care să aibă cel puțin* $\left[\frac{SL_0}{2v_0}\right]$ *puncte comune cu curba* (Γ_0).

Să presupunem că suprafața K poate fi intersectată de rețeaua generată de (Γ_0) în n_1 sau în n_2 puncte exclusiv. Notînd cu p_1 și p_2 probabilitățile ca suprafața K să fie intersectată în n_1 respectiv n_2 puncte, formula (8) se scrie :

$$n_1 p_1 + n_2 p_2 = \frac{SL_0}{2v_0}.$$

Ținînd seama că $p_1 + p_2 = 1$, de aici deducem :

$$p_1 = \frac{SL_0 - 2n_2 v_0}{2v_0\,(n_1 - n_2)}, \quad p_2 = \frac{2n_1 v_0 - SL_0}{2v_0\,(n_1 - n_2)}.$$

Vom lua acum o suprafață fixă K de arie S_0 și o suprafață mobilă de arie S și fie $f(K_0 \cap K) = s$ (lungimea curbei de intersecție a celor două suprafețe).

Ținînd seama în (3) de formula lui Santaló [7][5]) :

$$\int\limits_{K \cap K_0 \neq \emptyset} s\,\mathrm{d}K = 4\pi^3 S_0 S,$$

obținem formula găsită de Oshio pe altă cale [3] [6]) :

$$\int\limits_{\alpha_0} L_{01}\,\mathrm{d}K = 4\pi^3 S_0 S,$$

unde L_{01} este lungimea curbei de intersecție a suprafeței K cu suprafețele $T_i K_0$, adică cu rețeaua generată de reproducerea lui K_0 în fiecare celulă α_i.

De aici și din (7) rezultă valoarea medie :

$$M\,[L_{01}] = \frac{\pi S_0 S}{2v_0}.$$

Această formulă ne spune că, *este totdeauna posibil să găsim o poziție a suprafeței* K, *a cărei intersecție cu suprafața* K_0 *să aibă cel puțin lungimea* $\frac{\pi S_0 S}{2v_0}$.

Să presupunem că domeniile D_0 și D din formula (5) a lui Blaschke sînt simplu conexe. În acest caz avem $\chi(D) = \chi(D_0) = 1$. Notînd cu ν numărul de domenii simplu conexe din care este format domeniul $D_0 \cap D$, avem $\chi\,(D_0 \cap D) = \nu$ și formula (5) ne dă :

$$\int\limits_{D \cap D_0 \neq \emptyset} \nu\,\mathrm{d}K = 8\pi^2\,(V_0 + V) + 2\pi\,(S_0 \overline{H} + S\overline{H}_0),$$

---

[5]) Pag. 352.

[6]) Pag. 42.

unde $K = D \cup \partial D$.

Ținînd seama de această relație în (3), obținem :

$$\int_{\alpha_0} \nu \, \mathrm{d}K = 8\,\pi^2 (V_0 + V) + 2\pi\,(S\overline{H} + S\overline{H}_0),$$

unde ν este numărul de domenii simplu conexe din care este formată intersecția dintre domeniul D și rețeaua generată de reproducerea lui D_0 în fiecare celulă α_i.

De aici și din (7) rezultă valoarea medie :

$$M[\nu] = \frac{V_0 + V}{v_0} + \frac{S_0\overline{H} + S\overline{H}_0}{4\pi v_0}. \tag{9}$$

Deci, *este totdeauna posibil să găsim o poziție a domeniului D a cărui intersecție cu domeniul D_0 să fie formată din cel puțin* $\left[\frac{V_0 + V}{v_0} + \frac{S_0\overline{H} + S\overline{H}_0}{4\pi v_0}\right]$ *domenii simplu conexe.*

Presupunînd că intersecția dintre domeniul D și rețeaua generată de D este formată din ν_1 sau ν_2 domenii simplu conexe și notînd cu p_1 respectiv p_2 probabilitățile corespunzătoare, formula (9) se scrie :

$$\nu_1 p_1 + \nu_2 p_2 = \frac{V_0 + V}{v_0} + \frac{S_0\overline{H} + S\overline{H}}{4\pi v_0},$$

de unde deducem :

$$p_1 = \frac{4\pi(V_0 + V - \nu_2 v_0) + S_0\overline{H} + S\overline{H}_0}{4\pi v_0(\nu_1 - \nu_2)},$$

$$p_2 = \frac{4\pi(V_0 + V - \nu_1 v_0) + S_0\overline{H} + S\overline{H}_0}{4\pi v_0(\nu_1 - \nu_2)}.$$

Considerînd acum că $D_0 = \alpha_0 \cup \partial\alpha_0$ și notînd cu η numărul de domenii simplu conexe în care este împărțit domeniul D de rețea, formula (9) se scrie :

$$M\,[\eta] = \frac{V_0 + V}{v_0} + \frac{s_0\overline{H} + \overline{h}_0 S}{4\pi v_0},$$

unde s_0 este aria lui $\partial\alpha_0$ iar h_0 măsura mulțimii planelor care intersectează frontiera $\partial\alpha_0$.

Avem deci teorema :

Orice domeniu D, de volum V și a cărui frontieră ∂D are aria S, poate fi acoperit cu :

$$N \leqslant 1 + \frac{V}{v_0} + \frac{s_0\overline{H} + \overline{h}_0 S}{4\pi v_0}$$

celule ale unei rețele a cărei celulă fundamentală are volumul v_0 și a cărei frontieră $\partial\alpha_0$ are aria s_0.

Să aplicăm acest rezultat unei rețele formate din cuburi de latură a. În acest caz avem $v_0 = a^3$, $s_0 = 6a^2$. Pentru a calcula pe h_0 ținem seama de o formulă a lui Blaschke [2][7] care ne spune că măsura mulțimii planelor care intersectează un poliedru conex este egală cu $\frac{1}{2}\Sigma\, l\, \varphi_l$, l fiind lungimea unei muchii a poliedrului, iar φ_l unghiul diedru corespunzător acestei muchii, suma fiind extinsă la toate muchiile poliedrului. Cu acestea avem : $\overline{h}_0 = 3\pi a$. Deci :

$$N \leqslant 1 + \frac{V}{a^3} + \frac{3S}{a^2} + \frac{3\overline{H}}{2\pi a}.$$

Această formulă a fost demonstrată de L. A. Santaló în cazul particular al unei sfere topologice [9][8].

Să presupunem acum că figura K_0 este formată din m puncte iar figura K este un corp de volum V. Ținînd seama că un punct poate fi considerat ca o sferă de rază nulă, avem $S_0 = V_0 = 0$, $\chi(K_0) = m$ și formula (5) a lui Blaschke devine :

$$\int_{K \cap K_0 \neq \emptyset} n \mathrm{d}K = 8\,\pi^2 m V,$$

unde n este numărul de puncte conținute în interior de o poziție a lui K.

Dacă notăm acum cu m^* numărul de puncte, în rețeaua generată de reproducerea lui K_0 în fiecare celulă α_i, conținute în interiorul lui K, formula (3) ne dă :

$$\int_{\alpha_0} m^* \mathrm{d}K = 8\,\pi^2 m V,$$

formulă demonstrată pe altă cale de Oshio [3][9].

De aici și din (7) rezultă :

$$M\,[m^*] = \frac{mV}{v_0}. \tag{10}$$

Presupunînd că în interiorul corpului K putem avea m_1^* sau m_2^* puncte și notînd cu p_1 respectiv p_2 probabilitățile corespunzătoare, formula (10) se scrie :

$$m_1^*\, p_1 + m_2^* p_2 = \frac{mV}{v_0}$$

de unde :

$$p_1 = \frac{mV - m_2^* v_0}{v_0(m_1^* - m_2^*)}, \qquad p_2 = \frac{m_1^*\, v_0 - mV}{v_0\,(m_1^* - m_2^*)}.$$

Primită la redacție la 3 februarie 1967

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

---

[7] Pag. 89.
[8] Pag. 189.
[9] Pag. 38.

BIBLIOGRAFIE

1. BLASCHKE W., *Cinematica integrală*. Rend. Acc. Naz. Lincei, (6), **23**, 546—547 (1936).
2. — *Vorlesungen über Integralgeometrie*. ed. 3 V.E.B. Deutscher Verlag der Wiss. Berlin, 1955.
3. OSHIO S., *On mean values and geometrical probabilities in E_3*. Sci. Rep. Kanazawa Univ. **3**, 35—43 (1955).
4. — *On mean values and geometrical probabilities in E_n*. Sci Kanazawa Univ., **3**, 199—207 (1955).
5. SANTALÓ L. A., *Über das kinematische Mass im Raum*. Act. Sci. et Ind. nr. 357, Hermann, Paris, 1936.
6. — *Sobre valores medris y probabilidades geometricas*. Abh. Math. Sem. Haus. Univ. Hamburg, **13**, 284—294 (1940).
7. — *Quelques formules intégrales dans le plan et dans l'éspace*. Abh. Math. Sem. Haus. Univ. Hamburg, 13, 344—356 (1940).
8. — *Introduction to integral geometry*. Act. Sci. et Ind. nr. 1198, Hermann, Paris, 1953.
9. — *Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problèmes qui s'y rattachent*. Colloque sur les questions de réalité en géometrie, Liège, 1955, pag. 177—190.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor din text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU şi M. JURCHESCU, **Topologie. Categorii. Suprafeţe riemanniene**, 1966, 394 p., 21,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 558 p., 31 lei.

SILVIU GUIAŞU şi RADU THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres de systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 1966, 669 p., 38 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 7, P. 955—1112, BUCUREŞTI, 1967

I. P. „Informaţia" – c. 5423 43 831 **Lei 12·**

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

8

TOMUL 19

1967

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. MIRON NICOLESCU – redactor responsabil;
Acad. GR. G. MOISIL – redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ – secretar de redacție

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

TOM. 19, NR. 8
1967

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

SUMAR

Pag.

EUGEN BURLACU și TOMA GAȘPAR, Aplicarea metodei generalizate a lui Mc. Cluskey în cazul folosirii simbolurilor în diverse baze de numerație 1115
ANCA CREANGĂ-SÂMBOAN, Estimații de tip produs 1125
LIVIU DINU, Asupra pătrunderii normale a unui con într-un fluid compresibil 1131
T. GAȘPAR, Programarea la calculatorul MECIPT-1 a algoritmului de minimizare a funcțiilor pseudobooleene 1135
B. JANKÓ și M. BALÀZS, Despre metoda generalizată a lui Newton aplicată la rezolvarea ecuațiilor operaționale 1149
B. JANKÓ și V. POP, Asupra rezolvării ecuațiilor operaționale, definite în spații metrice, cu ajutorul metodelor convergente de ordinul *k* 1155
ILEANA NĂDEJDE, Un algoritm pentru rezolvarea unor probleme de programare pătratică 1159
ANDREI NEY, Asupra convergenței seriilor și evaluarea restului în spații liniare ordonate 1169
I. PĂVĂLOIU, Asupra unor inegalități recurente și aplicații ale lor 1175
I. POP și T. OPROIU, Asupra mișcării sateliților artificiali ai Pămîntului într-un mediu rezistent 1181
MARINA PORICEL, Asupra mișcării fluidelor nenewtoniene, între două conuri coaxiale, cu același vîrf 1187
DAN ROMALO, Încercare de etică matematică 1193
CORNELIU O. SICOE, Note asupra algebrelor lukasiewicziene polivalente 1203
ȘERBAN STRĂTILĂ, Elemente de analiză armonică (I) 1209

RECENZIE 1247

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1113–1248, BUCUREȘTI, 1967

APLICAREA METODEI GENERALIZATE A LUI Mc. CLUSKEY ÎN CAZUL FOLOSIRII SIMBOLURILOR ÎN DIVERSE BAZE DE NUMERAȚIE [1]

DE

EUGEN BURLACU și TOMA GAŞPAR

Pentru simplificarea funcţiilor cu valori binare şi cu argumente avînd n valori în cazul în care se foloseşte metoda lui Quine Mc. Cluskey, iar pentru notarea punctelor se folosesc numere scrise în altă bază decît este nevoie să se calculeze ponderile.

În prezenta lucrare se dă o metodă de a evita acest lucru.

I

Se ştie că pentru simplificarea funcţiilor booleene în forma normală disjunctivă cît şi pentru alte forme normale se dovedeşte foarte utilă metoda lui Quine — Mc. Cluskey. Acad. Gr. C. Moisil a extins în [3] această metodă şi pentru cazul funcţionării reale, adică pentru simplificarea sub formă normală disjunctivă şi conjunctivă a funcţiilor definite pe L_3^n şi cu valori în L_2.

În lucrare se foloseşte terminologia pentru forma normală disjunctivă însă tot ceea ce se spune pentru această formă normală pe baza dualităţii se transpune pentru forma normală conjunctivă.

În general o asemenea funcţie se dă prin mulţimea punctelor în care funcţia ia valoarea 1 şi prin mulţimea punctelor în care funcţia nu e definită. Elementele acestor mulţimi sînt şiruri de simboluri 0,1 în cazul funcţiilor definite pe L_2^n, sau 0, 1, 2 în cazul funcţiilor definite pe L_3^n. Aceste şiruri putem să le privim ca scrierea în baza 2 respectiv 3 a unor numere, deci aceste două mulţimi se pot da ca mulţimi de numere. Aceste numere însă nu e neapărat nevoie să le dăm în baza 2 respectiv 3. Astfel în calculul curent numerele le scriem în baza 10. În majoritatea

---

[1] Lucrare comunicată la Congresul al III-lea al Uniunii Interbalcanice a Matematicienilor 12.IX—17.IX.1966, Bucureşti.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1115—1124, BUCUREŞTI, 1967

mașinilor electronice de calcul numerele se reprezintă în baza 2, dar există și mașini în care numerele se reprezintă și în altă bază decît 2. S-au elaborat variante ale metodei lui Quine — Mc. Cluskey care folosesc scrierea în baza 10 a acestor numere (M. Denouette, E. Burlacu, I. Sălăgean). Aceste metode însă presupun că o dată cu numărul dat în baza 10 să avem numărul și în baza 2 respectiv 3 pentru a-i putea găsi ponderea, care este suma cifrelor ca numere.

În prezenta lucrare se dă o metodă de evitare a folosirii ponderilor în cazul în care folosim altă bază pentru simplificare decît cea de la care s-a plecat.

II

Fie o funcție parțial definită pe L_p^n cu valori în L_2. O asemenea funcție definește o împărțire a lui L_p^n în 3 clase A, B, C, unde A este mulțimea punctelor din L_p^n, în care funcția ia valoarea 1, B mulțimea punctelor unde funcția ia valoarea 0 și C mulțimea punctelor unde funcția nu e definită.

Cum cele trei mulțimi sînt disjuncte și reuniunea lor ne dă pe L_p^n, pentru a da funcția este suficient să ne dăm două din cele trei mulțimi.

Pentru simplificarea scrierii acestei funcții în formă normală disjunctivă vom considera pe L_p^n ca mulțimea punctelor cu coordonate întregi ale cubului n dimensional cu latura de lungime $p - 1$. Noțiunea de fața cubului se definește ca de obicei ca mulțimea punctelor avînd fixe coordonatele $i_1, i_2, \ldots, i_h$ ($h \leqslant n$), iar celelalte luînd toate cele p valori posibile. Dimensiunea feței vom numi numărul $n - h$. Un implicant al funcției este o astfel de față pentru care funcția ia valoarea 1.

Implicant prim se numește un implicant al funcției date dacă nu există nici un implicant de dimensiune mai mare care să-l conțină.

Scopul lucrării de față este determinarea tuturor implicanților primi ai funcției care prelungește o funcție dată luînd valoarea 1 în toate punctele în care funcția nu este definită, rămînînd ca ulterior să se aleagă dintre aceștia pentru forma normală disjunctivă a funcției, conjuncții care corespund la unii dintre acești implicanți primi, alegerea acestora din mulțimea implicanților primi făcîndu-se așa cum este indicat în [2].

Simplificarea funcțiilor sub formă normală disjunctivă o vom face cu formula :

$$\Lambda_0(x_i) \cup \Lambda_1(x_i) \cup \ldots \cup \Lambda_{p-1}(x_i) = 1 \tag{1}$$

pe baza căreia putem înlocui p implicanți cu un singur implicant de ordin superior care îi conține.

Presupunînd că fiecărui punct din L_p^n îi asociem un număr în baza p care are drept cifre coordonatele acestui punct, vom putea asocia unei fețe de asemenea un număr care are drept cifre pe pozițiile care sînt fixe pentru fața dată valorile acestor coordonate, iar celelalte cifre sînt zero.

De fapt aceasta nu este altceva decît cel mai mic dintre numerele asociate vîrfurilor conținute în fața dată. De asemenea unei fețe îi asociem și indicii coordonatelor libere. În acest caz o simplificare se poate obține în felul următor:

Considerăm p fețe care au aceiași indici și la care una din cifre ia toate cele p valori. În acest caz aceste p fețe pot fi înlocuite printr-una singură care are drept număr asociat pe cel mai mic dintre cele asociate fețelor și are în plus față de indicii anteriori și indicile coordonatei care și-a schimbat valoarea în cele p fețe. În fond dacă considerăm cele p numere date (asociate celor p fețe), ele sînt p numere care așezate în ordine crescătoare diferă succesiv prin p^i, — i este indicele coordonatei considerat de la sfîrșit, unde ultimei coordonate i-am dat indicile zero —, iar prima dintre ele are drept cifră de rang i pe zero.

Pentru a putea face simplificările cu numerele asociate fețelor scrise în altă bază decît p, vom asocia fiecărui vîrf o dată cu numărul asociat lui și anume

$$\sum p^i \alpha_i,$$

unde α_i este valoarea componentei $i + 1$ de la urmă, și o mulțime de indici pe care-i vom numi mulțimea indicilor legați ai numărului dat și care va conține acei indici i pentru care α_i este zero. În acest caz condiția de simplificare enunțată mai sus se formulează astfel:

TEOREMA I. *Dacă avem p numere $N_1, N_2, \ldots, N_p$ ordonate crescător, asociate la p fețe, care au aceiași indici liberi, atunci condiția necesară și suficientă ca aceste p fețe să poată fi înlocuite cu o singură față de un ordin superior avînd în plus față de indicii liberi ai fețelor date pe i, este ca două numere consecutive din șirul $(N_1, N_2, \ldots, N_p)$ să difere prin p^i iar N_1 să-l aibă pe i printre indicii săi legați.*

Demonstrația acestei teoreme rezultă din faptul că N_1 trebuie să aibă cifra respectivă zero ceea ce ne indică exact indicile.

Pentru găsirea indicilor legați ne folosim de următoarea teoremă:

TEOREMA II. *Condiția necesară și suficientă ca numărul N să admită indicile i este ca restul împărțirii lui N la p^{i+1} să fie mai mic decît p^i.*

Demonstrația acestei teoreme este evidentă pe baza scrierii numărului în baza p.

TEOREMA III. *Dacă N are indicii $\{i, i_1, \ldots, i_h\}$ neordonați, atunci numerele $N + p^i$, $N + 2p^i, \ldots, N + (p-1)p^i$ au ca mulțime a indicilor pe $i_1, \ldots, i_h$.*

Unui număr căruia nu i-am asociat încă indicii îi asociem în felul următor:

Notăm cu $\mathcal{M}_N$ mulțimea indicilor lui. Luăm inițial $N_1 = N$, $h_1 = n$, $\mathcal{M}_N = \Phi$. Aplicăm următorul algoritm:

1. Dacă $N_1 = 0$, luăm $\mathcal{M}_N = \mathcal{M}_N U \{k | k$ întreg conținut între 0 și $h_1 - 1$ inclusiv$\}$ și am terminat formarea indicilor pentru acest număr N.

Dacă $N_1 \neq 0$, atunci fie h un întreg astfel încît

$$p^h \leqslant N_1 < p^{h+1}.$$

În acest caz vom lua $\mathcal{M}_N = \mathcal{M}_N \cup \{k | k$ întreg conţinut între $h + 1$ şi $h_1 - 1$ inclusiv$\}$. Înlocuim apoi pe N_1 cu restul împărţirii sale la p^h iar pe h_1 îl luăm egal cu h şi reîncepem algoritmul cu noul h_1 şi N_1 de la 1[2].

Algoritmul de simplificare va consta deci în următoarele: Presupunem că ni se dă funcţiile sub forma numerelor asociate punctelor din mulţimea A şi C.

În primul rînd aşezăm aceste numere în ordine crescătoare. Vom trece apoi pe rînd la stabilirea pentru fiecare număr a indicilor lui legaţi şi în acelaşi timp să formăm implicanţii de ordinul I care au numărul dat, ca număr asociat. Acest lucru îl vom face în modul următor:

Dacă numărul nu are încă indicii asociaţi, atunci îi atribuim aşa cum s-a arătat mai sus.

Odată indicii acestui număr determinaţi, pe baza teoremelor I şi III trecem la formarea implicanţilor de ordinul I şi la fixarea indicilor pentru unele[3] dintre numerele următoare. Pentru aceasta, pentru fiecare indice i a acestui număr formăm numerele $N + p^i$, $N + 2p^i, \ldots$ pe care le căutăm în tabel. Dacă sînt în tabel, le asociem indicii conform teoremei III. Dar dacă toate aceste numere sînt în tabel, atunci avem implicantul N^i cu indicile i liber şi ceilalţi indici legaţi, în caz contrar nu avem acest implicant cu indicile i în lista implicanţilor.

În felul acesta obţinem întreaga listă a implicanţilor de ordinul I.

Presupunem că am construit lista feţelor de dimensiune k. Trecem la construirea listei feţei de dimensiune $k + 1$ în felul următor: Pentru un număr N_0 asociat unei feţe de dimensiune k avînd anumiţi indici liberi daţi, care are indicile legat i, căutăm dacă în lista implicanţilor de ordinul I există N_0^i. În cazul în care există, luăm toate numerele care împreună cu N_0 intră în implicantul N_0^i şi căutăm toate aceste numere dacă există în lista implicanţilor de ordinul k. Aceste numere au ca indici liberi ca şi cel de la care s-a plecat. Dacă toţi există, obţinem un implicant de ordinul $k + 1$. Numerele care ne-au dat o simplificare le însemnăm pentru a şti că nu sînt implicanţi primi.

Procedeul se repetă pînă cînd obţinem o listă de feţe de o anumită dimensiune pentru care nu mai avem simplificări. În acest moment toate numerele neînsemnate sînt tocmai implicanţii primi.

Exemplu. Să se simplifice funcţia

$f(X, Y, S, U, V, W, T) = \sum (5, 14, 23, 248, 257, 264, 266, 291, 318, 345, 372, 299, 426, 453, 480, 491, 500, 509, 734, 743, 752, 977, 986, 995, 1074, 1101, 1128, 1218, 1220, 1229, 1238, 1463, 1472, 1481, 1706, 1715, 1724, 1949, 1958, 1967) + \sum_{\Phi} (246, 255, 1215, 1219, 1221, 1224, 1227, 1230, 1233, 1236, 1239, 1749, 1805, 1830, 1857, 1911)$.

Pentru simplificare scriem toţi termenii funcţiei în ordinea lor crescătoare, indiferent dacă funcţia în punctele respective are valoarea unu sau nu este definită:

---

[2] Dacă la mulţimea de numere întregi care se adaugă marginea inferioară e mai mare decît marginea superioară, atunci evident lui $\mathcal{M}_N$ îi adăugăm mulţimea vidă, deci îl lăsăm neschimbat.

[3] În practică în acest fel obţinem indicii pentru majoritatea numerelor.

Tabelul 1

$5_{2,3,4,5,6}$	$426_{0,3,6}$	1128_{0}	$1463_{2,3,4,5}$
$14_{3,4,5,6}$	$453_{0,6}$	$1215_{0,1,2,3,4}$	$1472_{3,4,5}$
$23_{3,4,5,6}$	$480_{0,6}$	$1218_{0,2,3,4}$	$1481_{3,4,5}$
$246_{0,2,3,4,6}$	$491_{2,3,4,6}$	$1219_{2,3,4}$	$1706_{2,3,4}$
$248_{2,3,4,6}$	$500_{3,4,6}$	$1220_{2,3,4}$	$1715_{3,4}$
$255_{0,3,4,6}$	$509_{3,4,6}$	$1221_{0,2,3,4}$	$1724_{3,4}$
$257_{3,4,6}$	$734_{2,3,4,5}$	$1224_{0,1,3,4}$	$1749_{0,4}$
$264_{0,3,4}$	$743_{3,4,5}$	$1227_{0,3,4}$	$1803_{0,3}$
$266_{3,4,6}$	$752_{3,4,5}$	$1229_{3,4}$	1830_{0}
$291_{0,4,6}$	$977_{2,3,4}$	$1230_{0,3,4}$	1857_{0}
$318_{0,4,6}$	$986_{3,4}$	$1233_{0,1,3,4}$	1911_{0}
$345_{0,3,6}$	$995_{3,4}$	$1236_{0,3,4}$	$1949_{2,3,4}$
$372_{0,6}$	$1074_{0,3}$	$1238_{3,4}$	$1958_{3,4}$
$399_{0,6}$	1101_{0}	$1239_{0,3,4}$	$1967_{3,4}$

Algoritmul de atribuirea indicilor

Lista puterilor lui 3 : 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729,
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

$N = 5$ $N_1 = 5$
$h_1 = 7$ $3 < 5 < 9$ $h = 1$
$\mathcal{M}_N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$h_1 = 1$
$N_1 = 2$ $1 < 2 < 3$ $h = 0$ $\mathcal{M}_N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$h_1 = 0$
$N_1 = 0$ $\mathcal{M}_N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

deci $5_{2,3,4,5,6}$

De la 5 cu $3^2 = 9$ obținem indicii pentru 14 și 23 ($5 + 9, 5 + 9 + 9$), pe care îi considerăm grupați formînd un implicant prim de ordinul I ;
cu $3^3 = 27$ obținem termeni care nu sînt pe listă (32 și 59) ;
cu $3^4 = 81$ obținem termeni care nu sînt pe listă (86, 167) ;
cu $3^5 = 243$ obținem (248, 491) care împreună cu 5 dau un alt implicant prim de ordinul I ;
cu $3^6 = 729$ obținem (734, 1463).

De la 14 cu $3^3 = 27$ și $3^4 = 81$ nu obținem nimic ;
cu $3^5 = 243$ avem (257, 500) ;
cu $3^6 = 729$ avem (743, 1472).

De la 23 cu $3^3 = 27$ și $3^4 = 81$ nu obținem nimic ;
cu $3^5 = 243$ avem (266, 509) ;
cu $3^6 = 729$ avem (759, 1481).

Pentru 246 nu avem indicii calculați, deci aplicăm algoritmul de calculare a indicilor pentru $N = 246$.

$N = 246$ $N_1 = 246$ $h_1 = 7,243 < 246 < 729$ $h = 5$ $\mathcal{M}_N = \{6\}$.
$N_1 = 3$ $h_1 = 5,\ 3 < 3 < 9$ $h = 1$ $\mathcal{M}_N = \{2, 3, 4, 6\}$.
$N_1 = 0$ $h_1 = 0,$ $\mathcal{M}_N = \{0, 2, 3, 4, 6\}$.

Deci 246 are indicii : 0, 2, 3, 4, 6.
De la 246 cu 3^0 avem (247, 248) ; 247 nu există, iar 248 e deja indexat ;
cu 3^2 avem (255, 264) ;
cu celelalte nu obținem puncte care să fie pe listă 273, 300, 327, 408, 975, 1704).

De la 248 cu 3^2 avem (257, 266) deja indexate dar avem un implicant ;
cu 3^3, 3^4 nu avem nimic (275, 302, 329, 410) ;
cu 3^6 avem (977, 1706).

De la 255 nu obținem nici un implicant decît un singur punct care deja e indexat (256, 257, 282, 309, 336, 417, 984, 1713).

De la 257 cu 3^3 și 3^4 nu avem puncte (284, 311, 338, 419) ;
cu 3^6 avem (986, 1715).

De la 264 cu 3^0 și 3^6 nu avem nimic nou (265, 266), 993, 1722) ;
cu 3^3 avem (291, 318) ;
cu 3^4 avem (345, 426) ;

De la 266 cu 3^3 și 3^4 nu avem puncte (293, 320, 347, 428) ;
cu 3^6 dă (995, 1724).

De la 291 cu 3^0, 3^6 nimic nou (292, 293, 1020, 1749) ;
cu 3^4 dă (372, 453).

De la 318 cu 3^0, 3^6 nu dă nimic (319, 320, 1047, 1776) ;
cu 3^4 dă (399, 480).

De la 345 cu 3^0 nu dă nimic (319, 320) ;
cu 3^4 dă (372, 399) ;
cu 3^6 dă (1074, 1803).

De la 372 cu 3^6 dă (1101, 1803), cu alți indici nu obținem nimic.
De la 399 cu 3^6 dă (1128, 1857).
De la 426 cu 3^3 dă (453, 480).
De la 453 nu obținem decît indicii pentru 1911.
De la 480 nu obținem nimic.
De la 491 cu 3^2 avem (500, 509) ;
3^6 avem (1220, 1949).
De la 500 cu 3^6 avem (1229, 1958).
De la 509 cu 3^6 avem (1238, 1967).
De la 734 cu 3^2 avem (743, 752) ;
3^5 avem (977, 1706).
De la 743 cu 3^5 avem (986, 1715).
De la 752 cu 3^5 avem (995, 1724).

De la 977 cu 3^2 avem (986, 995).
De la 986 și 995 nu obținem nimic.
De la 1074 cu 3^3 avem (1101, 1128).
De la 1101 și 1128 nu obținem nimic.
De la 1215 trebuie să-i calculăm indicii direct.

$$\begin{array}{llllll} N = 1215 & N_1 = 1215 & h_1 = 7 & 729 < 1215 & h = 6 & \mathscr{M} = \Phi \\ & h_1 = 6 & N_1 = 486 & 243 < 486 < 729 & h = 5 & \mathscr{M} = \Phi \\ & h_1 = 5 & N_1 = 0 & \mathscr{M}_N = \{0, 1, 2, 3, 4\}. & & \end{array}$$

De la 1215 cu 3^1 avem (1218, 1221);
cu 3^2 avem (1224, 1233).
De la 1218 cu 3^0 avem (1219, 1220);
cu 3^2 avem (1227, 1236).
De la 1219 nu obținem nimic.
De la 1220 cu 3^2 avem (1229, 1238).
De la 1221 cu 3^2 avem (1230, 1239).

Toate numerele sînt indexate. Rămîne să mai calculăm ceilalți implicanți primi de ordinul I.

Algoritmul pentru găsirea implicanților:

$5^2_{3,4,5,6}$	(5, 14, 23)
$5^5_{2,3,4,6}$	(5, 248, 491)
$5^6_{2,3,4,5}$	(5, 734, 1463)
$14^5_{3,4,6}$	(14, 257, 500)
$14^6_{3,4,5}$	(23, 266, 1472)
$23^5_{3,4,6}$	(23, 266, 509)
$23^6_{3,4,5}$	(23, 752, 1481)
$246^2_{0,3,4,6}$	(246, 255, 264) = A
$248^2_{3,4,6}$	(248, 257, 266)
$257^6_{3,4}$	(257, 986, 1715)
$248^6_{2,3,4}$	(248, 977, 1706)
$264^3_{0,4,6}$	(264, 291, 318)
$264^4_{0,3,6}$	(264, 345, 426)
$266^6_{3,4}$	(266, 995, 1724)
$291^4_{0,6}$	(291, 372, 453)
$318^4_{0,6}$	(318, 399, 480)
$345^3_{0,6}$	(345, 372, 399)
$345^6_{0,3}$	(345, 1074, 1803)
372^6_0	(372, 1101, 1830)
399^6_0	(399, 1128, 1857)
$426^3_{0,6}$	(426, 453, 480)
$491^2_{3,4,6}$	(491, 500, 509)
$491^6_{2,3,4}$	(491, 1220, 1949)
$500^6_{2,3,4}$	(500, 1229, 1958)
$509^6_{2,3,4}$	(509, 1238, 1967)
$734^2_{3,4,5}$	(734, 743, 752)
$734^5_{2,3,4}$	(734, 977, 1220)
$743^5_{3,4}$	(743, 986, 1229)
$752^5_{3,4}$	(752, 995, 1238)
977^2	(977, 986, 995)
1074^3	(1074, 1101, 1128)
$1215^1_{0,2,3,4}$	(1215, 1218, 1221)
$1215^2_{0,1,3,4}$	(1215, 1224, 1233)
$1218^0_{2,3,4}$	(1218, 1219, 1220) = B
$1218^2_{0,3,4}$	(1218, 1227, 1236)
$1220^2_{3,4}$	(1220, 1229, 1238)
$1221^2_{0,3,4}$	(1221, 1230, 1239)
$1224^1_{0,3,4}$	(1224, 1227, 1230)
$1233^1_{0,3,4}$	(1233, 1236, 1239)
$1463^2_{3,4,5}$	(1463, 1472, 1481)
$1463^5_{2,3,4}$	(1463, 1706, 1949)
$1472^5_{3,4}$	(1472, 1715, 1958)
$1481^5_{3,4}$	(1481, 1724, 1967)
$1706^2_{3,4}$	(1706, 1715, 1724)
1749^4_0	(1749, 1830, 1911) = C
1803^3_0	(1803, 1830, 1857)
$1949^2_{3,4}$	(1949, 1958, 1967)

Implicanţi de ordinul II:

$5^{2,5}_{3,4,6}$	$(5^2, 248^2, 491^2, 5^5, 14^5, 23^5)$ $(5, 14, 23, 248, 257, 266, 491, 500, 509)$
$5^{2,6}_{3,4,5}$	$(5^2, 734^2, 1463^2, 5^6, 14^6, 23^6)$ $(5, 14, 23, 734, 743, 752, 1463, 1472, 1481)$
$5^{5,6}_{2,3,4}$	$(5^5, 734^5, 1463^5, 5^6, 248^6, 491^6)$ $(5, 248, 491, 734, 977, 1220, 1463, 1701, 1949)$
$14^{5,6}_{3,4}$	$(14^6, 257^6, 500^6, 14^5, 743^5, 1472^5)$ $(14, 257, 500, 743, 986, 1229, 1472, 1715, 1958)$
$23^{5,6}_{3,4}$	$(24^5, 752^5, 1481^5, 23^6, 266^6, 509^6)$ $(23, 266, 509, 752, 995, 1238, 1481, 1724, 1967)$
$248^{2,6}_{3,4}$	$(248^2, 977^2, 1706^2, 248^6, 257^6, 266^6)$ $(248, 257, 266, 977, 986, 995, 1706, 1715, 1724)$
$264^{3,4}_{0,6}$	$(264^3, 345^3, 426^3, 264^4, 291^4, 318^4)$ $(264, 345, 426, 291, 372, 453, 318, 399, 480) = D.$
$345^{3,6}_{0}$	$(345^3, 1074^3, 1803^3, 345^6, 372^6, 399^6)$ $(345, 372, 399, 1074, 1101, 1128, 1803, 1830, 1857) = E.$
$491^{2,6}_{3,4}$	$(491^2, 1220^2, 1949^2, 491^6, 500^6, 509^6)$ $(491, 500, 509, 1220, 1229, 1238, 1949, 1958, 1967)$
$734^{2,5}_{3,4}$	$(734^2, 977^2, 1220^2, 734^5, 743^5, 752^5)$ $(734, 743, 752, 977, 986, 995, 1220, 1229, 1238)$
$1215^{1,2}_{0,3,4}$	$(1215^1, 1224^1, 1233^1, 1215^2, 1218^2, 1221^2)$ $(1215, 1218, 1221, 1224, 1227, 1230, 1233, 1236, 1239) = F.$
$1463^{2,5}$	$(1463^2, 1706^2, 1949^2, 1463^5, 1472^5, 1481^5)$ $(1463, 1472, 1481, 1706, 1715, 1724, 1949, 1958, 1967)$

Implicanţi primi de ordinul III:

$5^{2,5,6}_{3,4}$	$(5^{2,5}, 734^{2,5}, 1463^{2,5}, 5^{2,6}, 248^{2,6}, 491^{2,6}; 5^{5,6}, 14^{5,6}, 23^{5,6})$ $(5, 14, 23, 248, 257, 266, 491, 500, 509, 734, 743, 752, 977, 986, 995, 1220, 1229, 1238, 1463, 1472, 1481, 1706, 1715, 1724, 1949, 1958, 1967) = G.$

Găsirea implicanţilor primi care dau expresia minimă a funcţiei: Pentru expresia minimă a funcţiei găsim două variante de funcţii:

$$f_1 = G \cup D \cup E \cup F$$

sau

$$f_2 = G \cup D \cup E \cup B.$$

Tabelul 2

	A	B	C	D	E	F	G
5							×
14							×
23							×
248							×
257							×
264	×			×			
266							×
291				×			×
318				×			
345				×	×		
372				×	×		
399				×	×		
426				×			
453				×			
480				×			
491							×
500							×
509							×
734							×
743							×
752							×
977							×
986							×
995							×
1074					×		
1101					×		
1128					×		
1218		×				×	
1220		×					×
1229							×
1238							×
1463							×
1472							×
1481							×
1706							×
1715							×
1724							×
1949							×
1958							×
1967							×

Primită la redacţie la 6 decembrie 1966.

Institutul politehnic Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. Samuel H. Caldwell, *Switching circuits and logical design*. Wiley, New York, 1958.
2. P. L. Ivănescu, S. Rudeanu, *Minimization of switching circuits in actual operation*. Hazard and Race Phenomena in Switching circuits. Circular Letter Nr. 14.
3. Gr. C. Moisil, *An Extension of the Quine simplification Theory for the Two-Terminals with Break-Before-Make Relay Contacts*. Circular Letter Nr. 10.
4. Gr. C. Moisil, *An Extension of the Quine Simplification Theory for the Two-Terminals with Make-Before-Break Relay Contacts*. Hazard and Race Phenomena in Switching Circuits. Circular Letter Nr. 11.
5. Gr. C. Moisil, *Încercări vechi și noi de logică neclasică*. Editura științifică, București, 1965.
6. I. Sălăgean, *Funcții logice binare și funcții logice vectoriale*. Buletinul Institutului Politehnic Timișoara, Fascicola II, 1965.

ESTIMAŢII DE TIP PRODUS

DE

ANCA CREANGĂ-SÂMBOAN

În acest articol se consideră estimaţii de tip produs care generalizează formele studiate de Goodman în [2] şi Murthy în [4] şi se dau condiţiile în care aceste estimaţii pot fi preferate estimaţiilor nedeplasate.

Să presupunem că ξ şi η sînt estimaţii nedeplasate pentru parametrii x şi y care intervin într-un procedeu oarecare de selecţie şi că valoarea unui parametru, de exemplu x, este cunoscută şi diferită de zero. Să considerăm atunci pentru parametrul y estimaţii de forma

$$\eta^* = \eta f\left(\frac{\xi}{x}\right),$$

unde funcţia f este continuă, derivabilă în jurul punctului 1 şi cu proprietatea $f(1) = 1$.

Pentru a studia eficienţa acestui tip de estimaţii în comparaţie cu estimaţia nedeplasată a parametrului y să considerăm abaterea medie pătratică a variabılei η^*.

Scriind variabilele ξ şi η sub forma

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} \xi &= x(1 + \delta\xi) \\ \eta &= y(1 + \delta\eta) \end{aligned}$$

şi folosind pentru $f\left(\frac{\xi}{x}\right)$ desfăşurarea în jurul punctului 1, obţinem pentru abaterea medie a lui η^*

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} U(\eta^*) &= E\left(\eta f\left(\frac{\xi}{x}\right) - y\right) = \\ &= y\left[f'_{(1)} V_{11} + \frac{f^{(2)}_{(1)}}{2!} V_{02}\right], \end{aligned}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1125–1129, BUCUREŞTI, 1967

unde am notat

$$V_{ij} = E\,(\delta\eta^i\ \delta\xi^j) \tag{2}$$

şi am neglijat termenii în $\delta\eta\,\delta\xi$ de ordin mai mare decît 2.

Pentru abaterea medie pătratică obţinem

$$\begin{aligned} W\,(\eta^*) &= E\left(\eta f\left(\frac{\xi}{x}\right) - y\right)^2 = \\ &= y^2 E\left\{\left[f'_{(1)}\,\delta\xi + \delta\eta + f'_{(1)}\,\delta\eta\,\delta\xi + \frac{f^{(2)}_{(1)}}{2\,!}\,\delta\xi^2 + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{f^{(2)}_{(1)}}{2\,!}\,\delta\eta\,\delta\,\xi^2\right]^2 + \theta\right\} \end{aligned}$$

iar dacă neglijăm termenii în $\delta\eta\,\delta\xi$ de ordin mai mare decît 2 avem

$$W\,(\eta^*) = y^2\,[f'^2_{(1)} V_{02} + 2 f'_{(1)}\,V_{11} + V_{20}]. \tag{3}$$

Dacă luăm $f\,(t) = t$ sau $f(t) = \frac{1}{t}$, obţinem formule analoage pentru estimaţiile produs şi respectiv estimaţiile raport considerate de M. N. Murthy în [4].

În cazul procedeelor de selecţie aleatoare simple şi a tuturor procedeelor de selecţie ce implică extrageri independente de variabile, expresiile (1) şi (3) devin

$$U\,(\eta^*) = \frac{1}{n}\,y\left[f'_{(1)}\,V'_{11} + \frac{f^{(2)}_{(1)}}{2\,!}\,V'_{02}\right] \tag{1'}$$

şi

$$W\,(\eta^*) = y^2\left[f'^2_{(1)}\,\frac{V'_{02}}{n} + 2\,f'_{(1)}\,\frac{V'_{11}}{n} + f^2_{(1)}\,\frac{V_{20}}{n}\right], \tag{3'}$$

unde am neglijat termenii de ordin superior lui n^{-1} şi V'_{ij} se calculează pentru selecţii de volum n, verificînd relaţiile (2) în cazul $n = 1$.

Din relaţia (1′) se vede că pentru selecţii de volum mare abaterea devine neglijabilă şi η^* devine o estimaţie nedeplasată a lui y.

Să exprimăm acum abatera şi abaterea medie pătratică a variabilei η^* în funcţie de coeficientul de corelaţie al variabilelor ξ şi η şi de dispersiile σ^2_ξ şi σ^2_η. Vom avea atunci

$$V_{02} = E\left[\frac{(\xi - x)^2}{x^2}\right] = \frac{1}{x^2}\,\sigma^2_\xi$$

$$V_{20} = E\left[\frac{(\eta - y)^2}{y^2}\right] = \frac{1}{y^2}\,\sigma^2_\eta$$

$$V_{11} = E\left[\frac{(\eta - y)\,(\xi - x)}{yx}\right] = \frac{1}{xy}\,\rho\,(\xi,\,\eta)\,\sigma_\xi\,\sigma_\eta.$$

Înlocuind aceste relații în formulele (1) și (3) găsim

$$U(\eta^*) = y\left[f'_{(1)}\,\rho\,(\xi, \eta)\frac{\sigma_\xi}{x}\,\frac{\sigma_\eta}{y} + \frac{f^{(2)}_{(1)}}{2\,!}\,\frac{\sigma_\xi^1}{x^2}\right] \tag{1''}$$

și

$$W(\eta^*) = y^2\left[f'^2_{(1)}\frac{\sigma_\xi^2}{x^2} + 2f'_{(1)}\,\rho\,(\xi, \eta)\frac{\sigma_\xi}{x}\,\frac{\sigma_\eta}{y} + \frac{\sigma_\eta^2}{y^2}\right]. \tag{3''}$$

Din (1″) rezultă că

$$\left|\frac{U(\eta^*)}{y}\right| \leqslant |f'_{(1)}|\,|C_\xi|\,|C_\eta| + \frac{|f^{(2)}_{(1)}|}{2\,!}\,C_\xi^2,$$

unde am notat cu C_ξ, C_η coeficienții de variație ai estimațiilor ξ și η. Prin urmare în selecții de volum mare eroarea relativă a estimației η^* poate fi neglijată.

Estimația η^* a parametrului y va fi mai eficientă decît estimația η a aceluiași parametru dacă

$$W(\eta^*) < y^2 V_{20}$$

deci dacă

$$f'^2_{(1)}\,C_\xi^2 + 2f'_{(1)}\rho(\xi, \eta)\,C_\xi C_\eta < 0$$

și prin urmare

$$\frac{2f'_{(1)}}{xy}\left[\rho(\xi, \eta)\,\sigma_\xi\sigma_\eta + f'^2_{(1)}\,\frac{\sigma_\xi^2}{x^2}\,\frac{xy}{2f'_{(1)}}\right] < 0.$$

Așadar vom prefera estimația η^* în locul estimației η dacă

$$\rho(\xi, \eta) < -\frac{|f'_{(1)}|\,|C_\xi|}{2\,|C_\eta|} \quad \text{cînd} \quad \frac{f'_{(1)}}{xy} > 0$$

sau

$$\rho(\xi, \eta) > \frac{|f'_{(1)}|\,|C_\xi|}{2\,|C_\eta|} \quad \text{cînd} \quad \frac{f'_{(1)}}{xy} < 0.$$

Să presupunem acum că într-un anumit procedeu de selecție se cunosc n parametri $x_1, \ldots, x_n$ și ne propunem să estimăm cu ajutorul lor valoarea parametrului necunoscut y. Fie estimațiile nedeplasate ξ_i, $i = 1, \ldots, n$ pentru parametrii x_i, $i = 1, \ldots, n$ și η pentru parametrul y.

Să considerăm atunci pentru y estimația

$$\eta^{**} = \frac{\eta}{n} f\left(\frac{\xi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\xi_n}{x_n}\right), \tag{4}$$

unde f este o funcţie diferenţiabilă şi $f(1, \ldots, 1) = n$. Folosind reprezentarea funcţiei f în jurul punctului $(1, \ldots, 1)$ şi formulele (A) găsim pentru abaterea medie:

$$U(\eta^{**}) = E(\eta^{**} - y) = \frac{y}{n}\Big[\sum_i a_i E(\delta\eta\,\delta\xi_i) +$$

$$+ \frac{1}{2\,!}\sum_{i,j} a_{ij} E(\delta\xi_i\,\delta\xi_j) + \frac{1}{2\,!}\sum_{i,j} a_{ij} E\Big(\delta\eta\,\delta\xi_i\,\delta\xi_j\Big)\Big] + R$$

sau punînd în evidenţă coeficienţii de corelaţie şi dispersiile variabilelor η şi ξ_i, $i = 1, \ldots, n$ şi neglijînd termenii în $\delta\eta\,\delta\xi_i$ de ordin mai mare decît 2,

$$(5) \qquad U(\eta^{**}) = \frac{y}{n}\Big[\sum_i a_i \rho_{ni} \frac{\sigma_\eta}{y}\,\frac{\sigma_i}{x_i} + \frac{1}{2\,!}\sum_{i,j} a_{ij}\rho_{ij}\frac{\sigma_i}{x_i}\,\frac{\sigma_j}{x_j}\Big].$$

Din formula (5) se obţine

$$(6) \qquad \left|\frac{U(\eta^{**})}{y}\right| \leqslant \frac{1}{n}\Big[\sum_i |a_i|\,|C_\eta|\,|C_i| + \frac{1}{2\,!}\sum_{i,j}|a_{ij}|\,|C_i|\,|C_j|\Big].$$

Prin urmare, constatăm că cu cît informaţia noastră în procesul de selecţie este mai mare, cu atît estimaţia (4) este mai bună, eroarea sa relativă este mai mică.

În cazul în care în formula (4) $f(t_1, \ldots, t_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i$ eroarea relativă a estimaţiei

$$(7) \qquad \tilde{\eta}^{**} = \frac{\eta}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i}{x_i}$$

devine

$$\left|\frac{U(\tilde{\eta}^{**})}{y}\right| \leqslant |C_\eta|\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|C_i|}{n}$$

deoarece $a_i = 1$ şi $a_{ij} = 0$.

Amintim că o estimaţie de tipul (7) se dovedeşte a fi eficientă în cazul selecţiilor de respingere de volum n dintr-o populaţie de n valori cu probabilităţi date şi este folosită de J. Hájek în consideraţiile sale din articolul [3].

În sfîrşit, pentru a studia eficienţa estimaţiei (4) calculăm abaterea medie pătratică; neglijînd termenii în $\delta\eta\,\delta\xi_i$ de ordin mai mare decît 2,

$$W(\eta^{**}) = \sigma_\eta^2 + \frac{2y^2}{n}\sum_i a_i E(\delta\eta\,\delta\xi_i) +$$

$$+ \frac{y^2}{n^2}\sum_{i,j} a_i a_j E(\delta\xi_i\,\delta\xi_j)$$

sau

$$W(\eta^{**}) = \sigma_\eta^2 + \frac{2y^2}{n}\sum_i a_i \rho_{ni} \frac{\sigma_r}{y} \frac{\sigma_i}{x_i} + \frac{y^2}{n^2}\sum_{i,j} a_i a_j \rho_{ij} \frac{\sigma_i}{x_i} \frac{\sigma_j}{x_j}.$$

Atunci vom prefera pentru parametrul y estimația (4) estimației η cînd

$$\frac{W(\eta^{**})}{y^2} < \frac{\sigma_\eta^2}{y^2}$$

adică în cazul în care

$$\frac{2\sigma_\eta}{y} \sum_i a_i \rho_{\eta i} \frac{\sigma_i}{x_i} + \frac{1}{n} \sum_{i,j} a_{ij} \rho_{ij} \frac{\sigma_i}{x_i} \frac{\sigma_j}{x_j} < 0.$$

Rezultă că η^{**} va fi mai eficientă decît η dacă

$$\sum_j \left(\frac{2\sigma_\eta}{y} a_i \rho_{\eta i} + \frac{1}{n}\sum_j a_{ij} \rho_{ij} \frac{\sigma_j}{x_j}\right) \frac{\sigma_i}{x_i} < 0.$$

În acest caz există cel puțin un indice i așa fel încît dacă $x_i > 0$,

$$\frac{2\sigma_\eta}{y} a_i \rho_{\eta i} + \frac{1}{n} \sum_j a_{ij} \rho_{ij} \frac{\sigma_j}{x_j} < 0$$

sau

$$2a_i C_\eta \left[\rho_{\eta i} + \frac{n^{-1}\sum_j a_{ij} \rho_{ij} C_j}{2\, a_i C_\eta} \right] < 0$$

de unde rezultă condițiile

$$\rho_{\eta i} < - \frac{n^{-1} \sum_j |a_{ij}|\,|\rho_{ij}|\,|C_j|}{2\,|a_i|\,|C_\eta|} \quad \text{dacă } a_i C_\eta > 0$$

sau

$$\rho_{\eta i} > \frac{n^{-1}\sum_j |a_{ij}|\,|\rho_{ij}|\,|C_j|}{2\,|a_i|\,|C_\eta|} \quad \text{dacă } a_i C_\eta < 0.$$

Primită la redacție la 9 februarie 1967

Centrul de Statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste
România, Str. M. Eminescu nr. 47,
București

BIBLIOGRAFIE

1. Creangă-Samboan, A., *Asupra dispersiei produsului de variabile aleatoare independente.* St. cerc. mat., **18**, *9* (1966).
2. Goodman, L. A., *On the exact variance of products.* J. Amer. Stat. Ass., **55** (1960).
3. Hájek, J., *Asymptotic theory of rejective sampling with varying probabilities from a finite population.* Ann. Math. Stat., **35** (1964).
4. Murthy, M. N., *Product method of estimation.* Sankhyā, series A, **26**, part. I (1964).

ASUPRA PĂTRUNDERII NORMALE A UNUI CON ÎNTR-UN FLUID COMPRESIBIL

DE

L. DINU

Se studiază deformarea suprafeţei libere a unui fluid compresibil cauzată de pătrunderea cu viteză suficient de mare a unui con.

1. INTRODUCERE

În lucrarea de faţă se determină variaţia suprafeţei libere a unui fluid compresibil, provocată de pătrunderea cu viteză constantă suficient de mare a unui con circular cu un unghi la vîrf 2ε.

Problema este deci axial-simetrică. Condiţiile la limită pe suprafaţa conului iau aici o formă specială, spre deosebire de cazul plan cînd e posibil să se pună aceste condiţii direct pe axa de simetrie a penei (analogul plan al conului).

Problemele de pătrundere care folosesc teoria liniarizată, urmăresc în principiu fie, pentru viteze de pătrundere nu prea mari şi pătrunderi prin suprafeţe neascuţite, [2], [3], [6], [8], determinarea efectelor negravitaţionale de compresibilitate într-un interval extrem de scurt, urmate de stări incompresibile gravitaţionale, fie studiul pătrunderii prin suprafeţe ascuţite, [1], [4], [5], [7], [9], cu viteze mici deci în regim incompresibil şi gravitaţional, sau cu viteze mari, în care caz din nou într-un interval scurt au loc efecte de compresibilitate.

Problema pătrunderii normale a conului circular a fost considerată de A. C. Bagdoev [1] care a determinat distribuţia de presiune pe suprafaţa conului pentru fluidul compresibil şi de A. G. Mackie [4], [5], care a determinat pentru fluidul incompresibil atît distribuţia de presiune pe suprafaţa conului, cît şi ridicarea suprafeţei libere.

2. PUNEREA PROBLEMEI

Mişcarea fiind axial-simetrică, în teoria liniarizată potenţialul vitezei φ va satisface ecuaţia :

$$(1) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Condiţiile la infinit ale problemei sînt :

$$\lim_{r\to\infty} r\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,\quad \lim_{r\to 0} r\varphi=0,\quad \lim_{r\to\infty} r\varphi=0\ (1). \tag{2}$$

Fie $z=Z(r,t)$ ecuaţia suprafeţei libere. Condiţiile pe suprafaţa liberă se vor scrie :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial t}\quad \text{pentru } z=0 \text{ (suprafaţa neperturbată)}, \tag{3}$$

$$\varphi(r,0,t)=0\quad \text{pentru}\quad z=0. \tag{4}$$

Condiţia (4) e o consecinţă a datelor iniţiale şi a ecuaţiei lui Bernoulli

$$-\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=p, \tag{5}$$

unde p este diferenţa între presiunea în fluid şi presiunea (considerată constantă) pe suprafaţa liberă.

Condiţia pe suprafaţa conului se înlocuieşte cu

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial\varphi}{\partial r}=V(z,t), \tag{6}$$

unde $V(z,t)$ are dimensiunea unei intensităţi de surse dispuse pe axa conului. Dacă $r=F(z,t)$ este ecuaţia corpului care pătrunde cu o viteză constantă V, atunci pînă la ordinul $O(\varepsilon^3)$

$$V(z,t)=-VF\frac{\partial F}{\partial z}. \tag{7}$$

3. SOLUŢIA PROBLEMEI

Soluţia problemei se obţine aplicînd succesiv transformarea Hankel şi transformarea Laplace ecuaţiei (1) cu condiţiile (2) şi (6).

Vom folosi următoarele notaţii :

$$\varphi_1(\lambda,z,t)=\int_0^\infty rJ_0(\lambda r)\,\varphi(r,z,t)\,\mathrm{d}r;\quad \varphi_2(\lambda,z,s)=\int_0^\infty \varphi(\lambda,z,t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Ecuaţia (1) devine :

$$\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial z^2}-\left(\lambda^2+\frac{s^2}{c^2}\right)\varphi_{12}=V_2(z,s). \tag{9}$$

Pentru cazul conului ce se mişcă cu o viteză constantă :

$$F(z,t)=\begin{cases}-\varepsilon(z-Vt), & 0\leqslant z\leqslant Vt\\ 0\quad, & Vt\leqslant z\end{cases} \tag{10}$$

şi atunci din (7) rezultă :

$$V(z,t)=\begin{cases}-\varepsilon^2 V(z-Vt), & 0\leqslant z\leqslant Vt\\ 0 & Vt\leqslant z\end{cases} \tag{11}$$

deoarece axa Oz s-a luat în jos.

Ecuaţia (9) devine atunci :

$$\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial z^2}-\left(\lambda^2+\frac{s^2}{c^2}\right)\varphi_{12}=\frac{\varepsilon^2 V^2}{s^2}\,e^{-\frac{sz}{V}} \tag{13}$$

iar soluţia ei este :

$$\varphi_{12}=\frac{\varepsilon^2 V^2}{s^2}\,\frac{e^{-z\sqrt{\lambda^2+\frac{s^2}{c^2}}}-e^{-z\frac{s}{V}}}{\lambda^2+s^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{V^2}\right)}. \tag{13}$$

Folosind acum condiţia (3), rezultă, după transformările corespunzătoare, punînd în plus $s=\beta c$,

$$\left(\frac{\partial^2 Z_1}{\partial t^2}\right)_2=\frac{\chi}{\beta(\beta+M\sqrt{\lambda^2+\beta^2})},\quad M=\frac{V}{c},\quad \chi=\text{const.} \tag{14}$$

Inversînd această transformare, se obţine

$$\begin{aligned}Z(r,t)&=\varepsilon^2 Vt-\frac{\varepsilon^2V^2t^2}{2r}+\varepsilon^2 Vt\log\frac{Vt+\sqrt{V^2t^2+r^2(1-M^2)}}{r(1+M)}-\\&-\varepsilon^2\sqrt{V^2t^2+r^2(1-M^2)}+\varepsilon^2 r\left(1-\frac{M^2}{2}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

avînd în vedere că $Z(ct,t)=\left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)_{r=ct}=0$.

Această formulă se poate particulariza pentru cazul fluidelor incompresibile la formula găsită de A. G. Mackie [4]. Se observă totodată caracterul automodelic la care trebuia să ne aşteptăm ; la fel, nu este surprinzător că valoarea $M=1$ nu joacă nici-un rol. În fine, trebuie subliniat faptul că valoarea lui Z devine extrem de mare în imediata apropiere a conului, ceea ce este incompatibil cu cerinţele teoriei liniarizate. Totuşi modelul curgerii liniarizate este, după cum se poate remarca, satisfăcător calitativ.

Compararea ecuaţiei obţinute de Mackie [4] cu ecuaţia (15) indică efectele de compresibilitate datorate suprafeţei libere : tendinţa de a micşora ridicarea acestei suprafeţe.

Primită la redacţie la 23 ianuarie 1967.

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România, Str.
M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. БАГДОЕВ, А. Г., Вестник Моск. Ун-та, **2**, 49–53 (1959).
2. ФЛИТМАН, Л. М., П М М, **22**, *6* (1958).
3. ГАЛИН, Л. А., П М М, **II**, *6* (1947).
4. MACKIE, A. G., The Quart, J. Mech. Appl. Math., **XV**, *2*, 137 (1962).
5. MACKIE, A. G., The Journ. Aust. Math. Soc., **III**, *3*, 340 (1963).
6. OGILVIE, F. T., Schiffstechnik, **10**, *53*, 147 (1963).
7. PINSENT, H. G., J. Fluid Mech., **25**, *3*, 577 (1966).
8. ПОРУЧИКОВ, П М М, XXVIII, **4**, 797 (1964).
9. САГОМОНЯН, А. Я., *Пространственные задачи по неустановившемуся движ.* сжимаемой жидкости, М, 1962.

PROGRAMAREA LA CALCULATORUL MECIPT-1 A ALGORITMULUI DE MINIMIZARE A FUNCȚIILOR PSEUDOBOOLEENE

DE

T. GAȘPAR

O funcție pseudobooleană este o funcție cu valori reale (întregi) și variabile bivalente. Într-o serie de probleme practice apare necesitatea găsirii minimului unei asemenea funcții și a punctelor unde este atins. Prezenta lucrare prezintă programul întocmit pentru MECIPT-1 — de realizare a algoritmului de calcul a minimului funcțiilor pseudobooleene, algoritm dat de P. L. Ivănescu, I. Rosenberg și S. Rudeanu.

Funcție pseudobooleană se numește o funcție definită pe L_2^n și cu valori în mulțimea numerelor reale (în majoritatea aplicațiilor practice, valorile funcțiilor pseudobooleene sînt numere întregi). O clasă foarte largă de probleme care apar atît în domenii teoretice cît și mai ales în diverse probleme practice, pot fi reduse la rezolvarea următoarei probleme de minim : Se dă o funcție pseudobooleană f de n variabile (bivalente) ; să se găsească minimul acestei funcții și toate punctele din L_2^n în care minimul este atins. Problemele care se pot formula astfel sînt de exemplu : alegerea implicanților primi care să intre în forma normală disjunctivă minimală a unei funcții booleene, determinarea numărului cromatic al unui graf, programarea polinomială în numere întregi, programarea cu variabile bivalente etc.

Teoretic, găsirea minimului unei funcții pseudobooleene și a punctelor de minim este totdeauna posibilă. Totuși, deoarece funcția de obicei nu se dă sub forma unei tabele, ci sub forma unui polinom, în practică calculul minimului și al punctelor de minim nu este totdeauna foarte ușor. Într-adevăr, cea mai simplă formă de a da o funcție pseudobooleană este de a o da sub forma unui polinom care să fie o sumă de monoame, fiecare monom conținînd doar variabilele funcției date la puterea 1, iar polinomul dat neconținînd termeni asemenea. Pentru fiecare funcție

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1135 – 1148, BUCUREȘTI, 1967

pseudobooleană există un polinom de acest tip unic determinat (demonstraţia existenţei şi unicităţii se poate face uşor prin inducţie după numărul de variabile) pe care îl vom numi polinom canonic al funcţiei date. O funcţie pseudobooleană mai poate fi dată şi sub forma unui polinom ale cărui monoame, afară de variabilele date, să conţină şi negaţiile acestora. De exemplu, în cazul în care ne dăm funcţia sub formă de tabelă, este valabilă următoarea formulă de interpolare, care se demonstrează la fel ca formulele de interpolare din algebra booleană :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in L_2} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

unde x^0 înseamnă $\overline{x} = 1 - x$. Trecerea de la polinomul scris sub această formă la forma obişnuită se face înlocuind pe $\overline{x}$ cu $1 - x$ şi făcînd calculele.

În cazul în care funcţia ni se dă sub forma polinomului canonic cu p monoame cu coeficient nenul, funcţia fiind de n variabile, dacă am vrea să calculăm valoarea funcţiei în fiecare punct din L_2^n şi să comparăm aceste valori — ceea ce la o maşină de calcul ar cere evident un program foarte simplu şi nici n-ar necesita capacitatea mare de memorie — ar trebui să efectuăm un număr de $(4 + 7p)\, 2^{n-1}$ adunări, ceea ce este evident mult.

În [1], P. L. Ivănescu, I. Rosenberg şi S. Rudeanu au dat un algoritm de rezolvare a acestei probleme, care în problemele practice, ţinînd seamă de anumite particularităţi pe care le prezintă acestea în general, duce la o substanţială reducere a timpului de lucru.

Scopul acestei lucrări este de a prezenta modul de programare la maşina de calcul a acestui algoritm în aşa fel ca maşina să ţină cont de particularităţile amintite.

Algoritmul constă din următoarele (v. [1]) :

Se dă funcţia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de exemplu sub forma de polinom canonic, cum îl vom da în cazul maşinii de calcul.

Se construiesc 4 şiruri de funcţii : $f_l(x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n)$ g_l, $h_l(x_{l+1}, \ldots x_n)$ şi $\varphi_l(x_{l+1}, \ldots, x_n)$, dintre care primele 3 sînt pseudobooleene, iar ultima booleană, în felul următor :

1) $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2) Pentru un l dat punem :

$$f_l(x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n) = x_l\, g_l(x_{l+1}, \ldots, x_n) + h_l(x_{l+1}, \ldots, x_n).$$

O asemenea descompunere este posibilă, deoarece o funcţie pseudobooleană este liniară în fiecare din variabilele sale.

3) Construim funcţia booleană φ_l ca o funcţie parţial definită de variabilele $x_{l+1}, \ldots, x_n$, (adică de fapt drept funcţie φ_l vom lua pe una oarecare din funcţiile booleene definite peste tot şi care prelungesc pe cea parţial definită în felul următor) :

$$\varphi_l(x_{l+1}, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & g_l(x_{l+1}, \ldots, x_n) < 0 \\ 0 & g_l(x_{l+1}, \ldots, x_n) > 0 \\ \Phi & g_l(x_{l+1}, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$$

unde Φ înseamnă 0 sau 1, adică înseamnă că în acest punct φ_l nu e definit.

4) Construim funcţia :

$$f_{l+1}(x_{l+1}, \ldots, x_n) = \varphi_l(x_{l+1}, \ldots, x_{nl})\, g_l(x_{l+1}, \ldots, x_n) + h_l(x_{l+1}, \ldots, x_n).$$

Se vede uşor că în această formulă putem lua oricare din funcţiile φ_l, prin aceasta obţinîndu-se o singură funcţie f.

Se demonstrează că funcţia f_{n+1} astfel construită, care este o constantă, este valoarea minimului, iar punctele de minim $x'_l, x'_2, \ldots, x'_n$ verifică relaţiile :

$$x'_l = \varphi_l(x'_{l+1}, \ldots, x'_{l\,n}),$$

Punctele de minim le construim în felul următor : φ_n ne dă valoarea (valorile) lui x_n. Presupunem cunoscute toate sistemele $(x_{l+1}, \ldots, x_n)$, care pot intra într-o soluţie (verifică condiţia de mai sus). Atunci pentru fiecare sistem determinăm valoarea (valorile) lui x_l din această relaţie.

Faptul că pot apare mai multe puncte de minim, apare aici prin aceea că funcţiile φ_l nu sînt unic definite.

Particularitatea principală a majorităţii exemplelor care apar din aplicaţiile practice ale minimizării funcţiilor pseudobooleene, care face eficientă acest algoritm, este acea că funcţiile g_l, care depind de $n - l$ variabile, în realitate depind efectiv doar de un număr mai mic de variabile (eventual de nici una).

Greutatea principală a programării acestei probleme a constat mai precis în a face maşina să ţină seama de această particularitate.

Vom considera toate funcţiile ca funcţii de puncte din L_2^k pe care le vom lua ca vectori booleeni.

Vectorii booleeni de unele din variabilele : $x_{l+1}, \ldots, x_n$ (care apar la pasul l al iteraţiei) îi vom nota în celulele memoriei astfel (din cauza capacităţii relativ mici a memoriei nu se poate pune problema să rezervăm mai mult de o celulă pentru un vector sau monom, deci $n \leqslant 30$) : cifra semn se ia 0 (+), în cifra i după cifra semn se pune 1 dacă x_{l+i} există între variabilele vectorului şi ia valoarea 1, în caz contrar x_{l+1} se pune 0.

În acest mod, dacă o funcţie φ_l depinde doar de o parte din variabilele sale, vom lua în considerare numai acele puncte în care variabilele fictive iau valoarea zero, căci dacă schimbăm punctul doar prin schimbarea valorii unei asemenea variabile, φ_l nu schimbă de valoare (prin definiţia noţiunii de variabilă fictivă). Variabilele de care depinde efectiv φ_l sînt evident aceleaşi ca şi variabilele de care depinde efectiv g.

Polinoamele f_l sînt memorate în 2 grupe de celule, fiecare monom cu coeficient nenul fiind păstrat în 2 celule cu o diferenţă constantă între ele : celulele A_k, respectiv B_k. În A_k se păstrează coeficientul (presupus număr întreg, convenţie care intervine doar în introducerea datelor şi tipărirea lor, deci foarte uşor de schimbat, dar în aplicaţii apar numai coeficienţi întregi), iar în B_k partea literară şi anume sub forma $\Sigma\alpha_h 2^{-h}$, unde $\alpha_h = 1$ dacă x_{l+h-1} intră în monom şi $\alpha_h = 0$ în caz contrar. În cazul în care iniţial toate monoamele vor fi diferite, ele rămîn astfel în toate etapele intermediare (adică dacă f_1 a fost introdus după reducerea termenilor asemenea atunci fiecare polinom f_l va avea termenii asemenea reduşi). Polinoamele g_l sînt păstrate în acelaşi fel, într-un alt grup de celule C_jD_j într-o formă analoagă cu f_l, cu deosebirea că în D_j prima celulă după cifra semn e rezervată lui x_{l+1} şi nu lui x_l. De asemenea, în majoritatea cazurilor valorile lui D_j le vom privi ca vectori booleeni, efectuînd cu ele operaţii logice (vectorul fiind fără cifra semn). Monoamele lui h_l sînt înscrise pe locurile rezervate polinomului f_{l+1}, întrucît ele sînt monoame ale acestuia (ocupînd chiar aceleaşi poziţii).

Pentru a descrie modul de păstrare a funcţiei φ_l ne vom folosi de relaţia de ordine a laticei L_2^k a vectorilor booleeni k dimensionali :

$$(x_{l+1}^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) < (x_{l+1}^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}) \text{ dacă } x_{l+1}^{(1)} \leqslant x_{l+1}^{(2)}, \ldots, x_n^{(1)} \leqslant x_n^{(2)}.$$

Produsul a doi vectori $V_1 = (x_{l+1}^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $V_2 = (x_{l+1}^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ este $V_3 = V_1 \cap V_2 = (x_{l+1}^{(1)} \cap x_{l+1}^{(2)}, \ldots, x_{(1)}^{(1)} \cap x_n^{(2)})$. După cum se ştie şi se şi observă uşor : $V_1 < V_2$ este echivalent cu $V_1 \cap V_2 = V_1$. De asemenea, disjuncţia $D_1 \cup D_2 = D_3$ o definim analog pe componente. Introducem, pentru un l dat, notaţiile $\varepsilon = \bigcup_j D_j$, $\varepsilon' = \bigcap^- D_j$, $\varepsilon_1' = \bigcap^+ D_j$, unde $\bigcup_j$ se ia asupra tuturor monoamelor din g care au coeficient nenul, $\bigcap^-$ se ia asupra tuturor monoamelor care au un coeficient negativ iar $\bigcap^+$ asupra celor care au coeficient pozitiv. Semnificaţia lor este următoarea : ε are unităţi în acele poziţii pentru care există cel puţin un monom care are unu în acea poziţie, deci are unităţi în dreptul acelor variabile de care g_l depinde efectiv ; ε' are unităţi în dreptul acelor variabile care apar în toţi termenii în coeficient negativ, ε_1' avînd acelaşi sens pentru termeni cu coeficienţi pozitivi. Pentru păstrarea informaţiei despre funcţiile φ_l se foloseşte un grup de 3 $(n - 1)$ celule notate respectiv H_l, E_l şi E_l' şi un grup de celule F_u, G_v, în care se introduc în continuare informaţiile despre φ_l ; aceste informaţii sînt următoarele :

În cazul în care în g_l există coeficienţi de ambele semne : dacă există măcar un V_p, cu $\varepsilon' < V_p < \varepsilon$, pentru care $g_l(V_p) > 0$, în F_u de la $u = u_1^{(l)} + 1 \ldots$ pînă la $u = u_2^{(l)}$, se introduc vectori V_p, pentru care $g(V_p) < 0$ şi $V_p < \varepsilon$ (v. mai jos). În caz că există asemenea vectori, $u_1^{(l)} < u_2^{(l)}$; în caz contrar, $u_1^{(l)} = u_2^{(l)}$.

În cazul în care nu există V_p cu $\varepsilon' < V_p < \varepsilon$ cu $g(V_p) > 0$, atunci luăm $u_1 = u_2$, deci nu se depune nimic la F_u.

În grupul de celule G_v reţinem informaţii pentru a afla toate punctele de minim (în cazul în care nu ar încăpea în memorie toate informaţiile necesare, putem renunţa la grupul de celule G_v acoperindu-le cu F_u, deoarece avem informaţii suficiente pentru a obţine un punct de minim). Ele sînt ordonate descrescător.

Pentru un l dat corespund două zone $v_2^{(l)} \leqslant v < v_1^{(l)}$ şi $v_3^{(l)} \leqslant v < v_2^{(l)}$.

În caz că într-una din cele două zone nu avem înscris nimic, limitele sînt egale.

În zona de la $v_1^{(l)}$ la $v_2^{(l)}$ punem acei vectori V_p pentru care $g(V_p) = 0$. În caz că nu există astfel de puncte, luăm $v_1^{(l)} = v_2^{(l)}$.

În cazul în care $\varepsilon' \nless \varepsilon_1'$, adică există vectori V_p cu $V_p \ngtr \varepsilon'$, dar $V_p > \varepsilon_1'$ (deci care n-au fost consideraţi pînă acum şi pentru care avem $g(V_p) > 0$), vom reţine în G_v, cu v între $v_2^{(l)}$ şi $v_3^{(l)}$, acele monoame care ca vectori nu sînt absorbite de ε' (V' absoarbe V dacă $V' < V$, adică $V' \cap V = V'$) şi de nici un alt vector care se bucură de această proprietate (există cel puţin unul). Evident, acestea sînt monoame cu coeficienţi pozitivi. În cazul $\varepsilon' < \varepsilon_1'$ se ia $v_3^{(l)} = v_2^{(l)}$.

În E'_l se introduce ε'. În E_l se introduce ε dacă există un V_p cu $\varepsilon' < V_p < \varepsilon$ și $g_l(V_p) > 0$, și $\varepsilon_1 = \varepsilon - p$ în caz contrar, unde $p = 1 - 2^{-30}$. (În registrul S, ε_1 diferă de ε doar în cifra semn).

În H_l se introduc adresele lui F_{u_2}, G_{v_2}, G_{v_3} și anume dacă se notează cu a_3 adresa lui G_{v_3}, a_2 adresa lui G_{v_2}, b_2 adresa lui F_{u_2}, atunci numărul din H are forma $a_3 2^{-10} + a_2 2^{-20} + b_2 2^{-30}$, luîndu-se $u_1^{(l)} = u_2^{(l-1)}$, $v_1^{(l)} = v_3^{(l-1)}$, fiind astfel nevoie de o celulă H_0 cu datele inițiale.

În cazul în care g_l nu are coeficienți de ambele semne, ε și ε' nu mai contează (sau $\varepsilon = \varepsilon'$ sau $\varepsilon = \varepsilon'_1$ dar nu interesează). Celula E_l nu va conține nici o informație, iar E'_l conține un număr negativ și anume :

În cazul $g_l = 0$ se ia $E'_l = -1$. Aici și în continuare cînd spunem că într-o celulă am introdus un număr întreg α, presupunem că am introdus $\alpha \cdot 2^{-30}$. În acest caz, cum φ_l e arbitrar, această informație e suficientă. Pentru simplificarea găsirii precedentului (lui u_1 și v_1), se ia în acest caz $H_l = H_{l-1}$.

În cazul $g_l \leqslant 0$, avînd toți coeficienții nenuli negativi, punem $E'_l = -2$. În acest caz luăm $u_2 = u_1$, $v_2 = v_1$ și doar în zona de la v_2 la v_3 punem monoamele (părțile literare) care nu sînt absorbite de alte monoame (interpretînd ca vectori booleeni numere corespunzătoare părților lor literare).

În cazul în care g_l are toți coeficienții nenuli pozitivi, punem $E'_l = -3$. Informația care se reține la celulele G_v este aceeași ca și în cazul $E'_l = -2$.

Să arătăm că aceste informații sînt suficiente pentru determinarea tuturor valorilor funcției φ în orice punct (în sensul că putem stabili și punctele în care φ nu e definit).

De asemenea vom arăta că pentru a găsi un singur punct de minim, informația din G_v (deci și cea din H_l referitoare la v) nu este necesară.

Într-adevăr, mai întîi cercetăm pe E'_l. El poate fi negativ sau pozitiv. Dacă E'_l este negativ, el poate fi -1, -2, -3.

Dacă $E' = -1$, φ_l este nedeterminat în orice punct, deci putem lua sau 0 sau 1 (la dorință).

Dacă $E'_l = -2$ $[-3]$, funcția φ_l poate lua valoarea 1 $[0]$ în orice punct, pentru că în acest caz $g_l \leqslant 0$ $[\geqslant 0]$. Pentru a determina punctele în care φ_l e nedeterminat, deci poate lua și valoarea 0 $[1]$, ne folosim de informația din zona G_v. Anume, H_l ne spune adresele v_2 și v_3 între care sînt înscrise monoamele lui g_l, care nu sînt absorbite de alte monoame. Într-adevăr, fie V_p un vector boolean de componente $x^0_{l+1}, \ldots, x^0_n$. Dacă există un monom astfel încît în locurile corespunzătoare variabilelor ce apar în monom avem 1, atunci, pe de o parte, monomul, privind numărul asociat lui ca vector, absoarbe pe V_p. Pe de altă parte, $g_l(V_p) \neq 0$, adică este negativ [pozitiv], φ_l fiind unic determinat. Se vede deci ușor că pentru ca φ_l să fie nedeterminat, necesar și suficient este ca să nu existe nici un monom care să absoarbă acel punct. Se observă de asemenea că este suficient să reținem doar monoamele care nu sînt absorbite de alte monoame pe baza tranzitivității relației $<$. Deci, pentru un vector V_p dat vom verifica dacă este absorbit de un monom dintre cele reținute între v_2 și v_3. Dacă găsim unul care îl absoarbe, φ_l e unic determinant, deci are numai valoarea pe care i-am determinat-o inițial (1 [0]) ; dacă, comparîndu-l cu toate monoamele, nu găsim nici unul care să-l absoarbă, atunci putem să-i dăm lui φ_l și cealaltă valoare.

În cazul în care E'_l e pozitiv, el conține pe ε', deci îl cunoaștem pe acesta. Apoi luăm informația din E_l, care se compune din semnul acestei celule (să-l notăm σ) și ε, care este însuși conținutul lui E_l sau acesta adunat cu p ($p = 1 - 2^{-30}$ cel mai mare număr pozitiv ce încape în mașină). Evident, conținutul lui $E_l \neq 0$, întrucît $0 < \varepsilon < p$, unde 0 este vectorul nul iar p vectorul cu toate cele 30 de componente 1, este diferit de ambele deoarece g_l nu poate depinde de 30 de variabile (g_1 depinde de cel mult $n - 1 \leqslant 29$ variabile, iar următoarele de mai puține), iar în cazul în care ne aflăm, $E'_l \geqslant 0$, g_l depinde efectiv de cel puțin o variabilă, conținînd cel puțin 2 monoame neasemenea. Deci din E_l scoatem pe ε și pe σ ($\sigma = 0$ dacă $E_l > 0$ și $\sigma = 1$ dacă $E_l < 0$).

Din H_l și H_{l-1} scoatem pe u_1, u_2, v_1; v_2, v_3.

Fie acum un vector V_p pentru care vrem să aflăm $\varphi_l(V_p)$. Mai întîi construim $V'_p = V_p \cap \varepsilon$ care va avea aceleiași valori ca V_p pentru variabilele de care φ_l depinde și 0 în rest. Avem, evident, $V'_p < \varepsilon$ și $\varphi_l(V'_p) = \varphi_l(V_p)$. Verificăm mai întîi dacă $\varepsilon' < V'_p$. În caz contrar, $g_l(V'_p) \geqslant 0$ și putem să-l luăm pe $\varphi_l(V'_p) = 0$. În acest caz verificarea dacă φ_l poate lua și cealaltă valoare o facem cu totul analog ca și în cazul $E'_l = -2\,[-3]$ cu ajutorul informației din zona G_v, $v_3 \leqslant v \leqslant v_2$, întrucît ca g_l să fie egal cu 0, este necesar și suficient ca V_p să nu fie absorbit de nici un monom cu coeficient pozitiv (evident că cei mai mari decît ε' nu-l pot absorbi).

În cazul în care $\varepsilon' < V'_p$, avînd $\varepsilon' < V'_p < \varepsilon$, încercăm dacă V'_p coincide cu unul din vectorii din zona F_u ($u_1 \leqslant u < u_2$) sau G_v ($v_2 \leqslant v < v_1$). Dacă V'_p coincide cu un vector din F_u, avem $\varphi_l(V') = 1$. În caz contrar, dacă $\sigma = 0$, putem lua $\varphi_l = 0$. Dacă $\sigma = 1$, în F_u nu avem informație, dar atunci putem lua $\varphi_l(V'_p) = 1$ pentru orice $V'_p > \varepsilon'$, căci pentru aceste puncte avem $g_l(V'_p) \leqq 0$ (acesta e semnificația lui σ). Dacă nu l-am găsit pe V'_p în zona F_u, îl căutăm în zona G_v. Dacă îl găsim, φ_l e nedeterminat, dacă nu-l găsim, atunci are o valoare unică (cea determinată mai înainte).

Deci pentru orice vector V_p putem să-l determinăm pe $\varphi(V_p)$ complet, iar pentru o singură valoare nu avem nevoie de informația din zona G_v.

S-ar putea rezolva problema mult mai simplu, reținînd pentru fiecare φ_l toți vectorii V_p pentru care $g_l(V_p) < 0$ și cei pentru care $g_l(V_p) = 0$. Însă ar fi nevoie să se rețină foarte multă informație, care necesită o memorie foarte mare și de asemenea și timp lung de lucru. (De exemplu dacă verificăm absorbția lui V_p în zona v_2, v_3, atunci el nu trece prin celelalte zone și reciproc, deci pentru un V_p dat, calculul e mai rapid).

Programul se compune din 2 părți, care pentru a nu ocupa prea mult loc în memorie, se introduc pe rînd în memoria mașinii.

Prima parte conține, pe lîngă introducerea datelor inițiale, calculul succesiv al polinoamelor f_l și al funcțiilor φ_l. Ca rezultat al aplicării acestei părți a programului în memoria mașinii, rămîne calculată funcția pseudobooleană $f_n(x_n) = ax_n + b$ printr-un număr (0, 1 sau 2) care indică cîte monoame cu coeficient nenul intră în compunerea polinomului, coeficienții nenuli și de asemenea informațiile descrise mai sus despre funcțiile φ_l, $l = 1, \ldots, n - 1$.

Partea a doua stabilește valoarea (valorile) lui φ_n și a minimului care este $f(\varphi_n) = a\varphi_n + b$, apoi stabilește punctele în care este atins minimul și tipărește rezultatele.

Partea I-a după introducerea datelor inițiale, care este prevăzută cu o oprire pentru a putea verifica dacă datele inițiale au fost introduse corect și după inițializările respective, este în fond formată dintr-un ciclu corespunzător unei iterații, după l, de calcul al lui f_{l+1} și φ_l, avînd la sfîrșit readresările necesare măriri lui l cu o unitate și a verificării sfîrșitului de ciclu.

În cadrul trecerii de la un ciclu la altul, informația din H_l se păstrează într-o celulă L_0, unde avem informația lui H_{l-1} pînă la sfîrșitul stabilirii lui φ_l cînd introducem în L_0 informația necesară pentru H_l, formînd însă numai schimbările necesare după caz.

Ciclul pentru un l dat lucrează astfel: la început cu ajutorul unui bloc (S) (Blocul S — se descrie mai jos) se construiește polinomul g_l sub forma unei mulțimi de monoame înregistrate în C_j (coeficienți) și D_j (partea literară cu x_{l+1} pe primul loc după cifra semn), împreună cu valorile lui ε, ε', ε_1' precum și numărul monoamelor cu coeficienți nenuli prevăzute în anumite celule de lucru. De asemenea, polinomul h_l fiind înscris în locul rezervat lui f_{l+1}, cu informația despre numărul de termeni din care este compus înscrisă în blocul de reducere a termenilor asemenea (v. mai jos B.R.T.A.) și în cazul în care nu există termeni de un anumit semn, în loc de ε' sau ε_1' avem înscris $p\ (= 1 - 2^{-30})$.

Blocul S se efectuează în felul următor: se iau pe rînd monoamele f_l (partea literară) și separînd prima cifră după cifra semn, prin înmulțirea cu 2 aceasta trece în cifra semn, pe care izolînd-o obținem partea literară a monomului. [La MECIPT se face prin anularea lui I și după introducerea lui B_i în S se face o deplasare lungă stînga cu o unitate]. Dacă monomul face parte din h_l (cifra semn este 0), monomul astfel obținut împreună cu coeficientul lui se înscrie în primul loc liber pentru monoamele din f_{l+1} [1]). Dacă monomul face parte din g_l, atunci îl introducem cu cifra semn ștearsă în D_j, în același timp efectuînd produsul logic între $\overline{D}_j$ și conținutul celulei care îl va conține pe ε ($\overline{\varepsilon}$), care inițial, ca și celulele care îl vor conține ε' și ε_1', au fost umplute (în porțiunea de inițializare a blocului, unde se asigură evident și valorile inițiale ale adresei monoamelor din f_l, h_l și g_l) cu $p = 1 - 2^{-30}$ (1 în toate pozițiile afară de semn).

La MECIPT acest lucru se face deplasînd cu D.L.D [2]) pe S în I, apoi cu I în S și memorează. În memorie se depune $-D_j$, iar în S apare $\overline{D}_j$ (chiar în cazul $D_j = 0$ prin I.S.M.E. [2]), 0 negativ din I apare în S ca 0 negativ).

De asemenea, în funcție de semnul coeficientului care se depune în C_j, se face produsul logic între D_j și ε' respectiv ε_1'. Ținînd seama de faptul că nu putem stabili dinainte pentru fiecare etapă cîte monoame cu coeficienți nenuli are fiecare g_l (maximul e prea mare pentru a fi luat în socoteală, depășind capacitatea memoriei), este prevăzută (la readresarea lui j) o oprire condiționată în cazul în care nu ar mai fi loc în memorie (în acest caz trebuie schimbată distribuția memoriei sau luate alte măsuri). La sfîrşitul blocului, după ce s-au prelucrat toate monoamele lui f_l, se schimbă ε în $\overline{\varepsilon}$ (cum $\varepsilon \neq 0$, lucrul constă din trecerea lui $-\varepsilon$ în S şi înmulţirea logică cu p, care face ca semnul complementarei să devină $+$). De asemenea se stabileşte numărul de termeni din h_l (de fapt din f_{l+1} deja găsiţi) şi din g_l pentru calculele următoare.

---

[1]) Cum numărul monoamelor din h_l nu poate depăși pe cel al monomelor din f_l deja analizate, locul pe care trebuie depus acest monom este deja „liber", în sensul că monomul care îl ocupa a fost deja analizat; trebuie să reținem doar cîte monoame din h_l am obținut.

[2]) Vezi [2] și [3].

După terminarea blocului S se analizează dacă există în g coeficienţi cu semnul $+$ şi $-$ (cu ε' şi ε'_1, care pot fi p doar dacă nu există coeficienţi de semnul respectiv).

Dacă $g \equiv 0$, atunci avînd $f_{l+1} = h_l$ deja construit, punem în E'_l pe -1, în H_l informaţia din L_0 (din H_{l-1}) şi mărim pe l cu o unitate, trecînd astfel la ciclul următor.

Dacă în g_l nu există decît coeficienţi negativi, luăm $f_{l+1} = h_l + g_l\,\varepsilon'$ (evident ε' se absoarbe de toţi termenii din g_l, înmulţirea făcîndu-se nu ca vectori, ci ca monoame, adică efectiv făcîndu-se $\varepsilon' \cup a$, unde a este vectorul asociat monomului). Aceasta se face cu ajutorul blocului T şi B.R.T.A.

Blocul T e o subrutină în sensul că e folosit şi în alt loc, avînd deci o ieşire variabilă. El ia pe rînd monoamele, coeficientul îl trece în L_1, iar partea literară a produsului $a\varepsilon'$, adică $a \cup \varepsilon'$, în S, adăugînd monomul la polinom prin folosirea blocului B.R.T.A.

Blocul B.R.T.A. adaugă noi termeni la polinomul f_{l+1}, făcînd însă şi reducerea acestui termen nou cu toţi cei existenţi pînă atunci (din h_l sau adăugaţi ulterior; cei din h_l fiind diferiţi, ei provin din termeni diferiţi ai lui f_l). După ce se aranjează ieşirea (ca subrutină la care se mai fac referiri, deci trimiterea se face prin transfer cu revenire), trece partea literară găsită iniţial în S, în I şi o compară pe rînd cu părţile literare ale monoamelor deja înregistrate. Dacă o găseşte identică cu una, înseamnă că avem termeni asemenea, deci coeficientul din L_1 (celulă de lucru în care se găseşte subrutina B.R.T.A., coeficientul monomului) se adună la coeficientul monomului găsit. Dacă acest coeficient obţinut e diferit de zero, acţiunea B.R.T.A. s-a terminat, în caz contrar, aduce ultimul monom înregistrat în locul monomului al cărui coeficient s-a anulat şi micşorează cu o unitate indicele ultimului loc ocupat de un monom. După aceasta se iese din bloc. Dacă nu se găseşte acest monom ca fiind termen asemenea cu unul din cei anteriori, se măreşte cu o unitate locul ultimului monom şi dacă încă există acest loc, se înregistrează monomul. În caz contrar maşina se opreşte indicînd (prin adresa la care s-a oprit) că în forma dată problema nu încape în memorie, adică spaţiul rezervat monoamelor lui f_{l+1} nu a fost suficient (ca mai sus în cazul lui g_l nici numărul acestora nu se poate determina dinainte, cu atît mai mult cu cît s-ar putea ca numărul monoamelor lui f_{l+1} să fie mai mic, însă la momentul dat să existe monoame care s-ar reduce, dar nu mai avem spaţiu pentru a face acest lucru). În caz de înregistrare se iese din blocul B.R.T.A.

După formarea lui f_{l+1} se înregistrează în ε', -2 (care se va înregistra în E'_l) şi se trece la completarea informaţiei despre φ_l. Pentru aceasta în H_l se ia $u_2 = u_1$ (din H_{l-1}) şi $v_2 = v_1$ (v_3 din H_{l-1}) şi se trece la executarea subrutinei A (trimiterea făcîndu-se cu transfer cu revenire) în forma I-a care pune în porţiunea v_2, v_3 toate monoamele din g neabsorbite de alte monoame din g_l (subrutina analizînd şi absorbţiile). De asemenea, formează pe v_3 în H_l şi în v_1 (în program la locul corespunzător).

Blocul A lucrează în felul următor: ia pe rînd monoamele din g_l (părţile lor literare din D_j) (în forma a II-a compară dacă nu cumva sînt absorbite de ε', adică dacă nu cumva $D \cap \varepsilon' = \varepsilon'$, în acest caz trece la monomul următor) şi dacă e primul, îl înregistrează în G_v. Dacă deja a înregistrat monoame, atunci compară, pe rînd, monomul dat cu fiecare monom înregistrat dacă cel înregistrat îl absoarbe sau nu; dacă da, atunci trece la monomul următor din g_l, dacă nu, verifică dacă nu cumva monomul dat din g_l absoarbe monomul înregistrat. Dacă nu-l absoarbe, trece la compararea monomului dat cu următorul monom înregistrat, dacă aşa ceva mai există, dacă nu, îl înregistrează şi trece la următorul monom din g_l. Dacă monomul dat îl absoarbe pe cel înregistrat, se înregistrează în locul lui şi se studiază toate monoamele înregistrate după cel absorbit, cele care nu sînt absorbite de monomul nou înregistrat se înregistrează pe rînd din nou în continuare, iar cele care se absorb nu se mai înregistrează, apoi după ce s-au studiat toate se fixează noua adresă a ultimului monom înregistrat (de exemplu dacă în g_l al 10-lea monom e termen liber şi eventual toate primele 9 s-au înregistrat, cînd apare termenul liber el absoarbe pe toate, deci rămîne singur) şi se trece la următorul monom din g_l. După ce se termină analiza tuturor monoamelor din g_l, se stabileşte v_3 în L_0 (pentru H) iar în program adresa $v_1^{(l+1)} = v_3^{(l)}$ pentru ciclul următor şi se iese din subrutină.

După efectuarea rutinei A se înregistrează ε' în E' şi L_0 în H. Porţiunea de la înregistrarea în E'_l este comună pentru toate ramurile ciclului, fiind urmată de mărirea lui l.

În cazul în care toţi coeficienţii nenuli sînt > 0, se ia $f_{l+1} = h_l$ (deja este gata) se pune -3 în ε' şi se procedează în rest exact ca în cazul coeficienţilor < 0 (chiar cu aceeaşi porţiune de program).

În cazul în care în g există coeficienţi nenuli de ambele semne, se calculează valoarea lui g pentru toţi vectorii V_p cu $\varepsilon' < V_p < \varepsilon$. Pentru aceasta, diferenţa $\varepsilon - \varepsilon'$ o descompunem pe componente, înscriind într-un număr de celule de lucru unităţile care o compun (dacă $\varepsilon - \varepsilon' = \sum_{\alpha \in I} 2^{-\alpha}$, atunci în fiecare celulă înscriem $2^{-\alpha}$, pentru fiecare element α din I rezervînd cîte o celulă) şi de asemenea dacă numărul unităţilor găsite este β, asociem numărul $2^\beta - 1\ (\cdot 2^{-20})$, adică numărul care are tot atîtea unităţi ca şi $\varepsilon - \varepsilon'$, dar grupate pe ultimele poziţii. De asemenea, în subrutina R care efectuează aceste operaţii se face constatarea dacă unităţile în $\varepsilon - \varepsilon'$ erau sau nu grupate (în fond dacă sînt grupate nu ne interesează decît unitatea cea mai puţin semnificativă şi această informaţie).

Intrarea în subrutina R se face în felul următor: $-\varepsilon'$ este introdus în S, apoi se face un transfer cu revenire. În R se face cercetarea sumei $S + \varepsilon$, care se păstrează în I, cifră cu cifră, începînd cu cifra a $(n + 1 - l)$ — a după virgulă (se modifică de la ciclu la ciclu printr-o simplă adunare) verificîndu-se dacă este 1 sau 0. Fiecare unitate găsită se înscrie în şirul de celule K_i şi de asemenea se măreşte celula L_5 în care se construieşte $2^\beta - 1$, iar dacă e zero, se trece mai departe. De fiecare dată cînd se găseşte o unitate, ea se scade din I şi se iese din blocul R dacă I devine 0 (în caz că ar apare în mod parazitar o unitate de ordin mai mic decît cele care pot apare, nu se mai iese din subrutină, ci maşina se opreşte la D.C.R.). Înainte de ieşirea din subrutină, se introduce în subrutina D

(v. mai jos) o informaţie despre β. De asemenea, în prima formă a subrutinei după primul 1 găsit se schimbă anumite trnsferuri pentru ca atunci cînd se găseşte încă un 0 să se dea informaţia „negrupat", în caz contrar la ieşire într-o anumită celulă vom avea informaţia „grupat".

După ieşirea din subrutina R se trece la calculul valorilor lui $g(V_p)$ [3]. Calculul valorii lui $g(V_p)$ se face astfel: V_p se introduce în I, se anulează o celulă de lucru care va conţine valoarea lui g, apoi se compară I pe rînd cu D_h. Dacă $I \cap D_h = D_h$ sau nu. În caz că este egal, atunci partea literară a acestui monom e 1, în caz contrar, zero [cum $I \cap D_h \leqslant D_h$, comparaţia se face pentru $<$]. În acest mod pe rînd, I se compară cu toate monoamele şi se face suma acelor c_h pentru care nu avem $I \cap D_h - D_h < 0$, suma respectivă fiind chiar $g(V_p)$. În caz că am obţinut $g(V_p) < 0$, mărim pe u cu o unitate şi dacă încă este loc ($u < v$), înregistrăm pe V_p, dacă nu, maşina se opreşte.

În caz că avem $g(V_p) = 0$, micşorăm pe v cu o unitate şi dacă mai este loc, înregistrăm pe V_p. Zonele F_u, G_v sînt într-o porţiune comună a memoriei u mergînd crescător, iar v descrescător, în momentul cînd s-ar amesteca informaţiile din zonele F şi G (adică ar trebui să înregistrăm în F_u, dar celula următoare e ocupată deja de un G_v sau invers), maşina se opreşte şi eventual putem renunţa la G_v renunţînd la găsirea tuturor punctelor de minim şi mulţumindu-ne cu unul singur. Dacă găsim $g(V_p) > 0$, nu înregistrăm pe V_p, dar înregistrăm 0 în L_3 ca semn că am avut măcar un asemenea punct.

Valorile lui V_p le începem cu ε, apoi după ce am luat un V_p, următorul îl formăm astfel: Dacă din blocul R s-a dat semnalul „grupat", atunci scădem din I cifra cea mai puţin semnificativă din $\varepsilon - \varepsilon'$ [care este înregistrat în K_1, fiind chiar prima unitate găsită în cadrul analizei din rutina R]. Reluăm calculul pînă cînd nu ajungem la $I < \varepsilon'$ ($<$ ca număr este echivalent în acest sens cu $<$ ca vector). În cazul cînd ajungem la $I < \varepsilon'$, trecem mai departe la cercetarea vectorilor $< \varepsilon'$, dar cu altă porţiune de program (în acest caz nu mai calculăm g). Dacă am avut informaţia „negrupat", ne folosim de numărul înregistrat în L_5 (iniţial $2^\beta - 1$) din care scădem pe rînd 1, terminînd cu momentul cînd L_5 devine mai mic ca zero. În caz că avem o valoare dată, desface, pe L_5 cu ajutorul blocului D, îi adăugăm ε' şi obţinem pe V_p care se depune în I şi se reia calculul.

Blocul D funcţionează în felul următor:

Se separă din L_5 ultimele β cifre şi se introduc în primele poziţii ale lui I. În celula în care vrem să formăm $V_p - \varepsilon'$ punem zero, apoi analizăm pe rînd cifrele lui I pînă cînd nu rămîn decît zerouri. Dacă în dreptul cifrei i găsim 1, atunci adunăm la $V_p - \varepsilon'$ pe K_i, iar dacă găsim 0, nu-l adăugăm. La sfîrşit se iese din bloc avînd în registrul S pe $V_p - \varepsilon'$.

Se vede uşor că prin acţiunea combinată a blocurilor R şi D obţinem exact toţi vectorii V_p cu $\varepsilon' < V_p < \varepsilon$ şi numai pe ei ($<$ în sens de vector şi nu ca număr) fără a fi nevoie să generăm toate numerele dintre ε' şi ε (în cazul în care unităţile nu sînt grupate).

După ce am calculat $g(V_p)$ pentru toţi V_p cuprinşi, ca vectori, între ε' şi ε, formăm pe u_2 şi v_2 în L_0 scoţînd totodată pe u_1 de aici pentru calculul noului polinom f_{l+1} care urmează. În cazul în care $L_3 < 0$, adică nu am avut nici un V_p (între ε' și ε) cu $g(V_p) > 0$, atunci renunțăm la informația înregistrată la F_u reintroducînd vechea adresă (u_1) în locația de memorie pentru F_u și păstrînd pe $u_2 = u_1$. După aceasta se verifică dacă $\varepsilon' < \varepsilon'_1$. Dacă da, înseamnă că nu există nici un vector V_p cu $V_p \not> \varepsilon'$ pentru care $g(V_p) \neq 0$, deci luăm în $L_0 : v_3 = v_2$ și trecem la calculul lui f_{l+1}. În caz că $\varepsilon' \not< \varepsilon'_1$, înainte de a trece la calculul lui f_{l+1} înregistrăm în G_v pe porțiunea dintre v_2 și v_3 acele monoame (evident numai partea literară) care nu sînt absorbite de ε'_1. Acest lucru se face cu subrutine A sub a 2-a formă (în anumite ieșiri variabile modificate) care stabilește și valoarea finală a lui $L_0 (H_l)$.

---

[3] Iniţial într-o celulă (notată L_3) punem $-p = 2^{-30} - 1$.

Calculul polinomului f_{l+1} se face astfel. În caz că $L_3 < 0$ se ia $\varphi_l = \varepsilon'$, deci $f_{l+1} = h_l + \varepsilon' g_l$ ceea ce se efectuează cu subrutina T.

În caz că $L_3 = 0$ dar totuși $u_1 = u_2$, atunci luăm $\varphi = 0$ deci $f_{l+1} = h_l$ deja este generat. Dacă $u_1 < u_2$, fiecărui vector v_p înregistrat la F_u (evident $u_1 < u \leqslant u_2$) îi asociem un polinom de forma $\prod\limits_{i \in \varepsilon} x_i^{\alpha_i}$, unde $i \in \varepsilon$ înseamnă că i parcurge indici conținuți în ε (de care depinde g_l) și unde α_i e valoarea cifrei i în F_u iar x_i^0 înseamnă $(1 - x_i)$. Valoarea polinomului $\varphi_l\, g_l$ care trebuie adunat la h_l îl vom obține atunci înmulțind fiecare polinom asociat unui F_u cu fiecare monom din g. Această sumă de produse o obținem astfel : luăm un monom din g, cu partea lui literară în D_h. Dacă în D_h avem 1 într-o poziție în care în F_u avem 0, produsul va fi zero căci x_i^0 poate fi privit și ca funcție pseudobooleană $\overline{x}_i$, iar $x_i \overline{x}_i = 0$, deci întreg produsul este zero. (Rezultă din faptul că un monom e de fapt un produs de funcții pseudobooleene x_i care iau valoarea reală 1 dacă x_i — ia valoarea binară 1 și valoarea reală 0 dacă x_i ia valoarea binară 0). Dacă $D_h < F_u$, atunci pe baza absorbției $D_h . F_u$ (produs ca polinoame) va fi F_u avînd drept coeficient, coeficientul lui D_h (adică numărul din C_h). Generarea tuturor monoamelor din F_u se face astfel :

Restrîngem în L_5 pe $\varepsilon - F_u$ cu ajutorul blocului R și apoi pentru fiecare valoare a lui L_5 între 0 și $2^\beta - 1$, introducem coeficientul în L_1 și desfacem pe L_5 într-un vector dintre $\varepsilon - F_u$ și 0, la care adăugînd pe F_u obținem un vector între F_u și ε și în același timp prin modificarea unei ieșiri variabile din D schimbăm semnul lui L_1 de cîte ori găsim o unitate.

În acest fel avînd produsul $c(x_{i_1} \ldots x_{i_k}) \cdot (1 - x_{j_1})\,(1 - x_{j_2}) \ldots$ $\ldots (1 - x_{j_p})$ cu $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ din F_u și $x_{i_1} \ldots x_{j_1} \ldots x_{j_p}$ din ε (produsul asociat lui F_u) obținem exact termeni de forma $(-1)^S\, c(x_{i_1} \ldots x_{i_k} \cdot$ $\cdot\, x_{j_{h_1}} \ldots x_{j_{h_s}})$, $S \leqslant p$, și avînd coeficientul lor, coeficientul inițial înmulțit cu $(-1)^S$, care se vede că sînt exact termenii produsului dat.

Acești termeni sînt pe măsura obținerii, adăugați la f_{l+1} cu ajutorul subrutinei B.R.T.A. Repetînd ciclic această operație pentru fiecare h și pentru un h dat pentru fiecare u din intervalul (u_1, u_2), h luînd de asemenea toate valorile posibile (cîți termeni are g), obținem întreg polinomul f_{l+1}.

După obținerea polinomului, indiferent pe ce cale din cele trei de mai sus, memorăm pe $\varepsilon + L_3$ în E_l apoi trecem la memorarea lui ε' în E'_l comun cu cele anterioare ($\varepsilon' = -2, -3$).

Înainte de ieșirea dintr-un ciclu l pentru a trece la următorul se fixează numărul de termeni ai polinomului f_{l+1}.

Dacă acesta este 0, nu se reia tot ciclul, ci se trimite imediat la memorizarea lui — 1 în E_l' ajungîndu-se imediat astfel la sfîrşit. La sfîrşit după ce am terminat de efectuat toate ciclurile (adică ar urma $l = n$), trimitem în partea a 2-a o informaţie despre numărul de termeni şi trecem la partea a 2-a.

În partea a 2-a la început se stabileşte valoarea lui f_{n+1} şi φ_n şi anume se caută dacă există un monom cu partea literară x_n. Dacă există, se cercetează semnul coeficientului său, dacă e negativ se ia $\varphi_n = 1$ şi minimul egal cu suma celor 2 coeficienţi existenţi dacă monomul are 2 termeni, sau cu coeficientul lui x_n dacă avem un singur termen. Dacă coeficientul lui x_n e pozitiv, se ia $\varphi_n = 0$ şi minimul este coeficientul celuilalt termen, dacă există, sau 0. Dacă nu există termen în x_n (are coeficient 0), atunci φ_n e arbitrar şi minimul este coeficientul termenului liber, dacă există, sau 0 în caz contrar.

De remarcat aici că această porţiune de program analizează polinomul după numărul de termeni dacă e 0, 1 sau mai mare. Deci dacă polinomul iniţial nu a avut toţi termenii asemenea reduşi (şi anume termeni liberi sau termeni cu partea liberă x_n, căci ceilalţi nu mai lungesc calculele, dar pînă la urmă dacă e loc se reduc), atunci dacă va rezulta un polinom cu mai mult de 2 termeni, se va lua polinomul format cu primele 2 monoame dintre care primul cu partea literară pe care o are (termen liber sau x_n) iar celălalt cu cealaltă parte literară.

După calculul minimului el este tipărit la maşină ca număr în baza zece (despre normare vezi mai jos) şi se trece la stabilirea punctelor de minim. Punctele de minim se generează într-un şir de celule M_i şi anume în felul următor. Dacă φ_n este unic determinat, punem în M_1, 2^{-1} dacă $\varphi_n = 1$ şi 0 dacă $\varphi_n = 0$. În caz de nedeterminare în M_1 şi M_2, punem 2^{-1} şi 0, în ambele cazuri trimiţînd o informaţie despre s numărul de puncte de minim găsite pînă aici. Apoi pentru un l dat $1 \leqslant l \leqslant n-1$ presupunînd daţi s vectori V_p^0 $(X_{l+1}^0, \ldots X_n^0)$ care pot intra într-un punct de minim şi care sînt înscrişi în s celule succesive $M_1, \ldots, M_s$, determinăm pentru fiecare V_p^0, $x_l^0 = \varphi(V_p^0)$ în modul în care s-a descris mai sus aflarea valorilor funcţiei. În cazul x^0 unic determinat în aceeaşi celulă din care am scos pe V_p^0, introducem $V_p'^0$ $(x_l^0, \ldots, x_n^0)$ împărţind conţinutul celulei la 2 şi adăugînd în prima cifră după cifra semn valoarea lui x^0. În caz de nedeterminare formăm doi astfel de vectori; unul se înscrie în celule din care am scos pe V_p, iar celălalt în prima celulă liberă M_j în continuarea şirului $M_1, \ldots, M_s$ $(j = s + 1, \ldots)$. Evident şi aici se pune problema saturării memoriei, adică a posibilităţii de a găsi mai multe puncte de minim decît încap în memorie. Totuşi problema e mai simplă dat fiind că locul rezervat acsetor puncte e de ordinul sutelor şi dacă ar fi depăşit, stabilim ca de aici înainte să se aleagă unul singur dintre cei 2 vectori [maşina se opreşte şi se modifică conţinutul a 5 celule] renunţînd la o parte a punctelor de minim.

Evident, informaţiile din H_l, E_l' şi E_l se scot o dată pentru fiecare l, făcîndu-se şi ramificaţiile necesare astfel încît pentru un V_p dat, calculele pentru φ_l să fie reduse la minimul posibil.

La sfîrşitul unui ciclu se modifică şi informaţia s mărindu-se cu nr. de puncte adăugate. După ce se calculează şi x_1^0, se trece la tipărirea tuturor punctelor de minim, cifră cu cifră.

Coeficienţii sînt presupuşi numere întregi (aşa apar practic în toate aplicaţiile funcţiilor pseudobooleene, totuşi întrucît nu se fac decît adunări, putem să le înmulţim cu 10^s şi minimul iese înmulţit cu 10^s). De asemenea se presupune că nici o sumă nu va depăşi capacitatea registrului.

Într-adevăr, dacă $\Sigma^+ A_i$ şi $\Sigma^- A_i$ (sumele coeficienţilor pozitivi şi negativi din polinom în modul) nu depăşesc 2^{30}, atunci nu se va depăşi capacitatea registrului. Cum se lucrează cu automatul D.C.R. pus în funcţiune, în cazul că s-ar depăşi, maşina se va opri.

Polinomul se introduce în felul următor: La începutul primului monom se pune 0, între monoame tot un 0, iar după ultimul monom 0. După 0 trebuie să urmeze o cifră (număr între 0 şi 9 inclusiv) dacă vine un număr $\geqslant 10$ (eventual bandă neperforată 31) se consideră sfîrşitul benzii de date iniţiale. Cifrele care urmează după 0 sînt considerate ca număr întreg în baza zece pînă apare primul semn $\geqslant 10$ cînd se consideră sfîrşitul numărului, acest prim semn se ia drept semnul numărului ($+ = 10$, $- > 10$), după care urmează partea literară (eventual vidă dacă e termen liber) perforată prin indicii literelor care apar în monom. Astfel, de exemplu, polinomul : $16 + 259\, x_1 x_3 - 18\, x_1 x_5 x_7 x_{20}$ se perforează : banda neperforată 0, 1, 6, 10, 0, 2, 5, 9, 10, 1, 3, 0, 1, 8, 11, 1, 5, 7, 20, 0 bandă neperforată.

Timpul de citire a unui monom de către programul de citire este de circa 1—2 secunde.

Programul pentru a permite rezolvarea problemelor de dimensiuni mai mari se introduce pe etape. Iniţial se introduce partea a I-a, care împreună cu programul de citire a benzilor de program şi programul de introducere a datelor iniţiale ocupă adresele de la 000 la 0355 şi de la 1537 pînă la sfîrşit (cu excepţia a 15 — (octal, 13 zecimale) celule de lucru curente (notate cu L_0 etc. în cadrul descrierii programului şi care sînt între 1660—1674). Porţiunea de la 1537—1640 e necesară doar în cazul în care vrem să găsim toate punctele de minim. La sfîrşitul părţii întîi se porneşte banda şi se înscrie partea a 2-a care ocupă zona de la 1540 la sfîrşit şi de la 0000 la 66 precum şi de la 0361 la 0447, în această ultimă zonă fiind partea de program care stabileşte pe f_{n+1} pe φ_n şi tipăreşte pe f_{n+1} la care nu mai revenim mai tîrziu, deci eventual poate fi acoperită cu puncte de minim. În prima parte zona de la 0355 la 1537 inclusiv e rezervată pentru grupul de celule : A_i, B_i, care păstrează monoamele lui f_l (într-o primă formă 200 în octal adică 128 de monoame deci de la 0355 la 0754 inclusiv), C_j, D_j (100 octal — 64 zecimal de la 755—1154) ; urmînd apoi celule $H\ E\ E'$ grupate cîte 3 total $3\,n - 2$ ($l = 1, \ldots, \ldots, n - 1$) pentru E' şi E şi $l = 0, \ldots, n - 1$ pentru H), restul fiind rezervat pentru F_u şi G_v. În partea a 2-a celulele M pentru păstrarea punctelor de minim merg de la 0066 pînă la sfîrşitul zonei C_j D_j sau chiar mai departe.

În cazul în care memoria nu ar fi suficientă în anumite zone, se poate modifica repartizarea memoriei ; celulele care conţin adresele ,,variabile'' în sensul că pot fi regrupate, sînt situate grupat formînd partea ,,variabilă'' a programului care se completează cu un număr de 6 celule funcţie de n. În cazul în care informaţiile acumulate sînt prea multe, putem renunţa la găsirea tuturor punctelor de minim. De altfel există probleme (Metode Egervari pentru transporturi, într-un sens aplicarea funcţiilor pseudobooleene la metoda de sinteză — minimizare a lui Quine-McCluskey cînd vrem să aflăm doar o formă normală minimală pentru funcţia dată şi nu toate) în care ne interesează doar un singur punct de minim.

Pentru acest caz putem modifica partea a I-a, cu o bandă ulterioară, astfel încît să fie introdusă în maşină şi partea a I-a şi a doua împreună. În acest caz memoria e ocupată între 0000 la 0355 şi de la 1521 pînă la sfîrşit, deci în plus cu 14 celule dar nu este nevoie de celule G_v şi de asemenea are avantajul că nu este nevoie de introdus în două părţi programul.

S-a experimentat programul pentru 5 probleme dintre 8 şi 12 variabile. Timpul de lucru e variabil între 3 şi 15 minute, fiind variabil de la o problemă la alta.

De exemplu modificînd doar un singur monom, timpul s-a mărit de 3 ori.

Numărul de variabile este mai mic sau cel mult 30. În general problemele pînă la 20 de variabile vor încăpea în memorie, dintre cele de dimensiuni mai mari vor încăpea numai unele. Care anume vor încăpea nu se poate stabili, în general apriori (evident că numărul iniţial de monoame $\leqslant$ decît numărul de celule rezervate monoamelor, în caz contrar sigur nu încape) ci numai introducîndu-le în maşină, care ne va da răspunsul că nu încap.

Primită la redacţie la 14 iunie 1966.

Institutul politehnic Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. P. L. Ivănescu, I. Rosenberg, S. Rudeanu, *Asupra determinării minimelor funcţiilor pseudobooleene.* St. cerc. mat. XIV, *3*, 359–364 (1963).

2. I. Kaufmann, *Bazele matematice ale calculatorului MECIPT-1.* Probleme de automatizare, IV, Bucureşti, 1961, p. 101–106.

3. I. Kaufmann şi V. Löwenfeld, *Lucrări de dezvoltare proiectate pentru calculatorul MECIPT-1.* Probleme de automatizare, IV, Bucureşti, 1961, p. 109–112.

DESPRE METODA GENERALIZATĂ A LUI NEWTON APLICATĂ LA REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE

DE

B. JANKÓ şi M. BALÀZS

(Cluj)

În lucrarea de faţă sînt prezentate teoreme de existenţă şi de unicitate ale soluţiei ecuaţiei operaţionale $P(x) = \theta$, derivata de tip Fréchet $P'(x)$ a lui $P(x)$ satisfăcînd o condiţie lipschiţiană respectiv hölderiană.

În lucrarea noastră [4] am stabilit cîteva teoreme de existență relativ la soluția ecuației operaționale neliniare $P(x) = \theta$. Aici $P(x)$ este o operație neliniară definită într-o sferă completă din spațiul liniar normat X și cu valori în spațiul Y de același tip. În lucrarea citată anterior am presupus că operația $\Gamma_n P'(x)$ satisface condiția hölderiană de forma

$$(1)\qquad \|\Gamma_n P'(x') - \Gamma_n P'(x'')\| \leqslant K\cdot\|x' - x''\|^{\alpha},\ 0 < \alpha \leqslant 1,$$

pentru orice x_n, x', x'' din sfera considerată, unde $P'(x)$ este derivata în sens Fréchet a lui $P(x)$, iar x_n este termenul general al șirului determinat prin algoritmul lui Newton

$$(2)\qquad x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n);\ \Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1},\ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

În cadrul lucrării de față vom slăbi condiția (1) înlocuind operația Γ_n cu Γ_0, x_0 fiind o aproximație inițială. Astfel enunțăm următoarele teoreme.

TEOREMA 1. *Dacă pentru operația* $P(x)$ *derivabilă în sens Fréchet există un element* $x_0 \in X$ *astfel încît următoarele condiții să fie satisfăcute :*

1°. $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ *există ;*

2°. *are loc inegalitatea* $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0$;

3°. *derivata* $P'(x)$ *satisface condiția lipschițiană*

$$\|\Gamma_0 P'(x') - \Gamma_0 P'(x'')\| \leqslant \bar{\bar{\mathrm{K}}}\, \|x' - x''\|,$$

pentru orice x' *și* x'' *din sfera* S *dată de inegalitatea* $\|x - x_0\| \leqslant 2\eta_0$;

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1149–1154, BUCUREŞTI, 1967

4°. *constantele* $\bar{K}$ *şi* η_0 *sînt legate de relaţiile*

$$0 < \bar{h}_0 = \bar{K}\cdot\eta_0 \leqslant \frac{1}{2};$$

atunci există cel puţin o soluţie $x^* \in S$ *a ecuaţiei* $P(x)=\theta$*, care este limita aproximaţiilor* $\{x_n\}$ *date de formula* (2).

Demonstraţie. Se arată că trecînd de la x_0 la x_1 condiţiile 1°–4° rămîn valabile.

Demonstrăm că Γ_1 există. Folosind condiţia 3° a teoremei şi relaţia (2), pentru $n = 0$, obţinem

$$\|\Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)]\| \leqslant \bar{K}\cdot\eta_0 = \bar{h}_0 \leqslant \frac{1}{2}\cdot$$

Din ultima inegalitate, pe baza teoremei lui Banach, rezultă existenţa operaţiei

$$H_0 = \{I - \Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)]\}^{-1},$$

precum şi existenţa lui Γ_1, deoarece

$$H_0\Gamma_0 = \{I - \Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)]\}^{-1}\Gamma_0 = [P'(x_1)]^{-1} = \Gamma_1$$

şi avem

$$\|H_0\| \leqslant \frac{1}{1-\bar{h}_0}\cdot$$

Folosind formula dată în [3] de Wertheim

$$\|f(x') - f(x'') - f'(x'')(x' - x'')\| \leqslant \frac{K}{2}\|x' - x''\|^2, \tag{3}$$

pentru operaţia $f(x) = \Gamma_0 P(x)$ şi relaţia (2) obţinem

$$\begin{aligned}&\|\Gamma_0 P(x_1) - \Gamma_0 P(x_0) - \Gamma_0 P'(x_0)(x_1 - x_0)\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\bar{K}\|x_1 - x_0\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\bar{K}\cdot\eta_0^2 = \frac{1}{2}\bar{h}_0\cdot\eta_0,\end{aligned} \tag{4}$$

de unde

$$\|\Gamma_0 P(x_1)\| \leqslant \frac{1}{2}\bar{h}_0\cdot\eta_0$$

iar din aceasta

$$\|\Gamma_1 P(x_1)\| = \|H_0\Gamma_0 P(x_1)\| \leqslant \frac{\bar{h}_0\cdot\eta_0}{2(1-\bar{h}_0)} = \eta_1,$$

ceea ce înseamnă că condiţia 2° este satisfăcută pentru x_1.

Mai jos vom arăta că x_1 aparţine sferei din condiţia 3°.

Avem

$$\bar{h}_1 = \bar{K}\cdot\eta_1 = \frac{\bar{h}_0^2}{2(1-\bar{h}_0)} \leqslant \bar{h}_0^2 \leqslant \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

deci şi condiţia 4° este satisfăcută.

Pe baza inducţiei complete există

$$H_{n-1} = \{I - \Gamma_{n-1}[P'(x_{n-1}) - P'(x_n)]\}^{-1} \text{ şi } \Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$$

şi au loc relaţiile

$$\|H_n\| \leqslant \frac{1}{1 - \overline{h}_0};$$

$$\text{(5)} \qquad \|\Gamma_n P(x_n)\| \leqslant \frac{\overline{h}_{n-1} \cdot \eta_{n-1}}{2(1 - \overline{h}_0)^n} = \eta_n;$$

$$\overline{h}_n = \frac{\overline{h}^2_{n-1}}{2(1 - \overline{h}_0)^n} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2};$$

ceea ce înseamnează că condiţiile 1°, 2°, 4° ale teoremei sînt satisfăcute pentru x_n.

Din relaţiile (5) rezultă uşor că

$$\text{(6)} \qquad \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \eta_n \leqslant \frac{\eta_0}{2^n}(2\overline{h}_0)^{2^n - 1} \leqslant \frac{\eta_0}{2^n}.$$

Avînd în vedere că

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+2} - x_{n+1}\| + \ldots + \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\|$$

şi ţinînd seama de relaţia (6) obţinem

$$\text{(7)} \qquad \|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \frac{\eta_0}{2^{n-1}}(2\overline{h}_0)^{2^n - 1}(1 - 2^{-p}),$$

ceea ce înseamnă că şirul $\{x_n\}$ este fundamental. De aici şi din faptul că sfera S este completă, rezultă că există $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Din inegalitatea (7) pentru $p \to +\infty$, obţinem

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{\eta_0}{2^{n-1}}(2\overline{h}_0)^{2^n - 1},$$

ceea ce caracterizează rapiditatea convergenţei şirului $\{x_n\}$.

Să arătăm că aproximaţiile x_n aparţin sferei $\|x - x_0\| \leqslant 2\eta_0$. Avem

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \ldots + \|x_{n-1} - x_n\| <$$

$$< \eta_0\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = 2\eta_0.$$

Să arătăm că x^* este soluţia ecuaţiei $P(x) = \theta$. Din formula analoagă cu (4) obţinem

$$\|\Gamma_0 P(x_n)\| \leqslant \frac{1}{2}\overline{K}\,\|x_n - x_{n-1}\|^2,$$

de unde rezultă că pentru $n \to +\infty$, $\Gamma_0 P(x_n) \to \theta$ şi în baza continuităţii lui $\Gamma_0 P(x)$ obţinem $\Gamma_0 P(x^*) = \theta$, ceea ce înseamnă că $P(x^*) = \theta$.

Observație. Teorema 1 este o generalizare a teoremei analoage date de L. V. Kantorovici în [2], în care se presupune existența derivatei $P''(x)$.

TEOREMA 2. *In condițiile teoremei 1 ecuația $P(x) = \theta$ are o singură soluție în sfera S: $\|x - x_0\| \leqslant 2\,\eta_0$.*

Demonstrație. Fie τ o soluție oarecare a ecuației $P(x) = \theta$ din sfera S. Să considerăm operația auxiliară

$$F_n(x) = x - \Gamma_n P(x).$$

Avem în mod evident egalitățile $F_n(\tau) = \tau$, $F_n(x_n) = x_{n+1}$ și $F'_n(x) = \theta$. Formula (3) aplicată la operația $F_n(x)$ ne dă

$$\|F_n(\tau) - F_n(x_n) - P'_n(x_n)(\tau - x_n)\| \leqslant \frac{\overline{K}}{2(1 - \overline{h}_0)^n} \cdot \|\tau - x_n\|^2,$$

de unde

$$\|\tau - x_{n+1}\| \leqslant \frac{2^{n-2}}{\eta_0} \|\tau - x_n\|^2. \tag{8}$$

Fie $\|\tau - x_0\| \leqslant \rho\,\eta_0$. Din formula (8) obținem

$$\|\tau - x_1\| \leqslant 2^{-2} \cdot \rho^2 \cdot \eta_0$$

. . . .

$$\|\tau - x_{n+1}\| \leqslant 2^{\sum\limits_{i=1}^{n-2} i \cdot 2^{n-i-2}} \quad 2^{-5 \cdot 2^{n-1}} \cdot \rho^{2^{n+1}} \cdot \eta_0,$$

unde ultima inegalitate se demonstrează cu metoda inducției complete. Deci avem

$$\|\tau - x_{n+1}\| \leqslant 2^{-n} \cdot \eta_0 \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2^{n+1}} \cdot$$

Din ultima inegalitate rezultă că dacă $\rho \leqslant 2$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \tau$. Pe de altă parte din teorema 1 rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$. Deci $x^* = \tau$, ceea ce înseamnă că ecuația $P(x) = \theta$ are o singură soluție în sfera dată, la care converge șirul definit de formula (2).

TEOREMA 3. *Dacă pentru operația $P(x)$ derivabilă în sens Fréchet există un $x_0 \in X$ astfel încît următoarele condiții să fie îndeplinite:*

1°. $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ *există;*
2°. *are loc inegalitatea* $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0$;
3°. *derivata $P'(x)$ satisface condiția hölderiană*

$$\|\Gamma_0 P'(x') - \Gamma_0 P'(x'')\| \leqslant \overline{K}\, \|x' - x''\|^\alpha, \; 0 < \alpha \leqslant 1,$$

pentru orice x' și x'' din sfera S: $\|x - x_0\| \leqslant \dfrac{\alpha + 1}{\alpha} \cdot \eta_0$;

4°. *Constantele $\overline{K}$ și η_0 sînt legate prin relațiile*

$$0 < \overline{h}_0 = \overline{K} \cdot \eta_0^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{1 + \alpha};$$

atunci există cel puțin o soluție $x^* \in S$ *a ecuației* $P(x) = \theta$, *care este limita aproximațiilor* $\{x_n\}$ *date de formula* (2).

Demonstrație. Arătăm că în cazul condițiilor teoremei 3 sînt satisfăcute și condițiile teoremei 1 din [4] pentru ecuația de forma

$$\overline{P}(x) = \Gamma_0 P(x) = \theta \tag{9}$$

echivalentă cu ecuația dată $P(x) = \theta$. Astfel avem

1°. $\overline{\Gamma}_0 = [\overline{P}'(x_0)]^{-1} = [\Gamma_0 P'(x_0)]^{-1} = I^{-1} = I$, deci există $\overline{\Gamma}_0$ și $\|\overline{\Gamma}_0\| \leqslant 1 = B_0$;

2°. $\|\overline{\Gamma}_0 \overline{P}(x_0)\| \leqslant \|\overline{\Gamma}_0\| \cdot \|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0$;

3°. $\|\overline{P}'(x') - \overline{P}'(x'')\| = \|\Gamma_0 P'(x') - \Gamma_0 P'(x'')\| \leqslant \overline{K} \cdot \|x' - x''\|^{\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, pentru orice x', x'' din sfera S;

4°. $\overline{h}_0 = \overline{K} \cdot 1 \cdot \eta_0^{\alpha} = \overline{K} \cdot \eta_0^{\alpha} \leqslant \dfrac{\alpha}{1 + \alpha}$.

Deci conform teoremei 1 din [4], ecuația (9) are o soluție $x^* \in S$, către care converge șirul aproximațiilor $\{x_n\}$. Din egalitatea $\overline{P}(x^*) = \Gamma_0 P(x^*) = \theta$ rezultă că $P(x^*) = \theta$, ceea ce era de demonstrat.

Observație. Dacă condiția 3° din teorema 3 este satisfăcută în sfera mai mare decît S, adică în

$$\|x - x_0\| \leqslant \frac{(1 + \alpha)^{\frac{2\alpha - 1}{\alpha^2}}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \eta_0,$$

atunci în această sferă, ecuația $P(x) = \theta$ are o singură soluție egală cu limita șirului $\{x_n\}$ definit de relația (2). Demonstrarea acestei afirmații este analoagă cu demonstrarea teoremei 3, reducînd-o la o teoremă de unicitate cunoscută.

TEOREMA 4. *Dacă sînt satisfăcute condițiile* 1°—2° *ale teoremei 3, condiția 3° fiind satisfăcută în sfera* $\|x - x_0\| \leqslant 2\eta_0$, *iar în locul condiției 4° considerăm condiția mai slabă* $0 < \overline{h}_0 = \overline{K} \cdot \eta_0^{\alpha} \leqslant \frac{1}{2}$, *atunci ecuația* $P(x) = \theta$ *are o soluție* x^* *în sfera* $\|x - x_0\| \leqslant 2\eta_0$ *care este limita șirului* $\{x_n\}$ *definit de relația* (2).

În demonstrarea acestei teoreme ne folosim de același raționament ca și în cazul teoremei 3.

Observație. Dacă condițiile teoremei 4 sînt satisfăcute în sfera mai mică decît sfera $\|x - x_0\| \leqslant 2\eta_0$ definită de inegalitatea

$$\|x - x_0\| \leqslant \frac{(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{1 - \alpha}{\alpha^2}}} \cdot \eta_0,$$

unde ecuația $P(x) = \theta$ are soluție, atunci ea are o singură soluție în această sferă și soluția este egală cu limita aproximațiilor $\{x_n\}$ definite de relația (2).

Primită la redacție la 21 decembrie 1966.

Inst. Pedagogic Baia Mare
Inst. Pedagogic Cluj.

BIBLIOGRAFIE

1. Л. В. Канторович. *О методе Ньютона*, Труд, мат. Инст-та В. А. Стеклова **28**, 104–144 (1949).
2. L. W. Kantorowitsch – G. P. Akilow, *Funktionalanalysis in normierten Räumen*. Akad-Verlag, Berlin, 1964, p. 572.
3. В. А. Вертхейм, *Об условиях применения метода Ньютона*. ДАН СССР, **110**, *5*, 719–722 (1956).
4. B. Jankó, I. Coroian, M. Balázs, *Asupra metodei lui Newton-Kantorovici pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale nelineare*. Analele Universităţii din Timişoara (sub tipar).

ASUPRA REZOLVĂRII ECUAŢIILOR OPERAŢIONALE, DEFINITE ÎN SPAŢII METRICE, CU AJUTORUL METODELOR CONVERGENTE DE ORDINUL K

DE

B. JANKÓ şi V. POP

(Cluj)

În cadrul lucrării de faţă se studiază condiţiile de existenţă şi unicitate a soluţiei ecuaţiei (1) fără a presupune existenţa derivatelor de diferite ordine, în sens Fréchet a operaţiei neliniare.

Se consideră spaţiul metric X (în general neliniar) şi operaţia neliniară A definită pe X şi cu valori tot în X.

Pornind de la aproximaţia iniţială x_0 a soluţiei ecuaţiei operaţionale

$$x = A(x) \tag{1}$$

şirul $\{x_n\}$ al aproximaţiilor succesive se calculează prin procedeul iterativ

$$x_{n+1} = A(x_n). \tag{2}$$

Referitor la existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei (1) se dă teorema de mai jos.

TEOREMĂ. *Dacă spaţiul X este complet şi sînt îndeplinite condiţiile*

$$1^\circ \quad \rho(A(x)\, A(y)) \leqslant \alpha\, \rho^k(x, y);$$

$$2^\circ \quad \alpha\, \rho^{k-1}(x, y) < 1,$$

unde α este un număr real pozitiv, $K > 1$ iar $x, y \in X$, atunci pentru ecuaţia operţională (1) există o soluţie unică x^*, iar delimitarea erorii precum şi ordinul de convergenţă se caracterizează prin inegalitatea

$$\rho(x_n, x^*) < \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{k-1}}} \cdot H_k\left(\alpha^{\frac{1}{k-1}} \rho_0\right)^{k^n},$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1155–1158, BUCUREŞTI, 1967

unde

$$H_k = 1 + \sum_{i=n}^{\infty} (\alpha \rho_0^{k-1})^{ki}, \quad \rho_0 = \rho(x_1, x_0),$$

x_0 fiind aproximaţia iniţială iar x_1 prima aproximaţie calculată prin procedeul iterativ (2).

Demonstraţie. Folosindu-ne de condiţiile 1° şi 2° se arată că şirul $\{x_n\}$ este fundamental. Pentru aceasta se consideră inegalităţile

$$\begin{aligned}
&\rho(x_1, x_2) \leqslant \alpha \rho^k (x_0, x_1) = \alpha \rho_0^k \\
&\rho(x_2, x_3) \leqslant \alpha \rho^k (x_1, x_2) \leqslant \alpha^{1+k} \rho_0^{k^2} \\
&\rho(x_3, x_4) \leqslant \alpha \rho^k (x_2, x_3) \leqslant \alpha^{1+k+k^2} \cdot \rho_0^{k^3} \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \alpha \rho^k (x_{n-1}, x_n) \leqslant \alpha^{1+k+\dots+k^{n-1}} \rho_0^{k^n} = \alpha^{\frac{k^n-1}{k-1}} \rho_0^{k^n} \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

Pentru un număr p întreg şi pozitiv oarecare are loc inegalitatea

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_{n+p}) &\leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) < \\
&< \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{k-1}}} (\alpha^{\frac{1}{k-1}} \rho_0)^{k^n} [1 + (\alpha \rho_0^{k-1})^{k^n} + \dots + (\alpha \rho_0^{k-1})^{k^{n+p-2}}].
\end{aligned}$$

Notînd cu $H_k = 1 + \sum_{i=n}^{\infty} (\alpha \rho_0^{k-1})^{k^i}$, atunci avem

$$\rho(x_n, x_{n+p}) < \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{k-1}}} \cdot H_k (\alpha^{\frac{1}{k-1}} \rho_0)^{k^n}.$$

Trecînd apoi la limită pentru $p \to \infty$ se obţine delimitarea

$$\rho(x_n, x^*) < \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{k-1}}} \cdot H_k (\alpha^{\frac{1}{k-1}} \cdot \rho_0)^{k^n}.$$

Inegalitatea de mai sus arată că pentru $n \to \infty$, $\rho(x_n, x^*) \to 0$. Pe baza completitudinii spaţiului X rezultă că există un element $x^* \in X$ astfel ca

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Pentru a arăta că x^* este o soluţie a ecuaţiei (1) se observă că

$$\begin{aligned}
\rho(x^*, A(x^*)) &\leqslant \rho(x^*, x_n) + \rho(x_n, A(x^*)) \leqslant \\
&\leqslant \rho(x^*, x_n) + \alpha \rho^k (x_{n-1}, x^*) < \varepsilon
\end{aligned}$$

pentru n suficient de mare; adică $\rho(x^*, A(x^*)) = 0$.

Unicitatea soluţiei se demonstrează prin reducere la absurd. Se presupune că ar exista două soluţii $x^*, y^* \in X$ pentru ecuaţia (1). Atunci

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(A(x^*), A(y^*)) \leqslant \alpha \rho^k (x^*, y^*)$$

de unde rezultă că

$$\alpha \rho^{k-1}(x^*, y^*) \geqslant 1$$

contrar condiţiei 2°. Deci x^* este singura soluţie a ecuaţiei (1). Prin definiţie, numărul K indică ordinul de convergenţă al metodei.

Observaţii. a) Teorema demonstrată mai sus este mai generală decît aceea dată de L. Collatz [1] deoarece nu se cere ca spaţiul X să fie L-supermetric şi nici existenţa derivatelor Fréchet pînă la ordinul $k-1$ a operaţiei $A(x)$.

b) Pentru existenţa soluţiei este suficient ca cele două condiţii să fie îndeplinite pentru aproximaţia iniţială x_0 şi prima aproximaţie x_1 a soluţiei ecuaţiei (1) calculate prin procedeul iterativ (2), adică

$$1° \quad \rho(A(x_0), A(x_1)) \leqslant \alpha \rho^k(x_0, x_1),$$

$$2° \quad \alpha \rho^{k-1}(x_0, x_1) < 1.$$

c) Dacă X este un spaţiu normat, atunci metrica $\rho(x, y)$ poate fi definită astfel

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Particularizînd operaţia $A(x)$ anume punînd $A(x) = x - \Gamma(x) P(x)$, unde $\Gamma(x)$ este inversa derivatei în sens Fréchet a operatorului $P(x)$, se obţine metoda Newton–Kantorovici [2] despre care se ştie că este convergentă de ordinul al doilea. Într-adevăr, condiţiile 1° şi 2° ale teoremei pentru $k = 2$ sînt îndeplinite

$$\|A(x_2) - A(x_1)\| = \|x_1 - \Gamma(x_1) P(x_1) - x_0 + \Gamma(x_0) P(x)\| =$$

$$= \|\Gamma(x_1) P(x_1)\| \leqslant \|\Gamma(x_1)\| \cdot \|P(x_1)\| = \|\Gamma(x_1)\| \, \|P(x_1) -$$

$$- P(x_0) - P'(x_0)(x_1 - x_0)\| \leqslant \|\Gamma(x_1)\| \cdot \|P''(\xi_0)\| \cdot \|x_1 - x_0\|^2.$$

Notînd cu

$$\|\Gamma(x_1)\| \cdot \|P''(\xi_0)\| = \alpha,$$

se obţine

$$\|A(x_1) - A(x_2)\| < \alpha \|x_1 - x_0\|^2,$$

adică condiţia 1°. Dacă $\alpha \|x_1 - x_0\| < 1$, atunci este îndeplinită şi condiţia 2°. Dacă operaţia $A(x)$ este de forma

$$A(x) = x - \left[I - \frac{1}{2} \Gamma(x) P''(x) \Gamma(x) P(x)\right]^{-1} \Gamma(x) P(x),$$

atunci regăsim metoda hiperbolelor tangente care este o metodă convergentă de ordinul al treilea [3].

Primită la redacţie la 3 februarie 1967.

Institutul pedagogic Baia Mare

BIBLIOGRAFIE

1. L. Collatz, *Funktionalanalysis und numerische Mathematik.* Springer-Verlag, 1964 p. 230–232.
2. Л. В. Канторович, *О методе Ньютона.* Труды мат. ин–та инм. В. А. Стеклова, **XXVIII**, 104–114 (1949).
3. М. А. Мертвецова, *Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений.* ДАН. СССР, **88–4,** 611 – 614 (1953).

UN ALGORITM PENTRU REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE PROGRAMARE PĂTRATICĂ

DE

ILEANA NĂDEJDE

În acest articol se dă o metodă simplificată pentru determinarea mulţimii P de puncte în care se găseşte soluţia optimă a problemelor de programare pătratică

$$\{\min g_1(u) = u'ku \mid u \geqslant b\} \quad \text{şi} \quad \{\min g_2(u) = u'ku + Su \mid u \geqslant b\}.$$

Mulţimea P conţine un număr finit de puncte încît soluţia optimă se găseşte calculînd valorile funcţiilor $g_1(u)$ respectiv $g_2(u)$ pentru toţi $u \in P$.

În articolul [1] se arată că problema de programare pătratică: Să se determine minimul funcţiei

$$f(x) = x'Cx \tag{1}$$

(în care C este o matrice simetrică, pozitiv definită) cu condiţiile

$$Ax \geqslant b \tag{2}$$

se poate rezolva găsind minimul funcţiei

$$g(u) = u'Ku \tag{3}$$

(în care matricea k este de asemenea pozitiv definită) cu condiţiile

$$u \geqslant b. \tag{4}$$

În adevăr, luînd $Ax = u$, $u \geqslant b$, pentru un u dat, soluţia x^* a problemei (1)—(2) se găseşte prin metoda multiplicatorilor Lagrange, deoarece nu implică condiţii de nenegativitate a variabilelor.

Fie

$$F(x, \lambda) = x'Cx - 2\lambda'(Ax - u). \tag{5}$$

Atunci condiţiile $\nabla_x F(x, \lambda) = 0$, $\nabla_\lambda F(x, \lambda) = 0$, sînt

$$Cx - \lambda' A = 0 \tag{6}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1159—1168, BUCUREŞTI, 1967

şi

$$Ax - u = 0. \tag{7}$$

Relaţia (6) se mai poate scrie sub forma

$$Cx = A'\lambda \tag{8}$$

încît, înmulţind la stînga cu vectorul x' şi ţinînd seama că

$$x'A' = (xA)' = u', \tag{9}$$

obţinem

$$f(x) = x'Cx = u'\lambda. \tag{10}$$

Pentru ca $f(x)$ să se exprime numai în funcţie de u, din relaţia (8) se calculează

$$x = C^{-1} A'\lambda \tag{11}$$

şi înlocuind în (7) avem

$$(AC^{-1} A')\,\lambda = u. \tag{12}$$

Dacă rang $A = m$, matricea $AC^{-1} A'$ este nedegenerată încît din (12) rezultă că

$$\lambda = (AC^{-1} A')^{-1} u \tag{13}$$

deci

$$f(x) = u' (AC^{-1} A')^{-1} u. \tag{14}$$

Dacă matricea C este simetrică şi pozitiv definită, matricea

$$K = (AC^{-1} A')^{-1} \tag{15}$$

este de asemenea simetrică şi pozitiv definită încît problema de programare pătratică (1)—(2) se înlocuieşte prin problema de programare pătratică (3)—(4) în care K este dat de (15). Avantajele modelului (3)—(4) care se substituie problemei iniţiale sînt următoarele:

— Forma pătratică $g(u)$ depinde de m variabile, în timp ce $f(x)$ este o funcţie de n variabile. Deoarece în majoritatea problemelor de programare numărul restricţiilor, m, este mai mic decît numărul ecuaţiilor, n, problema (3)—(4) conţine mai puţine necunoscute decît cea iniţială;

— Restricţiile $u \geqslant b$ sînt mai simple decît $Ax \geqslant b$. Relaţia dintre x şi u, obţinută din (11), (13) şi (15), este

$$x = C^{-1} A'Ku$$

încît dispunînd de soluţia optimă u^* a problemei (3)—(4) se poate calcula cu uşurinţă x^*, soluţia optimă a problemei iniţiale.

Scopul lucrării de faţă este de a arăta că modelul (3)—(4) poate fi rezolvat cu ajutorul unei probleme de programare liniară.

Reamintim unele definiţii şi proprietăţi care vor fi utilizate pe parcurs.

PROPOZIȚIA 1. *Dacă C este o matrice simetrică pozitiv definită, funcția*

$$Q(x) = x'Cx + c'x + c_0$$

este o formă pătratică pozitiv definită.

PROPOZIȚIA 2. *Dacă C este o matrice simetrică pozitiv definită, de ordin n, funcția*

$$f(x) = x'Cx$$

este strict convexă pentru orice $x \in R^n$.

PROPOZIȚIA 3. *Minimul local al unei forme pătratice pozitiv definite pe o mulțime convexă este minimul absolut al formei pătratice pe această mulțime.*

PROPOZIȚIA 4. *Gradientul unei funcții dă direcția creșterii (descreșterii) maxime a funcției.*

PROPOZIȚIA 5. *Dacă mulțimea X a soluțiilor sistemului este nevidă, problema*

$$\{\min Q(x) = x'Cx + c'x + c_0 \mid Ax \geqslant b\}$$

are totdeauna o soluție unică care este:

— *minimul liber x^0 al funcției $Q(x)$ dacă $x^0 \in X$;*

— *un punct extrem sau un punct frontieră a mulțimii X dacă $x^0 \notin X$.*

Revenind acum la problema minimizării funcției

$$g(u) = u'Ku$$

cu condițiile

$$u \geqslant b$$

știm că avem de determinat minimul funcției strict convexe pe o mulțime convexă și că minimul local al funcției $g(u)$ pe mulțimea $u \geqslant b$ este minimul absolut pe această mulțime.

Dezvoltînd funcția $g(u)$ în serie Taylor în vecinătatea punctului $u = b$, avem

$$g(b_1 + h_1, \ldots, b_m + h_m) = g(b_1, \ldots, b_m) + \left(h_1 \frac{\partial g}{\partial u_1} + \ldots + h_m \frac{\partial g}{\partial u_m}\right)_{u=b} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(h_1 \frac{\partial g}{\partial u_1} + \ldots + h_m \frac{\partial g}{\partial u_m}\right)^{(2)}_{\substack{u=b+\theta h \\ 0<\theta<1}}$$

Deoarece ne interesează numai valorile variabilelor care satisfac condițiile $u \geqslant b$, considerăm $h > 0$. În aceste condiții

$$g(b+h) \geqslant g(b) \quad \text{dacă} \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u_i}\right)_{u_i=b_i} \geqslant 0 \quad \text{pentru} \quad i \in I = \{1, \ldots, m\}$$

încît

$$\{\min g(u) \mid u \geqslant b\} = g(b) \quad \text{dacă} \quad \nabla g(u)|_{u=b} \geqslant 0.$$

Să admitem că $\nabla g(u)|_{u=b}$ are și componente negative. Fie $I_1 \subset I$ mulțimea de indici i pentru care

$$\left.\frac{\partial g(u)}{\partial u_i}\right|_{u_i=b_i} < 0.$$

Condiţia necesară pentru ca $u^* \geqslant b$ să fie punctul de minim al funcţiei $g(u)$ este ca

$$\left.\frac{\partial g(u)}{\partial u_i}\right|_{u_i=u_i^*} = 0 \quad \text{pentru toţi } i \in I_1$$

$$\left.\frac{\partial g(u)}{\partial u_i}\right|_{u_i=u_i^*} \geqslant 0 \quad \text{pentru toţi } i \in I - I_1.$$

Deoarece $\frac{\partial g(u)}{\partial u_i}$ sînt funcţii liniare de u, vectorii u^* sînt soluţiile optime ale problemei de programare liniară

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g(u)}{\partial u_i} + \eta_i = 0 \quad && i \in I_1 \\ &\frac{\partial g(u)}{\partial u_i} + \eta_i = 0 \quad && i \in I - I_1 \\ &u_i \geqslant b_i && i \in I \\ &\eta_i \geqslant 0 && i \in I \\ &\min \sum_{i \in I_1} \eta_i. \end{aligned} \tag{16}$$

Modelul (16) se poate scrie sub o formă mai simplă luînd

$$u = z + b.$$

Funcţia $g(u) = u'ku$ se scrie atunci

$$\varphi(z) = (z + b)' k (z + b) = z' kz + 2z' kb + b' kb$$

încît $\varphi(z)$ este minimă pentru $z \geqslant 0$ dacă

$$\nabla \varphi(z)|_{z=0} \geqslant 0$$

adică dacă

$$2kz + 2kb|_{z=0} = 2kb = \overline{b} \geqslant 0.$$

Dacă vectorul $\overline{b} = 2kb$ este nenegativ, funcţia $\varphi(z)$ este minimă pentru $z = 0$ deci $g(u)$ este minimă pentru $u = b$.

Dacă vectorul $\overline{b} = 2kb$ are $n_1 \leqslant n$ componente negative, fie J_1 mulţimea indicilor acestor componente. Atunci soluţia optimă a problemei

$$\{\min \varphi(z) \mid z \geqslant 0\} \tag{17}$$

este una dintre soluţiile optime ale programului liniar

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} + \eta_i = \overline{b}_i \quad && i \in J_1 \\ &\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} + \eta_i = -\overline{b}_i \quad && i \in I - J_1 \\ &z \geqslant 0 \\ &\eta \geqslant 0 \\ &\min \sum_{i \in J_1} \eta_i. \end{aligned} \tag{18}$$

Vom arăta că problema (17) admite soluții multiple.

În primul rînd observăm că problema (17) are cu siguranță o soluție, deoarece $\varphi(z)$ este o funcție convexă. Fie $\bar{z}$ această soluție și $\bar{B}$ baza corespunzătoare. Deoarece $\nabla \varphi(z)|_{z=\bar{z}} \geqslant 0$, $\eta_i = 0$, $\forall_i \in J_1$ încît minimul funcției obiectiv a problemei (18) este nul. Atunci

— sau nici un η_i, $i \in J_1$, nu aparține bazei optime $\bar{B}$;

— sau toți η_i, $i \in J_1$, care aparțin bazei $\bar{B}$ sînt nuli.

Pe de altă parte, dacă $\bar{B}$ este baza optimă a problemei (18), sînt îndeplinite condițiile

$$\Delta_j = c_{\bar{B}} \bar{B}^{-1} a_j - c_j \leqslant 0 \quad \text{pentru toți vectorii } a_j \notin \bar{B},$$

unde a_j sînt vectorii coloană asociați variabilelor din problema (18). Dacă nici una din variabilele η_i, $i \in J_1$, nu aparțin bazei $\bar{B}$, vectorul $c_{\bar{B}} = 0$ încît diferențele Δ_j sînt egale cu 0 sau -1. Mai mult, $\Delta_j = -1$ numai dacă a_j este asociat unei variabile η_j, $i \in J_1$. Problema (18) are n restricții și $2n$ variabile încît n vectori nu aparțin bazei $\bar{B}$. Dacă $n_1 < n$ este numărul elementelor mulțimii J_1, atunci $n - n_1$ dintre vectorii care nu aparțin bazei optime au diferențele Δ_j nule încît problema admite $(n - n_1)$ soluții optime.

Un raționament analog conduce la concluzia că și dacă $\bar{B}$ conține variabile η_i, $i \in I_1$, problema (18) are mai multe soluții optime.

Una dintre soluțiile optime ale problemei de programare liniară (18) este soluția problemei de programare pătratică (17). Această soluție poate fi ușor determinată calculînd valorile funcției $\varphi(u)$ pentru toate soluțiile optime ale programului liniar.

Exemplul I. Să se determine minimul funcției

$$g(u) = 3u_1^2 + 5u_2^2 + 6u_3^2 + 3u_4^2 - 4u_1 u_2 - 4u_1 u_4 + 2u_2 u_4 - 6u_3 u_4 \tag{19}$$

cu condițiile

$$u_1 \geqslant 3; \quad u_2 \geqslant 1; \quad u_3 \geqslant 1; \quad u_4 \geqslant 1. \tag{20}$$

Soluție. Funcția $g(u)$ se poate scrie sub forma

$$\varphi(u) = u'ku$$

unde

$$k = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Avem vectorul coloană $b = (3, 1, 1, 1)$ încît

$$\bar{b} = kb = (5, 0, 3, -5).$$

Deoarece $\bar{b}_4 < 0$ vectorul $z = 0$ nu este soluția optimă a problemei

$$\{\min \varphi(z) \mid z \geqslant 0\},$$

unde $\varphi(z) = z'kz + 2z'\bar{b} + b'\bar{b}$ este

$$\begin{aligned} \varphi(z) = 3z_1^2 + 5z_2^2 + 6z_3^2 + 3z_4^2 - 4z_1 z_2 - 4z_1 z_4 + 2z_2 z_4 - \\ 6z_3 z_4 + 10z_1 + 6z_3 - 10z_4 + 13. \end{aligned} \tag{21}$$

Un vector $z \geqslant 0$ realizează minimul funcției (21) dacă satisface condițiile

$$
\begin{aligned}
&1/2\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_1} = 3z_1 - 2z_2 \phantom{{}-3z_3} - 2z_4 + 5 \geqslant 0\\
(21')\quad &1/2\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_2} = -2z_1 + 5z_2 \phantom{{}-3z_3} + z_4 \geqslant 0\\
&1/2\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_3} = 6z_3 - 3z_4 + 3 \geqslant 0\\
&1/2\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_4} = -2z_1 + z_2 - 3z_3 + 3z_4 - 5 = 0
\end{aligned}
$$

deci dacă este o soluție optimă a programului liniar

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
-3z_1 + 2z_2 \phantom{{}-6z_3} + 2z_4 + \eta_1 &= 5\\
2z_1 - 5z_2 \phantom{{}-6z_3} - z_4 + \eta_2 &= 0\\
-6z_3 + 3z_4 + \eta_3 &= 3\\
-2z_1 + z_2 - 3z_3 + 3z_4 + \eta_4 &= 5\\
z \geqslant 0 \qquad \eta &\geqslant 0\\
\min \eta_4 .&
\end{aligned}
$$

Rezolvînd prin algoritmul simplex problema (21) avem

c_B	c_j		0	0	0	1	0	0	0	0
	Baza	Soluția	η_1	η_2	η_3	η_4	z_1	z_2	z_3	z_4
	η_1	5	1				−3	2	0	2
	η_2	0		1			2	−5	0	−1
	η_3	3			1		0	0	−6	3*
1	η_4	5				1	−2	1	−3	3
$\bar{z}_j - c_j$		5	0	0	0	0	−2	1	−3	3
	η_1	3	1		−2/3		−3	2	4	
	η_2	1		1	1/3		2	−5	−2	
	z_4	1			1/3		0	0	−2	1
1	η_4	2			−1	1	−2	1	3*	
$\bar{z}_j - c_j$		2	0	0	−1	0	−2	1	3	0
	η_1	1/3	1		2/3	−4/3	−1/3	2/3		
	η_2	7/3		1	−1/3	2/3	2/3	−13/3		
	z_4	7/3			−1/3	2/3	−4/3	2/3		1
	z_3	2/3			−1/3	1/3	−2/3	1/3	1	
$\bar{z}_j - c_j$		0	0	0	0	−1	0	0	0	0

din care reiese că soluțiile optime sînt

Soluția	z_1	z_2	z_3	z_4	u_1	u_2	u_3	u_4	$g(u)$
I : $z^{(1)}$	0	0	2/3	7/3	3	1	5/3	10/3	3 1/3
II : $z^{(2)}$	0	0	5/6	5/2	3	1	11/6	7/2	3 5/12
III : $z^{(3)}$	7/2	0	3	7	13/2	1	4	8	9 3/4
IV : $z^{(4)}$	0	1/2	1/2	2	3	3/2	3/2	3	6 3/4

Din soluțiile optime $z^{(1)}$, $z^{(2)}$, $z^{(3)}$ și $z^{(4)}$ se calculează cu ușurință soluțiile $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$. Valorile funcției $g(u)$ pentru aceste soluții, arată că

$$\{\min g(u) \mid u_1 \geqslant 3, \quad u_2 \geqslant 1, \quad u_3 \geqslant 1, \quad u_4 \geqslant 1\}$$

se obține pentru $u_1 = 3$, $u_2 = 1$, $u_3 = 5/3$, $u_4 = 10/3$, punct situat pe frontiera mulțimii soluțiilor sistemului de restricții.

Observații. Modelul (22) se obține cu multă ușurință deoarece:

1°. Ecuațiile care corespund derivatelor pozitive pentru $u = b$, respectiv $z = 0$, au coeficienții egali cu elementele liniei corespunzătoare din matricea k, înmulțite cu -1 și membrul drept egal cu componenta corespunzătoare a vectorului $\overline{b} = kb$.

2°. Ecuațiile care corespund derivatelor negative pentru $u = b$, respectiv $z = 0$, au coeficienții egali cu elementele liniei corespunzătoare din matricea k și membrul drept egal cu componenta corespunzătoare a vectorului $\overline{b} = kb$, înmulțită cu -1.

3°. Funcția obiectiv este suma variabilelor adăugate ecuațiilor care corespund elementelor negative ale vectorului $\overline{b}$.

În [2] se demonstrează că problema minimizării funcției pătratice

$$f(x) = x'Cx + 2\,L'x \tag{23}$$

cu condițiile

$$Ax \geqslant b \tag{24}$$

poate fi rezolvată determinînd minimul funcției pătratice

$$g(u) = u'Ku + 2\,L'Mu + L'H \tag{25}$$

cu condițiile

$$u \geqslant b. \tag{26}$$

În funcția $g(u)$ dată de relația (25), matricile K, M și H sînt:

$$K = (AC^{-1}A')^{-1}; \quad M = C^{-1}A'K; \quad H = MAC^{-1}$$

încît K are dimensiunile $m \times m$ și este o matrice simetrică, pozitiv definită dacă rang $A = m$ și C este simetrică; M are dimensiunile $n \times m$ și H are dimensiunile $n \times n$.

Problema (25)—(26) are aceiaşi soluţie optimă cu problema

$$\min g_2(u) = u'Ku + 2\,L'Mu \tag{27}$$

cu condiţiile

$$u \geqslant b \tag{28}$$

relaţia dintre x şi u fiind

$$x = Mu + H.$$

Ca şi în cazul problemei (3)—(4) se poate arăta că funcţia $g_2(u)$ este minimă în condiţiile $u \geqslant b$ pentru $u = b$ dacă

$$\hat{b} = Kb + ML' \geqslant 0.$$

Dacă vectorul $\hat{b}$ are $i \leqslant m$ componente negative, funcţia $g_2(u)$ este minimă pentru una dintre soluţiile optime ale problemei de programare liniară

$$\sum_{p=1}^{m} k_{rp}\,u_p + \sum_{h=1}^{n} l_h\,m_{hr} + \eta_r = 0, \quad r \in I,$$

$$\sum_{p=1}^{m} k_{rp}\,u_p + \sum_{h=1}^{n} l_h\,m_{hr} + \eta_r \geqslant 0, \quad r \in I - I_1$$

$$\eta \geqslant 0, \quad u \geqslant 0$$

$$\min \sum_{r \in I_1} \eta_r,$$

unde $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ iar I_1 este mulţimea indicilor componentelor negative ale vectorului $\hat{b}$.

Exemplul II. Să se determine minimul funcţiei

$$g(x) = 14\,x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6\,x_1 x_2 - 4\,x_1 x_3 + 2\,x_2 x_3 + x_1 - 5\,x_2 + 2x_3$$

cu condiţiile

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant -1, \quad x_3 \geqslant 2.$$

Avem

$$K = \begin{bmatrix} 14 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -5/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{b} = Kb + ML' = \begin{bmatrix} -13/2 \\ -5/2 \\ 9/2 \end{bmatrix}$$

încît vectorul $x(0, -1, 2)$ nu este soluţie optimă a problemei propuse.

Făcînd schimbarea de variabile

$$x_1 = z_1; \quad x_2 = z_2 - 1; \quad x_3 = z_3 + 2$$

problema de programare liniară printre ale cărei soluţii optime se află soluţia căutată este

$$\begin{gathered}
28\,z_1 + 6z_2 - 4z_3 + \eta_1 = 13 \\
6\,z_1 + 4z_2 + 2z_3 + \eta_2 = 5 \\
4\,z_1 - 2z_2 - 4z_3 + \eta_3 = 9 \\
z \geqslant 0 \qquad \eta \geqslant 0 \\
\min\,(\eta_1 + \eta_2)
\end{gathered}$$

Folosind algoritmul simplex găsim următoarele soluţii optime

Soluţia	z_1	z_2	z_3	x_1	x_2	x_3	$g_1(x)$
$\bar{x}$	23/40	0	31/40	23/40	−1	111/40	20,55
$\bar{x}$	11/38	31/38	0	11/38	−7/38	2	13,08

Deoarece $g(\bar{\bar{x}}) < g(\bar{x})$ vectorul $\bar{\bar{x}}$ (11/38; − 7/38; 2) este soluţia căutată.

Exemplul III. Să se determine minimul funcţiei

$$g(x) = 14\,x_1^2 + 2x_2^2\,2x_3^2 + 6\,x_1x_2 - 4\,x_1x_3 + 2\,x_2x_3 + l\,(x_1 + x_2 + x_3)$$

cu condiţiile

$$x_1 \geqslant 0 \quad x_2 \geqslant -1 \quad x_3 \geqslant 2$$

l fiind un parametru cu valori în intervalul $(-3, +\infty)$.

În acest caz vectorul $\hat{b}$ este

$$\hat{b} = \left(\frac{l-14}{2};\quad \frac{l}{2};\quad \frac{l+6}{2}\right)'.$$

Dacă $l \geqslant 14$, vectorul x^* (0, − 1, 2) este soluţia optimă.

Dacă $l < 14$ folosim metodele programării liniare parametrice în problema

$$\begin{gathered}
-28\,z_1 - 6z_2 + 4z_3 + \eta_1 = l - 14 \\
-\;6\,z_1 - 4z_2 - 2z_3 + \eta_2 = l \\
4\,z_1 - 2z_2 - 4z_3 + \eta_3 = l + 6 \\
z \geqslant 0 \qquad \eta \geqslant 0 \\
\min\,\eta_1.
\end{gathered}$$

Rezultatele obţinute sînt redate în următorul tabel

Tabel

l	Soluţii optime	z_1	z_2	z_3	x_1	x_2	x_5	$g(x)$
$l \geqslant 14$	I	0	0	0	0	-1	2	$l + 6$
	II	0	0	$\frac{l-14}{4}$	0	-1	$\frac{l-6}{4}$	$\frac{3l^2 - 36l + 76}{8}$
$-3{,}5 \leqslant l \leqslant 14$	I	$\frac{14-l}{4}$	0	0	$\frac{14-l}{28}$	-1	2	$\frac{-l^2 + 84l + 140}{56}$
	II	0	$\frac{14-l}{6}$	0	0	$\frac{8-l}{6}$	2	$\frac{-l^2 + 16l + 152}{9}$

din care citim că pentru fiecare interval de variaţie a parametrului l problema de programare liniară are două soluţii optime. Calculînd valorile funcţiei $g(x)$ pentru fiecare soluţie constatăm că vectorul $(0, -1, 2)$ este optim pentru toţi $l \geqslant 14$ şi vectorul $\left(\frac{14-l}{28}; -1, 2\right)$ este optim pentru $l \in [-3,5; 14]$.

Primită la redacţie la 31 martie 1967.

Centrul de statistică matematică al Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. C. Mocanu, *Observaţii asupra rezolvării problemelor de programare pătratică,* St. cerc. mat. Cluj, **XIV**, *2*, 313–322 (1963).
2. C. Mocanu, *Sur la résolution des problemes de programmation quadratique.* Mathematica, **6**, *1*, 51–61 (1964).

ASUPRA CONVERGENȚEI SERIILOR ȘI EVALUAREA RESTULUI ÎN SPAȚII LINIARE ORDONATE

DE

ANDREI NEY

(Cluj)

Se demonstrează două teoreme de convergență pentru serii în spații liniare relativ σ-reticulate, de unde se deduc formule de evaluarea restului. Se extinde transformarea lui Kummer — la aceste spații — pentru accelerarea convergenței seriilor.

În prezenta lucrare se transpun într-un *spațiu liniar relativ σ-reticulat* anumite rezultate din lucrările [2] și [3] ale autorului.

Notă. În conformitate cu terminologia din [1], *un spațiu liniar σ-reticulat* este un spațiu liniar *ordonat*, care totodată este și o latice (mulțime reticulată) σ-completă, prin urmare, orice submulțime numărabilă a sa are o margine inferioară și o margine superioară. Dacă în definiția σ-completitudinii se adaugă condiția, mai puțin exigentă, a mărginirii submulțimii, atunci se obține un *spațiu liniar relativ σ-reticulat.* Fără să se sublinieze în cele ce urmează faptul că multiplicatorii numerici ai spațiului sînt numere reale, aceasta se va subînțelege totdeauna. Se menționează că ordonarea se va nota cu $\leqslant$ respectiv cu $\geqslant$; privind ordonarea parțială, anumite consecințe se referă doar la elemente comparabile în sensul ordinei.

În spațiul liniar (real) relativ σ-reticulat se consideră un șir de elemente, (u_n), infinit, toate pozitive în acel spațiu $\mathcal{E}$, adică $u_n \geqslant \theta$, θ fiind elementul nul în $\mathcal{E}$. Seria $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ se definește, ca de obicei, pornind de la sumele parțiale $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ (pentru $n = 1, 2, \ldots$) în $\mathcal{E}$. Se notează cu $\mathcal{N}_{E_+}$ mulțimea șirurilor de elemente pozitive în $\mathcal{E}$, descrescătoare către θ. Se consideră un operator notat cu $\mathcal{R}_u$, prin intermediul căruia se pun în corespondență termenii șirului $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ respectiv cu termenii unui șir din $\mathcal{N}_{\mathcal{E}_+}$. Operatorul $\mathcal{R}_u$ se va supune și la alte condiții suplimentare. (A se vedea [2].)

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1169–1174, BUCUREȘTI, 1967

TEOREMA 1. *O serie,* $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$, *de elemente pozitive din spațiul liniar relativ* σ*-reticulat* $\mathcal{E}$, *converge în* $\mathcal{E}$, *dacă și numai dacă există un operator* $\mathcal{R}_u$ *(definit mai sus), astfel ca să aibă loc*

$$(1)\quad \begin{cases} \text{a)}\ \mathcal{R}_u u_n \downarrow \theta \ (n \to \infty) \\ \text{b)}\ \mathcal{R}_u u_n - \mathcal{R}_u u_{n+1} \geqslant \mu \cdot u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots;\ \mu \text{ număr pozitiv}). \end{cases}$$

Pentru restul r_n *al seriei va fi valabilă următoarea formulă de evaluare*

$$(2)\qquad r_n \leqslant \frac{1}{\mu} \mathcal{R}_u u_n.$$

Demonstrație. Aplicînd lui (1b) operația $\sum\limits_{n}^{n+p-1}$, se obține după ușoare transformări:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} \leqslant \frac{1}{\mu} (\mathcal{R}_u u_n - \mathcal{R}_u u_{n+p}) \leqslant \frac{1}{\mu} \mathcal{R}_u u_n.$$

Șirul $\left(\sum\limits_{k=1}^{p} u_{n+k}\right)_{p=1,2,\ldots}$ de termeni pozitivi este crescător în $\mathcal{E}$ și superior mărginit, deci în baza relativ σ-completitudinii lui $\mathcal{E}$ are un supremum, care în sensul ordinei din $\mathcal{E}$ este $(0) - \lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{p} u_{n+k}$, deci $r_n \leqslant \frac{1}{\mu} \mathcal{R}_u u_n$, și seria converge.

Pe de altă parte, dacă seria în cauză este convergentă, atunci operatorul $\mathcal{R}_u$ este acela, care pune în corespondență u_n cu restul r_n pentru $n = 1, 2, \ldots$, relațiile (1) verificîndu-se, [2], astfel:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_u u_n = r_n \downarrow \theta \ (n \to \infty) \\ r_n - r_{n+1} = u_{n+1} \ (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Observația 1. Căutîndu-se operatorul $\mathcal{R}_u$ sub forma simplă de multiplicator numeric real, astfel: $\mathcal{R}_u u_n = a_n u_n$, se obțin criterii de convergență în $\mathcal{E}$ de tipul celor clasice, ce derivă din criteriul lui Kummer. În spațiul $\mathcal{E}_1$ (euclidian real monodimensional) care satisface condiția din teorema 1, am indicat astfel de $\mathcal{R}_u$-operatori, care generează criterii mai cuprinzătoare decît acelea cu cîte un șir de multiplicatori kummerieni, și care au fost tratați în [2].

Extinderea criteriului lui Kummer în spațiul $\mathcal{E}_k$. Spațiul euclidian real, k-dimensional, cu ordonarea (parțială) definită prin

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \xi_i \leqslant \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

unde $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ și $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ sînt elemente din $\mathcal{E}_k$, este un spațiu liniar complet reticulat, [1], în consecință este și un spațiu liniar relativ σ-complet. Se notează prin

$$u_n = \begin{bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_k^{(n)} \end{bmatrix} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

termenii unei serii de elemente din $\mathcal{E}_k$, unde s-a adoptat scrierea unui sistem ordonat de k elemente sub forma de vector de coloană pentru anumite considerente de calcul. Se ia drept $\mathcal{R}_u$-operator efectul de multiplicare a lui u_n prin matricea diagonală

$$a_n = \begin{bmatrix} a_1^{(n)} & & & \\ & a_2^{(n)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_k^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \text{pentru } n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Rezultă — cerîndu-se $\mathcal{R}_u u_n \to \theta$ $(n \to \infty)$:

$$\mathcal{R}_u u_n = [a_1^{(n)} u_1^{(n)},\ a_2^{(n)} u_2^{(n)},\ \ldots,\ a_k^{(n)} u_k^{(n)}] \to (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \quad (n \to \infty),$$

iar prin aplicarea condiţiei (1b) se obţine

$$[a_1^{(n)} u_1^{(n)} - a_1^{(n+1)} u_1^{(n+1)},\ \ldots,\ a_k^{(n)} u_k^{(n)} - a_k^{(n+1)} u_k^{(n+1)}] \geqslant \mu \cdot [u_1^{(n+1)},\ \ldots,\ u_k^{(n+1)}],$$

adică sistemul de condiţii de tip Kummer

$$\left\{\begin{array}{l} a_i^{(n)} u_i^{(n)} \to 0 \quad (n \to \infty) \\ a_i^{(n)} u_i^{(n)} - a_i^{(n+1)} u_i^{(n+1)} \geqslant u \cdot u_i^{(n+1)} \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{array}\right. ; \text{ pentru } i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

În particular, pentru $k = 2$ avem criteriul lui Kummer pentru serii cu termeni complecşi cu coeficienţi pozitivi.

În cele ce urmează ne vom baza pe

DEFINIŢIA 1. *Avînd două şiruri* (x_n) *respectiv* (y_n), *de elemente pozitive din* $\mathcal{E}$, *astfel încît pentru orice* ε *pozitiv şi subunitar să existe un număr pozitiv* N_ε *corespunzător, ca din* $n > N_\varepsilon$ *să rezulte* $(1 - \varepsilon)\, x_n \leqslant y_n \leqslant (1 + \varepsilon) x_n$, *atunci cele două şiruri se vor zice asimptotic egale.*

LEMA. (Teorema lui Cesàro-Stolz generalizată.) *Fie* $(x_n) \in \mathcal{N}_{\mathcal{E}_+}$, *adică un şir descrescător către* θ *în spaţiul liniar relativ* σ*-reticulat,* $\mathcal{E}$, *şi fie* (y_n) *un şir cu limita* θ *în sensul ordinei din* $\mathcal{E}$, *astfel, ca sistemul de inegalităţi*

$$(3) \qquad (1 - \varepsilon)\,(x_n - x_{n+1}) \leqslant y_n - y_{n+1} \leqslant (1 + \varepsilon)\,(x_n - x_{n+1})$$

să fie îndeplinit pentru orice ε *pozitiv subunitar, îndată ce* $n > N_\varepsilon$. *Atunci şirurile* (x_n) *şi* (y_n) *vor fi asimptotic egale.*

Demonstraţie. Din prima inegalitate (3) rezultă $(y_n) \in \mathcal{N}_{\mathcal{E}_+}$. Însumînd membrii sistemului (3) de la n la $n + p - 1$ se obţine

$$(4) \qquad (1 - \varepsilon)\,(x_n - x_{n+p}) \leqslant y_n - y_{n+p} \leqslant (1 + \varepsilon)\,(x_n - x_{n+p}).$$

Şirul $(x_n - x_{n+p})_{p=1,\,2,\,\ldots}$ este strict crescător şi superior mărginit de x_n; tot aşa şirul $(y_n - y_{n+p})_{p=1,\,2,\,\ldots}$ este strict crescător şi superior mărginit de $(1 + \varepsilon)\, x_n$. Atunci, în baza proprietăţii lui $\mathcal{E}$ de a fi relativ σ-reticulat, rezultă din (4), pentru $p \to \infty$,

$$(1 - \varepsilon)\, x_n \leqslant y_n \leqslant (1 + \varepsilon)\, x_n \quad (0 < \varepsilon < 1,\ \ n > N_\varepsilon),$$

ceea ce demonstrează lema.

TEOREMA 2. *O serie, $\sum_{1}^{\infty} u_n$, de elemente pozitive din spațiul liniar relativ σ-reticulat $\mathcal{E}$, converge în $\mathcal{E}$ dacă și numai dacă un operator $\mathcal{R}_u$ astfel ca să aibă loc*

$$(5) \quad \begin{cases} \text{a)} & \mathcal{R}_u u_n \downarrow \theta \quad (n \to \infty) \\ \text{b)} & (1-\varepsilon)\, u_{n+1} \leqslant \mathcal{R}_u u_n - \mathcal{R}_u u_{n+1} \leqslant (1+\varepsilon)\, u_{n+1} (n > N_\varepsilon), \end{cases}$$

unde ε *este un număr pozitiv subunitar, arbitrar, iar* N_ε *un număr pozitiv suficient de mare atașat lui* ε. *Restul* r_n *este asimptotic egal cu* $\mathcal{R}_u u_n$.

Demonstrație. Se aplică inegalității din stînga în relația (5.b) operația $\sum_{n}^{n+p-1}$ și se procedează ca în prima parte a demonstrării convergenței în cazul teoremei 1, unde se pune $\mu = 1 - \varepsilon$. Apoi, în baza convergenței lui $\sum_{1}^{\infty} u_n$ se poate pune $u_{n+1} = r_n - r_{n+1}$ (r_n fiind restul seriei) și (5.b) devine

$$(5.\text{b}') \quad (1-\varepsilon)(r_n - r_{n+1}) \leqslant \mathcal{R}_u u_n - \mathcal{R}_u u_{n+1} \leqslant (1+\varepsilon)(r_n - r_{n+1}) \qquad (n > N_\varepsilon),$$

ceea ce combinat cu (5.a) constituie tocmai condițiile lemei de mai sus, în urma aplicării căreia se obține

$$(6) \qquad \frac{1}{1+\varepsilon}\, \mathcal{R}'_u u_n \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\, \mathcal{R}_u u_n \qquad (n > N_\varepsilon),$$

ε fiind nu număr pozitiv subunitar, de altfel arbitrar. Punînd în (6) $\eta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ (η putînd fi arbitrar de mic alegînd corespunzător pe ε), se obține

$$(1-\eta)\, \mathcal{R}_u u_n \leqslant r_n \leqslant (1+\eta)\, \mathcal{R}_u u_n \quad (n > N_\eta),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Observația 2. Din teorema 2 se pot obține criterii de tip Kummer procedînd în sensul observației 1.

DEFINIȚIA 2. Corespunzător definiției bine cunoscute din teoria seriilor numerice, privind compararea rapidității de convergență a două serii ($\sum_{1}^{\infty} u_n$ cu restul r_n respectiv $\sum_{1}^{\infty} u'_n$ cu restul r'_n) *se va spune că seria* $\sum_{1}^{\infty} u'_n$ *converge mai repede în spațiul liniar ordonat* $\mathcal{E}$ *decît seria* $\sum_{1}^{\infty} u_n$, *dacă* ε *fiind un număr pozitiv subunitar arbitrar, are loc în sensul ordinei în* $\mathcal{E}$

$$\theta \leqslant |r'_n| \leqslant \varepsilon |r_n| \quad (n > N_\varepsilon),$$

unde semnul absolutului se aplică în sensul definit în [1], adică $|x| = xV(-x)$ (modulul lui x este marginea superioară a elementelor x, $-x \in \mathcal{E}$).

COROLAR. *Dacă pentru seriile* $\sum_1^\infty u_n$ *și* $\sum_1^\infty u'_n$ *(unde* $u_n, u'_n \in \mathcal{E}_+$*) convergente în spațiul liniar relativ σ-reticulat* $\mathcal{E}$ *are loc sistemul de inegalități*

(7) $\theta \leqslant u'_n \leqslant \varepsilon u_n$ *(*$n > N_\varepsilon$*, ε pozitiv, real, subunitar, arbitrar),*

atunci $\sum_1^\infty u'_n$ *converge mai repede ca* $\sum_1^\infty u_n$*.*

În adevăr, însumînd (7) de la $n + 1$ la ∞, rezultă

$$\theta \leqslant r'_n \leqslant \varepsilon r_n \quad (n > N_\varepsilon),$$

ceea ce este echivalent cu afirmația din corolar, lămurită prin definiția 2.

Transformări Kummeriene. *Fie seria convergentă* $\sum_1^\infty u_n$*, cu termenii* $u_n \in \mathcal{E}_+$*, a cărei sumă trebuie calculată. Fie seria* $\sum_1^\infty v_n$ *cu termenii* $v_n \in \mathcal{E}_+$ *și a cărei sumă* $s^{(v)} \in \mathcal{E}_+$ *este cunoscută. Fie, mai departe,* (v_n) *asimptotic egal cu* (u_n)*, adică*

$$(1 - \varepsilon)\, u_n \leqslant v_n \leqslant (1 + \varepsilon)\, u_n \quad (n > N_\varepsilon), \tag{8}$$

unde ε este un număr pozitiv subunitar, arbitrar. *Atunci are loc transformarea*

$$\sum_1^\infty u_n = s^{(v)} + \sum_1^\infty (u_n - v_n), \tag{9}$$

unde seria $\sum_1^\infty (u_n - v_n)$ *converge mai repede decît seria originală* $\sum_1^\infty u_n$*.*

Demonstrație. Din egalitatea evidentă

$$\sum_1^N (u_n - v_n) = \sum_1^N u_n - \sum_1^N v_n \tag{10}$$

și din convergența seriilor $\sum_1^\infty u_n$ și $\sum_1^\infty v_n$ rezultă că seria $\sum_1^\infty (u_n - v_n)$ converge, iar (9) are loc prin trecere la limită în (10). Seria $\sum_1^\infty (u_n - v_n)$ converge mai repede decît seria $\sum_1^\infty u_n$, deoarece din (8) rezultă $-\varepsilon u_n \leqslant v_n - u_n \leqslant \varepsilon u_n$, de unde $|u_n - v_n| \leqslant \varepsilon u_n$. Atunci

$$\left|\sum_{k=n+1}^\infty (u_k - v_k)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^\infty |u_k - v_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^\infty u_k \quad (n > N_\varepsilon),$$

iar în baza definiției 2 rezultă că seria $\sum_1^\infty (u_n - v_n)$ converge mai repede decît seria $\sum_1^\infty u_n$.

Observația 3. Dacă convergența seriei se pune în evidență cu un operator $\mathcal{R}_n$ în conformitate cu teorema 2, atunci se ia drept $\sum_1^\infty v_n$ seria

$\sum_{k=1}^{\infty}(\mathcal{R}_u u_k - \mathcal{R}_u u_{k+1})$, iar în baza lui (5b) relaţia (9) se transcrie astfel pentru rest :

$$r_n = \mathcal{R}_n u_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} [u_k - (\mathcal{R}_u u_{k-1} - \mathcal{R}_u u_k)]. \tag{11}$$

Exemplu. Mulţimea $F_{[a,b]}$ a funcţiilor reale definite pe segmentul arbitrar, finit $[a, b]$, cu ordinea definită prin

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x(t) \leqslant y(t) \text{ pentru orice } t \in [a, b],$$

unde $x, y \in F_{[a,b]}$, iar adunarea respectiv multiplicarea cu un factor numeric definindu-se prin $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ respectiv $(\alpha x)(t) = \alpha \cdot x(t)$, devine un spaţiu liniar complet reticulat, [1], deci se bucură şi de proprietatea de a fi relativ σ-completă. În acest sens, considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ pe segmentul $[a, b]$, unde $1 < a < b < +\infty$. Se pune

$$\mathcal{R}_u u_n = \frac{1}{x-1} u_n = \frac{1}{x-1} \frac{1}{1+x^n},$$

de unde

$$\mathcal{R}_u u_n - \mathcal{R}_u u_{n+1} = \frac{x^n}{1+x^n} \cdot \frac{1}{1+x^{n+1}}.$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1$, rezultă că sistemul (5) este satisfăcut, prin urmare seria converge, iar pentru restul ei avem, în conformitate cu (11),

$$r_n = \frac{1}{(x-1)(1+x^n)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^{k-1})(1+x^k)},$$

unde seria din membrul al doilea converge vizibil mai repede decît cea originală.

Primită la redacţie la 7 martie 1967.

Universitatea „Babeş-Bolyai”
Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Cristescu, R., *Spaţii liniare ordonate*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1959.
2. Ney, A., *Konvergenzuntersuchung, Konvergenzbeschleunigung und Restabschätzung de Reihen in linearen Räumen*. Rev. Roumaine de math. pures et appl., **IX**, *4*, 337–356 (1964).
3. Ney, A., *O formulă asimptotică generală pentru evaluarea restului seriilor convergente cu termeni pozitivi*. St. cerc. mat. Cluj, **XII**, *2*, 315–332 (1961).

ASUPRA UNOR INEGALITĂȚI RECURENTE ȘI APLICAȚII ALE LOR[1]

DE

I. PĂVĂLOIU

(Cluj)

În lucrare se deduc două inegalități pe care le verifică elementele unui șir de numere nenegative în ipoteza că aceste elemente verifică anumite inegalități recurente.

În sfîrșit se dă o aplicație a acestor inegalități la evaluarea erorilor în cazul rezolvării ecuațiilor neliniare cu metode iterative cu doi pași.

Fie dat un șir infinit $G = \{g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots\}$ de numere reale și nenegative și două numere k și α, $\alpha \geqslant 0$.

Dacă elementele șirului G satisfac inegalitățile:

$$g_n \leqslant k g_{n-1} + \alpha, \tag{1}$$

atunci, oricare ar fi g_n un element al șirului G, are loc următoarea inegalitate

$$g_n \leqslant k^n g_0 + \frac{\alpha}{1-k} \tag{2}$$

care depinde numai de n și de g_0 și nu depinde de elementele care preced pe g_n în șirul G.

1. În Nota de față ne propunem să generalizăm acest rezultat în cazul cînd inegalitatea (1) este înlocuită cu una mai generală și anume, vom presupune că elementele șirului G satisfac următoarele inegalități:

$$g_n \leqslant \beta g_{n-1} + \gamma g_{n-2} + \alpha\,; \quad 0 < \beta + \gamma < 1. \tag{1.1}$$

---

[1] Lucrare comunicată la „Colocviu de teoria funcțiilor convexe cu aplicație la calculul numeric'' din 1–5 iunie 1965, Cluj.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1175–1179, BUCUREȘTI 1967

În acest caz pentru a demonstra o inegalitate analoagă cu (2) nu se mai poate aplica același procedeu ca și pentru demonstrarea inegalității (2). Fie

$$c_1 = \frac{\beta g_1 + \gamma g_0}{x_1}, \tag{1.2}$$

unde x_1 este dat de următoarea egalitate:

$$x_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\gamma}}{2}.$$

Cu aceste notații avem următorul rezultat:

TEOREMA 1. *Dacă șirul G satisface inegalitățile* (1.1) *și în plus*

$$g_1 \leqslant c_1 \tag{1.3}$$

unde c_1 *este dat de egalitatea* (1.2), *atunci oricare ar fi* g_n *un element al șirului* G *este satisfăcută inegalitatea*:

$$g_n \leqslant c_1 x_1^{n-1} + \frac{\alpha}{1 - \beta - \gamma}. \tag{1.4}$$

Demonstrație. Mai întîi vom demonstra că inegalitatea (1.3) este în adevăr posibilă, ținînd seamă că c_1 depinde de g_1. Din (1.2) și (1.3) avem:

$$g_1 \leqslant \frac{\beta g + \gamma g_0}{x_1}$$

sau

$$(x_1 - \beta)\, g_1 \leqslant \gamma g_0;$$

trebuie deci să arătăm că $x_1 - \beta > 0$ adică $\sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \gamma} - \frac{\beta}{2} > 0$ ceea ce este adevărat totdeauna.

Trecem acum la demonstrația teoremei enunțate. Se observă fără nici un fel de dificultate că dacă $x_1 < 1$, atunci $\gamma + \beta < 1$ și invers Din (1.1) și (1.3) avem:

$$g_1 \leqslant c_1$$

$$g_2 \leqslant \beta g_1 + \gamma g_0 + \alpha \leqslant c_1 x_1 + \alpha + \alpha c\beta + \gamma) = c_1 x_1 + \alpha\,[1 + \beta + \gamma]$$

și ținînd cont de aceasta obținem:

$$g_3 \leqslant \beta g_2 + \gamma g_1 + \alpha \leqslant c_1\,(\beta x_1 + \gamma) + \alpha\,[1 + (\beta + \gamma) + (\beta + \gamma)^2]$$

Este ușor de arătat că

$$\beta x_1 + \gamma = x_1^2 \tag{1.5}$$

deci

$$\varphi_3 \leqslant c_1 x_1^2 + \alpha\,[1 + (\beta + \gamma) + (\beta + \gamma)^2] \tag{1.6}$$

În general, dacă presupunem prin inducţie că :

$$g_{n-2} \leqslant c_1 x_1^{n-3} + \alpha \sum_{i=0}^{n-3} (\beta + \gamma)^i$$

$$g_{n-1} \leqslant c_1 x_1^{n-2} + \alpha \sum_{i=0}^{n-2} (\beta + \gamma)^i$$

atunci vom arăta că şi pentru g_n are loc o inegalitate analoagă. Adică :

$$g_n \leqslant \beta g_{n-1} + \gamma g_{n-2} + \alpha \leqslant c_1 x_1^{n-3} (\beta x_1 + \gamma) + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (\beta + \gamma)^i$$

şi ţinînd cont de egalitatea (1.5) avem :

$$g_n \leqslant c_1 x_1^{n-1} + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (\beta + \gamma)^i.$$

Dacă se ţine cont acum de faptul că $\beta + \gamma < 1, \gamma > 0, \beta > 0$, rezultă că :

$$g_n \leqslant c_1 x_1^{n-1} + \frac{\alpha}{1 - \beta - \gamma}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

2. Vom pune acum problema mai general. Fie dat şirul G şi numerele pozitive $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k, k \geqslant 2$ cu condiţia :

$$\delta = \sum_{i=0}^{k} \beta_i < 1 \tag{2.1}$$

şi şirul de inegalităţi :

$$g_{k+1} \leqslant \sum_{i=0}^{k} \beta_i g_i + \alpha \tag{2.2}$$

$$g_{k+\beta+1} \leqslant \sum_{i=0}^{k} \beta_i g_{i+s} + s + \alpha, \quad s = 1, 2, \ldots$$

Să se deducă pentru g_n, $n = k + 1, k + 2, \ldots$, o inegalitate analoagă cu inegalitatea (1.4)

Să observăm mai întîi că ecuaţia :

$$F(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots \beta_k x^k - x^{k+1} = 0 \tag{2.3}$$

admite cel puţin o rădăcină cuprinsă în intervalul (0,1). Aceasta se arată uşor, deoarece $F(0) = \beta_0 > 0$ şi $F_{(1)} = \delta - 1 < 0$. Fie $x \in (0,1)$ rădăcina ecuaţiei (2.3) pe care am precizat-o mai sus. Considerăm constanta c_1 pentru care sînt satisfăcute inegalităţile :

$$\begin{aligned} g_0 &\leqslant c_1 + \alpha \\ g_1 &\leqslant c_1 x_1 + \alpha (1 + \delta) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_k &\leqslant c_1 x^k + \alpha (1 + \delta + \ldots + \delta^k). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dacă ţinem cont de inegalităţile (2.2) şi (2.4) avem :

$$g_{k+1} \leqslant c_1 (\beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x^k) + \alpha (1 + \delta + \ldots + \delta^{k+1})$$

şi ţinînd cont de (2.3) avem :

$$g_{n+1} \leqslant c_1 x_1^{k+1} + \alpha (1 + \delta + \ldots + \delta^{k+1}).$$

Uşor se arată prin inducţie că în general avem :

$$g_{k+s} \leqslant c_1 x_1^{k+s} + \alpha (1 + \delta + \ldots + \delta^{k+s})$$

sau

$$g_{k+s} \leqslant c_1 x_1^{k+s} + \frac{\alpha}{1 - \delta}. \tag{2.5}$$

Ţinînd cont de cele arătate mai sus, în general putem enunţa următorul rezultat :

TEOREMA 2. *Dacă şirul G satisface inegalităţile* (2.2) *cu condiţiile* (2.1), c_1 *este o constantă pozitivă, astfel ca inegalităţile* (2.4) *să fie satisfăcute şi* x_1 *este o rădăcină a ecuaţiei* (2.3) *cuprinsă în intervalul* (*0,1*), *atunci oricare ar fi s avem următoarea inegalitate* :

$$g_{n+1} \leqslant c_1 x_1^{k+1} + \frac{\alpha}{1 - \delta}.$$

3. În continuare vom da o aplicaţie simplă a teoremei 1 la evaluarea erorilor în procedeele iterative cu doi paşi.

Considerăm ecuaţia :

$$x = \varphi (x), \tag{3.1}$$

unde despre funcţia φ definită pe intervalul $[a, b]$ facem următoarele ipoteze :

a) Funcţiei φ putem face să-i corespundă o funcţie de două variabile $F (x, \varphi)$ cu proprietatea că $F (x, x) = \varphi (x)$.

b) Oricare ar fi x şi y două puncte din $[a, b]$, valoarea funcţiei $F (x, y)$ pe aceste puncte aparţine tot intervalului $[a, b]$.

c) $|F (x, y) - F (x', y')| \leqslant \alpha | x - x' | + \beta | y - y' |$ oricare ar fi (x, y) şi (x', y') două puncte din domeniul $[a, b] \times [a, b]$.

În lucrarea [1] este dovedit că oricare ar fi punctele x_0 şi x_1 din $[a, b]$ şirul :

$$x_{n+1} = F (x_n, x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

converge către soluţia $\overline{x}$ a ecuaţiei (3.1) dacă $\alpha + \beta < 1$ şi sînt îndeplinite condiţiile a), b) şi c). Pentru a rezolva ecuaţia (3.1) vom considera o altă funcţie $F^* (x, y)$ definită tot pe $[a, b] \times [a, b]$ şi care transformă această mulţime în ea însăşi sau într-o parte a sa. Funcţia $F^* (x, y)$ vom presupune că este legată de funcţia $F (x, y)$ prin inegalitatea

$$|F (x, y) - F^* (x, y)| \leqslant \delta, \tag{3.3}$$

unde δ este o constantă pozitivă dată. Considerăm acum în locul procedeului (3.2) procedeul :

$$x^*_{n+1} = F^*(x^*_n, x^*_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.4}$$

De multe ori în calculele practice este convenabil ca procedeul de forma (3.4) să fie oprit cu un criteriu de forma :

$$|x^*_m - x^*_{m-2}| \leqslant \varepsilon \tag{3.5}$$

dar acest lucru nu totdeauna este posibil deoarece noi în afară de condiţia (3.3) nu cunoaştem alte proprietăţi ale funcţiei $F^*(x, y)$. Vom arăta că pentru ca inegalitatea (3.5) să fie satisfăcută la un moment dat, este suficient ca :

$$\varepsilon > \frac{2\delta}{1 - \alpha - \beta}. \tag{3.6}$$

Din (3.4) şi (3.3) avem :

$$|x^*_m - \gamma^*_{m-2}| \leqslant \alpha |x^*_{m-1} - x^*_{m-3}| + \beta |x^*_{m-2} - x^*_{m-4}| + 2\delta.$$

Dacă aplicăm acum rezultatele teoremei 1 obţinem :

$$|x^*_m - x^*_{m-2}| \leqslant c_1 x_1^{m-1} + \frac{2\delta}{1 - \alpha - \beta} \qquad 0 \leqslant x_1 \leqslant g < 1$$

de unde rezultă că inegalitatea (3.6) poate fi satisfăcută pentru un m destul de mare.

Dacă notăm cu $\varepsilon_1 = |x^*_m - x^*_{m-1}|$ obţinem pentru diferenţa $|\bar{x} - x^*_m|$ următoarea evaluare :

$$|\bar{x} - x^*_m| \leqslant \frac{\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon + \delta}{1 - \alpha - \beta}.$$

Aceasta este evaluarea erorii care se comite în cazul cînd procedeul (3.2) este înlocuit cu procedeul (3.4).

Primită la redacţie la 23 martie 1967.

Institutul de calcul al Academiei
Republicii Socialiste România,
Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. H. J. Weinitschke, *Über eine Klasse von Iterationsverfahren.* Numerische Mathematik, **6**, 395–404 (1964).
2. M. Urabe, *Eror Estimation in Numerical Solution of Equations by Iteration Proccess.* J. Sci. Hiroshima. Univ. Ser. A-I, **26**, *2* (1962).

ASUPRA MIŞCĂRII SATELIŢILOR ARTIFICIALI AI PĂMÎNTULUI ÎNTR-UN MEDIU REZISTENT

DE

I. POP şi T. OPROIU

(Cluj)

Se studiază mişcarea unui satelit artificial al Pămîntului într-un mediu rezistent, în ipoteza că rezistenţa are componenta radială şi transversală proporţionale cu pătratul componentelor radiale şi respectiv transversale a vitezei şi invers proporţionale cu distanţa la centrul Pămîntului.

1. INTRODUCERE

În anul 1949, prof. C. Iacob [1] a studiat problema transformării în sateliţi artificiali a unor corpuri lansate de pe suprafaţa Pămîntului, dînd şi o interesantă interpretare geometrică. Acest studiu este făcut neglijîndu-se rezistenţa aerului. Ulterior L. N. Persen [2], studiază mişcarea sateliţilor artificiali ai Pămîntului în cazul cînd rezistenţa aerului are componenta radială şi transversală proporţionale cu pătratul componentelor radiale şi respectiv transversale a vitezei şi invers proporţionale cu distanţa la centrul Pămîntului, presupunînd că orbita satelitului este aproape circulară, ceea ce restrînge mult domeniul de aplicabilitate a rezultatelor obţinute.

În această lucrare, utilizînd variabilele introduse de către K. G. Valeev şi G.H. Sceglov [3] în studiul mişcării punctului material într-un cîmp central de forţe, ne propunem să studiem problema considerată de Persen, fără a impune vreo restricţie asupra naturii traiectoriei.

În cele ce urmează, facem următoarele ipoteze :

— Se neglijează mişcarea de rotaţie a Pămîntului, considerînd că Pămîntul este invariabil legat de un sistem de axe cereşti.

— Pămîntul are forma sferică.

2. ECUAŢIILE MIŞCĂRII

Fie S un satelit de masă m, care se mişcă în cîmpul de atracţie al Pămîntului. Ecuaţia vectorială a mişcării, este :

$$(1)\qquad m\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda m}{r^3}\vec{r} + \vec{R},$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1181–1186, BUCUREŞTI, 1967

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al satelitului în raport cu centrul Pămîntului iar $\vec{R}$ forța de rezistență a aerului.

Proiectînd ecuația (1) pe direcțiile r și θ (coordonate polare), se obțin ecuațiile scalare ale mișcării, în forma [4]:

$$(2)\qquad \begin{cases} m\,(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\dfrac{\lambda m}{r^2} - R_r, \\[2ex] m\,(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -R_\theta, \end{cases}$$

unde R_r și R_θ sînt componentele forței de rezistență în direcțiile r și θ. Ținînd seamă de ipotezele făcute, sistemul (2) se scrie:

$$(3)\qquad \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{\lambda}{r^2} - k\,\dfrac{\dot{r}^2}{r}, \\[2ex] r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -k\,\dfrac{r^2\dot{\theta}^2}{r}, \end{cases}$$

unde k este coeficientul adimensional de rezistență.

Pentru integrarea sistemului (3), Persen presupune că orbita satelitului este aproximativ circulară, neglijînd în acest fel componenta radială (R_r) a rezistenței aerului, ca fiind mică în comparație cu componenta tangențială (R_θ). Introducînd variabilele x și y, definite astfel [3]:

$$(4)\qquad x = \frac{\lambda}{r^3\dot{\theta}^2}, \quad y = \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}},$$

vom integra sistemul (3), fără a impune vreo restricție asupra naturii traiectoriei.

Astfel, dacă în relațiile (4) se consideră θ variabilă independentă, se obține prin derivare:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{1}{\dot{\theta}}\left[\dfrac{3\lambda\dot{r}}{r^4\dot{\theta}^2} + \dfrac{2\lambda\ddot{\theta}}{r^3\dot{\theta}^3}\right], \\[3ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{1}{\dot{\theta}}\left[\dfrac{\ddot{r}}{r\dot{\theta}} - \dfrac{\dot{r}^2}{r^2\dot{\theta}} - \dfrac{\dot{r}\ddot{\theta}}{r\dot{\theta}^2}\right]. \end{cases}$$

Din (5), ținînd seamă de (3) și (4), rezultă sistemul de ecuații diferențiale

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = xy + 2kx, \\[3ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = (1-k)\,y^2 + ky - x + 1. \end{cases}$$

Prin urmare, integrarea sistemului (3) s-a redus la integrarea următoarei ecuații:

$$(7)\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(1-k)\,y^2 + ky - x + 1}{xy + 2\,kx}.$$

Dacă s-a găsit soluţia ecuaţiei (7), atunci integrarea sistemului (3) se reduce la cvadraturi. Într-adevăr, din (4) şi (6) se deduc succesiv:

$$(8)\qquad \begin{cases} \ln r = \displaystyle\int \frac{y(x)\,\mathrm{d}x}{xy(x)+2kx}, \quad \theta = \int \frac{\mathrm{d}x}{xy(x)+2kx}, \\[2ex] t = \displaystyle\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int \frac{r(x)\sqrt{x\,r(x)}\,\mathrm{d}x}{xy(x)+2\,kx}. \end{cases}$$

3. INTEGRAREA SISTEMULUI (6)

Pentru integrarea sistemului (6), folosim faptul că în cazul rezistenţei proporţionale cu pătratul componentelor vitezei şi invers proporţionale cu distanţa la centrul Pămîntului, coeficientul k este mic (≈ 0.02) [2]. În acest fel, căutăm soluţii dezvoltabile în serii după puterile parametrului k, de forma:

$$(9)\qquad \begin{cases} x(\theta) = \zeta_0(\theta) + k\,\zeta_1(\theta) + \ldots, \\ y(\theta) = \eta_0(\theta) + k\eta_1(\theta) + \ldots. \end{cases}$$

Scriind că soluţiile (9) satisfac ecuaţiile (6), obţinem prin identificarea coeficienţilor aceloraşi puteri ale lui k, următorul sistem de ecuaţii pentru aproximaţiile (ζ_0, η_0):

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\zeta_0}{\mathrm{d}\theta} = \zeta_0\eta_0, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\eta_0}{\mathrm{d}\theta} = \eta_0^2 - \zeta_0 + 1. \end{cases}$$

Soluţia sistemului (10) este

$$(11)\qquad \zeta_0(\theta) = \frac{1}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)}, \qquad \eta_0(\theta) = \frac{\varepsilon\sin(\theta-\theta_0)}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)},$$

unde ε şi θ_0 sînt constante de integrare.

Din punct de vedere mecanic, identificarea coeficienţilor puterilor nule ale lui k, înseamnă a considera mişcarea satelitului în vid. Putem formula următoarea concluzie. Prin mişcarea satelitului în vid, cînd el descrie o conică cu unul din focare în centrul Pămîntului, punctul corespunzător din planul (ζ_0, η_0) descrie tot o conică cu aceiaşi excentricitate ε şi focarul în punctul $\{1, 0\}$. Într-adevăr, din (11), se obţine ecuaţia

$$(12)\qquad \eta_0^2 + (1-\varepsilon^2)\,\zeta_0^2 - 2\,\zeta_0 + 1 = 0,$$

care reprezintă o conică a cărei natură depinde de ε şi unul din focare este în punctul $\{1, 0\}$.

Considerăm acum a doua aproximaţie a sistemului (6). Astfel, prin identificarea coeficienţilor puterilor de ordinul unu ale lui k, rezultă sistemul :

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\zeta_1}{d\theta} = \eta_0\,\zeta_1 + \zeta_0\eta_1 + 2\,\zeta_0, \\[2ex] \dfrac{d\eta_1}{d\theta} = 2\eta_0\eta_1 - \zeta_1 - \eta_0^2 + \eta_0. \end{cases}$$

Căutăm o soluţie a sistemului (13), de forma :

$$(14)\qquad \zeta_1(\theta) = \frac{u(\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}, \quad \eta_1(\theta) = \frac{v(\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}.$$

Înlocuind soluţia (14) în (13), se deduce pentru funcţiile u şi v, sistemul de ecuaţii :

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{\varepsilon\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\,u + \dfrac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\,v + 2\,(1+\varepsilon\cos\theta), \\[2ex] \dfrac{dv}{d\theta} = -\,u + \varepsilon\sin\theta\,(1+\varepsilon\cos\theta - \varepsilon\sin\theta). \end{cases}$$

Se observă că o soluţie fundamentală a sistemului omogen asociat sistemului (15) este

$$(16)\qquad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \varepsilon+\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Atunci, soluţia generală a sistemului (15) cu condiţiile iniţiale $t = 0$, $\theta = u = v = 0$, se obţine sub forma [5] :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \varepsilon+\cos\theta \end{pmatrix} \int_0^\theta \begin{pmatrix} \dfrac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} & -\dfrac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \\[2ex] \dfrac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} & \dfrac{\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \end{pmatrix} \times$$

$$(17)\qquad \times \begin{pmatrix} 2\,(1+\varepsilon\cos\theta) \\ \varepsilon\sin\theta\,(1+\varepsilon\cos\theta-\varepsilon\sin\theta) \end{pmatrix} d\theta.$$

Din (17) se deduc, prin integrare, expresiile funcţiilor u şi v :

$$(18)\qquad \begin{cases} u(\theta) = \dfrac{\varepsilon\cos\theta\sin 2\theta}{4} + h\cos\theta + g\sin\theta, \\[2ex] v(\theta) = \dfrac{\varepsilon\sin\theta}{2}(1 - \sin\theta\cos\theta + \varepsilon\cos\theta) - h\sin\theta + g\,(\varepsilon+\cos\theta), \end{cases}$$

unde

$$(19)\qquad \begin{cases} g(\theta) = \dfrac{2-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\,\theta - \sin\theta + 4\sin^2\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\,\mathrm{arctg}\left[\sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\theta}{2}\right], \\[2ex] h(\theta) = \dfrac{3\varepsilon}{2}\,\theta + 2\sin\theta + 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}\ln\dfrac{1+\varepsilon\cos\theta}{1+\varepsilon}, \end{cases}$$

pentru $\varepsilon < 1$, și

$$(20)\quad \begin{cases} g(\theta) = -\dfrac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon}\,\theta - \sin\theta + 4\sin^2\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{1}{\varepsilon}\ln\left|\dfrac{(\varepsilon-1)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2-1}}\right|, \\ h(\theta) = \dfrac{3\varepsilon}{2}\,\theta + 2\sin\theta + 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon}\ln\dfrac{1+\varepsilon\cos\theta}{1+\varepsilon}, \end{cases}$$

pentru $\varepsilon > 1$.

În acest fel, din (4), ținînd seamă de (9), (11) și (14), rezultă ecuația traiectoriei

$$(21)\qquad r(\theta) = r_0\,\mathrm{e}^{k\int_0^\theta \frac{v(\theta)\,\mathrm{d}\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}},$$

unde

$$(22)\qquad r_0(\theta) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}.$$

4. APLICAȚIE

Să aplicăm rezultatele obținute, la cazul particular al unei orbite circulare ($\varepsilon = 0$). Astfel, din (21) se obține

$$(23)\qquad r\,(\theta) = a\,\mathrm{e}^{-2k(\theta - \sin\theta)},$$

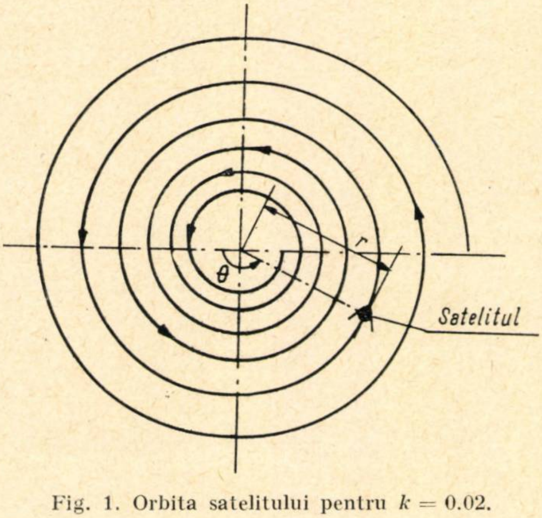


Fig. 1. Orbita satelitului pentru $k = 0.02$.

unde a este raza orbitei circulare. Se observă că, în acest caz, traiectoria satelitului este o spirală (figură), rezultat ce este în concordanță cu cel stabilit în [2].

Primită la redacție la 1 februarie 1967.

— Facultatea de Matematică-Mecanică
a Universității „Babeș-Bolyai" Cluj
— Observatorul Astronomic din Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. C. Iacob, *Asupra unor condiții necesare transformării în sateliți artificiali ai Pămîntului a corpurilor lansate de pe Pămînt*. Gazeta matematică, **54**, *5*, 192—201 (1949).
2. L. N. Persen, *Satellitenbewegung mit Reibung*. ZAMM, **38**, *11/12*, 437—442 (1958).
3. К. Г. Валеев, Г. Н. Щеглов, *Некоторые случаи интегрируемости уравнений возмущенного движения материальной точки в центральном поле сил*. ПММ, т. 29, вып. 3, 584—587 (1965).
4. А. И. Лурье, *Аналитическая механика*. Москва, 1961.
5. D. V. Ionescu, *Ecuații diferențiale și integrale*. București, 1964.

ASUPRA MIŞCĂRII FLUIDELOR NENEWTONIENE, ÎNTRE DOUĂ CONURI COAXIALE, CU ACELAŞI VÎRF

DE

MARINA PORICEL

În cazul particular cînd forţele exterioare acţionează pe direcţie radială, se arată că vitezele sînt independente de vîscozitate, iar presiunile depind de vîscozitatea nenewtoniană.

1. În lucrarea de faţă vom studia mişcarea staţionară a unui fluid nenewtonian între două conuri coaxiale, cu vîrf comun, aflate în mişcare de rotaţie, generalizînd problema similară pentru fluide vîscoase newtoniene, problemă studiată de R. K. Rathy [1].

Autorul menţionat a demonstrat că în cazul fluidului vîscos cîmpul vitezelor şi presiunilor e independent de vîscozitate.

În cazul nostru vom arăta că vitezele sînt independente de vîscozitate, dar cîmpul presiunilor va depinde de coeficientul de vîscozitate nenewtonian.

2. Se ştie că în cazul fluidelor newtoniene, tensorul tensiunii T poate fi pus sub forma unei funcţii liniare de tensorul vitezei de deformare D:

$$T = -pI + \mu D, \tag{1}$$

unde p este scalarul presiunii, I matricea unitate, μ coeficientul de vîscozitate, care depinde de temperatură şi presiune, dar nu şi de viteza de deformare.

Prin urmare tensiunea este funcţie liniară de viteza de deformare. Această stare este caracteristică tuturor fluidelor cu masă moleculară mică.

În cazul fluidelor cu masă moleculară mare, ca de exemplu: anumite uleiuri minerale, petrol, suspensii coloidale, soluţii de polimeri, etc., tensiunea nu mai rămîne funcţie liniară de viteza de deformare, ci

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1187–1191, BUCUREŞTI, 1967

se va exprima printr-o funcţie mai complicată. Acestea sînt aşa-numitele *fluide nenewtoniene*.

În mare, aceste fluide pot fi împărţite în următoarele grupe [2]:

a) Fluidele, pentru care tensiunea se reprezintă printr-o funcţie doar de viteza de deformare.

b) Fluidele, pentru care tensiunea este funcţie de viteza de deformare şi de durata acţiunii tensiunii, deci de timp.

c) Fluidele vîscoelastice.

3. În lucrarea de faţă vom considera doar fluidele nenewtoniene cele mai simple, din prima categorie, pentru care avem deci

$$T = f(D). \tag{2}$$

Diferiţi autori au avut în vedere forme diferite pentru funcţia f care caracterizează fluide mai apropiate sau mai depărtate de tipul newtonian.

Noi vom utiliza una din cele mai simple forme şi anume vom presupune că T este funcţie pătratică de D [3], adică

$$T = -pI + \mu_1 D + \mu_2 D^2, \tag{3}$$

unde μ_1 este coeficientul de vîscozitate newtonian, iar μ_2 coeficientul de vîscozitate nenewtonian.

Dacă $\mu_2 = 0$, obţinem ecuaţia constitutivă (1).

4. Avem de considerat deci mişcarea unui fluid nenewtonian, cu ecuaţia constitutivă (3), între două conuri rotitoare, coaxiale şi cu acelaşi vîrf.

Vom presupune de la început, pentru simplitate, că mişcarea fluidului este pur rotaţională în jurul axei conurilor, iar forţa exterioară care acţionează asupra fluidului are direcţia radială.

În cele ce urmează vom folosi coordonate sferice, r, θ, φ, cu centrul în vîrful conurilor, aşa că vom avea de considerat următoarele ipoteze:

a) $v_r = v_\theta = 0$ (mişcarea este pur rotaţională).

b) $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$ (mişcarea este staţionară).

c) $\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ (mişcarea este axial-simetrică).

d) Forţa exterioară aflată pe direcţia radială are forma

$$F = \rho r F(\theta).$$

e) Vom lua

$$v_\varphi = r \sin\theta \cdot f(\theta).$$

5. Vom transcrie ecuaţia matricială (3) în coordonate sferice, conform cu [4], apoi introducînd (3) astfel scris în ecuaţiile generale de miş-

care a fluidelor, ecuațiile lui Cauchy, și ținînd cont de ipotezele a)—e), obținem ecuațiile

$$(4)\qquad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho r F(\theta) + \rho r \sin^2\theta \cdot f^2(\theta)$$

$$(5)\qquad \frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho r^2 \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot f^2(\theta) + \frac{\mu_2}{4}\sin^2\theta \cdot f'(\theta) f''(\theta)$$

$$(6)\qquad 0 = \sin\theta \cdot f''(\theta) + 3\cos\theta \cdot f'(\theta).$$

Din aceste trei ecuații vom determina $f(\theta)$, $F(\theta)$ și $p(r, \theta)$, deci cîmpul vitezelor, al forțelor exterioare și al presiunilor.

Din (6) rezultă, prin cvadraturi,

$$(7)\qquad f(\theta) = A\left(\ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right) + B,$$

unde A și B sînt două constante care vor fi determinate din condițiile la limită.

Folosind ipoteza e) obținem pentru cîmpul vitezelor

$$(8)\qquad v_\varphi = r\sin\theta\left[A\left(\ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right) + B\right].$$

Eliminînd p între (4) și (5) obținem pentru $F(\theta)$ — cîmpul forțelor exterioare:

$$(9)\qquad F(\theta) = -2\left(A\ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + B\right) - 2A^2 \operatorname{ctg}^2\theta + C.$$

Introducînd acum (7) și (9) în (4) și integrînd, obținem pentru presiune

$$(10)\qquad p = -\rho r^2\left[\left(A\ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + B\right)^2 + A^2\operatorname{ctg}^2\theta - \frac{C}{2}\right] + $$
$$+ \frac{pr^2}{2}\sin^2\theta\left[A\left(\ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right) + B\right] + P(\theta),$$

unde P este o funcție numai de θ.

Introducînd (10) în (5) rezultă că

$$(11)\qquad P(\theta) = \frac{3\mu_2 A^2}{16}\left[\frac{1}{4\operatorname{tg}^4\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} + \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{2}\right].$$

Prin urmare cîmpul presiunilor depinde numai de vîscozitatea nenewtoniană μ_2, și doar printr-o funcție de θ. Așadar p este de forma

$$(12)\qquad p = r^2 f_1(r, \theta) + \mu_2 f_2(\theta)$$

şi deci pentru θ constant, avem

$$p = r^2 f_1(r) + \text{const.}$$

Prin urmare pe direcţii radiale pentru care θ este acelaşi deci pe conuri cu vîrful în origine, efectul vîscozităţii nenewtoniene asupra presiunii este acelaşi. Ei variază doar cu variaţia lui θ.

Cîmpul vitezelor şi al forţelor exterioare, (8) şi, respectiv, (9) sînt însă independente de vîscozitate.

6. Să determinăm acum constantele A şi B din condiţiile la limită. Dacă cele două conuri, interior şi exterior, se mişcă cu vitezele unghiulare ω_1 şi, respectiv, ω_2 şi au semiunghiurile la vîrf α şi, respectiv, β, atunci

$$v_\varphi = r \sin\alpha \cdot \omega_1 \text{ pentru } \theta = \alpha \tag{13}$$

$$v_\varphi = r \sin\beta \cdot \omega_2 \text{ pentru } \theta = \beta. \tag{14}$$

Cum v_φ este dat de (8), cu condiţiile (13) şi (14) obţinem

$$A = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}} \tag{15}$$

$$B = \omega_1 - \frac{(\omega_2 - \omega_1)\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)}{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}} \tag{16}$$

7. Din cele de mai sus, rezultă, deoarece $\beta > \alpha$,

$$\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} > 0$$

deci

$$A > 0 \text{ pentru } \omega_2 > \omega_1$$
$$A < 0 \text{ pentru } \omega_2 < \omega_1$$

dar

$$f'(\theta) = \frac{2A}{\sin^3\theta} \tag{17}$$

deci

$$f'(\theta) > 0 \text{ pentru } \omega_2 > \omega_1$$
$$f'(\theta) < 0 \text{ pentru } \omega_2 < \omega_1.$$

Din (17) se poate trage concluzia că gradientul vitezei are un maximum în apropierea conului interior.

Condițiile la limită (13) și (14) se pot transcrie

$$f(\theta) = \omega_1 \quad \text{pentru} \quad \theta = \alpha$$

$$f(\theta) = \omega_2 \quad \text{pentru} \quad \theta = \beta.$$

Dacă conurile se învîrtesc în sensuri opuse, și deci avem, de exemplu, $\omega_1 > 0$ și $\omega_2 < 0$, cum $f(\theta)$ este continuu, va exista un $\alpha < \theta < \beta$ pentru care $f(\theta) = 0$ și deci $v_\varphi = 0$, deci un con cu vîrful în origine pe suprafața căruia viteza va fi nulă.

Unghiul θ se poate afla ușor din

$$A\left[\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right] + B = 0.$$

Primită la redacție la 23 ianuarie 1967.

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România, Str. M.
Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. R. K. Rathy, Z.A.M.M., 43, *6*, 281 (1963).
2. W. L. Wilkinson, *Non-Newtonian Fluids*. Pergamon Press, 1960.
3. James Serrin, *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, Handbuch der Physik, Band VIII, 1, Springer-Verlag, 1959, pag. 230.
4. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, *Теоретическая гидромеханика*, vol. II.

ÎNCERCARE DE ETICĂ MATEMATICĂ

DE

DAN ROMALO

Se încearcă să se pună bazele unui mod general de recunoaştere a binelui, folosindu-se o procedură cantitativă exactă.

0. Deoarece în cele ce urmează se încearcă să se transcrie sub o formă cantitativă anumite relaţii dintre individ şi societate, socotim util ca de la bun început să fie precizat conţinutul pe care l-am atribuit noţiunilor de societate, de morală şi de etică.

Prin societate vom înţelege un număr de indivizi *similari*, colaborînd pentru a-şi uşura condiţiile de existenţă. O colaborare eficace în acest sens nu se poate concepe fără respectarea, la nivel de individ, a unui mănunchi de reguli generînd anumite constrîngeri. Aceste constrîngeri fac posibilă colaborarea şi stabilesc, totodată, repartizarea echitabilă a sarcinilor şi a retribuţiilor între indivizi.

Totalitatea regulilor care fixează constrîngerile de acest gen spunem că alcătuiesc ,,morala'' societăţii considerate, iar studiul lor şi al condiţiilor în care se aplică alcătuiesc etica.

La oameni, deci la acele fiinţe care au ca trăsătură specifică distinctivă şi esenţială o foarte dezvoltată gîndire raţională, considerentele morale se întemeiază pe noţiunea de bine. Binele însă este greu de definit în general şi a rămas încă foarte diferit conturat de la grup de oameni la grup de oameni, deseori chiar de la om la om.

Se impune stringent nevoia găsirii sau acceptării unei definiţii cît mai precise şi mai riguroase a noţiunii de bine, în sensul unui criteriu etic universal valabil într-o societate mondială (unitară şi fără clase).

În acest spirit, în cele ce urmează, *se încearcă* să se pună bazele unui mod general de recunoaştere a binelui, folosind o procedură cantitativă exactă (matematică).

1.0. Considerăm că orice criteriu ,,moral'' este întotdeauna asociat cu criteriul de ,,bine'', care el este totdeauna şi nemijlocit opus criteriului de ,,rău''. Dar noţiunea de ,,rău'' este legată indisolubil şi atît de intim —

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1193 - 1201, BUCUREŞTI, 1967

ce e drept uneori printr-un lanţ cauzal foarte complex în spaţiu şi în timp — cu cea de suferinţă nenecesară (inutilă), încît se va admite ca principiu că binele se opune în mare în mod absolut suferinţei şi că, în consecinţă, soluţia „morală" sau „cea mai bună" într-o problemă dată trebuie să se poată determina pe baza unui criteriu de suferinţă cît mai mică. Pe baza unui astfel de criteriu trebuie ca, dintre toate stările fizic permise în care s-ar putea afla la un moment dat o anumită societate, să se poată desemna o anumită stare particulară, anume acea stare care ar fi „cea mai bună".

Privind mai general lucrurile, ar fi necesar ca dintre toate evoluţiile pe care le poate parcurge o anumită societate situată într-o anumită ambianţă naturală, să se poată recunoaşte, cu ajutorul criteriului amintit, acea evoluţie care corespunde evoluţiei „morale".

Pentru ca acest lucru să fie posibil trebuie parcurse două etape :

I. Construirea unei funcţii de stare care să caracterizeze suficient de precis din punct de vedere etic, starea sau evoluţia unei anumite societăţi.

II. Determinarea procedurii ce trebuie aplicată acestei funcţii pentru a se putea determina din ea starea sau evoluţia „morală" a societăţii considerate.

1.1. În fizică, în cercetarea sistemelor structural complexe, şi-au dovedit eficacitatea legile variaţionale care, prin extremizarea unei anumite funcţii caracteristice a sistemului, determină comportarea lui.

Folosind această observaţie se poate încerca construirea unei funcţii a cărei valoare instantanee ar reprezenta „măsura" stării de suferinţă a unei colectivităţi, la un moment dat, şi prin minimizarea căreia s-ar obţine condiţia de stare „bună" sau „morală" a societăţii considerate.

Trebuie menţionate de la bun început dificultăţile care stau în calea acestei proceduri.

În primul rînd, în stadiul actual al cunoştinţelor omeneşti, nu există un procedeu ştiinţific de măsurare a stării de suferinţă într-un individ. Un om poate, bazîndu-se pe memorie, să compare stările lui de suferinţă din diferite împrejurări şi să afirme că într-un caz aceasta a fost mai mare sau mult mai mare decît în altul dar nu poate spune că a fost de două ori şi jumătate mai mare, decît în limite foarte aproximative. Pe de altă parte însă, faptul că prin tehnica explorărilor funcţionale în general, encefalografice în particular, se reuşeşte să se pună în evidenţă şi chiar să se evalueze stările de suferinţă fiziologică a unui organism, sîntem îndreptăţiţi să credem că, cu timpul, se va putea evalua din ce în ce mai precis nu numai suferinţa fiziologică la diferitele fiinţe, ci şi cea psihică, evaluată în prezent numai aproximativ pe bază de teste şi procedee psihologice.

În al doilea rînd, nu avem nici un temei de principiu să socotim ca fiind egale măsurile suferinţelor a doi oameni situaţi în împrejurări similare. Însă, pe baza ipotezei că oamenii fiind foarte asemănător structuraţi trebuie să şi simtă aproximativ la fel în condiţii identice, vom admite a priori că afirmaţia de mai sus este adevărată.

În al treilea rînd, nu se poate în prezent compara în nici un fel suferinţa la fiinţe aparţinînd la specii diferite. În consecinţă, în această primă etapă, nu se vor pune în discuţie decît relaţiile morale dintre oameni, consideraţi într-o ambianţă de lucruri insensibile.

1.2. Din cele de mai sus rezultă că un mod simplificat de a privi lucrurile s-ar putea baza pe definirea unei funcţii reprezentînd, să zicem, o ,,suferinţă tehnică'' individuală, funcţie care, în mod evident, trebuie să depindă de un număr însemnat de parametri generali şi particulari [1]. Prin însumare pe toţi indivizii unei societăţi date se va obţine funcţia suferinţă tehnică globală a societăţii considerate, funcţie din care prin procedee adecvate trebuie să se poată deduce o serie de consecinţe. Prin compararea tuturor consecinţelor deduse în acest fel, cu evoluţia reală a lucrurilor, credem că se va putea preciza din ce în ce mai bine noţiunea de suferinţă tehnică, astfel încît ea să reprezinte cu un grad de precizie din ce în ce mai bun reacţiile unei societăţi date în condiţii date.

2.0. Condensînd şi sistematizînd cele prezentate mai sus vom afirma :

Principiul I, (de natură filozofică) :

Răul = suferinţa nefolositoare (gratuită).

Principiul II, (de natură psihologică) : Există o funcţie s, numită suferinţă tehnică, care poate reprezenta măsura suferinţei psihofizice reale a unei fiinţe.

Scris formal :

$$s_i = s_i\,(\varphi_1^i, \varphi_2^i, \ldots, \varphi_j^i, \ldots, \varphi_n^i, t)$$

i fiind indicele de identificare a individului considerat, φ_j^i reprezentînd un număr de parametri naturali de care depinde starea de suferinţă psihofizică a individului considerat, iar t reprezentînd timpul.

Identificarea acestei funcţii este o problemă de psihologie din categoria problemelor foarte intens studiate, de determinare a scărilor psihofizice.

2.1. Considerăm că noţiunea de bine nu poate căpăta un sens absolut decît dacă se referă la un sistem izolat. Or, un individ într-o societate nu poate în nici un fel fi considerat, din punct de vedere etic, ca un sistem izolat. El se găseşte, din acest punct de vedere, strict cuplat cu orice fiinţă capabilă să sufere. De aceea este firesc să se extindă noţiunea de suferinţă tehnică la întreaga societate, considerată ca fiind compusă din N indivizi presupuşi egali din punct de vedere etic (mai precis, reacţionînd cu aceeaşi intensitate faţă de suferinţă). Rezultă că se poate defini o funcţie, numită suferinţă tehnică specifică, care se obţine prin medierea cu pondere egală a suferinţelor tehnice individuale :

$$S_{(t)} = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} s_i\,(\varphi_1^i, \varphi_2^i, \ldots, \varphi_n^i, t) \equiv \frac{1}{N}\, s_\nu\,(\varphi_\mu^\nu, t).$$

---

[1] Spre a deosebi noţiunea de suferinţă, luată în accepţiunea obişnuită a cuvîntului, de noţiunea de suferinţă considerată ca o mărime măsurabilă — noţiune în parte nouă şi mai schematică decît cealaltă — pe care o vom folosi în încercarea de faţă, am denumit-o pe aceasta din urmă suferinţă tehnică.

În sfîrşit, se va admite ca postulat că starea normală sau bună a societăţii la un moment dat este acea stare pentru care expresia suferinţă tehnică specifică ia valoarea instantanee cea mai mică permisă de condiţiile fizice înconjurătoare sau, exprimat altfel :

Principiul III_0 (de natură etică) : Pentru o societate dată şi un moment dat t_0, o stare va fi recunoscută drept ,,bună'' sau ,,morală'' dacă, identificată fiind printr-o mulţime de valori $\overset{\circ}{\varphi}{}^{\nu}_{\mu}$ ale parametrilor φ^{ν}_{μ}, ea va asigura ca :

$$S_{(t_0)} = \text{minim}.$$

Prin repetarea acestei proceduri în fiecare clipă, teoretic se poate obţine o succesiune de stări caracterizate toate printr-un minim instantaneu al funcţiei S. Nu aceasta este însă evolţia cea mai bună imaginabilă deoarece nu s-a ţinut seama de dependenţa lui S faţă de timp.

Într-adevăr, de foarte multe ori o micşorare a suferinţei la un moment dat are drept consecinţă o intensificare ulterioară a acesteia pe o durată mai mare.

Vom porni de la ideea că orice rezolvare ,,morală'' trebuie să asigure o cît mai mică suferinţă tehnică mediată în timp pentru întreaga societate considerată şi pe toată durata ei de existenţă.

Subiectiv, fiecare dintre noi simte că acest lucru este valabil pentru durata vieţii noastre a fiecăruia. Cît despre cum ar trebui să fie repartizată suferinţa tehnică între contemporani şi urmaşi, însă, în general, nu este acceptat un punct de vedere pe care să se poată baza un criteriu de echitate. Putea oricare dintre acei care au trăit cu un secol în urmă să pună întrebarea : De ce ar fi drept ca eu să muncesc atît cît muncesc nu numai pentru a-mi asigura traiul, dar şi pentru a face posibil ca un alt individ care va trăi peste 100 de ani să muncească mult mai puţin decît mine şi să trăiască mult mai bine decît mine?

Pentru a putea găsi un criteriu în această privinţă, imaginăm un observator imparţial care ar privi evoluţia în lungul generaţiilor a unei societăţi ideale (compusă din indivizi cvasiidentici). Pentru el un anumit individ dintr-o anumită generaţie nu este cu nimic privilegiat faţă de alt individ din altă generaţie. De aceea el poate socoti că doi indivizi, oricare ar fi ei, teoretic s-ar putea schimba unul cu celălalt fără ca prin aceasta să se schimbe ceva din punct de vedere etic în societatea considerată (axiomă de nepărtinire). În consecinţă, el va gîndi că deoarece suferinţa nu este recomandabilă pentru un individ, ea nu este recomandabilă nici pentru o succesiune de indivizi, care, din punctul lui de vedere, nu reprezintă altceva decît un acelaşi element repetat în timp de un număr de ori. Criteriul de minimă suferinţă trebuie deci extins în lungul întregii dezvoltări a societăţii, indiferent dacă un anume individ trăieşte mai greu decît altul. Neavînd criterii de privilegiere al unuia sau al altuia, el poate socoti că priveşte un organism supraindividual care trăieşte la un moment dat mai greu, apoi mai uşor.

În consecinţă, considerăm că soluţia generală va fi dată de :

Principiul III. Fiind dată o societate, caracterizată la un moment dat t_0 prin parametrii $\overset{\circ}{\varphi}{}^{\nu}_{\mu}$, va fi morală acea evoluţie socială care, descrisă fiind prin mulţimea de funcţii

$$\varphi_{\mu}^{\nu} = \varphi_{\mu}^{\nu}(t),$$

va asigura că:

$$S = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{NT} \int_{t_0}^{T} s_{\nu}(\varphi_{\mu}^{\nu}, t)\, dt = \text{minim.}$$

În concluzie, menţionăm că omenirea pare să fi ajuns într-un stadiu de dezvoltare ştiinţifică şi tehnică atît de înaintat încît se estompează din ce în ce mai mult opoziţia dintre om şi imposibil. În acest stadiu nu se mai pune stringent problema posibilităţilor de dezvoltare ca atare ale omului, ci, mult mai acut, se pune problema unei dezvoltări *armonioase* a societăţii în general şi, în cadrul ei, a omului.

În categoria problemelor de armonie de dezvoltare trebuie încadrat şi studiul de faţă.

Pentru a ilustra modul în care principiile stabilite mai sus s-ar putea folosi practic, se va încerca rezolvarea a două probleme din categoria relaţiilor dintre muncă şi retribuţie. Alegerea acestui tip de problemă se justifică atît teoretic — dat fiind rolul esenţial al relaţiilor de producţie în cadrul societăţii — cît şi practic, prin faptul că acest aspect al vieţii sociale este mai uşor accesibil unei analize cantitative.

Printre parametrii φ_{μ}^{ν} care determină funcţia $S_{\nu}(\varphi_{\mu}^{\nu}, t)$, trebuie, evident, să se găsească şi venitul net, V_{ν}, al unui individ, precum şi măsura L_{ν} a lucrului efectuat (munca depusă) pentru a-l obţine, adică:

$$S_{\nu} = S_{\nu}(V_{\nu}, L_{\nu}, \varphi_{3}^{\nu}, \varphi_{4}^{\nu}, \ldots, \varphi_{n}^{\nu}, t).$$

Vom presupune, în această primă încercare, că funcţia S_{v} e de forma

$$S_{\nu} = G_{\nu}(V_{\nu}) + H_{\nu}(L_{\nu}) + S_{\nu}(\varphi_{3}^{\nu}, \varphi_{4}^{\nu}, \ldots, \varphi_{n}^{\nu}, t).$$

Deoarece cu un venit nul omul moare de foame, fapt căruia trebuie să-i corespundă o suferinţă tehnică infinită, pozitivă, iar cu un venit crescînd nelimitat, obţinut necondiţionat, S_{ν} trebuie să tindă către o limită finită negativă (fenomen de saturare în raport cu bogăţiile materiale), se va încerca pentru $G_{\nu}(V_{\nu})$ o funcţie de forma

$$G_{\nu} = K_{\nu,1}\left(\frac{1}{V_{\nu}} - \frac{K_{\nu}}{\dfrac{1}{F_{\nu} + V_{\nu}} + E_{\nu}}\right)$$

în care V_{ν} reprezintă raportul dintre venitul net al unui om şi un anumit venit normat, luat drept referinţă, $K_{\nu,1}$ este o constantă dimensională. K_{ν}, F_{ν} şi E_{ν} sînt nişte parametri individuali adimensionali, stabilind forma funcţiei.

Într-o societate de tip socialist, venitul unui om este determinat de cantitatea şi de calitatea muncii organizate depusă de el în folosul societăţii. Deoarece orice muncă serioasă şi susţinută presupune o disciplină şi un efort, în funcţia S_{ν} apare termenul H_{ν} reprezentînd echivalentul psihofizic al oboselii provocate de muncă.

Munca depusă se evaluează de cele mai multe ori pe baza timpului muncit efectiv, fie el notat cu D_ν, repetat periodic cu perioada D_0.

Se va considera că un regim de muncă continuă, neîntreruptă $\left(\frac{D_\nu}{D_0} = 1\right)$, ar genera o stare de suferință infinită, omul murind de extenuare. Pe de altă parte, pentru $\frac{D_\nu}{D_0} \to 0$, dar $\frac{D_\nu}{D_0} \neq 0$, suferința tehnică trebuie să tindă către o limită diferită de zero, deoarece — cu toate că munca ar fi minimă — în general ar mai rămîne încă preocupări mărunte de serviciu și efortul de deplasare pînă la locul de muncă, de care vrem să ținem seama. Să admitem că această a doua componentă a lui S ar fi de forma:

$$H_\nu = K_{\nu,2}\left(A_\nu \sqrt{\alpha_\nu} + e^{\frac{3.5}{3,5 - \alpha_\nu}}\right)$$

în care $\alpha_\nu = 3,5\,\frac{D_\nu}{D_0}$ (raportul $\frac{D_\nu}{D_0}$ a fost înmulțit cu 3,5 pentru că la durata actuală de lucru normat de 48 de ore pe săptămînă, α_ν să devină egal cu unu, lucru care simplifică calculele), $K_{\nu,2}$ este o constantă dimensională, iar A_ν este un parametru adimensional influențînd forma funcției.

Considerînd că, de obicei, venitul se raportează la timpul de lucru, se poate scrie:

$$V_\nu = Q_\nu\,\alpha_\nu$$

în care Q_ν este un coeficient (adimensional) de salarizare, pe care îl vor socoti egal cu unu la salarizarea normată.

Ținînd seama că $S_\nu(\varphi_3^\nu, \varphi_4^\nu, \ldots, \varphi_n^\nu, t)$, în clasa de probleme abordată, reprezintă o constantă, pe care o vom nota cu $-K_2B_\nu$, rezultă:

$$S_\nu = K_{\nu,2}\left[\frac{K_{\nu1}}{K_{\nu2}}\left(\frac{1}{Q_\nu\,\alpha_\nu} - \frac{K_\nu}{\frac{1}{F_\nu + V_\nu} + E_\nu}\right) + A_\nu\sqrt{\alpha_\nu} + e^{\frac{3,5}{3,5-\alpha_\nu}} - B_\nu\right].$$

În cazul în care nu se caută soluții individuale, se poate considera că operația de mediere a lui S_ν, pe întreaga societate studiată, se obține prin înlocuirea coeficienților individuali cu coeficienți statistici medii. Rezultă în definitiv:

$$S = K_2\left[\frac{K_1}{K_2}\left(\frac{1}{Q\alpha} - \frac{K}{\frac{1}{F + V} + E}\right) + A\sqrt{\alpha} + e^{\frac{3,5}{3,5-\alpha}} - B\right].$$

Încercînd să tratăm numeric un prim exemplu de calcul din această categorie de probleme, am ales următoarele valori medii pentru parametrii adimensionali din expresia lui S:

$$\frac{K_1}{K_2} = 2, \quad A = 1{,}4, \quad B = 2{,}6, \quad F = 1, \quad E = 0{,}005, \quad K = 0{,}488$$

Subliniem că, atît forma funcţiei S, cît şi valorile numerice ale parametrilor care intervin în ea, corespund structurii personale a autorului şi nu reprezintă decît o simplă încercare, cu scop ilustrativ, de a rezolva cantitativ o anumită clasă de probleme. Funcţia psihofizică medie generală reală, ar trebui determinată de specialişti cu temeinice cunoştinţe de psihologie, care să efectueze o anchetă extinsă asupra unui mare număr de indivizi.

Cîteva consecinţe simple decurg în mod direct din funcţia S astfel precizată. Aşa, de pildă:

a) Pentru un venit crescînd nemărginit, fără depunerea vreunui efort în schimb ($Q \to \infty$, $\alpha \to 0$, $Q\alpha \to \infty$), suferinţa tehnică tinde către o valoare negativă de aproximativ 170 de ori mai mare în valoare absolută decît cea corespunzătoare stării normate, rezultat care traduce observaţia că plăcerea de a trăi ajunge la o limită finită, de saturare, chiar atunci cînd omul se bucură de resurse materiale nelimitate, obţinute fără muncă.

b) Considerînd că, în afara unui număr limitat de discontinuităţi în timp, coeficientul de salarizare Q ar fi o constantă, rezultă că suferinţa tehnică acuză un minim pentru $Q = \alpha = 1$. (Se verifică imediat că $\frac{dS}{d\alpha} = 0$ pentru $\alpha = Q = 1$). Aceasta este urmarea directă a ipotezei, admisă în mod tacit, că starea corespunzînd salarizării şi timpului de lucru normat este o stare morală din acest punct de vedere.

Cu ajutorul funcţiei S, astfel precizată, se pot rezolva numeric un anumit tip de probleme, cum ar fi, de pildă, următoarea:

Presupunînd că, datorită perfecţionării treptate a procesului de producţie, productivitatea muncii într-o anumită societate, la un moment dat, s-a mărit cu 50%, se pune întrebarea: care dintre următoarele soluţii sociale traduce corect acest progres:

a) Creşterea salariului

b) Reducerea orelor de muncă

c) Ambele concomitent şi, în acest caz, în ce măsură fiecare? ²)

Se observă că problema astfel pusă nu se poate rezolva numai cu criterii economice.

Cu ajutorul punctului de vedere expus mai sus, răspunsul este imediat.

Starea nouă de lucruri trebuie să fie şi ea o stare morală, deci corespunzînd unui S minim.

---

²) Posibilitatea concedierii unei părţi din salariaţi nu am socotit-o drept o soluţie posibilă, deoarece însăşi principiile enunţate în partea întîi a lucrării interzic punerea problemei astfel. Într-adevăr, însăşi justificarea principiului III s-a bazat pe condiţia ca toţi indivizii unei anumite societăţi să fie consideraţi egali în tot timpul evoluţiei acestei societăţi. Cu atît mai mult ei vor trebui consideraţi egali la un moment dat.

Din condiția $\frac{dS}{d\alpha} = 0$ (deoarece am considerat pe Q drept o constantă), în noile condiții rezultă : $\alpha = 0{,}96$ pentru $Q = 1{,}5$. Timpul normat de lucru ar trebui deci redus de la 48 de ore săptămînal la aproximativ 46 de ore săptămînal, împreună cu o sporire a salariului în raportul :

$$\frac{1{,}5 \cdot 46}{48} = 1{,}44$$

față de salariul anterior.

Rezultă de aici că în cazul considerat, soluția ,,morală'' ar fi o sporire a salariului cu 44% combinată cu o reducere a orelor de lucru de 4%.

Trebuie observat aici că nu pentru orice valoare $Q > 1$, soluția de minim se găsește de partea $\alpha < \alpha_n = 1$, ci că pentru valori ale lui Q mai mari decît un anume Q critic, rezultă pentru α valori mai mari decît 1. Acest fapt se explică prin aceea că $Q = 1$ a fost socotit o soluție morală. Însă faptul că $Q > Q$ critic, arată că sistemul s-a depărtat sensibil de starea etic recomandabilă, deci că evoluția societății între momentul cînd Q era egal cu unu și momentul considerat, a fost cu totul alta decît evoluția morală. Rezultă că ipotezele inițiale de calcul nu mai sînt îndeplinite și că, deci, calculul în acest caz nu mai este fundamentat.

O rezolvare riguroasă a problemei ar trebui căutată ținînd seama de evoluția în timp a tuturor parametrilor de tipul Q, α etc. și de interdependența lor cu ceilalți factori determinanți ai evoluției societății.

Funcția S, în măsura în care a fost identificată, stabilește legătura dintre muncă și salarizare. Pe baza ei trebuie să se poată rezolva orice problemă etică în legătură cu relațiile muncă-salarizare. Am dat mai sus un prim exemplu de acest fel. Drept un al doilea exemplu se va considera problema retribuirii orelor suplimentare.

Considerăm că funcția S trebuie să ia aceleași valori pentru cel ce prestează ore suplimentare, ca și pentru cel ce nu prestează decît orele normate.

De aici rezultă că ar trebui găsit în locul coeficientului Q o funcție $Q_{(\alpha)}$ astfel încît prin înlocuirea ei în expresia lui S, aceasta să devină staționară în α.

Nu vom rezolva problema în general, ci numai pentru cîteva cazuri particulare. Considerînd de pildă un regim de lucru de 10 ore pe zi, adică 60 de ore săptămînal, trebuie ca :

$$S_{60} = S_{48}$$

adică

$$2\left(\frac{1}{Q_1\,\alpha_1} - \frac{0{,}488}{\frac{1}{1 + Q_1\,\alpha_1} + 0{,}005}\right) + 1{,}4\sqrt{\alpha_1} + e^{\frac{3{,}5}{3{,}5-\alpha_1}} =$$

$$= 2\left(1 - \frac{0{,}488}{\frac{1}{1+1} + 0{,}005}\right) + 1{,}4 + 4{,}05.$$

Înlocuind $\alpha_1 = \frac{60}{48} = 1{,}25$ și efectuînd calculele, rezultă $Q_1 = 1{,}07$.

Deoarece am considerat Q drept un coeficient de salarizare global pe timpul de lucru, pentru determinarea tarifului orelor suplimentare sporul de salariu trebuie raportat la orele suplimentare numai. Notînd cu $Q_{\text{supl.}}$ și $\alpha_{\text{supl.}}$ coeficientul de salarizare și coeficientul de ore muncite peste normă, rezultă că:

$$Q_1\,\alpha_1 = Q_n\,\alpha_n + Q_{\text{supl.}}\,\alpha_{\text{supl.}}$$

sau:

$$1{,}07 \cdot 1{,}25 = 1 + Q_{\text{supl.}}\,0{,}25 \text{ deci } Q_{\text{supl.}} = \frac{1{,}07 \cdot 1{,}25}{0{,}25} = 1{,}35.$$

Ar rezulta deci ca primele 12 ore suplimentare săptămînal să se plătească cu 135% din tariful normal.

În mod similar rezultă că pentru 72 de ore săptămînal, $Q_2 = 1{,}36$ deci

$$1{,}36 \cdot 1{,}5 = 1 + Q_{\text{supl.}}\,0{,}5$$

adică

$$Q_{\text{supl.}} = 2{,}08.$$

Ar rezulta ca 24 de ore muncite în plus săptămînal să fie plătite la 2,08 ori tariful de bază pentru a fi etic, echitabile.

În același fel se calculează că pentru 48 de ore suplimentare săptămînal, tariful de salarizare ar trebui să fie: $Q = 3$, deci $Q_{\text{supl.}} = 5$.

În sfîrșit, din expresia lui S rezultă că, pentru un $\alpha \to 2{,}84$, $Q \to \infty$. Aceasta arată că peste o anumită limită (136 de ore săptămînal) nu se mai pot în nici un fel compensa prin salarizare efectele muncii. Lucrul pare firesc, deoarece omul ajunge la extenuare.

Subliniem încă o dată aici, că forma funcțiilor adoptate în exemplele tratate nu reprezintă decît o aproximare strict personală și subiectivă a autorului și că, în consecință, rezultatele calculelor nu pot avea o valabilitate generală.

Primită la redacție la 25 februarie 1967.

NOTE ASUPRA ALGEBRELOR LUKASIEWICZIENE POLIVALENTE

DE

CORNELIU O. SICOE

Importanţa crescîndă a algebrelor lukasiewicziene polivalente introduse [1], [2] de acad. Gr. C. Moisil este evidentă. Recent [3], algebrele lukasiewicziene polivalente au fost folosite pentru studiul funcţionării eşalonate a releelor. În această lucrare se arată că algebrele lukasiewicziene polivalente sînt algebre ale lui Kleene.

1

O algebră lukasiewicziană polivalentă este un sistem $(L, \cup, \cap, N, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$ format din :

1) o mulţime nevidă L;

2) n operaţii unare $N, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ definite pe L;

3) două operaţii binare $\cup$, $\cap$ definite pe L

ce verifică axiomele :

L$_1$) L este o latice distributivă cu prim şi ultim element;

L$_2$) N este o dualitate involutivă numită negaţie;

L$_3$) $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ sînt endomorfisme chrysippiene astfel că :

$$\sigma_1 x \subset \ldots \subset \sigma_{n-1} x$$

$$\sigma_i \sigma_j x = \sigma_j x$$

$$\sigma_i Nx = N\sigma_j x \quad (j = \varphi(i));$$

L$_4$) este valabil principiul determinării:

dacă $\sigma_i x = \sigma_i y$ pentru orice i, atunci $x = y$.

În [2] se introduc funcţiile lui Lagrange

$$\lambda_i x = \sigma_{n-i} x \cap N\sigma_{n-i-1} x \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1), \tag{1}$$

unde $\sigma_0 x = 0$, $\sigma_n x = 1$.

T. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1203-1207, BUCUREŞTI, 1967

Se demonstrează [3] formulele:

$$\sigma_{n-i} x = \lambda_i\, x \cup \ldots \cup \lambda_{n-1} x \tag{2}$$

$$N\sigma_{n-i} x = \lambda_0\, x \cup \ldots \cup \lambda_{i-1} x \tag{3}$$

$$\lambda_i\, x \cap \lambda_j\, x = 0, \quad i \neq j \tag{4}$$

$$\lambda_0\, x \cup \ldots \cup \lambda_{n-1}\, x = 1. \tag{5}$$

O algebră Kleene este o latice distributivă cu prim şi ultim element pe care este definită o dualitate involutivă şi care satisface condiţia

$$x \cap Nx \subset y \cup Ny. \tag{6}$$

TEOREMĂ. *O algebră lukasiewicziană n-valentă este o algebră a lui Kleene.*

Pentru a demonstra acest lucru, este suficient să arătăm că este satisfăcută condiţia (6).

Să observăm mai întîi că într-o algebră lukasiewicziană n-valentă avem relaţiile:

$$\sigma_{n-1}(x \cup Nx) = 1 \tag{7}$$

$$\sigma_1(x \cap Nx) = 0. \tag{8}$$

Într-adevăr,

$$1 = \sigma_i\, x \cup N\sigma_i\, x = \sigma_i\, x \cup \sigma_j\, Nx = \sigma_j\,(\sigma_i\, x \cup Nx) \leqslant \sigma_j\,(\sigma_{n-1} x \cup Nx)$$

şi cu principiul determinării obţinem

$$\sigma_{n-1} x \cup Nx = 1.$$

Cum

$$\sigma_{n-1}(x \cup Nx) \supset \sigma_{n-1} x \cup Nx,$$

rezultă relaţia (7).

Analog se obţine relaţia (8).

Să presupunem acum că n este impar. Avem relaţiile:

$$\sigma_{n-2}(x \cup Nx) = \sigma_{n-2}\; x \cup \sigma_{n-2}\; Nx = \sigma_{n-2}\; x \cup N\sigma_2\; x = \lambda_2\, x \cup \lambda_3\, x \cup \ldots$$
$$\ldots \cup \lambda_{n-1}\; x \cup \lambda_0\, x \cup\; \ldots \cup \lambda_{n-3}\; x = 1,$$

$$\sigma_{n-3}(x \cup Nx) = \sigma_{n-3}\, x \cup \sigma_{n-3}\; Nx = \sigma_{n-3}\; x \cup N\sigma_3\, x = \lambda_3\, x \cup \lambda_4\, x \cup \ldots$$
$$\ldots \cup \lambda_{n-1}\; x \cup \lambda_0\, x \cup \ldots \cup \lambda_{n-4}\; x = 1,$$

. . . .

$$\sigma_{\frac{n+1}{2}}(x \cup Nx) = \sigma_{\frac{n+1}{2}}\, x \cup \sigma_{\frac{n+1}{2}}\, Nx = \sigma_{\frac{n+1}{2}}\, x \cup N\sigma_{\frac{n-1}{2}}\; x = \lambda_{\frac{n-1}{2}}\; x \cup \ldots$$
$$\ldots \cup \lambda_{n-1}\, x \cup \lambda_0\, x \cup \ldots \cup \lambda_{\frac{n-1}{2}}\, x = 1,$$

$$\sigma_{\frac{n-1}{2}}(x \cap Nx) = \sigma_{\frac{n-1}{2}}\, x \cap \sigma_{\frac{n-1}{2}}\, Nx = \sigma_{\frac{n-1}{2}}\, x \cap N\sigma_{\frac{n+1}{2}}\, x = (\lambda_{\frac{n+1}{2}}\, x \cup \ldots$$
$$\ldots \cup \lambda_{n-1}\, x) \cap (\lambda_0\, x \ldots \cup \lambda_{\frac{n-3}{2}}\, x) = 0$$

. . . .

$$\sigma_3(x \cap Nx) = \sigma_3 x \cap \sigma_3 Nx = \sigma_3 x \cap N\sigma_{n-3}\, x =$$

$$= (\lambda_{n-3}\, x \cup \lambda_{n-2}\, x \cup \lambda_{n-1}\, x) \cap (\lambda_0\, x \cup \lambda_1\, x \cup \lambda_2\, x) = 0$$

$$\sigma_2(x \cap Nx) = \sigma_2\, x \cap \sigma_2\, Nx = \sigma_2\, x \cap N\sigma_{n-2}\, x = (\lambda_{n-2}\, x \cup \lambda_{n-1}\, x) \cap$$

$$\cap (\lambda_0\, x \cup \lambda_1\, x) = 0$$

deci

$$\begin{aligned}
&\sigma_{n-1}(x \cup Nx) = 1\\
&\sigma_{n-2}(x \cup Nx) = 1\\
&\dots\dots\dots\\
&\sigma_{\frac{n+1}{2}}(x \cup Nx) = 1\\
&\sigma_{\frac{n-1}{2}}(x \cap Nx) = 0 \qquad (9)\\
&\dots\dots\dots\\
&\sigma_2(x \cap Nx) = 0\\
&\sigma_1(x \cap Nx) = 0.
\end{aligned}$$

Putem scrie deci

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(x \cap Nx) \subset \sigma_1(y \cup Ny)\\
&\sigma_2(x \cap Nx) \subset \sigma_2(y \cup Ny)\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\sigma_{\frac{n-1}{2}}(x \cap Nx) \subset \sigma_{\frac{n-1}{2}}(y \cup Ny)\\
&\sigma_{\frac{n+1}{2}}(x \cap Nx) \subset \sigma_{\frac{n-1}{2}}(y \cup Ny)\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\sigma_{n-2}(x \cap Nx) \subset \sigma_{n-2}(y \cup Ny)\\
&\sigma_{n-1}(x \cap Nx) \subset \sigma_{n-1}(y \cup Ny)
\end{aligned}$$

şi aplicînd principiul determinării obţinem

$$x \cap Nx \subset y \cup Ny.$$

Rezultă că o algebră lukasiewicziană n-valentă cu n par este o algebră a lui Kleene.

Dacă n este par, singura dificultate apare pentru $\sigma_{\frac{n}{2}}$.

Dar

$$\sigma_{\frac{n}{2}}(x \cap Nx) = \sigma_{\frac{n}{2}}\, x \cap \sigma_{\frac{n}{2}}\, Nx = \sigma_{\frac{n}{2}}\, x \cap N\sigma_{\frac{n}{2}}\, x =$$

$$= (\lambda_{\frac{n}{2}}\, x \cup \dots \cup \lambda_{n-1} x) \cap (\lambda_0\, x \cup \dots \lambda_{\frac{n}{2}-1}\, x) = 0$$

şi

$$\sigma_{\frac{n}{2}}(x \cup Nx) = \sigma_{\frac{n}{2}} x \cup \sigma_{\frac{n}{2}} Nx = \sigma_{\frac{n}{2}} x \cup N\sigma_{\frac{n}{2}} x = \lambda_{\frac{n}{2}} x \cup \ldots$$

$$\ldots \cup \lambda_{n-1} x \cup \lambda_0 x \cup \ \ldots \cup \lambda_{\frac{n}{2}-1} x = 1$$

deci

$$\sigma_{\frac{n}{2}}(x \cap Nx) \subset \sigma_{\frac{n}{2}}(y \cup Ny).$$

Rezumînd, o algebră lukasiewicziană polivalentă este o algebră a lui Kleene.

2

În [7] a fost dată teorema:

Un sistem $(L, \cap, N, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$ format din:

1°. o mulţime nevidă L;

2°. un element $1 \subset L$;

3°. n operaţii unare $N, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ definite pe L;

4°. o operaţie binară $\cap$ definită pe L

este o algebră lukasiewicziană polivalentă dacă şi numai dacă sînt verificate axiomele:

$L_{1'}$) $x \cap 1 = x$;

$L_{2'}$) $x \cap N(Nx \cap Ny) = x$;

$L_{3'}$) $x \cap N(Ny \cap Nz) = N(N(z \cap x) \cap N(y \cap x))$;

$L_{4'}$) $N(\sigma_l\, \sigma_m (x \cap y) \cap u) \cap N(\sigma_i Nz \cap \sigma_j z) \cap N((\sigma_i Nt \cap$

$\cap \sigma_k Nt) \cap v) = N((\sigma_m x \cap \sigma_m y) \cap u) \cap N(N\sigma_j t \cap v)$,

unde $i \leqslant k$; $j = \varphi(i)$;

$L_{5'}$) dacă

$$\sigma_i x = \sigma_i y \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

atunci

$$x = y.$$

Observaţie. Axiomele $L_{2'}$)—$L_{5'}$) formează un sistem independent de axiome.

Independenţa lui $L_{2'}$). Fie L mulţimea $\{0,1\}$ şi fie

$$x \cap y = 1; \quad Nx = 1; \quad \sigma_i x = x \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Se arată uşor că $L_{3'}$)—$L_{5'}$) sînt satisfăcute, dar nu şi $L_{2'}$), deoarece

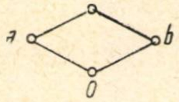
$$0 \cap N(N0 \cap N0) = 1 \neq 0.$$

Independenţa lui $L_{3'}$). Fie L mulţimea $\{0,1\}$ şi să punem

$$x \cap y = x; \quad Nx = x; \quad \sigma_i x = x \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

$L_{2'}$), $L_{4'}$), $L_{5'}$) sînt satisfăcute dar nu şi $L_{3'}$), deoarece $x \cap N(Ny \cap Nz) = x$ pe cînd $N(N(z \cap x) \cap N(y \cap x)) = z$.

Independența lui $L_{4'}$). Fie L laticea a cărei diagramă Hasse este



şi fie $N0 = 1$; $Na = a$; $Nb = b$; $N1 = 0$; $\sigma_i x = x$, $i = 1, \ldots, n - 1$. $L_{2'}$), $L_{3'}$), $L_{5'}$) sînt satisfăcute, dar nu şi $L_{4'}$), căci pentru $x = a$, $u = v = 0$ $L_{4'}$) dă $a = 1$.

Independența lui $L_{5'}$). Fie L mulțimea $\{0,1\}$ şi să punem

$$x \cap y = \min(x, y)\,; \quad N0 = 1\,; \quad N1 = 0\,; \quad \sigma_i x = 0, \ i = 1, \ldots, n - 1.$$

$L_{2'}$)—$L_{4'}$) sînt satisfăcute, dar nu şi $L_{5'}$) deoarece pentru $x = 0$, $y = 1$, din $\sigma_i 0 = \sigma_i 1 = 0$ se deduce $0 \neq 1$.

Primită la redacție la 10 ianuarie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. GR. C. MOISIL, *Recherches sur les logiques non-chrysippiennes*. Ann Sc. de l'Université de Jassy, **XXVI**, *431* (1940).
2. GR. C. MOISIL, *Notes sur les logiques non-chrysippiennes*. Ann. Sc. de l'Université de Jassy, **XXVII**, *86* (1941).
3. GR. C. MOISIL, Cursul de : *Capitole speciale de Maşini de calcul*, predat la Facultatea de matematică şi mecanică, Universitatea din Bucureşti.
4. GR. C. MOISIL, *Încercări vechi şi noi de logică neclasică*. Edit. ştiințifică, Bucureşti, 1965.
5. C. O. SICOE, *Sur les idéaux des algèbres lukasiewicziennes polyvalentes*.
6. C. O. SICOE, *Elemente strict chrisippiene în algebre lukasiewicziene polivalente*.
7. C. O. SICOE, *Sur la définition des algèbres lukasiewicziennes polyvalentes*.

[illegible] Fie L latticea [illegible] diagramă. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Primit la redacție la [illegible] 1967

BIBLIOGRAFIE

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]
4. [illegible]
5. [illegible]
6. [illegible]
7. [illegible]

ELEMENTE DE ANALIZĂ ARMONICĂ (I)

DE

ŞERBAN STRĂTILĂ

În capitolul I se expun noţiunile şi rezultatele fundamentale ale analizei armonice abstracte. În §§ 1–5 se prezintă metoda analitică de demonstraţie a teoremei de dualitate a lui Pontriaghin ; această metodă are avantajul că în diferitele sale momente se obţin şi cele mai importante teoreme proprii analizei armonice. În §§ 6, 7 sînt considerate cîteva procedee tehnice foarte utile, împreună cu aplicaţiile lor ; este vorba de inversarea transformării Plancherel şi de compactificarea Bohr.

În § 8 se face o trecere în revistă a teoremelor tauberiene ; tot aici se face şi legătura cu o problemă importantă, încă deschisă, cunoscută sub numele de problema sintezei spectrale.

În §§ 9, 10 se examinează cîteva aspecte ale teoriei dualităţii.

În § 11 se expun principalele teoreme relative la structura grupurilor abeliene local compacte.

În capitolul II se expun caracterizările date de P. J. Cohen măsurilor idempotente şi omomorfismelor de algebre grupale.

INTRODUCERE

Lucrarea de faţă conţine expunerile ţinute de autor în anii 1965–1967 la seminarul condus de prof. univ. N. Dinculeanu în cadrul Institutului de matematică al Academiei Republicii Socialiste România. Scopul ei este de a face o succintă prezentare a analizei armonice pe grupuri abeliene local compacte. Parcurgerea unei lucrări de analiză armonică abstractă presupune unele cunoştinţe preliminare; este vorba de: noţiuni elementare de topologie şi grupuri topologice (Bourbaki, [6], ch. I, III, Hewitt and Roos, [27], ch. II), teoremele fundamentale ale analizei funcţionale (Dunford and Schwarz, [15], ch. II, V), teoria integrării în spaţii local compacte (Dinculeanu [13], [14] Bourbaki [7]; Hewitt and Roos, [27], ch. III) şi teoria algebrelor Banach comutative (Loomis, [36], ch. IV, V).

În cele ce urmează trecem în revistă conţinutul primei părţi a lucrării (cap. I, II).

În capitolul I dăm definiţiile şi rezultatele de bază ale analizei armonice, construcţia completă a obiectului analizei armonice fiind practic

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1209–1245, BUCUREŞTI, 1967

terminată în §§**1**—**5**. În § **1** definim măsura Haar pe un grup abelian local compact (pe scurt, vom scrie l.c.a.-grup), studiem principalele proprietăţi ale acestei măsuri şi definim algebrele cu convoluţie $\mathcal{L}^1(G)$, $\mathcal{M}(G)$. În § **2** definim grupul dual Γ al unui l.c.a.-grup G şi transformarea Fourier; Γ se identifică cu spectrul algebrei $\mathcal{L}^1(G)$ iar transformarea Fourier cu reprezentarea Ghelfand. Pentru măsuri definim transformarea Fourier-Stieltjes. Dacă $f \in \mathcal{L}^1(G)$, $\mu \in \mathcal{M}(G)$, atunci prin $f^\wedge$ notăm transformarea Fourier, iar prin $\mu^\wedge$ transformarea Fourier-Stieltjes; mai notăm $\mathcal{A}(\Gamma) = \{f^\wedge ; f \in \mathcal{L}^1(G)\}$, $\mathcal{B}(\Gamma) = \{\mu^\wedge ; \mu \in \mathcal{M}(G)\}$. În § **3** definim funcţiile pozitiv definite şi dăm teorema Bochner-Weil care le caracterizează; cu ajutorul lor dăm o primă caracterizare a lui $\mathcal{B}(\Gamma)$ şi prezentăm teorema de inversiune. Ca aplicaţie descriem topologiile pe G şi Γ în termenii topologiei compact-deschise a lui Pontriaghin şi arătăm că polinoamele trigonometrice aproximează uniform funcţiile continue pe grupuri compacte. În § **4** expunem teorema lui Plancherel şi arătăm că $\mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{L}^2(\Gamma) * \mathcal{L}^2(\Gamma)$. Paragraful **5** desăvîrşeşte teoria construită pînă la el prin teorema de dualitate a lui Pontriaghin. Ca consecinţe se obţin: teorema de unicitate (algebrele $\mathcal{L}^1(G)$ şi $\mathcal{M}(G)$ sînt semisimple), caracterizarea măsurilor $\mu \in \mathcal{M}(G)$ pentru care $\mu^\wedge$ are suportul compact (respectiv $\mu^\wedge \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$) ş.a.m.d. Notăm că demonstraţia teoremei lui Pontriaghin se face cu mijloacele analizei funcţionale, ceea ce are avantajul de a simplifica expunerea şi de a cuprinde pe parcurs şi celelalte teoreme fundamentale ale analizei armonice. Această metodă se datoreşte lui Cartan et Godement, [10] şi Raikov [42]. În § **6** descriem transformarea inversă transformării Plancherel şi obţinem în particular dezvoltarea în serie Fourier a unei funcţii de pătrat integrabil pe un grup compact. În § **7** obţinem compactificarea Bohr a unui l.c.a.-grup, reformulăm rezultatul în termenii unei teoreme de aproximare a caracterelor prin caractere continue şi caracterizăm funcţiile aproape periodice prin teorema lui Anzai-Kakutani şi teorema lui Bohr; apoi expunem teorema lui Eberlein care dă o nouă şi foarte folositoare caracterizare a spaţiului $\mathcal{B}(\Gamma)$. În § **8** arătăm că $\mathcal{L}^1(G)$ este o algebră regulată şi prezentăm teorema tauberiană a lui N. Wiener; în plus formulăm problema sintezei spectrale căreia îi dăm cîteva forme echivalente şi răspunsuri parţiale. Cheia obţinerii acestor rezultate o constituie cîteva leme cu caracter tehnic expuse la începutul paragrafului. În § **9** calculăm — cu ajutorul noţiunii de *anulator* — grupul dual al unui subgrup închis, al unui grup cît, al unui produs direct, al unei sume directe. Definim morfismul dual al unui morfism dat şi studiem proprietăţile lui. Studiem proprietăţile topologice ale lui G cu ajutorul structurii algebrice a lui Γ. În sfîrşit, ne ocupăm de aşa-numitele I-grupuri. În § **10** studiem transformarea Fourier pe subgrupuri şi grupuri cît şi ca aplicaţie arătăm că orice subgrup este o mulţime de sinteză spectrală; extindem la l.c.a.-grupuri două rezultate clasice: „Sampling theorem" şi formula de sumare a lui Poisson. Ultimul paragraf conţine teoremele de structură ale l.c.a.-grupurilor, teoreme care au constituit primul instrument în demonstrarea teoremei de dualitate.

În capitolul II caracterizăm, prin două teoreme ale lui P. J. Cohen [11], [12], măsurile idempotente ($\mu * \mu = \mu$) şi omomorfismele $\psi : \mathcal{L}^1(G) \to \mathcal{M}(G)$. Anume, în § **12** arătăm că $\mu \in \mathcal{M}(G)$ este idempotentă dacă şi numai dacă $\mu^\wedge$ este funcţia caracteristică a unei mulţimi din clanul claselor lui Γ, iar în § **13** arătăm că ψ este omomorfism dacă şi numai dacă $(\psi f)^{\wedge} = f^{\wedge} \circ \alpha$, unde $\alpha : Y \subset \Gamma_2 \to \Gamma_1$ este o aplicaţie afină pe porţiuni. Paragraful **14** conţine cîteva rezultate complementare *).

Expunerea nu conţine demonstraţii complete. În §§ **1**—**8** nu dăm decît uneori schiţe de demonstraţie care să pună în lumină ideile centrale şi metodele teoriei, excelentele monografii ale lui Rudin [44], Ghelfand, Raikov, Şilov [20] şi Hewitt and Roos [27] — după care ne-am condus şi la care ne referim adesea — conţin demonstraţiile faptelor expuse, iar consultarea lor este absolut necesară pentru însuşirea materialului *informativ* din expunerea noastră.

Aceeaşi recomandare este valabilă şi pentru §§ **9**—**11**, deşi aici dăm unele demonstraţii complete. Expunerea îşi schimbă caracterul în capitolul II, unde, în general, aserţiunile sînt însoţite de demonstraţii complete.

Observaţiile participanţilor la seminar au contribuit în mare măsură la completarea, simplificarea şi sistematizarea expunerii; au fost obţinute demonstraţii coerente pentru fapte prezentate fără demonstraţie sau cu o demonstraţie nesatisfăcătoare în lucrările de referinţă. De aceea am inserat în text aceste observaţii, uneori însoţite de numele autorilor lor.

Cîteva cuvinte asupra notaţiilor: de obicei prin A' am notat complementara mulţimii A, iar prin „l. c. a.-grup" am prescurtat „grup abelian local compact" (cf. Rudin, [44]). Celelalte notaţii sînt fie cele obişnuite, fie explicitate în text.

CAPITOLUL I

TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ANALIZEI ARMONICE

§ 1. ALGEBRE GRUPALE

1.1. Definiţie. Fie G un l.c.a.-grup; se numeşte *măsură Haar* pe G o măsură boreliană nenulă, regulată, pozitivă şi invariantă la translaţii.

1.2. Teoremă (Haar). *Pe fiecare l.c.a.-grup G există o măsură Haar, unică în afara unei constante multiplicative.* (Dinculeanu [14], Halmos [22], Hewitt and Roos [27], Nachbin [39]).

Vom alege o măsură Haar m pe G şi o vom considera fixată.

1.3. Propoziţie. (i) $m(E) = m(-E)$ *pentru fiecare mulţime boreliană* $E \subset G$.

(ii) $m(V) > 0$ *pentru fiecare mulţime deschisă* $V \subset G$ (Rudin, [44]; 1.1.2, 1.1.4).

1.4. Propoziţie. (i) G *este compact* $\Leftrightarrow m(G) < \infty$.

(ii) G *este discret* $\Leftrightarrow m(\{0\}) > 0$.

(Dinculeanu [14], § 23, Nachbin [39]).

Observaţie. Dacă G este compact, vom *norma* măsura Haar m astfel încît $m(G) = 1$; dacă G este discret, vom *norma* măsura Haar m astfel încît $m(\{0\}) = 1$.

---

*) Capitolul II va apare ulterior.

1.5. PROPOZIŢIE. *Un subgrup măsurabil* $H \subset G$ *cu* $m(H) > 0$ *este deschis.*

Demonstraţia se bazează pe una din următoarele leme:

(1) LEMĂ. *Dacă* A, $B \subset G$ *sînt mulţimi boreliene astfel încît* $0 < m(A)$, $m(B) < \infty$, *atunci* $A + B$ *are interiorul nevid.* (Hewitt and Roos, [27], 20.17).

(2) LEMĂ. (Zsidó László). *Dacă* $K \subset G$ *este o mulţime compactă şi simetrică astfel ca* $m(K) > 0$, *atunci există* $n \in N$ *aşa ca* int $(nK) \neq \emptyset$.

Într-adevăr, dacă H_0 este subgrupul generat de K, atunci $H_0 = \bigcup_{n \geqslant 0}(nK)$ şi $m(H_0) > 0$; dacă V este o mulţime deschisă şi relativ compactă din G, atunci V nu intersectează decît o familie numărabilă de clase ale lui H_0, deci $V = \bigcup_{n,k \geqslant 0}(V \cap (x_k + nK))$ unde x_k sînt elemente din G. Teorema lui Baire ([27], 5.28) ne dă rezultatul dorit. Evident, (1) $\Rightarrow$ (2).

1.6. **Spaţii de funcţii.** Vom nota prin $\mathcal{C}(G)$ spaţiul funcţiilor continue şi mărginite pe G, prin $\mathcal{C}_\mu(G)$ spaţiul funcţiilor uniform continue şi mărginite pe G, prin $\mathcal{C}_0(G)$ spaţiul funcţiilor continue care se anulează la infinit pe G, iar prin $\mathcal{C}_{00}(G)$ spaţiul funcţiilor continue cu suport compact pe G. Aceste spaţii devin spaţii normate cu norma uniformă; $\mathcal{C}(G)$ şi $\mathcal{C}_0(G)$ sînt spaţii Banach, iar $\mathcal{C}_{00}(G)$ este dens în $\mathcal{C}_0(G)$. În loc de $\mathcal{L}^p(m)$ vom scrie $\mathcal{L}^p(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$[1]; $\mathcal{L}^p(G)$ este un spaţiu Banach cu norma tradiţională $\|\cdot\|_p$. Vom nota prin $\mathcal{M}(G)$ spaţiul măsurilor complexe boreliene, regulate şi mărginite pe G cu norma $\|\mu\| = |\mu|(G)$. Teorema Radon-Nikodym identifică pe $\mathcal{L}^1(G)$ cu spaţiul măsurilor absolut continue din $\mathcal{M}(G)$, iar teorema Riesz-Kakutani identifică pe $\mathcal{M}(G)$ cu dualul lui $\mathcal{C}_0(G)$. Vom mai nota prin $\mathcal{M}_s(G)$ mulţimea măsurilor singulare în raport cu măsura Haar, prin $\mathcal{M}_c(G)$ mulţimea măsurilor continue iar prin $\mathcal{M}_d(G)$ mulţimea măsurilor discrete.

1.7. Dacă f este o funcţie complexă pe G, vom numi *translatata lui* f *prin* $x \in G$ şi o vom nota f_x, funcţia

$$f_x(y) = f(y - x);\ y \in G.$$

PROPOZIŢIE. *Dacă* $f \in \mathcal{L}^p(G)$, *atunci*:

(i) $f_x \in \mathcal{L}^p(G)$ *pentru orice* $x \in G$; $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

(ii) $\|f_x\|_p = \|f\|_p$ *pentru orice* $x \in G$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

(iii) *aplicaţia* $x \to f_x$ *este o aplicaţie uniform continuă a lui* G *în* $\mathcal{L}^p(G)$; $1 \leqslant p < \infty$. (Rudin [44], 1.1.5).

1.8. Fie H un subgrup închis în G iar $\varphi : G \to G/H$ aplicaţia canonică; dacă $\mu \in \mathcal{M}(G)$, vom nota prin $\pi\mu$ imaginea măsurii μ prin φ; atunci $\pi\mu \in \mathcal{M}(G/H)$. Asocierea $\mu \to \pi\mu$ defineşte un operator $\pi : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G/H)$.

TEOREMĂ. π *este un operator liniar, mărginit* ($\|\pi\| \leqslant 1$) *şi surjectiv.*

Notăm că relaţia $\sigma = \pi\mu$ înseamnă:

$$\int_G f(\varphi(x))\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{G/H} f\mathrm{d}\sigma;\ f \in \mathcal{C}_0(G/H) \tag{1}$$

---

[1] Aceste spaţii se consideră separate; prin abuz de limbaj elementele din $\mathcal{L}^p(G)$ vor fi numite totuşi *funcţii.*

deci singurul fapt netrivial este surjectivitatea lui π. Demonstrația (C. Foiaș – Ș. Strătilă) conține următoarele etape:

(I) Dacă V este o vecinătate compactă și simetrică a originii în $G_1 = G/H$, atunci există o familie $(V_\alpha)_\alpha$ de translatate ale lui V în G, astfel încît (i) $\bigcup_\alpha V_\alpha = G$; (ii) orice mulțime compactă $K \subset G_1$ intersectează numai un număr finit de mulțimi V_α.

(II) Pentru fiecare α există o mulțime compactă $E_\alpha \subset G$ așa ca $\varphi(E_\alpha) = V_\alpha$; se notează $X = \bigcup_\alpha E_\alpha$; atunci $\varphi(X) = G_1$, pentru fiecare $K \subset G_1$ compact $\varphi^{-1}(K) \cap X$ este compact și X cu topologia indusă de G este local compact. Dacă $\mathcal{S} = \{g \circ \varphi / X;\ g \in C_0(G_1)\}$ atunci $\mathcal{S}$ este un subspațiu liniar în $\mathcal{C}_0(X)$.

(III) Se definește pe $\mathcal{S}$ o funcțională T:

$$Tf = \int_{G/H} g\mathrm{d}\sigma;\ f \in \mathcal{S};\ \sigma \in \mathcal{M}(G/H).$$

Cu teorema Hahn-Banach și teorema Riesz-Kakutani se prelungește T pînă la o măsură $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Atunci putem considera $\mu \in \mathcal{M}(G)$ și avem $\sigma = \pi\mu$.q.e.d.

1.9. Notăm prin m_G, m_H, $m_{G/H}$ măsurile Haar pe grupurile indicate, unde H este un subgrup închis din G, iar prin $[x] \in G/H$ clasa lui $x \in G$.

TEOREMĂ. *Pentru orice* $f \in \mathcal{L}^1(G)$ *există o mulțime* $N \subset G/H$ *cu* $m_{G/H}(N) = 0$ *așa ca pentru orice* $x \in G$ *cu* $[x] \notin N$ *să avem*:

(i) $f_{-x/H} \in \mathcal{L}^1(H)$;

(ii) *dacă* F *este funcția definită pe* G/H *prin*:

$$F([x]) = \int_H f(x+y)\,\mathrm{d}m_H(y);\ [x] \notin N,$$

atunci $F \in \mathcal{L}^1(G/H)$;

(iii) $\int_G f\mathrm{d}m_G = \int_{G/H} F\mathrm{d}m_{G/H}$.

Demonstrația (C. Foiaș – Ș. Strătilă) folosește metoda dezintegrării măsurilor și conține următoarele etape:

(I) Se notează $\mu = m_G$, $\lambda = m_H$, $\nu = m_{G/H}$; $[x] = \zeta$, $H_\zeta = x + H$; $\psi_\zeta : H \to H_\zeta\ (\psi_\zeta(h) = x + h)$; $\chi_\zeta : H_\zeta \to G$ scufundarea canonică; $\lambda_\zeta =$ imaginea lui λ prin ψ_ζ; μ_ζ imaginea lui λ_ζ prin χ_ζ. Atunci pentru $f \in \mathcal{C}_{00}(G)$ avem:

$$\mu(f) = \int_{G/H} \mu_\zeta(f)\,\mathrm{d}\nu(\zeta). \tag{1}$$

(II) Dacă $A \subset G$ și $\mu(A) = 0$, atunci există $A_0 \subset G/H$ cu $\nu(A_0) = 0$ așa ca $\mu_\zeta(A) = 0$ pentru orice $\zeta \notin A_0$.

(III) Pentru $f \in \mathcal{L}^1(G)$ există un șir $\{f_n\}$ din $C_{00}(G)$ și $A \subset G$ cu $\mu(A) = 0$ așa ca $f_n \to f$ în medie (μ) și $f_n(x) \to f(x)$ pentru $x \notin A$.

(IV) Există o mulțime $B_0 \subset G/H$ cu $\nu(B_0) = 0$ așa ca fiecărui $\zeta \notin B_0$ să-i corespundă o funcție $g_\zeta \in \mathcal{L}^1(\mu_\zeta)$ și o mulțime $A_\zeta \subset G$ cu $\mu_\zeta(A_\zeta) = 0$ cu proprietățile: $f_n \to g_\zeta$ în medie (μ_ζ) și $f_n(x) \to g_\zeta(x)$ pentru $x \notin A_\zeta$. Atunci punctul (i) rezultă cu $N = A_0 \cup B_0$.

(V) Există o funcție $G \in \mathcal{L}^1(G/H)$ și o mulțime $M \subset G/H$ cu $\nu(M) = 0$ așa ca $\mu_\zeta(f_n) \to G(\zeta)$ în medie (ν) și $\mu_\zeta(f_n) \to G(\zeta)$ pentru $\zeta \notin M$. Atunci pentru $\zeta \notin M \cup N$ avem $G(\zeta) = \mu_\zeta(f) = F(\zeta)$, ceea ce demonstrează punctul (ii).

(VI) Trecînd la limită (1) scrisă pentru f_n se obține punctul (iii).

Observații. (**1**) Șirul $\{f_n\}$ de la (iii) se alege astfel încît să avem: $\sum \mu(|f_{n+1} - f_n|) < \infty$. Transcrierea acestei relații cu ajutorul formulei (1) și teorema Beppo-Levi constituie împreună instrumentul principal de demonstrație în (IV) și (V).

(**2**) Teorema se extinde la funcții boreliene pozitive.

(**3**) Se definește în mod natural operatorul $T : \mathcal{L}^1(G) \to \mathcal{L}^1(G/H)$ prin $Tf = F$. Operatorul T este liniar, mărginit ($\|T\| \leqslant 1$), *surjectiv* și coincide cu restricția operatorului π (**1.9**) la $\mathcal{L}^1(G)$ (**4**). O expunere *completă*, dar dificil de abordat, asupra măsurilor pe *spații omogene* se află în Bourbaki, [7], ch. VII.

1.10. Definiție. Fie f, g două funcții boreliene pe G cu proprietatea

$$[*] \qquad \int_G |f(x-y)\,g(y)|\,\mathrm{d}y < \infty\,; \quad x \in G.$$

Atunci definim *convoluția* lor prin formula:

$$(f * g)(x) = \int_G f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in G.$$

1.11. Propoziție. (i) *Dacă* $[*]$ *este adevărată pentru un* $x \in G$, *atunci avem* $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

(ii) *Dacă* $f, g \in \mathcal{L}^1(G)$ *atunci* $[*]$ *are loc aproape peste tot*, $f * g \in \mathcal{L}^1(G)$ și $\|f * g\|_1 < \|f\|_1 \|g\|_1$.

(iii) *Dacă* $f, g, h \in \mathcal{L}^1(G)$, *atunci* $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Corolar. *Pentru orice* l.c.a.-grup G, $\mathcal{L}^1(G)$ *este o algebră Banach comutativă dacă se ia ca operație de înmulțire convoluția. Dacă G este discret, atunci* $\mathcal{L}^1(G)$ *are unitate* ($e(x) = 0$ pentru $x \neq 0$ și $e(0) = 1$).

(Rudin, [44], 1.1.6—1.1.7).

1.12. Propoziție. (i) $\mathcal{C}_{00}(G) * \mathcal{C}_{00}(G) \subset \mathcal{C}_{00}(G)$.

(ii) $\mathcal{L}^p(G) * \mathcal{L}^q(G) \subset \mathcal{C}_0(G)$; $(1/p) + (1/q) = 1$; $1 \leqslant p, q < \infty$

(iii) $\mathcal{L}^p(G) * \mathcal{L}^q(G) \subset \mathcal{L}^r(G)$; $(1/p) + (1/q) - (1/r) = 1$; $1 < p, q, r < \infty$.

(iv) $\mathcal{L}^1(G) * \mathcal{L}^\infty(G) \subset \mathcal{C}_u(G)$.

(Rudin, [44], 1.1.6; Hewitt and Roos, [27], 20.19).

1.13. Cu toate că $\mathcal{L}^1(G)$ nu are întotdeauna unitate, există mereu ,,unități aproximative''.

(1) Lemă. *Fie* V *o vecinătate compactă a lui* 0 *în* G; *există o funcție* $u \in \mathcal{C}_{00}(G)$ *cu proprietățile*: (i) $u_V \geqslant 0$; (ii) supp $(u_V) \subset V$, (iii) $\int_G u_V \,\mathrm{d}m = 1$.

Se ia w vecinătatea compactă a lui 0 cu $W - W \subset V$, $g = X_w / m(w)$ și $u = g * \widetilde{g}$, unde $\widetilde{g}(x) = \overline{g(-x)}$.

(2) Definiție. Fie $\{V_\alpha\}$ un sistem fundamental de vecinătăți compacte ale originii în G și fie $u_\alpha = u_{v\alpha}$ (1)-Familia $\{u_\alpha\}$ se numește *unitate aproximativă* în $\mathcal{L}^1(G)$. Justificarea se află în următoarea:

(3) Teoremă. *Oricare ar fi* $f \in \mathcal{L}^1(G)$ *avem* $\lim\limits_{\alpha} \|f - f * u_1\| = 0$ (Rudin, [44], 1.1.8; Dinculeanu [14], § 24, pct. 6).

1.14. DEFINIȚIE. Fie G un l.c.a.-grup; $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathscr{M}(G)$ și $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ măsura produs pe G; fiecărei mulțimi boreliene $E \subset G$ îi asociem mulțimea boreliană $E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in G^n;\ x_1 + \ldots + x_n \in E\}$ din G^n și definim *convoluția* $\mu_1 * \ldots * \mu_n$ prin

$$(\mu_1 * \ldots * \mu_n)(E) = (\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n)(E_n).$$

1.15. TEOREMĂ. *$\mathscr{M}(G)$ este o algebră Banach comutativă cu unitate (δ_0 = măsura Dirac) dacă se ia ca înmulțire-convoluția.*
(Rudin, [44], 1.3.2).

1.16. PROPOZIȚIE. (i) *Pentru orice mulțime boreliană $E \subset G$ avem*

$$(\mu * \lambda)(E) = \int_G \mu(E - x)\, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_G \lambda(E - x)\, \mathrm{d}\mu(x);\ \mu\lambda \in M(G).$$

(ii) *Pentru orice funcție boreliană mărginită f pe G avem*

$$\int_G f \mathrm{d}(\mu_1 * \ldots * \mu_n) = \int_G \ldots \int_G f(x_1 + \ldots + x_n)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \ldots \mathrm{d}\mu_n(x_n).$$

(Rudin [44], 1.3.2, Hewitt and Roos [27], §§ 19, 20; K. Stromberg [47]).

1.17. OBSERVAȚII. (1) $\operatorname{supp}(\mu_1 * \ldots * \mu_n) \subset \operatorname{supp}(\mu_1) + \ldots + \operatorname{supp}(\mu_n)$. (2) dacă $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathscr{M}^+(G)$, atunci $\|\mu_1 * \ldots * \mu_n\| = \|\mu_1\| \ldots \|\mu_n\|$. (3) pentru studiul reciproc al măsurilor $|\mu|$, $|\lambda|$, $|\mu * \lambda|$, $|\mu| * |\lambda|$ se poate consulta Hewitt and Roos [27] 19.9, 19.25 și Dinculeanu [14], § 24 — (4). Un studiu complet al convoluțiilor se află în Bourbaki [7], ch. VIII.

1.18. PROPOZIȚIE. (i) *$\mathscr{L}^1(G)$ și $\mathscr{M}(G)$ sînt ideale închise în $\mathscr{M}(G)$.*
(ii) $\mathscr{M}(G) * \mathscr{L}^p(G) \subset \mathscr{L}^p(G)$; $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
(iii) *$\mathscr{M}_d(G)$ este o subalgebră închisă în $\mathscr{M}(G)$.*
(iv) *$\mathscr{M}_s(G)$ este un subspațiu liniar închis în $\mathscr{M}(G)$.*

(v) *dacă G este nediscret, atunci are loc următoarea descompunere directă a lui $\mathscr{M}(G)$ ca spațiu liniar*

$$\mathscr{M}(G) = \mathscr{L}^1(G) \oplus \mathscr{M}_s(G) \oplus \mathscr{M}_d(G).$$

(Rudin [44], 1.3.5; Hewitt and Roos, [27], 19.13—19.21, 19.26).

Observații. (*1*) Dacă $f \in \mathscr{L}^1(G)$ și $\mu \in \mathscr{M}(G)$, atunci $(f * \mu)(y) = \int_G f(y - x)\, \mathrm{d}\mu(x)$; (*2*) Dacă $\mu \in \mathscr{M}(G)$ și $\mathrm{d}\mu = f\mathrm{d}x + \mathrm{d}\mu_s + \mathrm{d}\mu_d$, atunci $\mathrm{d}|\mu| = |f|\, \mathrm{d}x + \mathrm{d}|\mu_s| + \mathrm{d}|\mu_d|$ și, în particular, $\|\mu\| = \|f\|_1 + \|\mu_s\| + \|\mu_d\|$; (*3*) Dacă G este discret, atunci $\mathscr{L}^1(G) = \mathscr{M}(G) = \mathscr{M}_d(G)$; $M_s(G) = \{0\}$.

§ 2. TRANSFORMAREA FOURIER

2.1. Fie T cercul unitate cu operația grupală obișnuită; are loc identificarea canonică $T \equiv R/Z$. Cu topologia uzuală, T este grup compact.

DEFINIȚIE. Fie G un l.c.a.-grup. Se numește *caracter* pe G orice omomorfism: $G \rightarrow T$; ne vor interesa în special *caracterele continue.*

Mulţimea caracterelor continue pe G, înzestrată în mod canonic cu o structură de grup se numeşte *grupul dual* al lui G; el va fi notat prin Γ sau prin $G^{\wedge}$.

Valoarea lui $\gamma \in \Gamma$ în $x \in G$ va fi notată prin $\gamma(x)$ sau (x, γ). Au loc relaţiile: $|(x, \gamma)| = 1$, $(x_1 + x_2, \gamma) = (x_1, \gamma)(x_2, \gamma)$, $(x, \gamma_1 + \gamma_2) = (x, \gamma_1)(x, \gamma_2)$; $(0, \gamma) = (x, 0) = 1$; $(-x, \gamma) = (x, -\gamma) = (x, \gamma)^{-1} = \overline{(x, \gamma)}$.

2.2. DEFINIŢIE. Pentru $f \in \mathcal{L}^1(G)$, funcţia $f^{\wedge}$ definită pe Γ prin:

$$f^{\wedge}(\gamma) = \int_G f(x)(-x, \gamma)\,\mathrm{d}x; \quad \gamma \in \Gamma$$

se numeşte *transformata Fourier* a lui f. Vom nota $\mathcal{A}(\Gamma) = \{f^{\wedge}; f \in \mathcal{L}^1(G)\}$; aplicaţia $f \to f^{\wedge}$ va fi numită *transformarea Fourier*.

2.3. (1) PROPOZIŢIE. (i) *Pentru orice* $\gamma \in \Gamma$ *aplicaţia* $f \to f^{\wedge}(\gamma)$ *este un omomorfism complex al algebrei* $\mathcal{L}^1(G)$, *neidentic nul.*

(ii) *Reciproc, fiecare omomorfism complex neidentic nul al algebrei* $\mathcal{L}^1(G)$ *se obţine în acest mod, caracterele distincte inducînd omomorfisme distincte.*

(2) COROLAR. (i) *Pentru orice l.c.a.-grup* G, *grupul dual* Γ *se identifică în mod canonic cu spaţiul idealelor maximale ale algebrei* $\mathcal{L}^1(G)$.

(ii) $\mathcal{A}(\Gamma)$ *se identifică cu* $(\mathcal{L}^1(G))^{\wedge}$ *iar transformarea Fourier se identifică cu reprezentarea Ghelfand.*

Dăm schiţa demonstraţiei (Rudin, [44], 1.2.2) propoziţiei (1). Partea directă (i) este trivială. Reciproc, fie h un omomorfism complex nenul al algebrei $\mathcal{L}^1(G)$; atunci $h \in (\mathcal{L}^1(G))^*$ şi deci există $\varphi \in \mathcal{L}^{\infty}(G)$ cu $\|\varphi\|_{\infty} = 1$ aşa ca pentru orice $f \in \mathcal{L}^1(G)$ să avem relaţia $h(f) = \int_{\mathcal{F}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. Se arată apoi succesiv că:

(I) $h(f)\varphi(y) = h(f_y)$ a.p.t. $(\mathrm{d}y)$; $f \in \mathcal{L}^1(G)$

(II) φ poate fi presupusă continuă

(III) $\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$; $x, y \in G$

(IV) $|\varphi(x)| = 1$; $x \in G$

ceea ce demonstrează propoziţia.

2.4. Vom considera pe Γ *topologia lui Ghelfand*, adică $\mathcal{A}(\Gamma)$-topologia. Atunci Γ este înzestrat cu o topologie local compactă, $\mathcal{A}(\Gamma) \subset \mathcal{C}_0(\Gamma)$ iar transformarea Fourier este un operator liniar şi continuu ($\|f^{\wedge}\|_{\infty} \leqslant \|f\|_1$). Mai mult, din teorema Stone-Weirstrass rezultă că $\mathcal{A}(\Gamma)$ este (o subalgebră autoadjunctă, separatoare) densă în $\mathcal{C}_0(\Gamma)$. Se verifică uşor că $(f\gamma)^{\wedge} = (f^{\wedge})_{\gamma}$ şi $(f_x)^{\wedge}(\gamma) = (x, \gamma) f^{\wedge}(\gamma)$.

2.5. PROPOZIŢIE. *Dacă* G *este un grup abelian compact, atunci au loc relaţiile de ortogonalitate*

$$\int_G (x, \gamma)\,\mathrm{d}m(x) = \begin{cases} 1 & \textit{dacă } \gamma = 0 \\ 0 & \textit{dacă } \gamma \neq 0. \end{cases}$$

COROLAR. (i) *Dacă* G *este compact, atunci* Γ *este discret.*

(ii) *Dacă* G *este discret, atunci* Γ *este compact.*

(Rudin, [44], 1.2.5).

2.6. Pe Γ avem două structuri : o structură algebrică de grup și o structură topologică de spațiu local compact. Ele sînt compatibile, deci Γ devine l.c.a.-grup. Mai precis :

PROPOZIȚIE. (i) (x, γ) *este o funcție continuă pe* $G \times \Gamma$.

(ii) *Fie* $K \subset G$ și $C \subset \Gamma$ *compacte și* $U_\varepsilon = \{z ; |1 - z| < \varepsilon\}$. *Dacă* $N(K, \varepsilon) = \{\gamma ; (x, \gamma) \in U_\varepsilon \text{ or } x \in K\}$ *și* $N(C, \varepsilon) = \{x : (x, \gamma) \in U_\varepsilon \text{ or } \gamma \in C\}$, *atunci* $N(K, \varepsilon)$ *și* $N(C, \varepsilon)$ *sînt părți deschise în* Γ *și respectiv* G.

(iii) *Familia tuturor mulțimilor* $N(K, \varepsilon)$ *și a translatelor lor este o bază pentru topologia lui* Γ.

(iv) Γ *este l.c.a.-grup.*

(Rudin, [44], 1.2.6).

2.7. DEFINIȚIE. Pentru $\mu \in \mathcal{M}(G)$, funcția $\mu\hat{}$ definită pe Γ prin

$$\mu\hat{}\,(\gamma) = \int_G (-x, \gamma)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

se numește *transformata Fourier-Stieltjes* a măsurii μ. Vom nota $\mathcal{B}(\Gamma) = \{\mu\hat{} ; \mu \in \mathcal{M}(G)\}$ iar aplicația $\mu \to \mu\hat{}$ se va numi *transformarea Fourier-Stieltjes*. Evident, $\mathcal{A}(\Gamma) \subset \mathcal{B}(\Gamma)$.

Se verifică ușor că $\mathcal{B}(\Gamma) \subset \mathcal{C}_u(\Gamma)$ și că $\mathcal{B}(\Gamma)$ este o algebră complexă autoadjunctă invariantă la translații și la înmulțiri cu (x, γ) ; notăm că $\|\mu\hat{}\|_\infty \leqslant \|\mu\|$ și că $(\mu * \lambda)\hat{} = \mu\hat{}\lambda\hat{}$.

2.8. Spectrul lui $\mathcal{M}(G)$. Fie Δ spectrul lui $\mathcal{M}(G)$; cum $\mathcal{M}(G)$ are unitate, Δ este compact. Are loc scufundarea canonică $\Gamma \subset \Delta$, dar $\Gamma \neq \Delta$ căci $\mathcal{L}^1(G)$ fiind ideal închis în $\mathcal{M}(G)$, există un omomorfism nenul al lui $\mathcal{M}(G)$ care se anulează pe $\mathcal{L}^1(G)$. Totuși orice omomorfism complex al lui $\mathcal{M}(G)$ care nu este nul pe $\mathcal{L}^1(G)$ este de forma $\mu \to \mu\hat{}(\gamma)$ cu $\gamma \in \Gamma$. Notăm că scufundarea $\Gamma \subset \Delta$ este topologică (vezi și [18]). Structura completă a spectrului Δ al lui $\mathcal{M}(G)$ în cazul $G = R$ a fost descrisă de Șreider ([46] ; vezi și [20], cap. V).

2.9. Se va vedea ulterior că $\mu\hat{} = 0 \Rightarrow \mu = 0$; deocamdată însă, se poate demonstra ușor doar că :

TEOREMĂ (de unicitate). *Dacă* $\mu \in \mathcal{M}(\Gamma)$ *și pentru orice* $x \in G$ *avem* $\int_\Gamma (x, \gamma)\, \mathrm{d}\mu(\gamma) = 0$, *atunci* $\mu = 0$.

(Rudin, [44], 1.3.6).

2.10. Exemple. Grupurile *clasice* ale analizei armonice sînt R, T și Z. Dacă $G = R$, atunci $\Gamma = R$, iar $(x, y) = \mathrm{e}^{ixy}$. Dacă $G = T$, atunci $\Gamma = Z$ iar $(\mathrm{e}^{i\alpha}, n) = \mathrm{e}^{in\alpha}$. Dacă $G = Z$, atunci $\Gamma = T$ iar $(n, \mathrm{e}^{i\alpha}) = \mathrm{e}^{in\alpha}$. *Transformările Fourier în aceste cazuri sînt*

$$G = R : f\hat{}\,(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-ixy}\, \mathrm{d}x,\ y \in R,\ f \in \mathcal{L}^1(R)$$

$$G = T : f\hat{}\,(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{i\alpha})\, \mathrm{e}^{-in\alpha}\mathrm{d}\alpha ;\ n \in Z ;\ f \in \mathcal{L}^1(T)$$

$$G = Z : f\hat{}\,(\mathrm{e}^{i\alpha}) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n)\, \mathrm{e}^{-in\alpha} ;\ \mathrm{e}^{i\alpha} \in T ;\ f \in \mathcal{L}^1(Z).$$

(Rudin, [44], 1.2.7, Hewitt-Stromberg [28], 18.46).

§ 3. TEOREMA DE INVERSIUNE ŞI CONSECINŢELE SALE

3.1. Definiţie. O funcţie φ definită pe G se numeşte *pozitiv definită* dacă are loc relaţia:

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n \bar{c}_m \varphi(x_n - x_m) \geqslant 0$$

pentru orice $x_1, \ldots, x_N \in G$ şi pentru orice numere complexe $c_1, \ldots, c_N$, unde N este un număr întreg arbitrar.

3.2. Propoziţie. *Dacă φ este o funcţie pozitiv definită, atunci*

(i) $\varphi(-x) = \overline{\varphi(x)}$; $x \in G$

(ii) $|\varphi(x)| \leqslant \varphi(0)$; $x \in G$

(iii) $|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \leqslant 2\varphi(0) \operatorname{Re}[\varphi(0) - \varphi(x-y)]$; $x, y \in G$.

Corolar. *Prin urmare*

(iv) $\varphi(0) \geqslant 0$ *şi* φ *este mărginită.*

(v) *Dacă* φ *este continuă în origine, atunci* $\varphi \in \mathcal{C}_u(G)$.

(Rudin, [44], 1.4.1).

3.3. Observaţii. (1) Dacă $f \in \mathcal{L}^2(G)$ şi $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, atunci $\varphi = f * \tilde{f}$ este o funcţie pozitiv definită şi continuă. (2) Se numeşte *polinom trigonometric pe G* o funcţie de forma $\sum_{1}^{n} c_k(x, \gamma_k)$, unde $\gamma_k \in \Gamma$ iar c_k sînt numere complexe; mulţimea tuturor polinoamelor trigonometrice pe G va fi notată prin $\mathcal{T}(G)$; evident, $\mathcal{T}(G)$ este o subalgebră autoadjunctă a lui $\mathcal{C}(G)$. Orice polinom trigonometric cu coeficienţi pozitivi este o funcţie pozitiv definită şi continuă.

3.4. Funcţiile continue şi pozitiv definite sînt complet caracterizate de următoarea:

Teoremă (Bochner-Weil). *Fie G un l.c.a.-grup şi* Γ *dualul său. O funcţie continuă* φ *pe G este pozitiv definită dacă şi numai dacă există* $\mu \in \mathcal{M}(\Gamma)$, $\mu \geqslant 0$ *aşa încît* $\varphi(x) = \int_\Gamma (x, \gamma)\, d\mu(\gamma)$. *În plus* μ *este unic determinată de* φ.

Demonstraţia (Rudin, [44], 1.4.3), în ipoteza nerestrictivă $\varphi(0) = 1$, conţine următoarele etape:

(I) Dacă $f \in \mathcal{L}^1(G)$, atunci $\int_G \int_G f(x) \overline{f(y)}\, \varphi(x - y) \geqslant 0$.

(II) Definim o funcţională liniară şi mărginită ($\|T_\varphi\| \leqslant 1$) pe $\mathcal{L}^1(G)$ prin relaţia $T_\varphi(f) = \int_G f(x)\, \varphi(x)\, dx$ şi un „produs scalar" $[f, g] = T_\varphi(f * \tilde{g})$ pentru $f, g \in \mathcal{L}^1(G)$; faptul că $[f, f] \geqslant 0$ rezultă din (I) şi ne permite să deducem inegalitatea:

$$|[f, g]|^2 \leqslant [f, f]\, [g, g].$$

(III) Dacă $f \in \mathcal{L}^1(G)$, atunci $|T_\varphi(f)| \leqslant T_\varphi(f * \tilde{f})$, ceea ce ne permite să obţinem, cu ajutorul formulei razei spectrale, inegalitatea: $|T_\varphi(f)| \leqslant \|f^\wedge\|_\infty$.

(IV) T_φ se prelungeşte la o funcţională liniară şi mărginită ($\|T_\varphi\| \leqslant 1$) pe $\mathcal{C}_0(\Gamma)$ şi cu teorema Riesz-Kakutani se obţine o măsură $\mu \in \mathcal{M}(\Gamma)$ cu $\|\mu\| \leqslant 1$ şi $T_\varphi(f) = \int_G f^\wedge(-\gamma)\, d\mu(\gamma)$. Aceasta este măsura căutată în enunţul teoremei. Partea directă este trivială.

3.5. DEFINIȚIE. Vom nota prin $\mathcal{B}(G)$ *mulțimea tuturor funcțiilor f pe G de forma* $f(x) = \int_{\Gamma} (x, \gamma)\, \mathrm{d}\mu(\gamma)$; $(x \in G;\ \mu \in \mathcal{M}(\Gamma))$. Teorema Bochner-Weil și teorema de descompunere a lui Jordan arată că $\mathcal{B}(G) =$ *mulțimea tuturor combinațiilor liniare cu coeficienți complecși de funcții continue și pozitiv definite.*

3.6. Pasul centrat în dezvoltarea teoriei îl constituie

TEOREMA (de inversiune). (i) *Dacă* $f \in \mathcal{L}^1(G) \cap \mathcal{B}(G)$, *atunci* $f^{\wedge} \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$.

(ii) *Dacă măsura Haar pe G este fixată, măsura Haar pe Γ poate fi normată astfel încît „formula de inversiune''*

$$f(x) = \int_{\Gamma} f^{\wedge}(\gamma)\,(x, \gamma)\, \mathrm{d}\gamma$$

să fie valabilă pentru fiecare $f \in \mathcal{L}^1(G) \cap \mathcal{B}(G)$.

Pentru demonstrație (Rudin, [44], 1.5.1) vom nota prin $\mathcal{B}^1(G) = \mathcal{B}(G) \cap \mathcal{L}^1(G)$ și prin μ_f măsura asociată lui $f \in \mathcal{B}^1(G)$ conf. cu **3.5** Etapele demonstrației sînt:

$$\text{(I)}\quad g^{\wedge}\, \mathrm{d}\mu_f = f^{\wedge}\, \mathrm{d}\mu_g;\ f, g \in \mathcal{B}^1(G).$$

(II) Fie $\psi \in \mathcal{C}_{00}(\Gamma)$ și $K = \operatorname{supp} \psi$; există $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{C}_{00}(G)$ așa ca funcția $g = u_1 * \widetilde{u}_1 + \ldots + u_n * \widetilde{u}_n$ să aibă proprietatea $g^{\wedge} > 0$ pe K. Punînd $T\psi = \int (\psi / g^{\wedge})\, \mathrm{d}\mu_g$, se definește o funcțională T liniară, pozitivă, neidentic nulă și invariantă la translații pe $\mathcal{C}_{00}(\Gamma)$; (I) asigură că T este bine definită.

(III) Conform teoremei Riesz-Kakutani, rezultă că dacă măsura Haar pe Γ este convenabil normată, atunci $T\psi = \int_{\Gamma} \psi(\gamma)\, \mathrm{d}\gamma$ pentru $\psi \in \mathcal{C}_{00}(\Gamma)$ și deci $f^{\wedge}\, \mathrm{d}\gamma = \mathrm{d}\mu_f$ pentru $f \in \mathcal{B}^1(G)$, ceea ce demonstrează teorema.

3.7. Fie $\mathcal{P}(G)$ *mulțimea funcțiilor continue și pozitiv definite pe G*; atunci:

PROPOZIȚIE. $f \in \mathcal{L}^1(G) \cap \mathcal{P}(G) \Rightarrow f^{\wedge} \geqslant 0$.

3.8. Notăm următoarele *consecințe ale teoremei de inversiune* (Rudin, [44], 1.5.2):

(1) PROPOZIȚIE. *Familia tuturor mulțimilor $N(C, \varepsilon)$ și a translatelor lor este o bază a topologiei lui G.*

(2) PROPOZIȚIE. *Caracterele separă punctele lui G.*

(3) PROPOZIȚIE. *Dacă G este compact, atunci:*

(i) $\mathcal{T}(G)$ *este o subalgebră densă în* $\mathcal{C}(G)$.

(ii) $\mathcal{T}(G)$ *este dens în* $\mathcal{L}^p(G)$; $1 \leqslant p < \infty$.

3.9. În legătură cu normarea măsurilor Haar impusă de teorema de inversiune notăm (Rudin, [44], 1.5.3):

(1) PROPOZIȚIE. *Normarea canonică a măsurilor Haar pe grupurile compacte și discrete* (1.4 ; 2.5) *este compatibilă cu teorema de inversiune.*

(2) PROPOZIȚIE. *Fie $G = \Gamma = R$ iar $\alpha\, \mathrm{d}x$, respectiv $\beta\, \mathrm{d}t$ măsurile Haar pe G și respectiv Γ; pentru ca aceste măsuri să fie compatibile cu teorema de inversiune, este necesar și suficient ca $\alpha\beta = 1/2\pi$; două alegeri sînt mai frecvente*: $\alpha = 1,\ \beta = 1/2\pi$; $\alpha = \beta = (2\pi)^{-1/2}$.

§ 4. TEOREMA LUI PLANCHEREL ŞI CONSECINŢELE SALE

4.1. Fie $(\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2)(G) = \mathcal{L}^1(G) \cap \mathcal{L}^2(G)$; cum $\mathcal{C}_{00}(G) \subset (\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2)(G)$, rezultă că $(\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2)(G)$ este dens şi în $\mathcal{L}^1(G)$ şi în $\mathcal{L}^2(G)$; fie apoi $\mathcal{F}(\Gamma) = \{f^\wedge ; f \in (\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2)(G)\}$; evident, $\mathcal{F}(\Gamma) \subset \mathcal{A}(\Gamma)$. Cu aceste precizări avem următoarea :

4.2. TEOREMĂ (Plancherel). *Transformarea Fourier restrînsă la* $(\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2)(G)$ *se extinde în mod unic la o izometrie a lui* $\mathcal{L}^{\otimes}(G)$ pe $\mathcal{L}^2(\Gamma)$.

Demonstraţie (Rudin, [44], 1.6.1). Conţine următoarele etape:

(I) $\mathcal{F}(\Gamma) \subset \mathcal{L}^2(\Gamma)$, ceea ce se demonstrează aplicînd teorema de inversiune funcţiei $g = f * \tilde{f}$ pentru $f \in (\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2)(G)$.

(II) Transformarea Fourier restrînsă la $(\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2)(G)$ este o izometrie.

(III) $\mathcal{F}(\Gamma)$ este dens în $\mathcal{L}^2(\Gamma)$; într-adevăr, fie $\psi \in \mathcal{L}^2(\Gamma)$ aşa ca $(\varphi, \psi) = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{F}(\Gamma)$; cu ajutorul teoremei de unicitate 2.9 se obţine $\varphi(\gamma)\,\overline{\psi(\gamma)} = 0$ a.p.t. pentru orice $\varphi \in \mathcal{F}(\Gamma)$; faptul că supp (ψ) este σ-compact, împreună cu un raţionament obişnuit de compacitate, ne dă $\psi = 0$ a.p.t. ceea ce demonstrează aserţiunea. Extinderea este apoi imediată.

4.3. OBSERVAŢIE. Transformarea $\mathcal{L}^2(G) \to \mathcal{L}^2(\Gamma)$ astfel construită va fi numită *transformarea Fourier-Plancherel*. Transformata Fourier-Plancherel a unei funcţii $f \in \mathcal{L}^2(G)$ va fi încă notată prin $f^\wedge \in \mathcal{L}^2(\Gamma)$. Avem următoarea diagramă comutativă :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^1(G) \arrow[rrr, "\text{transformarea Fourier}"] & & & \mathcal{A}(G) \\
(\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2)(G) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[rrr, "T_0", "\text{transformarea Fourier restrînsă}"'] & & & \mathcal{F}(\Gamma) \arrow[u] \arrow[d] \\
\mathcal{L}^2(G) \arrow[rrr, "T", "\text{transformarea Fourier-Plancherel}"'] & & & \mathcal{L}^2(\Gamma)
\end{tikzcd}$$

4.3 bis. PROPOZIŢIE. *Transformarea Fourier-Plancherel este o transformare unitară în sensul că are loc „identitatea lui Parseval"* :

$$\int_G f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_\Gamma f^\wedge(\gamma)\,\overline{g^\wedge(\gamma)}\,\mathrm{d}\gamma \,;\; f, g \in \mathcal{L}^2(G).$$

(Rudin, [44], 1.6.2).

4.4. LEMĂ. *Dacă* $f, g \in \mathcal{L}^2(G)$, *atunci* $fg \in \mathcal{L}^1(G)$ şi $(fg)^\wedge = f^\wedge * g^\wedge$.

4.5. TEOREMĂ (F. Riesz). $\mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{L}^2(\Gamma) * \mathcal{L}^2(\Gamma)$.

(Rudin, [44], 1.6.3).

4.6. LEMĂ. *Dacă* $E \subset \Gamma$ *este o mulţime deschisă nevidă, atunci există* $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(\Gamma)$, $F \neq 0$ *cu* supp $f \subset E$.

(Rudin, [44], 1.6.4).

4.7. În § 5 ne va fi necesară următoarea:

LEMĂ. *Fie G un grup topologic separat iar $H \subset G$ un subgrup local compact cu topologia indusă; atunci H este un subgrup închis în G.*

(Vezi de exemplu Bourbaki [6], ch. I, § 10, prop. 12; ch. III, § 2, prop. 2).

§ 5. TEOREMA LUI PONTRIAGHIN ŞI CONSECINŢELE SALE

5.1. TEOREMĂ (de dualitate a lui Pontriagin). *Dacă G este un* l.c.a.*-grup iar Γ este dualul său, atunci dualul $\Gamma^\wedge$ al lui Γ este canonic izomorf şi omeomorf cu G.*

Într-adevăr, pentru $x \in G$ fie $\alpha(x) \in \Gamma^\wedge$ definit prin relaţia $(\gamma, \alpha(x)) = (x, \gamma)$; $\gamma \in \Gamma$. Se defineşte astfel o aplicaţie $\alpha : G \to \Gamma^\wedge$ despre care se arată succesiv că:

(I) α este omomorfism (trivial).

(II) α este injectivă (conf. **3.8** (2) $\Leftarrow$ teorema de inversiune).

(III) α este omeomorfism între G cu topologia originală şi $\alpha(G)$ cu topologia indusă de topologia lui $\Gamma^\wedge$ (conf. **2.6** şi **3.8** (1) $\Leftarrow$ teorema de inversiune).

(IV) $\alpha(G)$ este închis în $\Gamma^\wedge$ (conf. (III) şi **4.7**).

(V) $\alpha(G)$ este dens în $\Gamma^\wedge$ (demonstraţia se face prin reducere la absurd cu ajutorul teoremei de unicitate **2.9** şi al consecinţei **4.6** a teoremei lui Plancherel).

(Rudin, [44], 1.7.2).

5.2. OBSERVAŢII. (1) Orice l.c.a.-grup este dualul unui l.c.a.-grup şi deci spectrul unei algebre Banach comutative.

(2) Prin urmare au sens notaţiile $\mathcal{A}(G)$ şi $\mathcal{B}(G)$ cu înţelesul de la **2.2** şi **2.7**; evident, $\mathcal{B}(G)$ este acelaşi cu cel definit la **3.5**.

(3) Vom subînţelege de acum înainte că G este dualul lui Γ iar caracterele pe Γ vor fi scrise sub forma (x, γ).

5.3. TEOREMĂ. (i) *G este discret $\Leftrightarrow$ Γ este compact.*

(ii) *G este compact $\Leftrightarrow$ Γ este discret.*

5.4. (**1**) TEOREMĂ. (de unicitate). *Dacă $\mu \in \mathcal{M}(G)$ şi $\mu^\wedge = 0$, atunci $\mu = 0$.*

(**2**) TEOREMĂ. *$\mathcal{M}(G)$ şi $\mathcal{L}^1(G)$ sînt algebre Banach semisimple.*

5.5. TEOREMĂ. *$\mathcal{L}^1(G)$ are unitate $\Leftrightarrow$ G este discret $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}^1(G) = \mathcal{M}(G)$.*

5.6. OBSERVAŢII. (1) Ultimele patru teoreme sînt consecinţe ale teoremei de dualitate şi ale unor teoreme anterioare; demonstraţiile lor (Rudin, [44], 1.7.3) sînt imediate.

(2) *Pe $\mathcal{A}(\Gamma)$ şi $\mathcal{B}(\Gamma)$ vom considera, pe lîngă normele uniforme şi normele*

$$\|f^\wedge\| = \|f\|_1 \text{ pentru } f^\wedge \in \mathcal{A}(\Gamma).$$

$$\|\mu^\wedge\| = \|\mu\| \text{ pentru } \mu^\wedge \in \mathcal{B}(\Gamma).$$

5.7. Propoziţia următoare face legătura între teorema de inversiune şi teorema de dualitate.

PROPOZIŢIE. *Dacă măsurile Haar pe G şi Γ sînt normate compatibile cu teorema de inversiune pentru cuplul (G, Γ), atunci această normare este compatibilă şi cu teorema de inversiune pentru cuplul (Γ, G).*

5.8. Teorema de inversiune se completează prin următoarea :

PROPOZIȚIE. *Dacă* $f \in \mathcal{L}^1(G)$ *și* $f^\wedge \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$, *atunci* $f \in \mathcal{A}(G)$ *iar pentru* f *este valabilă teorema de inversiune; în plus* $\|f\| = \|f^\wedge\|_1$, *norma* $\|f\|$ *fiind cea din* $\mathcal{A}(G)$ (conf. **5.6** (2)).

5.9. Ce se întîmplă dacă $\mu \in \mathcal{M}(G)$ și $\mu^\wedge \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$? Iată :

(**1**) TEOREMĂ. *Dacă* $\mu \in \mathcal{M}(G)$ și $\mu^\wedge \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$, *atunci există* $f \in \mathcal{L}^1(G)$ *așa ca* :

(i) $\mathrm{d}\mu(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) $f(x) = \int_\Gamma \mu^\wedge(\gamma)(x, \gamma)\,\mathrm{d}\gamma$; $x \in G$.

(**2**) COROLAR. *Dacă* $\mu \in \mathcal{M}(G)$ *și* $\mu^\wedge \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$, *atunci* μ *este absolut continuă (în particular,* μ *este absolut continuă dacă* $\mu^\wedge \in \mathcal{C}_{00}(\Gamma)$).

(**3**) COROLAR. *Dacă* G *este compact,* $f \in \mathcal{L}^1(G)$ și $f^\wedge$ *are suportul finit, atunci* f *este un polinom trigonometric; mai precis, dacă* $f^\wedge(\gamma) = c_k$ *pentru* $\gamma = \gamma_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ *și este nulă în rest, atunci* $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k (x, \gamma_k)$.

(Rudin, [44], 1.7.3).

5.10. Ce se întîmplă dacă $\mu \in \mathcal{M}(G)$ și $\mu^\wedge \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$? Răspunsul, datorat lui N. Wiener, este următorul:

TEOREMĂ. *Dacă* $\mu \in \mathcal{M}(G)$ *și* $\mu^\wedge \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$, *atunci* $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$.

(Rudin, [44], 5.6.9).

Este interesant să arătăm etapele demonstrației, mai ales că pe parcurs se obțin și alte rezultate importante prin ele însele:

(I) Fie $\{V_\alpha\}$ un sistem fundamental de vecinătăți ale originii în G. Pentru fiecare α există o funcție f_α cu proprietățile: (i) f_α continuă și pozitiv definită. (ii) $f_\alpha(0) = 1$ și $f_\alpha \geqslant 0$. (iii) $\operatorname{supp} f_\alpha \subset V_\alpha$. Pentru $\mu \in \mathcal{M}(G)$ se notează :

$$\mathcal{A}_\alpha(\mu) = \int_\Gamma f^\wedge(\gamma)\,|\mu^\wedge(\gamma)|^2\,\mathrm{d}\gamma.$$

Cum $\int_\Gamma f_\alpha^\wedge(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma = 1$ iar $f_\alpha \geqslant 0$, cantitatea $\mathcal{A}_\alpha(\mu)$ poate fi privită ca o *medie* a lui $|\mu^\wedge|^2$.

(II) Cel mult o mulțime numărabilă dintre numerele $\mu(\{x\})$, pentru $x \in G$, sînt nenule ($\mu \in \mathcal{M}(G)$ fixată).

(III) Pentru orice $\mu \in \mathcal{M}(G)$ are loc relația

$$\lim_\alpha \mathcal{A}_\alpha(\mu) = \sum_{x \in G} |\mu(\{x\})|^2.$$

(IV) Dacă $|\mu^\wedge| = 1$ a.p.t., atunci $\sum_{x \in G} |\mu(\{x\})|^2 = 1$.

(V) Dacă $\mu \in \mathcal{M}(G)$, atunci μ este o măsură continuă dacă și numai dacă $\lim_\alpha \mathcal{A}_\alpha(\mu) = 0$.

(VI) Teorema anunțată rezultă cu ușurință.

§ 6. INVERSAREA TRANSFORMĂRII PLANCHEREL

6.1. Ne referim la diagrama comutativă **4.3**; cum T_0 și T sînt izomorfisme izometrice, există inversele acestor transformări.

Vom nota $Tf = f^\wedge$ şi $T^{-1}\varphi = \varphi^\vee$ pentru $f \in \mathcal{L}^2(G)$ şi respectiv $\varphi \in \mathcal{L}^2(\Gamma)$; analog, pentru T_0 şi T_0^{-1}. Vom găsi o clasă de funcţii $\{\varphi\}$ pe Γ care să fie densă în $\mathcal{L}^2(\Gamma)$ şi astfel încît fiecare funcţie $\varphi^\vee$ să se deducă din φ prin teorema de inversiune.

6.2. Fie $u \in \mathcal{C}_{00}(G)$ şi $f = u * \widetilde{u} \in \mathcal{C}_{00}(G) \cap \mathcal{B}(G)$; atunci pentru f este valabilă formula de inversiune, deci pentru $\varphi = f^\wedge \in \mathcal{F}(\Gamma)$ avem

$$\varphi^\vee(x) = \int_\Gamma \varphi(\gamma)(x, \gamma)\,\mathrm{d}\gamma. \tag{1}$$

Fie apoi $u, v \in \mathcal{C}_{00}(G)$ şi $f = u * \widetilde{v} \in \mathcal{C}_{00}(G)$; rezultă uşor că $f \in \mathcal{C}_{00}(G) \cap \mathcal{B}(G)$ şi deci pentru $\varphi = f^\wedge$ are loc relaţia (1).

Fie $\mathcal{D}(G) = \{u * \widetilde{v};\ u, v \in \mathcal{C}_{00}(G)\} \subset \mathcal{C}_{00}(G) \cap \mathcal{B}(G)$.

LEMĂ. (i) *$\mathcal{D}(G)$ este dens atît în $\mathcal{L}^1(G)$ cît şi în $\mathcal{L}^2(G)$.*

(ii) *$[\mathcal{D}(G)]^\wedge$ este dens în $\mathcal{L}^2(\Gamma)$.*

(Ghelfand, Raikov, Silov, [20], § 25).

6.3. Din cele de mai sus rezultă cu uşurinţă următoarea:

TEOREMĂ. (i) *Dacă $f \in \mathcal{L}^2(G)$ există un şir $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(G)$ aşa ca $f_n \to f$ în $\mathcal{L}^2(G)$ şi*

$$f^\wedge = \lim_{n\to\infty} \int_G f_n(x)\,(-x, .)\,\mathrm{d}x; \textit{ limita în } \mathcal{L}^2(\Gamma)$$

(ii) Dacă $\varphi \in \mathcal{L}^2(\Gamma)$, există un şir $\{\varphi_n\} \subset [\mathcal{D}(G)]^\wedge$ aşa ca $\varphi_n \to \varphi$ în $\mathcal{L}^2(\Gamma)$ şi

$$\varphi^\vee = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma \varphi_n(\gamma)\,(., \gamma)\,\mathrm{d}\gamma; \text{ limita în } \mathcal{L}^2(G).$$

(Ghelfand, Raikov, Şilov, [20], § 25).

6.4. În cazul grupurilor abeliene compacte se obţine:

TEOREMĂ. *Dacă G este un grup abelian compact, atunci caracterele — privite ca funcţii pe G — formează o bază ortonormală în $\mathcal{L}^2(G)$. Dezvoltarea Fourier a unei funcţii din $\mathcal{L}^2(G)$ în raport cu această bază ortonormală coincide cu inversa transformării Plancherel aplicată transformatei Fourier a funcţiei considerate. În fapt are loc formula:*

$$f = \sum_\gamma f^\wedge(\gamma)(\,.\,, \gamma);\ f \in \mathcal{L}^2(G)$$

în sensul convergenţei în $\mathcal{L}^2(G)$.

Prima parte a teoremei rezultă din relaţiile de ortogonalitate **2.5** şi din teorema de unicitate **5.4** (1): $(f, \overline{\gamma}) = 0$ pentru orice $\gamma \in \Gamma \Rightarrow f^\wedge(\gamma) = 0$ pentru orice $\gamma \in \Gamma \Rightarrow f^\wedge = 0 \Rightarrow f = 0$ $(f \in \mathcal{L}^2(G) \subset \mathcal{L}^1(G))$. Pentru rest vezi Loomis [36], 38 C.

§ 7. COMPACTIFICAREA BOHR ŞI APLICAŢIILE SALE

7.1. DEFINIŢIE. Fie G un l.c.a.-grup şi Γ dualul său; fie Γ_d grupul Γ cu topologia discretă şi fie $\overline{G}$ dualul lui Γ_d; atunci $\overline{G}$ este un grup compact numit *compactificatul Bohr al* lui G.

Se defineşte o aplicaţie $\beta: G \to G$ prin relaţia:

$$(\gamma, \beta(x)) = (x, \gamma);\ x \in G,\ \gamma \in \Gamma. \tag{1}$$

7.2. TEOREMĂ. *β este un izomorfism continuu al lui G pe un subgrup dens $\beta(G)$ în $\bar{G}$.*

Demonstraţia (Rudin, [44], 1.8.2) este analoagă cu demonstraţia teoremei lui Pontriaghin; pentru afirmaţia relativă la densitate se foloseşte faptul că un grup netrivial are dualul netrivial, ceea ce este evident.

7.3. Prin dualizarea teoremei **7.2** se obţine următoarea teoremă de aproximare:

TEOREMĂ. *Fiind date $\varepsilon > 0$; $x_1, \ldots, x_n \in G$* şi *φ un caracter — nu neapărat continuu — pe G, există $\gamma \in \Gamma$ — caracter continuu pe G — aşa ca:*

$$|(x_i, \gamma) - (x_i, \varphi)| < \varepsilon; \; i = 1, \ldots, n.$$

(Rudin, [44], 1.8.2; Hewitt-Zuckermann, [29]).

7.4. DEFINIŢIE. O funcţie complexă f pe un l.c.a.-grup G se numeşte *aproape periodică* dacă este mărginită, continuă şi $\{f_x ; x \in G\}$ este relativ compactă în $\mathcal{C}(G)$. *O teoremă a lui Bochner reduce această definiţie la cea uzuală în cazul $G = R$* (Dunford and Schwarz, [15], ch. IV).

7.5. Teoremă. *Fie G un l.c.a.-grup. Funcţiile aproape periodice pe G sînt restricţiile la G ale funcţiilor continue pe compactificatul Bohr $\bar{G}$ al lui G.*

(Anzai and Kakutani, [3]; Loomis, [36], § 41).

7.6. TEOREMĂ (Bohr). *Fie G un l.c.a.-grup. Funcţiile aproape periodice pe G sînt acele funcţii pe G care se pot aproxima uniform prin polinoame trigonometrice pe G.*

Aceasta este o consecinţă aproape imediată a teoremei **7.5.** Ca model de demonstraţie se poate consulta Dunford and Schwarz, [15], IX, 2.4 şi Loomis, [36], § 41.

În privinţa funcţiilor aproape periodice pe un grup, recomandăm cititorului întreg paragraful 41 din [36], Dunford and Schwarz [15], IV, 7 şi IX.2, şi articolul lui von Neumann [41].

7.7. Compactificarea Bohr dă posibilitatea de a demonstra următoarea *teoremă prin care se caracterizează funcţiile din $\mathcal{B}(\Gamma)$* şi care constituie *un puternic instrument în analiza armonică.*

TEOREMĂ (Bochner-Eberlein). *Fie G un l.c.a.-grup,* Γ *dualul său iar φ o funcţie complexă definită pe* Γ; *următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

(i) $\varphi \in \mathcal{B}(\Gamma)$ *şi* $\|\varphi\| \leqslant A$; (vezi **5.6** (2)).

(ii) *φ este continuă şi pentru orice $f \in \mathcal{T}(G)$ de forma $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x, \gamma_i)$ are loc relaţia*:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i \, \varphi(\gamma_i)\right| \leqslant A \, \|f\|_\infty. \tag{1}$$

Demonstraţia părţii netriviale (Rudin, [44], 1.9.1) conţine următoarele etape:

(I) Dacă $\bar{G}$ este compactificatul Bohr al lui G, atunci formula: $f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} c_k (\bar{x}, \gamma_k)$ extinde orice polinom trigonometric pe G la un polinom trigonometric pe $\bar{G}$ cu aceeaşi normă.

(II) Se defineşte pe $\mathcal{T}(\overline{G})$ o funcţională liniară:

$$F(f)=\sum_{k=1}^{n} c_k\,\varphi(\gamma_k)$$

cu $\|F\|\leqslant A$ care se extinde la o funcţională liniară pe $\mathcal{C}(\overline{G})$, cu $\|F\|\leqslant A$, deci la o măsură $\mu\in\mathcal{M}(\overline{G})$ aşa ca:

$$\varphi(\gamma)=\int_{\overline{G}}(-\overline{x},\gamma)\,\mathrm{d}\mu(\overline{x}).$$

(III) Teorema Radon-Nikodym, teorema lui Bochner şi continuitatea lui φ concură la a arăta că măsura $\mu\in\mathcal{M}(\overline{G})$ astfel determinată este concentrată pe G şi $\mu\in\mathcal{M}(G)$, ceea ce demonstrează teorema.

7.8. Corolar. *Dacă* $\{\varphi_n\}\subset\mathcal{B}(\Gamma)$; $\|\varphi_n\|\leqslant A$, $\varphi(\gamma)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(\gamma)$ *şi* φ *este continuă, atunci* $\varphi\in\mathcal{B}(\Gamma)$ *şi* $\|\varphi\|\leqslant A$.

§ 8. TEOREME TAUBERIENE; TEORIE ELEMENTARĂ

Începem expunerea cu cîteva leme cu caracter tehnic (Rudin, [44], 2.6; Loomis, [36], § 37).

8.1. Lemă. *Dacă* $C\subset\Gamma$ *este compactă, iar* $V\subset\Gamma$ *este deschisă şi relativ compactă, atunci există* $k\in\mathcal{L}^1(G)$ *aşa ca*

(i) $0\leqslant k^\wedge(\gamma)\leqslant 1$ *pentru orice* $\gamma\in\Gamma$
(ii) $k^\wedge=1$ *pe* C *şi* $k^\wedge=0$ *în afara lui* $C+V-V$
(iii) $\|k\|_1\leqslant\{m(C-V)/m(V)\}^{1/2}$.

Într-adevăr, se iau g, $h\in\mathcal{L}^2(G)$ aşa ca $g^\wedge=\chi_V$; $h^\wedge=\chi_{C-V}$, şi se pune $k=gh/m(V)$.

Corolar. *Dacă* $C\subset W\subset\Gamma$, C*-compactă iar* W*-deschisă, atunci există* $f\in\mathcal{L}^1(G)$ *aşa ca* $0\leqslant f^\wedge(\gamma)\leqslant 1$, $(\gamma\in\Gamma)$, $f^\wedge=1$ *pe* C *şi* $f^\wedge=0$ *în afara lui* W.

8.2. Lemă *Dacă* $\varepsilon>0$, $\gamma_0\in\Gamma$, $W=$ *vecinătate a lui* γ_0, *iar* $f\in\mathcal{L}^1(G)$ *şi* $f^\wedge(\gamma_0)=0$, *atunci există* $k\in\mathcal{L}^1(G)$ *şi* $C\subset W$ *vecinătate compactă a lui* γ_0 *aşa ca*:

(i) $\|k\|_1<2$
(ii) $k^\wedge=1$ pe C *şi* $k^\wedge=0$ *în afara lui* W
(iii) $\|f*k\|_1<\varepsilon$.

8.3. Lemă. *Fie* $f\in\mathcal{L}^1(G)$, $\gamma_0\in\Gamma$, $\varepsilon>0$ *şi* $f^\wedge(\gamma_0)=0$. *Există o funcţie* $v\in\mathcal{L}^1(G)$ *şi* $C=$ *vecinătate compactă a lui* γ_0 *aşa ca*:

(i) $v^\wedge(\gamma)=0$ *pentru* $\gamma\in C$.
(ii) $\|v\|_1<3$.
(iii) $\|f-f*v\|_1<\varepsilon$.

8.4. Lemă. *Dacă* $f\in\mathcal{L}^1(G)$, $\gamma_0\in\Gamma$, $W=$ *vecinătate a lui* γ_0 *şi* $\varepsilon>0$, *atunci există* $h\in\mathcal{L}^1(G)$ *şi* $V\subset W$ *vecinătate a lui* γ_0 *aşa ca*

(i) $\|h\|_1<\varepsilon$.
(ii) $h^\wedge(\gamma)=0$ *pentru* $\gamma\notin W$.
(iii) $f^\wedge(\gamma)-h^\wedge(\gamma)=f^\wedge(\gamma_0)$ *pentru* $\gamma\in V$.

8.5. Lemă. *Fie* $f \in \mathcal{L}^1(G)$. *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $v \in \mathcal{L}^1(G)$ *așa ca* $v^\wedge$ *să aibă suport compact și* $\|f - f * v\|_1 < \varepsilon$.

Corolar. *Mulțimea* $\{f \in \mathcal{L}^1(G)\,;\ f^\wedge \in \mathcal{C}_{00}(\Gamma)\}$ *este densă în* $\mathcal{L}^1(G)$.

8.6. Pentru completarea lemei **8.1** este necesară următoarea:

Lemă. *Dacă* $C \subset \Gamma$ *compact și* $\varepsilon > 0$ *arbitrar, atunci există* $V \subset \Gamma$ *deschisă și relativ compactă așa încît*

$$m(C - V) < (1 + \varepsilon)\, m(V).$$

Se obţine astfel:

8.7. Teoremă. *Dacă* C *este o mulțime compactă din* Γ *și* $\varepsilon > 0$, *există* $k \in \mathcal{L}^1(G)$ *așa încît*

(i) $k^\wedge = 1$ *pe* C.
(ii) $k^\wedge \in \mathcal{C}_{00}(\Gamma)$.
(iii) $\|k\|_1 < 1 + \varepsilon$.

Corolar. *Dacă* G *este un grup abelian compact,* $\mathcal{C} \subset \Gamma$ *o mulțime finită iar* $\varepsilon > 0$, *atunci există* $k \in \mathcal{T}(G)$ *așa ca*

(i) $k^\wedge = 1$ *pe* C.
(ii) $\|k\|_1 < 1 + \varepsilon$.

8.8. Comentarii. Lema **8.1** exprimă o proprietate mai tare decît *regularitatea* algebrei $\mathcal{L}^1(G)$ (Loomis, [36], § 25); lema **8.3** exprimă o proprietate mai tare decît *condiția lui Dîtkin* (*loc. cit.*) pentru $\mathcal{L}^1(G)$, iar lema **8.5** nu este decît *o condiție tip Dîtkin la infinit*. Pentru teoria abstractă a teoremelor tauberiene trimitem la Loomis, [36]; 19 E, 20 E, 25 A—F. În cele ce urmează expunem această teorie în cadrul algebrei grupale $\mathcal{L}^1(G)$.

8.9. Baza legăturii între analiza armonică și teoria algebrelor Banach din punctul de vedere al teoremelor tauberiene este constituită de următoarea:

Teoremă. *Fiecare subspațiu închis invariant la translații din* $\mathcal{L}^1(G)$ *este un ideal închis; reciproc, fiecare ideal închis din* $\mathcal{L}^1(G)$ *este un subspațiu închis invariant la translații.*

Demonstrația (Rudin, [44], 7.1.2) se bazează pe teorema Hahn-Banach și pe următoarea:

Lemă. *Fie* $\mathcal{J}$ *un subspațiu invariant la translații din* $\mathcal{L}^1(G)$ *și* $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(G)$; *atunci* $\int_G f \varphi \, dm = 0$ *pentru orice* $f \in \mathcal{J}$ *dacă și numai dacă* $f * \varphi = 0$ *pentru orice* $f \in \mathcal{J}$.

8.10. Pentru $f \in \mathcal{L}^1(G)$ vom nota $H(f) = \{\gamma \in \Gamma\,;\ f^\wedge(\gamma) = 0\}$ iar pentru $\mathcal{J}$ ideal închis în $\mathcal{L}^1(G)$ vom nota $H(\mathcal{J}) = \bigcap_{f \in \mathcal{J}} H(f)$. și vom numi $H(\mathcal{J})$ *mulțimea nulă* a idealului $\mathcal{J}$.

Deoarece Γ este spectrul lui $\mathcal{L}^1(G)$, rezultă că $H(\mathcal{J})$ este tocmai *anvelopa* idealului $\mathcal{J}$. Pentru orice ideal închis $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}^1(G)$, $H(\mathcal{J})$ este o mulțime închisă din Γ; dacă E este o mulțime închisă din Γ iar $\mathcal{J} = \{f \in \mathcal{L}^1(G)\,;\ E \subset H(f)\}$, atunci $\mathcal{J}$ este un ideal închis din $\mathcal{L}^1(G)$ iar lema **8.1** asigură că $E = H(\mathcal{J})$, ceea ce exprimă chiar *regularitatea algebrei* $\mathcal{L}^1(G)$. Idealul $\mathcal{J}$ astfel construit va fi notat $\mathcal{K}(E)$; el este chiar *nucleul* mulțimii de ideale regulate maximale E.

Apare în mod natural:

8.11. Problema sintezei spectrale. *Pot exista două ideale închise distincte* $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subset \mathcal{L}^1(G)$ *așa ca* $H(\mathcal{J}_1) = H(\mathcal{J}_2)$?. *Altfel spus* $H(\mathcal{J})$ *determină pe* $\mathcal{J}$?

Vom reformula problema în alți termeni. O mulțime închisă $E \Subset \Gamma$ cu proprietatea că $E = H(\mathcal{J})$ pentru un singur ideal închis $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}^1(G)$ va fi numită *mulțime de sinteză spectrală*, sau pe scurt, *S-mulțime*. Problema este dacă orice mulțime închisă E din Γ este o S-mulțime.

Răspunsul este negativ, însă problema este deschisă în sensul că nu s-a dat pînă acum o caracterizare a S mulțimilor nici măcar pentru $G = R$.

O discuție mai cuprinzătoare a problemei va fi dată în capitolul III; am amintit aici această problemă deoarece cazuri particulare ale ei vor fi elucidate de teorema tauberiană a lui N. Wiener, către care se îndreaptă de acum înainte expunerea.

8.12. DEFINIȚIE. Fie $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}^1(G)$ un ideal închis; atunci mulțimea $\mathcal{J}^\wedge = \{f^\wedge \in \mathcal{A}(\Gamma); f \in \mathcal{J}\}$ este un ideal închis (**5.6.** (2)) în $\mathcal{A}(\Gamma)$. Se spune că o funcție φ pe Γ *aparține local idealului* $\mathcal{J}^\wedge$ *în punctul* $\gamma \in \Gamma$ dacă există o vecinătate V a lui γ și o funcție $f^\wedge \in \mathcal{J}^\wedge$ așa ca $\varphi = f^\wedge$ pe V. Se spune că φ *aparține local idealului* $\mathcal{J}^\wedge$ *în punctul* ∞ dacă există o mulțime compactă $C \subset \Gamma$ și o funcție $f^\wedge \in \mathcal{J}^\wedge$ așa ca $f^\wedge = \varphi$ pe C'.

8.13. În această secțiune prezentăm lemele necesare demonstrației teoremei tauberiene a lui N. Wiener.

(1) LEMĂ. *Fie* φ *o funcție pe* Γ *iar* $\mathcal{J}^\wedge \subset \mathcal{A}(\Gamma)$ *un ideal închis*; *dacă* φ *aparține local lui* $\mathcal{J}^\wedge$ *în fiecare punct din* $\Gamma \cup \{\infty\}$, *atunci* $\varphi \in \mathcal{J}^\wedge$.

(Rudin, [44], 6.2.6).

(2) LEMĂ. *Fie* $f \in \mathcal{L}^1(G)$ și $\gamma_0 \in \Gamma$. *Funcția* $f^\wedge$ *aparține local idealului* $\mathcal{J}^\wedge$ *în punctul* γ_0 *dacă una din condițiile următoare este satisfăcută*:

(i) $\gamma_0 \notin H(\mathcal{J})$

(ii) $\gamma_0 \in \operatorname{int} H(f)$.

Demonstrația acestei leme (Rudin, [44], 7.2.2) se bazează pe lema 8.4.

(3) LEMĂ. *Fie* $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}^1(G)$ *un ideal închis și* $f \in \mathcal{L}^1(G)$ *așa ca* $H(f) \supset H(\mathcal{J})$. *Atunci mulțimea*

$$Q = \{\gamma \in \Gamma;\ f^\wedge \text{ nu aparține local lui } \mathcal{J}^\wedge \text{ în } \gamma\}$$

este închisă și nu are puncte izolate.

Demonstrația (Rudin, [44], 7.2.3) folosește lema **8.8** (condiția lui Ditkin) și lema (1).

8.14. TEOREMĂ TAUBERIANĂ MAXIMALĂ. *Fie* $f \in \mathcal{L}^1(G)$, $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}^1(G)$ *un ideal închis și* $H(\mathcal{J}) \subset H(f)$. *Dacă intersecția frontierelor lui* $H(\mathcal{J})$ *și* $H(f)$ *nu conține nici o mulțime perfectă nevidă, atunci* $f \in \mathcal{J}$.

Demonstrația (Rudin, [44], 7.2.4) este acum imediată; conf. **8.5** există un șir $f_n \in \mathcal{L}^1(G)$, $f_n^\wedge \in \mathcal{C}_{00}(\Gamma)$ așa ca $\|f - f_n\|_1 \to 0$; avem $H(\mathcal{J}) \cap \cap\, \partial H(f_n) \subset \partial H(\mathcal{J}) \cap \partial H(f)$. Din ipoteză, lema **8.13** (2) și lema **8.13** (3) deducem că $f_n^\wedge$ aparține local idealului $\mathcal{J}^\wedge$ în orice punct din $\Gamma \cup \{\infty\}$, deci, conf. lemei **8.13** (1), $f_n^\wedge \in \mathcal{J}^\wedge$. Cum idealul $\mathcal{J}^\wedge$ este închis, $f \in \mathcal{J}$, q.e.d.

8.15. Ca o primă aplicație dăm *cîteva formulări echivalente ale problemei sintezei spectrale.* Mai întîi:

PROPOZIȚIE. *Dacă* $H(\mathcal{J}) \subset \operatorname{int} H(f)$, *atunci* $f \in \mathcal{J}$ (*evident*, conf. **8.14**).

Fie acum E o mulțime închisă din Γ și $\mathcal{K}_0(E) = \overline{\{f \in \mathcal{L}^1(G);}$ $\overline{E \subset \operatorname{int} H(f)\}}$; $\mathcal{K}_0(E)$ este cel mai mic ideal închis $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}^1(G)$ cu proprietatea că $H(\mathcal{J}) = E$ (conf. propoziției de mai sus). Pe de altă parte, există și un cel mai mare ideal cu această proprietate și anume $\mathcal{K}(E)$. Prin urmare E este o S-mulțime dacă și numai dacă $\mathcal{K}_0(E) = \mathcal{K}(E)$ așa încît problema sintezei spectrale poate fi reformulată în următoarele două moduri :

(i) *Dacă* $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(G)$ *și* $f * \varphi = 0$ *pentru orice* $f \in \mathcal{K}_0(E)$, *atunci rezultă cu necesitate că* $f * \varphi = 0$ *pentru orice* $f \in \mathcal{K}(E)$? ($E \subset \Gamma$, mulțime închisă).

(ii) *Dacă* $f \in \mathcal{L}^1(G)$ *și* $f^\wedge = 0$ *pe* E, *poate fi atunci aproximată* f *în norma lui* $\mathcal{L}^1(G)$, *prin funcții* $g \in \mathcal{L}^1(G)$ *a căror transformată Fourier se anulează pe o vecinătate a lui* E? ($E \subset \Gamma$, *mulțime închisă*).

O mulțime $E \subset \Gamma$ *este o mulțime de sinteză spectrală dacă și numai dacă are proprietatea* (i) *sau* (ii). *Deci orice mulțime* $E \subset \Gamma$ *simultan deschisă și închisă este o* S*-mulțime*; în particular *orice subgrup deschis din* Γ *este o* S*-mulțime*; alt caz particular este că *într-un grup discret orice mulțime este o* S*-mulțime*, deci dacă G este compact problema sintezei spectrale este rezolvată.

8.15 bis. Altă consecință imediată a teoremei 8.14 este următoarea :

(1) PROPOZIȚIE. *Fie* $E \subset \Gamma$ *o mulțime închisă*; *dacă* ∂E *nu conține nici o mulțime perfectă nevidă, atunci* E *este o* S*-mulțime. În particular mulțimea vidă este o* S*-mulțime.*

Faptul că mulțimea vidă este o S-mulțime, înseamnă că dacă $\mathcal{J}$ este un ideal închis în $\mathcal{L}^1(G)$ și $H(\mathcal{J}) = \emptyset$, atunci $\mathcal{J} = \mathcal{L}^1(G)$ și deci orice ideal închis propriu din $\mathcal{L}^1(G)$ este conținut într-un ideal maximal regulat din $\mathcal{L}^1(G)$ (această aserțiune este trivială pentru grupuri discrete).

Din cele de mai sus rezultă cu ușurință următoarea :

(2) PROPOZIȚIE. *Fie* $f \in \mathcal{L}^1(G)$. *Mulțimea* $\mathcal{A}(f) = \{f_x;\ x \in G\}$ *este o mulțime totală în* $\mathcal{L}^1(G)$ (*adică* $\overline{\mathrm{sp}}\,\mathcal{A}(f) = \mathcal{L}^1(G)$) *dacă și numai dacă* $f^\wedge(\gamma) \neq 0$ *pentru orice* $\gamma \in \Gamma$ (rezultă imediat din **8.9** și (1)).

(Loomis, [36], § 37; Rudin, [44], 7.2.5 (d)).

Observație. În cazul lui $\mathcal{L}^2(G)$ în loc de $\mathcal{L}^1(G)$ condiția este ca $f^\wedge(\gamma) \neq 0$ a.p.t. (Rudin, [44], 7.2.9).

8.16. TEOREMA TAUBERIANĂ A LUI WIENER. *Fie* G *un l.c.a.-grup necompact, fie* $k \in \mathcal{L}^1(G)$ *așa ca* $k^\wedge(\gamma) \neq 0$ *pentru orice* $\gamma \in \Gamma$ *și fie* $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(G)$ *așa ca* $(k * \varphi)(x) \to a k^\wedge(0)$ *pentru* $x \to \infty$.

Atunci pentru orice $f \in \mathcal{L}^1(G)$, $(f * \varphi)(x) \to a f^\wedge(0)$ *pentru* $x \to \infty$.

Demonstrația (Rudin, [44], 7.2.6, Loomis [36], § 37) rezultă imediat din **8.9** și **8.15** (1).

8.17. O funcție $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(G)$ se numește *funcție cu oscilație întîrziată* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime compactă $K \subset G$ și o vecinătate compactă V a originii în G așa ca pentru $x - y \in V$ și $x \notin K$ să avem $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$. De exemplu, *funcțiile mărginite și uniform continue sînt cu oscilație întîrziată.*

TEOREMĂ (Pitt). *Fie* G *un l.c.a.-grup necompact,* $f \in \mathcal{L}^1(G)$ *cu* $f^\wedge(\gamma) \neq 0$ *pentru orice* $\gamma \in \Gamma$ *și* $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(G)$ *o funcție cu oscilație întîrziată. Dacă* $(f * \varphi)(x) \to a f^\wedge(0)$ *pentru* $x \to \infty$, *atunci* $\varphi(x) \to a$ *pentru* $x \to \infty$.

(Rudin, [44], 7.2.7).

Pentru alte teoreme tauberiene se pot consulta : Godement, [21], Wiener [51]; alte referințe se găsesc în Loomis, [36], § 43.

§ 9. TEORIA DUALITĂȚII

9.1. DEFINIȚIE. Fie G un l.c.a.-grup și Γ dualul său, iar $M \subset G$ o mulțime oarecare; definim *anulatorul* mulțimii M prin relația:

$$A(\Gamma, M) = \{\gamma \in \Gamma;\ (x, \gamma) = 1 \text{ pentru orice } x \in M\}. \tag{1}$$

Dacă $H \subset G$ este un subgrup închis din G vom nota:

$$\Lambda = A(\Gamma, H). \tag{2}$$

Pentru $M \subset G$ vom nota prin $H(M)$ subgrupul închis generat de M.

9.2. LEMĂ. (i) *Dualul Γ al unui l.c.a.-grup G netrivial este netrivial.*

(ii) *Dacă $H \subset G$ este un subgrup propriu închis și $x \notin H$, atunci există $\gamma \in A(\Gamma, H)$ așa ca $(x, \gamma) \neq 1$.*

Partea (i) este evidentă, iar partea (ii) rezultă din **3.8** (2) aplicat lui G/H.

9.3. PROPOZIȚIE. *Fie $M \subset G$. Atunci:*

(i) *$A(\Gamma, M)$ este un subgrup închis din Γ.*

(ii) $A(\Gamma, M) = A(\Gamma, H(M))$.

(iii) $A(G, A(\Gamma, M)) = H(M)$.

COROLAR. *Fie $H \subset G$, $\Lambda \subset \Gamma$ subgrupuri închise. Atunci:*

(iv) $\Lambda = A(\Gamma, H) \Leftrightarrow H = A(G, \Lambda)$.

(v) $A(\Gamma, H) = \Gamma \Leftrightarrow H = \{0\}$.

(vi) $A(\Gamma, H) = \{0\} \Leftrightarrow H = G$.

Demonstrațiile sînt imediate; punctul (iii) rezultă cu ajutorul lemei **9.2** (ii). (Hewitt and Roos, [27], 23.24; Rudin, [44], 2.1.3).

Observații. (1) $M_1 \subset M_2 \subset G \Rightarrow A(\Gamma, M_1) \supset A(\Gamma, M_2)$.

(2) $M_1, \ldots, M_n \subset G \Rightarrow A\left(\Gamma, \bigcup\limits_{k=1}^{n} M_k\right) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A(\Gamma, M_k)$.

9.4. TEOREMĂ. *Fie G un l.c.a.-grup, Γ dualul său, $H \subset G$ un subgrup închis iar $\Lambda = A(\Gamma, H)$, atunci au loc următoarele identificări (izomorfisme și omeomorfisme) canonice:*

(i) $(G/H)^\wedge \equiv \Lambda$

(ii) $H^\wedge \equiv \Gamma/\Lambda$.

Pentru (i) fie $h : G \to G/H$ morfismul canonic; definim o aplicație $\tau : \Lambda \to (G/H)^\wedge$ prin relația:

$$(h(x), \tau(\lambda)) = (x, \lambda);\ x \in G,\ \lambda \in \Lambda. \tag{1}$$

Se arată succesiv că τ este corect și coerent definit, că este izomorfism algebric și omeomorfism (conf. **2.6** și **3.8** (1); se ține seamă că dacă $K_2 \subset G/H$ este o mulțime compactă, atunci există $K_1 \subset G$, mulțime compactă așa ca $h(K_1) = K_2$.

Partea (ii) se obține din (i) prin dualizare; identificarea explicită va fi dată mai tîrziu.

(Hewitt and Roos, [27], 23.35; Rudin, [44], 2.1.2).

9.5. COROLAR. *Cu notațiile stabilite:*

(i) *H este deschis $\Leftrightarrow$ Λ este compact*

(ii) *H este compact $\Leftrightarrow$ Λ este deschis.*

Într-adevăr, H deschis $\Leftrightarrow G/H$ discret $\Leftrightarrow (G/H)^\wedge \equiv \Lambda$ compact.

9.6. DEFINIŢIE. Fie G_1, G_2 l.c.a.-grupuri, Γ_1, Γ_2 dualele lor şi $\varphi : G_1 \to G_2$ un omomorfism continuu. Se defineşte o aplicaţie $\varphi^{\sim} : \Gamma_2 \to \Gamma_1$ prin relaţia :

$$(x_1, \varphi^{\sim}(\gamma_2)) = (\varphi(x_1), \gamma_2)\,; \quad x_1 \in G_1, \ \gamma_2 \in \Gamma_2.$$

Avînd în vedere cele ce urmează, $\varphi^{\sim}$ va fi numit *morfismul dual* morfismului φ.

9.7. LEMĂ. (i) *$\varphi^{\sim}$ este un omomorfism continuu iar $\varphi^{\sim\sim} = \varphi$.*

(ii) $\operatorname{Ker} \varphi^{\sim} = A(\Gamma_2, \varphi(G_1))$; $\operatorname{Ker} \varphi = A(G_1, \varphi^{\sim}(\Gamma_2))$.

(iii) $\overline{\varphi(G_1)} = A(G_2, \operatorname{Ker} \varphi^{\sim})$; $\overline{\varphi^{\sim}(\Gamma_2)} = A(\Gamma_1, \operatorname{Ker} \varphi)$.

Demonstraţiile (Hewitt and Roos, [27], 24.38) sînt imediate.

COROLAR. *Prin urmare :*

(iv) $\varphi^{\sim}$ *este injectivă* $\Leftrightarrow \overline{\varphi(G_1)} = G_2$.

(v) φ *este injectivă* $\Leftrightarrow \overline{\varphi^{\sim}(\Gamma_2)} = \Gamma_1$.

9.8. LEMĂ. *φ este izomorfism şi omeomorfism $\Leftrightarrow$ $\varphi^{\sim}$ este izomorfism şi omeomorfism ; în plus $(\varphi^{-1})^{\sim} = (\varphi^{\sim})^{-1}$.*

Demonstraţia ($\Rightarrow$) este imediată ; ştim deja că $\varphi^{\sim}$ este injectiv ; surjectivitatea este imediată, iar pentru stabilirea continuităţii lui $(\varphi^{\sim})^{-1}$ se demonstrează mai întîi egalitatea din enunţ.

9.9. OBSERVAŢIE. Aşadar, dacă φ realizează identificarea $G_1 \equiv G_2$, atunci $\varphi^{\sim}$ realizează identificarea $\Gamma_2 \equiv \Gamma_1$ şi avem

$$(x_1, \varphi^{\sim}(\gamma_2)) = (\varphi(x_1), \gamma_2)\,; \quad x_1 \in G_1, \ \gamma_2 \in \Gamma_2, \text{ sau} \tag{1}$$

$$(x_1, \gamma_1) = (\varphi(x_1), (\varphi^{\sim})^{-1}(\gamma_1))\,; \quad x_1 \in G_1, \ \gamma_1 \in \Gamma_1. \tag{2}$$

Dacă notăm $\alpha = \varphi$, $\beta = (\varphi^{\sim})^{-1}$, atunci $\alpha : G_1 \to G_2$, $\beta : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ şi

$$(x_1, \gamma_1) = (\alpha(x_1), \beta(\gamma_1))\,; \quad x_1 \in G_1, \ \gamma_1 \in \Gamma_1. \tag{3}$$

La **9.4** am stabilit că $H^{\wedge} \equiv (\Gamma/\Lambda)$ dar nu am explicitat identificarea. Este ceea ce vom face acum. Am stabilit identificarea canonică $\Lambda \equiv (G/H)^{\wedge}$ realizată prin aplicaţia τ. Dualizînd (adică H în loc de Λ şi Γ în loc de G) obţinem identificarea canonică $H = (\Gamma/\Lambda)$ realizată prin aplicaţia $\alpha : H \to (\Gamma/\Lambda)^{\wedge}$ definită prin :

$$(\rho(\gamma), \alpha(y)) = (y, \gamma)\,; \quad y \in H, \ \gamma \in \Gamma, \tag{4}$$

unde $\rho : \Gamma \to \Gamma/\Lambda$ este morfismul canonic. Atunci, conf. (3), obţinem identificarea $\beta : H^{\wedge} \to \Gamma/\Lambda$ aşa ca :

$$(\alpha(y), \beta(\varphi)) = (y, \varphi), \quad y \in H, \ \varphi \in H^{\wedge}. \tag{5}$$

Ca aplicaţie considerăm următoarea :

9.10. TEOREMĂ. *Fie G un l.c.a.-grup iar H un subgrup închis al lui G ; atunci fiecare caracter continuu pe H poate fi extins la un caracter continuu pe G.*

Într-adevăr, fie $\varphi \in H^{\wedge}$, $\Lambda = A(\Gamma, H)$; atunci $\beta(\varphi) \in \Gamma/\Lambda$ şi există $\gamma \in \Gamma$ aşa ca $\rho(\gamma) = \beta(\varphi)$; pentru $y \in H$ avem :

$$(y, \varphi) = (\alpha(y), \beta(\varphi)) = (\beta(\varphi), \alpha(y)) = (\rho(\gamma), \alpha(y)) = (y, \gamma)$$

deci γ este extensia dorită a lui φ.

Observații. (1) Evident, restricția la H a fiecărui caracter $\gamma \in \Gamma$ este un caracter pe H; propoziția de mai sus ne arată că orice caracter pe H se obține în acest mod. Două caractere $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ „determină'' același caracter pe $H \Leftrightarrow \gamma_1 - \gamma_2 \in \Lambda$. *Iată deci ce înseamnă identificarea* $H^\wedge \equiv \Gamma/\Lambda$ (2). Teorema de mai sus se poate completa prin următorul enunț: „*Dacă* $\varphi \in H^\wedge$ *și* $a \in G \cap H'$, *atunci există* $\gamma \in \Gamma$ *care extinde pe* φ *și* $(a, \gamma) \neq 1$'' (conf. Hewitt and Roos, [27], 24.12).

9.11. Fie L.C.A. categoria tuturor grupurilor abeliene local compacte, *AB* categoria tuturor grupurilor abeliene iar AB.C. categoria tuturor grupurilor abeliene compacte. Din teoria dezvoltată pînă acum rezultă:

(1) TEOREMĂ. *Categoria* L.C.A. *este autoduală.*

(2) TEOREMĂ. *Categoria duală categoriei* AB *este categoria* AB.C.

Într-adevăr, functorul care asociază fiecărui grup — dualul său -- și fiecărui morfism — morfismul dual — este o echivalență.

9.12. PROPOZIȚIE. (Braconnier) *Dacă* $\varphi : G_1 \to G_2$ *este un omomorfism continuu și deschis, atunci* $\varphi^\sim : \Gamma_2 \to \Gamma_1$ *este un omomorfism continuu și deschis al lui* Γ_2 *pe* $A(\Gamma_1, \operatorname{Ker} \varphi)$ *cu topologia relativă* (Hewitt and Roos, [27], 25.40).

9.13. TEOREMĂ. *Dacă* $G = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{k=1}^{n} G_k$ *iar* Γ *și* Γ_k *sînt dualele l.c.a. grupurilor* G *și* $G_k (k = 1, \ldots, m)$, *atunci are loc identificarea canonică* $\Gamma \equiv \mathop{\mathsf{X}}\limits_{k=1}^{n} \Gamma_k$.

Într-adevăr, aplicația $\sigma : \mathop{\mathsf{X}}\limits_{k=1}^{n} \Gamma_k \to \Gamma$ definită prin

$$((x_1, \ldots, x_n), \sigma(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)) = (x_1, \gamma_1) \ldots (x_n, \gamma_n);\ x_k \in G_k,\ \gamma_k \in \Gamma_k$$

este izomorfism și omeomorfism (Hewitt and Roos, [27], 23.18).

COROLAR. $(R^n)^\wedge = R^n$; $(T^n)^\wedge = Z^n$; $(Z^n)^\wedge = T^n$.

9.14. LEMĂ. *Dacă* $\Lambda \subset \Gamma$ *este un subgrup care separă punctele lui* G, *atunci* $\overline{\Lambda} = \Gamma$ (într-adevăr, atunci $A(G, \Lambda) = \{0\}$).

COROLAR. *Dacă* G *este un grup abelian compact iar* $\Lambda \subset \Gamma$ *este un subgrup care separă punctele lui* G, *atunci* $\Lambda = \Gamma$ (vezi și Hewitt and Roos, [27], 23.20).

9.15. TEOREMĂ. *Fie* $\{G_\alpha\}_\alpha$ *o familie de grupuri abeliene compacte, fie* $\{\Gamma_\alpha\}_\alpha$ *familia dualelor, fie* $G = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{\alpha} G_\alpha$ *cu topologia produs și fie* $\Gamma^* = \bigoplus\limits_{\alpha} \Gamma_\alpha$ *cu topologia discretă. Atunci are loc identificarea canonică* $G^\wedge \equiv \Gamma$.

Se definește o aplicație $\rho : \Gamma^* \to G^\wedge$ prin

$$((\{x_\alpha\}_\alpha), \rho(\{\gamma_\alpha\}_\alpha)) = \prod_{\alpha} (x_\alpha, \gamma_\alpha);\ \{x_\alpha\}_\alpha \in G,\ \{\gamma_\alpha\}_\alpha \in \Gamma^*$$

și se verifică ușor că definiția este corectă, ρ este omomorfism ρ este injecție și $\rho(\Gamma^*)$ separă punctele lui G, ceea ce, conf. **9.14**, demonstrează teorema (Hewitt and Roos, [27], 23.21, Rudin, [44], 2.2.3).

9.16. TEOREMĂ. *Fie* $\{G_\alpha\}_\alpha$ *o familie de grupuri abeliene discrete, fie* $\{\Gamma_\alpha\}_\alpha$ *familia dualelor, fie* $G^* = \bigoplus\limits_{\alpha} G_\alpha$ *cu topologia discretă și fie* $\Gamma = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{\alpha} \Gamma_\alpha$ *cu topologia produs. Are loc identificarea canonică* $(G^*)^\wedge = \Gamma$.

(Hewitt and Roos, [27], 23.22).

9.17. OBSERVAŢIE. Cu ajutorul lemei **9.14** se demonstrează uşor că dacă Z_q este grupul $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ cu adunarea „modulo q", atunci $(Z_q)^{\wedge} = Z_q$. Deci *dacă G este un grup finit, atunci $G^{\wedge} = G$.* (conf. Hewitt and Roos, [27], 23.27). În multe capitole de analiză armonică un rol important este jucat de grupul D_q = *produsul direct al* unei mulţimi numărabile de copii ale lui Z_q; dualul lui D_q este suma directă corespunzătoare.

9.18. Vom nota prin T^{ω} = produsul direct al unei mulţimi numărabile de copii ale lui T; dualul lui este suma directă Z^{∞}. În sensul propoziţiei care urmează, T^{ω} este grupul abelian compact metrizabil „universal".

(1) TEOREMĂ. *Fie G un grup abelian compact. Sînt echivalente:*

(i) *G este metrizabil.*

(ii) *Γ este numărabil.*

(iii) *G este subgrup închis în T^{ω}.*

(Rudin, [44], 2.2.6).

Mai general, fie X un spaţiu topologic şi fie $p(X)$ *ponderea* lui X = cel mai mic cardinal al unei baze deschise din X. Dacă X este compact, atunci X este metrizabil $\Leftrightarrow p(X) = \aleph_0$; dacă X este discret, atunci $p(X) = \mathrm{Card}(X)$.

(2) TEOREMĂ. *Fie G un l.c.a.-grup şi Γ dualul său. Atunci $p(G) = p(\Gamma)$; dacă G este compact, $p(G) = \mathrm{Card}(\Gamma) = \dim \mathcal{L}^2(G)$* (Hewitt and Roos, [27], 24.14, 24.15).

9.19. Un element $a \in \Gamma$ se zice *element compact* dacă subgrupul închis generat de a este compact. Vom nota prin B mulţimea elementelor compacte din Γ, prin F mulţimea elementelor de *ordin finit* din Γ iar prin C *componenta conexă* a originii în l.c.a.-grupul G ($G^{\wedge} = \Gamma$).

(1) TEOREMĂ. *Pentru orice l.c.a.-grup G:*

(i) $B = A(\Gamma, C)$; $C = A(G, B)$.

(ii) *B este subgrup închis în Γ.*

Punctul (ii) rezultă evident din (i). Demonstraţia punctului (i) conţine următoarele etape (Hewitt and Roos, [27], 24.17).

(I) Dacă Γ conţine un subgrup compact netrivial Λ, atunci G nu este conex, căci conţine subgrupul propriu deschis $H = A(G, \Lambda)$.

(II) Dacă G este total discontinuu, atunci vecinătatea $V = \{x \in G;\ |1 - (x, \gamma)| < 1\}$ conţine un subgrup compact şi deschis $H \subset G$ (conf. **11.7**) şi deci $\gamma \in \Lambda = A(\Gamma, H)$; prin urmare $B = \Gamma$.

(III) *Cazul general*; deoarece G/C este total discontinuu, rezultă că $(G/C)^{\wedge} = A(\Gamma, C) \subset B$; deoarece C este conex, rezultă că incluziunea nu poate fi strictă.

(2) COROLAR. *Dacă G este un grup abelian compact, atunci:*

(i) $F = A(\Gamma, C) = (G/C)^{\wedge}$

(ii) $C = A(G, F)$.

9.20. Fie G un l.c.a.-grup şi fie $f_n : G \to G$ definit prin $f_n(x) = nx$; se verifică uşor că $f_n^{\sim} : \Gamma \to \Gamma$ este definit prin $f_n^{\sim}(\gamma) = n\gamma$. Să notăm $G^{(n)} = f_n(G)$, $G_{(n)} = \mathrm{Ker}\, f_n$; $\Gamma^{(n)} = f_n^{\sim}(\Gamma)$; $\Gamma_{(n)} = \mathrm{Ker}\, f_n^{\sim}$.

LEMĂ. *Pentru orice l.c.a.-grup G avem*

(i) $A(\Gamma, G^{(n)}) = \Gamma_{(n)}$; $A(G, \Gamma^{(n)}) = G_{(n)}$

(ii) $A(\Gamma, G_{(n)}) = \overline{\Gamma^{(n)}}$; $A(G, \Gamma_{(n)}) = \overline{G^{(n)}}$

(Hewitt and Roos, [27], 24.22).

Precizăm că un grup G este *divizibil* dacă şi numai dacă $G = G^{(n)}$ pentru orice $n \in N$.

9.21. TEOREMĂ. *Dacă G este un grup abelian compact, următoarele proprietăţi sînt echivalente*:

(i) *G este conex.*
(ii) *Γ este fără torsiune.*
(iii) *G este divizibil.*

Teorema rezultă din **9.19** şi **9.20**, ţinînd seama că Γ este un grup fără torsiune dacă şi numai dacă $\Gamma_{(n)} = \{0\}$ pentru orice $n \in N$ (Hewitt and Roos, [27], 24.25).

9.22. TEOREMĂ. *Dacă G este un grup abelian compact, următoarele proprietăţi sînt echivalente:*

(i) *G este total discontinuu ($=$ 0-dimensional).*
(ii) *Γ este un grup cu torsiune.*
(iii) *$\gamma(G)$ este un subgrup finit al lui T pentru orice $\gamma \in \Gamma$.*

Teorema rezultă din **9.19** şi **9.20**, ţinînd seama că Γ este un grup cu torsiune dacă şi numai dacă $F = \Gamma$. (Hewitt and Roos, [27], 24.26; vezi şi 24.24 op. cit.).

9.23. TEOREMĂ. *Dacă G este un grup abelian compact iar Γ conţine un element de ordin infinit, atunci G conţine un subgrup cu un parametru* (vezi **11.2**).

(Rudin, [44], 2.5.6).

9.24. **Grupuri divizibile**. Reamintim următoarele proprietăţi ale grupurilor divizibile şi cîteva consecinţe folositoare (Rudin, [44], § 2.5; Kaplansky, [33 bis]).

(1) PROPOZIŢIE. *Dacă G este un grup abelian şi $H \subset G$ un subgrup, atunci orice omomorfism al lui H într-un grup divizibil D se extinde la un omomorfism al lui G în D.*

(2) PROPOZIŢIE. *Orice grup abelian G poate fi scufundat într-un grup divizibil D; dacă G este numărabil, atunci D poate fi ales numărabil.*

(3) COROLAR. *Orice grup abelian infinit G poate fi aplicat omomorf pe un grup infinit numărabil.*

9.25. TEOREMĂ. *Orice grup abelian compact infinit G conţine un subgrup compact metrizabil infinit H.*

Avînd în vedere **9.18**, teorema rezultă prin dualizarea rezultatului de la **9.24** (3).

(Rudin, [44], 2.5.2).

9.26. *Un grup abelian G se zice de ordin mărginit* dacă există $n \in N$ aşa ca $G^{(n)} = \{0\}$. Evident, *G este de ordin mărginit dacă şi numai dacă Γ este de ordin mărginit* ($G =$ l.c.a.-grup).

TEOREMĂ. *Dacă G este un grup abelian compact care nu este de ordin mărginit, atunci G conţine o mulţime densă de elemente de ordin infinit.*

Demonstraţia (Rudin, [44], 2.5.3) se bazează pe teorema lui Baire ([27], 5.28) şi pe faptul că mulţimile compacte $G_{(n)}$ au interiorul vid.

9.27. (1) DEFINIŢIE. Un l.c.a.-grup G se numeşte *I-grup* dacă orice vecinătate a originii din G conţine un element de ordin infinit.

(2) TEOREMĂ. (i) *Orice I-grup conține un subgrup închis care este un I-grup metrizabil.*

(ii) *Dacă G nu este discret și nu este I-grup, atunci G conține pe D_q* (**9.17**) *ca subgrup închis, pentru un anume $q > 1$.*

(Rudin, [44], 2.5.5).

§ 10. TRANSFORMAREA FOURIER PE SUBGRUPURI ȘI GRUPURI CÎT

În tot acest paragraf G va fi un l.c.a.-grup, Γ dualul său, H un subgrup închis în G iar $\Lambda = A(\Gamma, H)$.

10.1. TEOREMĂ. *$\mu \in \mathcal{M}(G)$ este concentrată pe $H \Leftrightarrow \mu^\wedge$ este constantă pe clasele lui Λ.*

(Rudin, [44], 2.7.1).

10.2. TEOREMĂ. *Funcțiile aparținînd lui $\mathcal{B}(\Lambda)$ sînt exact restricțiile la Λ ale funcțiilor aparținînd lui $\mathcal{B}(\Gamma)$.*

Pentru demonstrație precizăm că $\Lambda = (G/H)^\wedge$ și că în acest sens notăm $\mathcal{B}(\Lambda)$. Se demonstrează ușor că dacă $\sigma = \pi\mu$ (vezi **1.8**), atunci $\sigma^\wedge(\lambda) = \mu^\wedge(\lambda)$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$. Teorema rezultă atunci imediat din teorema **1.8**.

(Rudin, [44], 2.7.2).

10.3. TEOREMĂ. *Funcțiile aparținînd lui $\mathcal{A}(\Lambda)$ sînt exact restricțiile la Λ ale funcțiilor aparținînd lui $\mathcal{A}(\Gamma)$.*

Deoarece (**1.9** — observația (3)) restricția lui π la $\mathcal{L}^1(G)$ coincide cu operatorul T, teorema rezultă imediat din teorema **1.9**. (Rudin, [44], 2.7.4).

10.4. TEOREMĂ. *Fie $f \in \mathcal{L}^1(G)$; atunci $f^\wedge(\lambda) = 0$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$ dacă și numai dacă există o mulțime $N \subset G/H$ așa ca $m_{G/H}(N) = 0$ și pentru orice $x \notin h^{-1}(N)$ să avem:*

$$\int_H f(x+y)\,\mathrm{d}m_H(y) = 0. \tag{1}$$

Evident, conf. teoremei **1.9**, $h : G \to G/H$ este morfismul canonic. (Rudin, [44], 2.7.4).

10.5 Să notăm prin $\rho : \Gamma \to \Gamma/\Lambda$ morfismul canonic.

TEOREMĂ. (i) *Dacă $\varphi \in \mathcal{B}(\Gamma/\Lambda)$ și definim:*

$$\Phi(\gamma) = \varphi(\rho(\gamma)); \ \gamma \in \Gamma, \tag{1}$$

atunci $\Phi \in \mathcal{B}(\Gamma)$, Φ este constantă pe clasele lui Λ și $\|\Phi\| = \|\varphi\|$

(ii) *Dacă $\Phi \in \mathcal{B}(\Gamma)$ și Φ este constantă pe clasele lui Λ și definim:*

$$\varphi(\rho(\gamma)) = \Phi(\gamma); \ \rho(\gamma) \in \Gamma/\Lambda, \tag{2}$$

atunci $\varphi \in \mathcal{B}(\Gamma/\Lambda)$ și $\|\varphi\| = \|\Phi\|$.

Demonstrație (Ș. Strătilă): (i) Fie $\mu_0 \in \mathcal{M}(H)$ așa ca $\mu_0^\wedge = \varphi$ și fie $\mu \in \mathcal{M}(G)$ imaginea lui μ_0 prin scufundarea $H \to G$; atunci $\|\mu\| = \|\mu_0\|$ și $\mu^\wedge = \Phi$. q.e.d. (ii) Fie $\mu \in \mathcal{M}(G)$ așa ca $\Phi = \mu^\wedge$; rezultă că μ este concentrată pe H și dacă μ_0 este restricția lui μ la H, atunci $\mu_0 \in \mathcal{M}(H)$, $\|\mu\| = \|\mu_0\|$ și $\mu_0^\wedge = \varphi$. q.e.d.

10.6. Un interesant corolar al teoremei **10.4** este următoarea :

TEOREMĂ (Calderon). *Dacă* $g \in \mathcal{L}^1(G)$, $g^\wedge(\lambda) = 0$ *pentru orice* $\lambda \in \Lambda$ și $\eta > 0$, *atunci există* $\mu \in \mathcal{M}(G)$ *concentrată pe* H *așa încît:*

(i) $\|\mu\| < 2$.

(ii) $\|g * \mu\|_1 < \eta$.

(iii) $\mu^\wedge = 1$ *pe o vecinătate a lui* Λ.

(Rudin, [44], 2.7.5).

10.7. TEOREMĂ. *Orice subgrup închis* Λ *din* Γ *este o S-mulțime* (**8.11**).

Pentru demonstrație folosim formularea **8.15** (ii) pentru definiția S-mulțimilor. Fie $f \in \mathcal{L}^1(G)$, $f^\wedge(\lambda) = 0$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$ și $\varepsilon > 0$; există (**1.13**) $u \in \mathcal{L}^1(G)$ cu $\|u\|_1 = 1$ și $\|f - f * u\| < \varepsilon/_2$ iar conf. **10.6** există $\mu \in \mathcal{M}(G)$ așa ca $\|f * u * \mu\|_1 < \varepsilon/_2$ și $\mu^\wedge = 1$ pe o vecinătate a lui Λ. Să punem $v = u - u * \mu$ și $g = v * f$; atunci $g \in \mathcal{L}^1(G) \|f - g\|_1 < \varepsilon$ și $g^\wedge = 0$ pe o vecinătate a lui Λ, q.e.d.

10.8. PROPOZIȚIE. *Fie* $0 < \delta < \pi$ *și* $f : T \to C$ *cu* $f(e^{i\theta}) = 0$, *dacă* $\pi - \delta \leqslant \theta \leqslant \pi + \delta$; *fie* $g : R \to C$ *definită prin:*

$$g(x) = \begin{cases} f(e^{ix}) & \text{dacă } |x| \leqslant \pi \\ 0 & \text{dacă } |x| > \pi. \end{cases}$$

(i) $f \in \mathcal{A}(T) \Leftrightarrow g \in \mathcal{A}(R)$; *în acest caz:*

(ii) *există* $c_1, c_2 \geqslant 0$ *așa ca* $c_1 \|g\| \leqslant \|f\| \leqslant c_2 \|g\|$.

(Rudin, [44], 2.7.6).

10.9. Teorema următoare generalizează un rezultat clasic cunoscut sub numele de „*sampling theorem*” (= *teorema eșantionului*) în teoria informației. Fie G un l.c.a.-grup, fie H un subgrup discret din G care are anulatorul $\Lambda = A(\Gamma, H)$ discret și fie Ω o mulțime boreliană din Γ care conține cîte un element și numai unul din fiecare clasă a lui Λ. Să punem $\varphi(x) = \int_\Omega (x, \gamma)\, dm_\Gamma(\gamma)$.

TEOREMĂ. *Fie* $f \in \mathcal{L}^2(G)$ *și* $f^\wedge(\gamma) = 0$ *pentru aproape toți* $\gamma \notin \Omega$; atunci :

(i) *f este continuă aproape peste tot*;

(ii) *dacă f este continuă peste tot, atunci*

$$f(x) = \sum_{y \in H} f(y)\, \varphi(x - y)$$

uniform pe G și în norma lui $\mathcal{L}^2(G)$;

(iii) *în acest caz* $\|f\|_2^2 = \sum_{y \in H} |f(y)|^2$.

(Kluvanèk, [34]).

Cazul clasic corespunde situației $G = \Gamma = R$; $H = \Lambda = (\pi/\alpha) Z \equiv Z$; rezultă $\varphi(x) = (\sin \alpha x)/(\alpha x)$.

10.10. Formula de sumare a lui Poisson. Fie G un l.c.a.-grup, Γ dualul său, $H \subset G$ un subgrup închis și $\Lambda = A(\Gamma, H)$; presupune că măsurile Haar ale grupurilor G, H, G/H sînt astfel normate încît să aibă loc relaţia din teorema **1.9** (iii) şi normăm măsura Haar pe Λ aşa încît să fie valabilă teorema de inversiune pentru cuplul $(G/H, \Lambda)$.

În anumite condiţii asupra funcţiei $f : G \to C$ *are loc relaţia* :

$$\int f(y)\, \mathrm{d}m_H(y) = \int f^{\wedge}(\lambda)\, \mathrm{d}m_\Lambda(\lambda). \tag{1}$$

(conf. Loomis, [36], 37 E).

Aceste condiţii rezultă din următoarea demonstraţie formală, cu notaţiile de la **1.9**; avem:

$$F^{\wedge}(\lambda) = f^{\wedge}(\lambda)\,; \quad \lambda \in \Lambda\,;$$

conf. teoremei de inversiune:

$$F(\zeta) = \int_\Lambda (\zeta, \lambda)\, F^{\wedge}(\lambda)\, \mathrm{d}m_\Lambda(\lambda)\,; \quad \zeta \in G/H$$

şi deci

$$\int_H f(y)\, \mathrm{d}m_H(y) = F(0) = \int_\Lambda F^{\wedge}(\lambda)\, \mathrm{d}m_\Lambda(\lambda) = \int_\Lambda f^{\wedge}(\lambda)\, \mathrm{d}m_\Lambda(\lambda).$$

Pentru cazurile cînd formula este riguroasă trimitem la Ahiezer [1], pct. 67 şi Bochner [5], § 10.

§ 11. TEOREME DE STRUCTURĂ

11.1. În acest paragraf ne ocupăm de structura l.c.a.-grupurilor. Cel mai puternic rezultat pe care îl vom obţine este „teorema principală de structură''. Trebuie să menţionăm că prima demonstraţie a teoremei de dualitate s-a bazat tocmai pe aceste teoreme de structură. Începem cu cîteva pregătiri.

11.2. Definiţie. Fie G un grup topologic; orice *subgrup ciclic* al său este o imagine omomorfă (trivial continuă) a lui Z; se numeşte *subgrup cu un parametru al lui G* orice imagine omomorfă şi continuă a lui R în G; spunem că G este *monotetic* dacă conţine un subgrup ciclic peste tot dens; spunem că G este *solenoidal* dacă conţine un subgrup cu un parametru peste tot dens.

11.3. Teoremă. *Fie G un l.c.a.-grup monotetic*; *atunci G este sau compact, sau izomorf şi omomorf cu Z.*

Dacă G este discret, atunci G este grup ciclic, adică sau $G \equiv Z$ sau G este grup finit, deci compact. Avem aşadar de arătat că dacă G nu este discret, atunci este compact. Fie $\{x_n\}_{n \in Z}$ subgrupul ciclic dens al lui G, iar G nediscret; fie apoi V o vecinătate deschisă, simetrică, şi relativ compactă a originii în G. Vom arăta că:

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (x_i + V) \tag{1}$$

Într-adevăr, dacă $y \in G$, atunci există $k \in Z$ cu $y \in x_k + V$, deci $y - x_k \in V$. Cum V este deschisă, există o vecinătate simetrică W a originii în G, aşa ca $y - x_k + W \subset V$; deoarece G nu este discret, W conţine o infinitate de puncte x_n (de aici rezultă că subgrupul ciclic este infinit !); cum W este simetrică şi $x_{-n} = - x_n$, rezultă că $x_n \in W \Leftrightarrow x_{-n} \in W$. Aşadar există $j < k$ cu $x_j \in W$; punînd $i = k - j$ rezultă că $i > 0$ şi $y - x_i = y - x_k + x_j \in y - x_k + W \subset V$, astfel încît (1) este demonstrată.

Deoarece $\overline{V}$ este compactă, (1) arată că există un întreg n_0 aşa ca

$$\overline{V} \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} (x_i + V) \tag{2}$$

Pentru $y \in G$, fie $n = n(y)$ cel mai mic întreg pozitiv pentru care $y \in x_n + \overline{V}$; atunci $y - x_n \in \overline{V}$, deci $x_n - y \in \overline{V}$ şi conf. (2) există $i \in \{1, \ldots, n_0\}$ aşa ca $x_n - y \in x_i + V$ şi deci $y \in x_{n-i} + V$; cum $i > 0$, $n - i < n$ şi deci $n - i \leqslant 0$ (prin felul în care a fost ales $n = n(y)$). Astfel $n \leqslant i \leqslant n_0$ pentru orice $y \in G$ şi deci

$$G = \bigcup_{i=1}^{n_0} (x_i + \overline{V}) \tag{3}$$

de unde rezultă că G este compact, q.e.d.

11.4. TEOREMĂ. *Fie G un grup abelian compact. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

(i) *G este monotetic ;*

(ii) *Γ se identifică cu un subgrup al lui T_d (torul cu topologia discretă).*

(i) $\Rightarrow$ (ii) ; dacă G este monotetic, caracterele pe G sînt determinate de valorile pe care le ia pe subgrupul ciclic dens în G, altfel spus Γ este izomorf cu dualul unui grup ciclic (care este un grup cît al lui Z) ; deci Γ se identifică cu un subgrup al lui T ; deoarece G este compact, Γ este discret.

(ii) $\Rightarrow$ (i) ; dacă Γ este un subgrup al lui T_d, atunci G este un grup cît al dualului lui T_d, i.e. un grup cît al compactificatului Bohr $\overline{Z}$ al lui Z ; cum $\overline{Z}$ este monotetic (conf. **7.2**), orice grup cît al său este monotetic, în particular G, q.e.d.

11.5. COROLAR. *Există un grup monotetic compact universal G_m, în sensul că orice grup monotetic compact este o imagine omomorfă continuă a lui G_m ; mai mult, orice imagine omomorfă continuă a lui G_m este un grup monotetic compact.*

Evident, $G_m = \overline{Z}$.

11.6. *Notă.* Rezultate complet analoage cu **11.3**—**11.5** sînt valabile pentru grupuri solenoidale. Nu insistăm asupra lor fiindcă ele nu sînt necesare pentru consideraţiile ce urmează.

11.7. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup topologic iar $E \subset G$ o mulţime compactă şi deschisă. Atunci :*

(i) *există o vecinătate simetrică W a originii în G aşa ca $E + W = E$;*

(ii) *dacă $0 \in E$, atunci există un subgrup compact şi deschis $H \subset G$ aşa ca $H \subset E$;*

(iii) *E este o reuniune finită de clase de subgrupuri deschise din G.*

(i) Cum E este deschisă, pentru orice $x \in E$ există o vecinătate V_x simetrică a originii în G aşa ca :

$$x + V_x + V_x \subset E. \tag{1}$$

Deoarece E este compactă, există $x_1, \ldots, x_n \in E$ așa ca:

$$(2) \qquad E = \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_i)\,; \quad V_i = V_{x_i}\,; \; i=1, \ldots, n.$$

Să punem:

$$(3) \qquad W = \bigcap_{i=1}^{n} V_i.$$

Fie $x \in E$ și $w \in W$; există i așa ca $x \in x_i + V_i$ și avem:

$$x + w \in x_i + V_i + W \subset x_i + V_i + V_i \subset E$$

ceea ce demonstrează (i).

(ii) Fie W vecinătatea găsită la (i) și fie H subgrupul generat de W, adică:

$$(4) \qquad H = \bigcup_{n=1}^{\infty} nW.$$

Atunci H este deschis și deci închis, și se stabilește ușor prin inducție, avînd în vedere (4), că $H \subset E$, deci H este și compact.

(iii) Fără a restrînge generalitatea putem presupune că $0 \in E$; fie $H \subset E$ găsit la (ii) și fie $x \in E \cap H'$; se stabilește ușor folosind (4) și inducția că $x + H \subset E$; E fiind compact, este o reuniune finită de astfel de clase (disjuncte) și teorema este demonstrată.

11.8. PROPOZIȚIE. *Fie G un l.c.a.-grup total discontinuu. Atunci fiecare vecinătate a originii conține un subgrup compact și deschis.*

Propoziția rezultă imediat ținînd cont că un spațiu local compact total discontinuu este 0-dimensional (mulțimile deschise și compacte formează o bază deschisă) și avînd în vedere propoziția **11.7**.

11.9. DEFINIȚIE. Fie G_1 și G_2 două grupuri topologice. Spunem că G_1 și G_2 sînt *local izomorfe* dacă există:

(i) U_1 vecinătate a originii în G_1;

(ii) U_2 vecinătate a originii în G_2;

(iii) $\varphi : U_1 \to U_2$ omeomorfism

așa ca

$$(1) \qquad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ori de cîte ori $x, y, x + y \in U_1$.

11.10. LEMĂ. *Relația de izomorfism local între grupuri topologice este o relație de echivalență.*

Trivial.

11.11. PROPOZIȚIE. *Fie G un grup topologic și $D \subset G$ un subgrup discret, atunci G și G/D sînt local izomorfe.*

Fie $\varphi : G \to G/D$ aplicația canonică (omomorfism continuu și deschis), fie V vecinătate a lui 0 în G așa ca $V \cap D = \{0\}$ și fie W o vecinătate a originii în G așa ca $W - W \subset V$; rezultă imediat că φ/W este un omeomorfism cu proprietatea că $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ori de cîte ori x, y și $x + y \in W$, q.e.d.

11.12. PROPOZIȚIE. *Fie G un grup topologic local izomorf cu R^k prin aplicația $\varphi : \Omega \to V$, unde Ω este o vecinătate sferică în R^k iar V o* *vecinătate a originii în G. Atunci φ se poate extinde la un omomorfism continuu și deschis al lui R^k în G.*

Fie $x \in R^k$; există $n \in N$ așa ca $x/n \in \Omega$; definim

$$\varphi(x) = n(\varphi(x/n)). \tag{1}$$

Se verifică imediat, ținînd cont de faptul că φ este izomorfism local, că definiția este corectă; este de asemenea ușor de văzut că φ este un omomorfism care prelungește pe φ. Dacă U este o vecinătate a originii în G, atunci $\varphi^{-1}(U) \supset \varphi^{-1}(U \cap V)$ iar ultima este prin ipoteză o vecinătate a originii în R^k. În sfîrșit, fie $D \subset R^k$ o mulțime deschisă și fie $x \in \varphi(D)$, adică $x = \varphi(d)$ cu $d \in D$; există o vecinătate a originii $Q \subset R^k$ așa ca $Q \subset \Omega$ și $d + Q \subset D$; atunci $\varphi(Q)$ este deschisă în G și

$$x + \varphi(Q) = \varphi(d) + \varphi(Q) = \varphi(d + Q) \subset \varphi(D)$$

deci x este punct interior în $\varphi(D)$; cum x a fost arbitrar, $\varphi(D)$ este deschisă, q.e.d.

Observație. În următoarele trei secțiuni se folosesc notațiile și concluziile din această propoziție.

11.13. Propoziție. *Dacă în plus (față de* **11.12**) *G este conex, atunci G este grup cît al lui R^k.*

Cum φ este omomorfism deschis, $\varphi(R^k)$ este subgrup deschis, deci închis; cum G este conex, $\varphi(R^k) = G$; conf. primei teoreme de izomorfism de la grupuri topologice, care funcționează în acest caz, deoarece φ este un epimorfism continuu și deschis, avem:

$$G \equiv R^k/\mathrm{Ker}\ \varphi, \quad \text{q.e.d.}$$

Notă. Chiar dacă nu am fi presupus (tacit) că G este abelian și separat, am fi putut totuși obține **11.12** și **11.13**; dar din **11.13** rezultă atunci evident că G este abelian și separat.

11.14. Propoziție. *Dacă în plus* (față de **11.12**) *G nu conține nici un subgrup compact infinit, atunci φ este injectivă.*

Fie $x \in R^k$ cu $\varphi(x) = 0$, dar $x \neq 0$ și fie $n \in N$ așa ca $x/n \in \Omega$; atunci $\varphi(x) = n\varphi(x/n)$; notăm $x_0 = x/n$ și reținem că $x_0 \in \Omega$.

Fie $g = \varphi(x_0)$; atunci $ng = 0$; fie m cel mai mic număr natural cu această proprietate. Să considerăm și aplicația: $h : R \to R^k$ definită prin $h(\alpha) = \alpha x_0$; în sfîrșit, fie și aplicația $\psi : R \to G$ definită prin $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha x_0)$; evident, $\psi = \varphi^\circ h$ și cum h este evident omomorfism continuu și de asemenea φ (**11.12**), atunci rezultă că ψ este un omomorfism continuu. Să notăm $\alpha g = \psi(\alpha) = \varphi(\alpha x_0)$; pentru $\alpha \in N$ această notație are sensul obișnuit: $\alpha g = g + \ldots + g$ (de α ori). Fie acum $\alpha \in R$; atunci $\alpha g = \beta g$ cu $\beta \in [-m, +m]$; deci

$$\psi(R) = \psi([-m, +m]). \tag{1}$$

Din cele de mai sus rezultă că $H = \psi(R)$ este un subgrup compact al lui G. Să mai arătăm că H este infinit; într-adevăr, $h([0,1]) \subset \Omega$ iar pe Ω aplicația φ este biunivocă; deci $\psi([0,1])$ au puterea continuului.

Am obținut deci un subgrup compact infinit $H \subset G$, ceea ce contrazice ipoteza.

11.15. Corolar. (la **11.12**–**11.14**). *Dacă G este un grup topologic conex, local izomorf cu R^k şi cu proprietatea că nu conţine nici un subgrup compact infinit, atunci $G \equiv R^k$.*

11.16. Definiţie. Un *grup topologic G* este *compact generat* dacă conţine o parte compactă care îl generează ca grup.

11.17. Note. (1) Rezultă că un grup compact generat este generat de o vecinătate compactă şi simetrică a originii.

(2) Dacă G este un grup local compact, iar $F \subset G$ o mulţime compactă, atunci există un subgrup deschis şi compact generat care conţine pe F.

(3) Orice grup local compact şi conex este compact generat.

11.18. Teoremă. *Fie G un l.c.a.-grup, compact generat şi fie V o vecinătate compactă şi simetrică a originii care îl generează. Există $n \in N$, maximal cu proprietatea că G conţine un subgrup (izomorf şi omeomorf cu) Z^n, aşa încît*

(i) *G/Z^n este compact.*

(ii) *$Z^n \cap V = \{0\}$.*

Să notăm $V_n = nV$; atunci $G = \bigcup_n V_n$. Cum V_2 este compact, există $x_1, \ldots, x_p \in G$ aşa încît $V_2 \subset \bigcup_{i=1}^{p} (x_i + V)$. Fie H subgrupul generat de $\{x_1, \ldots, x_p\}$. Avem :

$$(1) \qquad V_n \subset V + H, \; n \in N;$$

într-adevăr, $V_1 = V \subset V + H$, $V_2 \subset \bigcup_{i=1}^{p} (x_i + V) \subset V + H$ şi prin inducţie :

$$V_{n+1} = V_n + V \subseteq V + V + H = V_2 + H \subset V + H + H = V + H.$$

Aşadar

$$(2) \qquad G = V + H.$$

Fie H_i subgrupul generat de x_i şi $\overline{H}_i$ închiderea în G al lui H_i ($i = 1, \ldots, p$). Fiecare $\overline{H}_i$ este un l.c.a.-grup *monotetic* şi, evident :

$$(3) \qquad H = H_1 + \ldots + H_p.$$

Dacă pentru orice $i = 1, \ldots, p$, $\overline{H}_i$ este compact, atunci $\overline{H}_1 + \ldots + \overline{H}_p$ este compact, deci închis ; cum $H \subset \overline{H}_1 + \ldots + \overline{H}_p$, rezultă $\overline{H}$ compact, deci, conf. (2), G este compact şi propoziţia rezultă cu $n = 0$.

Dacă G nu e compact, există $i \in \{1, \ldots, p\}$ cu $\overline{H}_i$ necompact, deci, $\overline{H}_i$ fiind monotetic, $\overline{H}_i \equiv Z$ (conf. **11.3**) şi ca o consecinţă $\overline{H}_i = H_i$; reţinem următorul rezultat :

($*$) Dacă G este un l.c.a.-grup, necompact, de forma $G = V + H$ cu V vecinătate compactă iar H subgrup finit generat, atunci H conţine un subgrup închis izomorf şi omeomorf (în topologia relativă) cu Z.

Cum H este finit generat, există un cel mai mare întreg n aşa încît H să conţină un subgrup închis al lui G, să zicem H', care să fie izomorf cu Z^n. Atunci $H' \cap V$ este compact şi în acelaşi timp discret (în topologia relativă) deci $H' \cap V$ este finit; fie $H' \cap V = (0, a_1, \ldots, a_m)$; putem considera că $a_1, \ldots, a_m \in Z^n \equiv H'$, adică:

$$a_i = (a_i^1, \ldots, a_i^n); \quad i = 1, \ldots, m; \; a_i^j \in Z.$$

Fie $q > \max \{|a_i^j| : 1 \leqslant i \leqslant m; 1 \leqslant j \leqslant n$; qZ este subgrup al lui Z izomorf cu Z, deci $(qZ)^n$ este subgrup în Z^n, izomorf cu Z^n. Vom nota $(qZ)^n = H'' \to H'$ (identificăm toate aceste grupuri cu subgrupuri în G). Să observăm acum că $H'' \equiv Z^n$ și $H'' \cap V = \{0\}$.

Fie $\varphi : G \to G' = G/H''$ aplicația canonică. Atunci $G' = \varphi(G) = \varphi(V) + \varphi(H)$; $\varphi(V)$ este vecinătate compactă a originii în G/H'' iar $\varphi(H)$ este un subgrup finit generat; în plus, după cum se verifică ușor din felul în care a fost ales n, rezultă că $\varphi(H)$ nu conține nici un subgrup ciclic infinit și închis. Atunci, conf. $(\ast)$ G' este compact, și teorema este complet demonstrată.

11.19. TEOREMĂ. (Teorema principală de structură). *Fiecare l.c.a.-grup G conține un subgrup deschis G_1 care este suma directă dintre un grup compact H și un spațiu euclidian R^n $(n \geqslant 0)$.*

Fie G_0 componenta conexă a lui 0 în G; G_0 este subgrup închis, iar G/G_0 este un l.c.a.-grup total discontinuu; conf. **11.8**, G/G_0 conține un subgrup compact și deschis K. Fie aplicația canonică $\varphi : G \to G/G_0$ și fie $G_1 = \varphi^{-1}(K)$.

G_1 este *deschis*, deci închis, deci l.c.a.-grup cu topologia indusă. Deoarece K este compact, *K nu are nici un subgrup deschis de indice infinit*. Fiecare subgrup deschis al lui G_1 conține pe G_0; din felul în care a fost definit G_1, rezultă $\varphi(G_1) = K$, deci $G_1/G_0 \equiv K$ (algebric și topologic). Prin urmare *G_1 nu conține nici un subgrup deschis de indice infinit*: în cazul contrar, fie S un subgrup deschis de indice infinit în G_1, atunci $S \supset G_0$ și $\varphi(S) \equiv S/G_0$, deci $\varphi(S)$ ar fi un subgrup deschis în K; el ar avea și indicele infinit deoarece:

$$G_1/S \equiv G_1/G_0/S/G_0 \equiv K/\varphi(S) \qquad \text{(algebric !)}$$

ceea ce reprezintă o contradicție.

Există o vecinătate compactă V a originii în G_1 așa ca $\varphi(V) = K$; atunci V conține cîte un element din fiecare clasă a lui G_0 în G_1. Fie H subgrupul generat de V în G_1; atunci H este deschis, deci închis, și intersectează fiecare clasă a lui G_0 în G_1. Cum acestea sînt conexe, rezultă că $H = G_1$. Prin urmare G_1 este *compact generat*; atunci, conf. teoremei **11.18**, G_1 conține un subgrup închis Z^n așa ca G_1/Z^n să fie compact.

Fie Γ_1 dualul lui G_1, iar D dualul-discret al lui G_1/Z^n. Conf. teoremei **9.4**, $D \equiv A(\Gamma_1, Z^n)$, în particular D se identifică cu un subgrup în Γ_1; mai mult, $\Gamma_1/D \equiv (Z^n)^\wedge \equiv T^n = R^n/Z^n$. Cum D și Z^n sînt discrete, rezultă — conf. **11.10**, **11.11** — că Γ_1 este local izomorf cu R^n. Fie — conf. **11.12** — prelungirea acestui izomorfism local la $\psi : R^n \to \Gamma_1$; ψ este un omomorfism continuu și deschis. Cum R^n este grup conex (și deschis), $\psi(R^n)$ este subgrup deschis și conex în Γ_1, fie Γ_0 componenta conexă a originii în Γ_1 (subgrup închis). Atunci $\Gamma_0 = \psi(R^n)$, deci în particular Γ_0 este deschis; deci *Γ_0 este local izomorf cu R^n*; în plus *Γ_0 este un grup conex*. Vom arăta acum că *Γ_0 nu conține nici un subgrup compact de ordin infinit*; este suficient să demonstrăm afirmația pentru Γ_1, căci Γ_0 este subgrup închis. Pentru aceasta fie Γ_2 un subgrup compact infinit al lui Γ_1; cum Γ_1 este dualul lui G_1, rezultă că dualul lui Γ_2 este un grup cît G_1/G_2 al lui G_1, unde $G_2 = A\,(G_1, \Gamma_2)$. Deoarece Γ_2 este compact, G_2 este *deschis* şi cum Γ_2 este infinit, $G_1/G_2 \equiv \Gamma_2^{\wedge}$ este infinit, deci G_2 *este de indice infinit*; contradicţie.

Prin urmare — conf. **11.15** — $\Gamma_0 \equiv R^n$ şi deci Γ_1 *conţine pe* R^n *ca subgrup deschis.*

Vom mai arăta că Γ_1 *este suma directă dintre* R^n *şi un subgrup discret* Λ. Într-adevăr, fie Λ subgrupul lui Γ_1 maximal cu proprietatea $\Lambda \cap R^n = \{0\}$; atunci Λ este discret (deoarece Λ are cel mult un punct în fiecare clasă a lui R^n iar R^n este deschis). În plus $\Gamma_1 = R^n \oplus \Lambda$; deoarece $\Lambda \cap R^n = \{0\}$ este suficient să arătăm că $\Gamma_1 = R^n + \Lambda$ ceea ce şi facem prin reducerea la absurd: fie $\gamma \in \Gamma_1$ $\gamma \notin R^n + \Lambda$; din alegerea lui Λ rezultă că există $\gamma_0 \notin \Lambda$, $k \in Z$, $k \neq 0$ şi $x \in R^n$, $x \neq 0$ aşa ca $\gamma_0 + k\gamma = x$; fie $y = x/k$ şi $\gamma_1 = \gamma - y$; atunci $k\gamma_1 = k\gamma - x = -\gamma_0 \in \Lambda$ şi $\gamma_1 \notin R^n + \Lambda$; prin urmare există $\gamma_2 \in \Lambda$, $m \in Z$, $m \neq 0$ şi $Z \in R^n$, $z \neq 0$ aşa ca $\gamma_2 + m\gamma_1 = z$; transcriem acest lucru prin $k\gamma_2 + mk\gamma_1 = kz \neq 0$; dar $k\gamma_2 + mk\gamma_1 \in \Lambda$ iar $kz \in R^n$ aşa încît relaţia obţinută contrazice proprietatea $\Lambda \cap R^n = \{0\}$.

Teorema rezultă acum imediat.

11.20. COROLAR. *Dacă* G *este un l.c.a.-grup conex, atunci* G *este suma directă dintre un grup compact şi conex* H *şi un spaţiu euclidian* R^n.

11.21. PROBLEMĂ. Ne referim la enunţul teoremei **11.19**; G_1 fiind deschis (şi închis), G/G_1 este l.c.a.-grup discret; deci, dacă G_1 ar admite un suplement direct, atunci acesta ar fi discret. Pe de altă parte, din teorema **11.19**, G_1 nu este unic determinat, aşa încît apare ca îndreptăţită problema: *nu poate fi ales întotdeauna* G_1 *aşa încît* G *să fie suma directă dintre* G_1 *şi un grup discret?* Răspunsul este *negativ*, după cum arată următorul:

11.22. CONTRAEXEMPLU. Fie G mulţimea tuturor şirurilor $x = \{\xi_n\}_{n \in N}$, unde $\xi_n = 0, 1, 2, 3$ şi numai un număr finit de ξ_n-uri sînt 1 sau 3; considerăm pe G ca grup înzestrat cu „adunarea modulo 4 pe componente".

Fie $K = \{x \in G : 2x = 0\}$, adică $x_n \in K \Leftrightarrow \xi_n = 0, 2$ pentru orice $n \in N$. Atunci K este un subgrup în G, izomorf cu produsul direct al unei mulţimi numărabile de grupuri ciclice ale ordinului 2, adică de copii ale lui Z_2. Considerăm pe K topologia produs corespunzătoare; atunci K este compact.

Considerăm pe G topologia definită astfel: un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii în G este un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii în K, pentru topologia descrisă mai sus. Această topologie este desigur local compactă şi compatibilă cu structura algebrică a lui G, deci G devine l.c.a.-grup; evident, o mulţime $A \subset G$ este deschisă $\Leftrightarrow$ $A \cap K$ este deschisă; în particular K este subgrup deschis şi compact în G.

Se verifică uşor că G este total discontinuu; în plus G nu este compact căci subgrupul deschis K are indice infinit.

Cu aceste precizări rezultă că dacă G_1 şi R^n corespund lui G prin teorema **11.19**, atunci $n = 0$, căci R^n este conex pentru $n > 0$; deci G_1 este compact şi deschis; a fortiori $G_1 \neq G$ căci G este necompact.

Să presupunem acum că G_1 este sumand direct, adică $G = G_1 \oplus D$, unde D este subgrup discret. Observăm mai întîi că D este infinit căci altfel G ar fi compact. În sfîrşit, se vede uşor că $D \cap K$ este infinit, ceea ce este absurd.

11.23. Există însă un caz deosebit de important în care problema pusă la **11.21** are soluţie *pozitivă*. Anume :

TEOREMĂ. *Dacă G este un l.c.a.-grup compact generat, atunci* $G = H \oplus R^n \oplus Z^k$, *unde H este un grup compact.* (Zsidó, [53]).

11.24. NOTĂ. Dacă G este un grup abelian compact, nici **11.19** şi nici **11.23**, nu ne spun nimic nou. Totuşi, structura algebrică a grupurilor abeliene compacte este complet determinată ; adică grupurile abeliene care admit o topologie compactă compatibilă au o structură algebrică complet exprimabilă în termeni de grupuri concrete cu ajutorul operaţiilor de produs direct şi sumă directă.

Trimiterile în acest sens le facem în secţiunea următoare.

11.25. Teorema **11.3** este un caz particular al unei teoreme mai generale ([27], 9.1). Din această teoremă generală rezultă şi analogul teoremei 11.3 pentru grupuri solenoidale. Pentru alte rezultate referitoare la grupuri monotetice şi solenoidale trimitem tot la [27] (anume 25.11—25.19) şi [3].

Faptele referitoare la izomorfisme locale sînt binecunoscute ; propoziţiile **11.12**—**11.15** diluează expunerea din [44], p. 42.

Teorema 11.18 se datoreşte lui Pontriaghin.

Teorema principală de structură sub forma **11.19** apare în [44], pag. 44 ; contraexemplul **11.22** este atribuit de Rudin ([44], pag. 44) lui Kaplansky. Pentru teorema **11.23** trimitem la [27], 9.8, [49], pag. 110 şi la lucrarea citată a lui Zsidó [53].

În ceea ce priveşte structura grupurilor compacte ea este complet descrisă de teorema 25.25 din [27]. Pentru studiu este însă necesară familiarizarea cu anumite grupuri concrete [27], § 10 şi § 25. Grupurile compacte pot fi caracterizate şi în termeni de grupuri Lie.

Primită la redacţie la 3 septembrie 1966

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE *)

1. AHIEZER, N. I., *Lecţii po teorii approksimaţii*. Nauka, Moskva, 1965.
2. AMEMIYA I and ITO T., *A simple proof of a theorem of P. J. Cohen*. Bull. Amer. Math. Soc., **70**, 774—776 (1964).
3. ANZAI, H. and KAKUTANI, S., *Bohr compactifications of a locally compact abelian group*, I, II ; Proc. Imp. Acad. (Tokyo) ; **19**, 476—480, 533—539 (1943).
4. BEURLING, A. and HELSON, H., *Fourier Stieltjes transforms with bounded powers*. Math. Scand., **1**, 120—126 (1953).
5. BOCHNER, S., *Lectures on Fourier Integrals*. Princeton, University Press, Princeton, 1959.
6. BOURBAKI, N., *Éléments de mathématique*. Livre III, *Topologie Générale*. Hermann, Paris, 1942.
7. BOURBAKI, N., *Éléments de mathématique*. Livre VI, *Intégration*. Hermann, Paris, 1952—1962.
8. BRANCONNIER, J., *Sur les groupes topologiques localement compacts*. J. Math. Pures Appl., **27**, 1—85, (1948).

---

*) Lista bibliografică prezentă se referă şi la cap. II, care va apărea ulterior.

9. Calderon, A. P., *Ideals in Groups Algebras.* Symposium on Harmonic Analysis and Related Integral Transforms, Cornell University (1956) (mimeografiat).

10. Cartan, H. et Godement, R., *Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abélien localement compacts.* Ann. Sci. École Norm. Sup., **64**, 79—99 (1947).

11. Cohen, P. J., *On a conjecture of Littlewood and idempotent measures.* Ann. J. Math., **82**, 191—212 (1960).

12. Cohen, P. J., *On homomorphisms of group algebras.* Am. J. Math., **82**, 213—226 (1960).

13. Dinculeanu, N., *Teoria măsurii şi funcţii reale.* Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.

14. Dinculeanu, N., *Integrarea pe spaţii local compacte.* Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1964.

15. Dunford, N. and Schwarz, J., *Linear operators.* I, II, Interscience Publ., New York—London, 1958—1964.

16. Eberlein, W. F., *Characterization of Fourier-Stieltjes transforms,* Duke Math. J., **22**, 465—468 (1955).

17. Edwards, R. E., *On factor functions,* Pacific J. Math., **5**, 367—378 (1955).

18. Foiaş, C., *On a commutative extension of a commutative Banach algebra.* Pacific J. Math.; **8**, 407—410 (1958).

19. Forelli, M., *Homomorphisms of ideals in group algebras.* Illinois J. Math., **3**, 410—417 (1965).

20. Gelfand, I. M., Raikov, D. A., Şilov, G. E., *Kommutativnie normirovannie kolţa.* Fizmatghiz, Moskva, 1960.

21. Godement, R., *Théorèmes taubériens et théorie spectrale.* Ann. Sci. École Norm. Sup., 64, 119—138 (1947).

22. Halmos, P. R., *Measure theory,* Van Nostrand, Princeton, 1950.

23. Helson, H., *On the ideal structure of group algebras.* Ark. Mat., **2**, 83—86 (1952).

24. Helson, H., *Isomorphismes of abelian group algebras.* Ark. Mat., **2**, 475—487 (1953).

25. Helson, H., *Proof of a conjecture of Steinhaus.* Proc. Nat. Acad. U.S., **40**, 205—206 (1954).

26. Helson, H., *On a theorem of Szegö,* Proc. An. Math. Soc., **6**, 235—242 (1955).

27. Hewitt, E. and Roos, K. A., *Abstract Harmonic Analysis I.* Springer Verlag, Berlin, 1963.

28. Hewitt, E. and Stromberg, K., *Real and Abstract Analysis.* Springer Verlag, Berlin, 1965.

29. Hewitt, E. and Zuckermann, H. S., *A group-theoretic method in approximation theory.* Ann. Math., **52**, 557—567 (1950).

30. Hofmann, K., *Banach Spaces of Analytic Functions.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1962.

31. Hoffmann, K., *Foundamentals of Banach of Algebras.* Curitiba, 1962.

31′. Istraţescu, V., *On a class of measures on locally compact abelian groups.* Rev. Roum. math. pures et appl.

32. Kahane, J. P., *Sur les functions sommes de séries trigonometriques absolument convergentes.* C. R. Acad. Sci., Paris, **240**, 36—37 (1955).

33. Kahane, J. P., *Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes.* J. Math. Pures Appl., **35**, 249—259 (1956).

33. Kaplansky, I., *Infinite abelian groups.* University of Michigan Press (Ann. Arbor), 1954.

34. Kluvaneć, I., *Sampling theorem in harmonic Analysis.* Matem. Fyz. Časopis, Sav., **15**, 42—48 (1965).

35. Leibenson, H., *On the ring of functions with absolutely convergent Fourier series.* Upsehi Mat. Nauk. N. S., **9**, 157—162 (1957).

36. Loomis, L. H., *An introduction to abstract harmonic analysis.* Van Nostrand, Princeton, 1953.

37. Mate, L., *Some abstract results concerning multiplier algebras.* Revue roum. math. pures et appl., **10**, 261—267 (1965).

38. Mate, L., *Multiplier algebras.* Bull. Acad. Pol. Sci. math., **13**, 523—526 (1965).

39. Nachbin, L., *The Haar Integral.* Van Nostrand, Princeton, 1966.

40. Наймарк, М. А., *Нормированные кольца.* Физматгиз, Москва, 1956.

41. Von Neuman, J., *Almost periodic functions on a group.* Tran. Amer. Math. Soc., **36**, 445—492 (1934).

42. Райков, Д. А., *Гармонический анализ на коммутативных группах и теория характеров.* Труды Мат. Инст. Стеклов. **14** (1945).

43. Rudin, W., *The automorphisms and the endomorphisms of the group algebra of the unit circle.* Acta Math., **95**, 39—56 (1956).

44. Rudin, W., *Fourier Analysis on Groups.* Interscience Publ., New York—London, 1962.

45. Rudin, W., *On isomorphisms of group algebras.* Bull. Am. Math. Soc., **64**, 167—169 (1958).

46. Rudin, W., *Idempotent measures on abelian groups.* Pacific J. Math., **9**, 195—209 (1959).

46'. SREIDER, YU. A., *The structure of maximal ideals in rings of measures with convolution.* Mat. Sbornik, N. S., **27**, 297—318 (1950).

47. STROMBERG, K., *A note on the convolution of regular measures.* Math. Scand., **7**, 347—352 (1959).

48. WANG, J., *Multipliers of commutative Banach algebras.* Pacific J. Math., **11**, 1131—1149 (1961).

49. WEIL, A., *L'integration dans les groupes topologiques et ses applications.* Gauthiers-Villars, Paris, 1938.

50. WIENER, N., *The Fourier Integral and certains of its applications.* Dover Publications, New York.

51. WIENER, N., *Tauberian theorems.* Ann. of Math., **33**, 1—100 (1932).

52. WIENER, N. and PITT, R. H., *On absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms.* Duke Math. J., **4**, 420—436 (1938).

53. ZSIDÓ, L., *Teorema de structură pentru grupuri abeliene compact generate.* St. cerc. mat., **19**, (1967).

RECENZII

HELENA RASIOWA, ROMAN SIKORSKI: *The Mathematics of Metamathematics* (Matematica metamatematicii). Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1963, 519 pp.

Descoperirea paradoxurilor teoriei mulţimilor a condus la crearea aşa-numitelor teorii matematice *formalizate*, în care nu numai proprietăţile noţiunilor primitive sînt date în mod exact printr-un sistem de axiome, dar şi limbajul teoriei este definit în mod precis. În felul acesta, pe lîngă evitarea antinomiilor, avem posibilitatea de a descrie precis mijloacele logice ale teoriei respective, adică putem defini procesul de deducţie în mod exact.

Teoria care se ocupă cu studiul teoriilor matematice formalizate poartă numele de *metamatematică*. La început a existat tendinţa de a se face metamatematică folosind mijloace cît mai elementare şi în orice caz finitiste, aşa cum se procedează în cadrul diverselor sisteme formalizate. Mai tîrziu, unii cercetători au început să renunţe la acest punct de vedere exclusivist, care îngreunează cercetările metamatematice; desigur că la această schimbare de optică au contribuit şi rezultatele lui Gödel, care au arătat imposibilitatea realizării planului lui Hilbert de a demonstra consistenţa întregii matematici folosind mijloace finitiste.

Acceptarea metodelor infinitiste în metamatematică înseamnă, de fapt, acceptarea metodelor şi ideilor matematicii moderne în demonstrarea teoremelor de metamatematică adică, în definitiv, folosirea unor metode puternice şi unificatoare. Este ceea ce îşi propune să demonstreze cartea de faţă.

Monografia Helenei Rasiowa şi a lui Roman Sikorski nu poate, desigur, să îmbrăţişeze întregul cîmp al aplicaţiilor matematicii în metamatematică. Metodele prezentate în această carte sînt de natură algebrică şi topologică; ele alcătuiesc o teorie unitară, bazată pe două idei importante.

Una din aceste idei constă în a asocia fiecărui sistem formalizat algebra Lindenbaum-Tarski, ale cărei elemente sînt clase de formule echivalente, după care anumite proprietăţi ale algebrei asociate pot fi traduse ca proprietăţi ale sistemului iniţial. În cazul unei teorii matematice formalizate bazate pe logica clasică, algebra Lindenbaum-Tarski asociată este o algebră booleană; dacă sistemul formalizat are la bază logica intuiţionistă, sau logica pozitivă, sau logica modală, atunci algebra Lindenbaum-Tarski asociată este respectiv o algebră pseudobooleană, o latice relativ pseudocomplementată, o algebră booleană topologică.

O altă idee de bază folosită în carte constă în a asocia fiecărei formule o aplicaţie definită pe o anumită mulţime şi cu valori într-o latice. Această generalizare a metodei „tabelelor de adevăr" furnizează mijloace de a stabili dacă o formulă dată este sau nu o teză (teoremă); de asemenea, ea ne permite să studiem probleme de consistenţă a teoriilor formalizate.

Monografia este alcătuită din trei părţi.

Partea I-a, formată din patru capitole, dă cititorului toate noţiunile de topologie, algebră şi în special de teoria laticelor, necesare pentru înţelegerea materiei care constituie obiectul propriu-zis al cărţii. Aici se introduc, printre altele, conceptele fundamentale de algebră booleană, algebră pseudobooleană, latice relativ pseudocomplementată, algebră booleană topologică. O latice în care oricare ar fi elementele *a* şi *b*, există cel mai mare element *c* cu proprietatea $a \cap c \leqslant b$, se numeşte relativ pseudocomplementată (sau reziduată, în terminologia altor autori). O asemenea latice este cu necesitate distributivă şi are ultim element; dacă are şi prim element, se numeşte algebră pseudobooleană. O algebră booleană înzestrată cu o operaţie de închidere se numeşte algebră booleană topologică („closure algebra", în terminologia altor autori). Autorii acordă o atenţie deosebită teoremelor de reprezentare pentru aceste diverse tipuri de latici, deoarece tocmai aceste teoreme vor juca un rol central în restul cărţii.

Partea a II-a, intitulată „Logica clasică", începe cu capitolul V, în care se descrie noţiunea generală de teorie matematică formalizată. Se definesc în primul rînd limbajele $\mathcal{L} = \{A, T, F\}$, în care: A este un alfabet care conţine variabile individuale libere, variabile legate, functori, predicate, conective, cuantificatorul existenţial şi cel universal, paranteze; T este mulţimea termenilor, iar F mulţimea formulelor. $\mathcal{L}$ astfel definit este un limbaj de ordinul întîi; dacă însă lipsesc variabilele legate, functorii, predicatele şi cuantificatorii, atunci mulţimea T este vidă iar $\mathcal{L}$ se zice limbaj de ordinul zero. Un sistem deductiv $\mathcal{S} = \{\mathcal{L}, C\}$ este format dintr-un limbaj $\mathcal{L}$ şi o operaţie C care defineşte o mulţime de formule, numite formule derivabile sau tautologii, în modul următor: se alege mai întîi o mulţime $\mathcal{A}_l$ de formule numite axiome logice şi apoi, cu ajutorul unor reguli de inferenţă, se obţin celelalte tautologii. Sistemul deductiv $\mathcal{S}$ se numeşte calcul al propoziţiilor sau calcul al predicatelor, după cum limbajul $\mathcal{L}$ este de ordinul zero sau de ordinul întîi. O teorie matematică elementară $\tau = \{\mathcal{L}, C, \mathcal{A}\}$ constă dintr-un sistem deductiv $\{\mathcal{L}, C\}$ şi o mulţime $\mathcal{A}$ de axiome specifice teoriei; se numeşte teoremă a sistemului, orice formulă obţinută din mulţimea $\mathcal{A}_l \cup \mathcal{A}$ cu ajutorul regulilor de inferenţă adoptate în $\mathcal{S} = \{\mathcal{L}, C\}$.

Capitolul VI descrie în detaliu cele două idei de bază, prezentate de noi mai sus.

Capitolele VII şi VIII studiază în detaliu calculele propoziţiilor, calculele predicatelor şi teoriile matematice bazate pe axiomele logicii clasice.

În partea a III-a a monografiei, acest studiu este reluat în cazul unor logici neclasice. Capitolele IX şi X se ocupă de sistemele bazate pe logica intuiţionistă, care nu admite axioma $(a \cup -a)$. În capitolul XI se studiază logica pozitivă, în care lipseşte conectivul „$-$" (negaţia), precum şi teoriile bazate pe logica modală, în care, dimpotrivă, se introduce un conectiv nou: necesitatea.

Rezultatele obţinute, datorite în bună parte autorilor, sînt nu numai importante, ci şi de o rară eleganţă; un exemplu tipic este demonstraţia extrem de simplă dată teoremei de completitudine a lui Gödel. În plus, cartea este scrisă cu o excepţională claritate. De aceea, o recomandăm călduros tuturor celor pe care îi interesează problemele de logică matematică.

S. Rudeanu

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzuanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU şi M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aleatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. II, 1966, 669 p., 38 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 8, P. 1113—1248, BUCUREŞTI, 1967

I. P. „Informaţia" — c. 5527

43831

Lei 12.—

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

9

TOMUL 19

1967

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie

În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuţa poştală 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

TOM. 19, NR. 9
1967

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
83

SUMAR

Pag.

NICOLAE BOTH, Despre bazele inducţiei complete. Inducţia simultană 1251

SORIN GOGONEA, Asupra mişcării apelor arteziene în anumite domenii concave 1259

ALEXANDRU MIHAI, O reprezentare a claselor Chern întregi, cu ajutorul formelor cu singularităţi 1273

CONSTANTIN I. NIŢĂ, Rezoluţii standard în categorii cu multiplicare 1285

ION PĂVĂLOIU, Observaţii asupra rezolvării sistemelor de ecuaţii cu ajutorul procedeelor iterative 1289

EUGEN POPA, O caracterizare a spaţiilor uniforme 1299

ALEXANDRU RADU, CONSTANTIN ANGHEL, Teorema de reducere a lui Giraud 1303

TEODOR RUS, Algebra limbajelor formalizate 1309

Z. SIMON, S. ROSIN, Modele matematice de reglare a hematopoiezei 1325

P. STAVRE, Asupra unor conexiuni coparalele 1337

MARCEL DRAGOŞ STOICA, Utilizarea metodelor vectoriale la studiul compatibilităţii a două ecuaţii algebrice de gradul *n* cu o necunoscută 1341

CONSTANTIN TĂNĂSESCU, Unele aplicaţii ale ecuaţiilor booleene în teoria algebrică a gramaticii 1357

N. N. TEODORESCU, Asupra unor perechi de spaţii Riemann 1367

ELEONORA TOMA MARCU, Proprietăţi ale închiderilor Sestier din teoria algebrică a gramaticii 1377

IOAN TOMESCU, Asupra unor probleme combinatorii care intervin în teoria clasificării 1385

LASZLÓ ZSIDÓ, Teorema de structură pentru l.c.a.-grupuri compact generate 1395

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 9, P. 1249–1398, BUCUREŞTI, 1967

DESPRE BAZELE INDUCȚIEI COMPLETE. INDUCȚIA SIMULTANĂ

DE

NICOLAE BOTH

(Cluj)

Bazîndu-se pe teoria mulțimilor și utilizînd aparatul logicii matematice, lucrarea generalizează inducția completă și formulează inducția simultană — care permite presupunerea simultană a valabilității proprietății în cauză, pentru ambele variabile de inducție.

§ 1. NOȚIUNI PRELIMINARE

1. Zicem că o mulțime parțial ordonată M satisface *condiția minimalității* dacă orice submulțime nevidă a ei are cel puțin un element minimal. Evident că în acest caz și mulțimea însăși are această proprietate.

Mulțimea parțial ordonată M satisface *condiția inductivității* dacă toate elementele sale se bucură de proprietatea $\mathfrak{P}$ în ipoteza că :

(a) această proprietate o au toate elementele sale minimale și

(b) dacă toate elementele strict precedente unui element arbitrar x din M au proprietate $\mathfrak{P}$, atunci și x are această proprietate.

Faptul că x are proprietatea $\mathfrak{P}$ îl vom scrie formal $\mathfrak{P}(x)$.

TEOREMĂ. *Orice mulțime care satisface condiția minimalității satisface și condiția inductivității.*

Demonstrația prin reducere la absurd.

2. În cazul mulțimilor liniar ordonate condiția minimalității își păstrează formularea doar că intervine unicitatea elementului minimal.

Orice mulțime bineordonată satisface condiția minimalității — prin definiție. Așadar, mulțimea N a numerelor naturale, de asemenea. Din teorema enunțată mai sus rezultă că N satisface și condiția inductivității, pe care în acest caz o vom numi *regula inducției complete* :

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 9, P. 1251–1253, BUCUREȘTI, 1967.

„Dacă o proprietate $\mathscr{P}$ este valabilă pentru numărul zero și din valabilitatea ei pentru un număr arbitrar k rezultă valabilitatea pentru $k+1$, atunci $\mathscr{P}$ este valabilă pentru orice număr natural n". Formal o scriem :

$$\mathscr{P}(0) \,\&\, (\forall k)\,[\mathscr{P}(k) \to \mathscr{P}(k+1)] \to \mathscr{P}(n) \tag{1.1}$$

ceea ce se poate ilustra prin schema :

$$\boxed{0} \to 1 \to 2 \to \dots \to n \to \dots$$

3. Efectiv, regula (1.1) — pe care o numim inducție simplă — se folosește sub forma de mai sus. Totuși din punct de vedere teoretic va fi mai comodă forma ei normală, în care cuantorul se află în fața expresiei.

În echivalența $H \,\&\, (\forall x)\, \mathscr{F}(x) = (\forall x)\, [H \,\&\, \mathscr{F}(x)]$ făcînd substituția $H/\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{F}(x)/\mathscr{P}(x) \to \mathscr{P}(x+1)$, x/k, obținem relația :

$\mathscr{P}(0) \,\&\, (\forall k)\,[\mathscr{P}(k) \to \mathscr{P}(k+1)] = (\forall k)\,\{\mathscr{P}(0) \,\&\, [\mathscr{P}(k) \to \mathscr{P}(k+1)]\}$
cu care folosind teorema echivalenței, din (11) obținem

$$(\forall k)\,\{\mathscr{P}(0) \,\&\, [\mathscr{P}(k) \to \mathscr{P}(k+1)]\} \to \mathscr{P}(n). \tag{1.2}$$

Dar $(\forall x)\, \mathscr{F}(x) \to H = \overline{(\forall x)\, \mathscr{F}(x)} \vee H = (\exists x)\, \overline{\mathscr{F}(x)} \vee H = (\exists x)\, \overline{[\mathscr{F}(x) \vee H]} = (\exists x)\, [\mathscr{F}(x) \to H]$.

Pe această bază, cu substituția $\mathscr{F}(x)/\mathscr{P}(0) \,\&\, [\mathscr{P}(x) \to \mathscr{P}(x+1)], H/\mathscr{P}(x)$, x/k, formula (1.2) devine

$$(\exists k)\,\{\mathscr{P}(0) \,\&\, [\mathscr{P}(k) \to \mathscr{P}(k+1)] \to \mathscr{P}(n)\}. \tag{1.3}$$

§ 2. INDUCȚIA DUBLĂ

1. Pentru a transpune regula inducției la proprietățile ce depind de doi parametri vom considera mulțimea $N^2 = \{(n_i,\, n'_1)\}_{i=1,2,\dots}$ a perechilor de numere naturale. Ordonarea perechilor o vom face după cum urmează :

$$(n_1, n'_1) > (n_2,\, n'_2)$$

dacă

a) $n_1 > n_2$ sau dacă

b) $n_1 = n_2$ iar $n'_1 > n'_2$ și

$$(n_1,\, n'_1) = (n_2,\, n'_2)$$

$$\text{dacă } n_1 = n_2 \text{ și } n'_1 = n'_2.$$

Se observă că astfel mulțimea N^2 este liniar ordonată, întrucît axiomele ordonării sînt verificate și anume :

A_D (determinarea). Între oricare două perechi $p_1 = (n_1, n'_1)$ și $p_2 = (n_2,\, n'_2)$ există una și numai una din relațiile : $p_1 > p_2$, $p_2 > p_1$, $p_1 = p_2$.

Aceasta rezultă din faptul că ordonarea introdusă epuizează toate cazurile posibile iar relațiile sînt incompatibile două cîte două.

A_T (tranzitivitatea). Dacă $p_1 > p_2$ și $p_2 > p_3$, atunci $p_1 > p_3$, ceea ce rezultă din analiza tuturor cazurilor posibile.

2. Două perechi le considerăm echivalente dacă şi numai dacă au primele componente egale:

$$(n_1, n_1') \sim (n_2, n_2') \leftrightarrow n_1 = n_2$$

ceea ce înseamnă că

$$(n_1, n_1') \equiv (n_2, n_2') \bmod R,$$

unde R este relaţia de echivalenţă introdusă în produsul cartezian N^2. Faptul că R este o relaţie de echivalenţă rezultă imediat, aceasta fiind reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Dar orice relaţie de echivalenţă induce o împărţire în clase (disjuncte). Fie $\{C_i\} = N^2/R$ mulţimea acestor clase.

Ordonarea definită la punctul 1 se referă atît la perechi din clase diferite (a) cît şi la perechile unei aceleiaşi clase (b).

3. Pentru a putea aplica regula inducţiei complete la mulţimea acestor clase să observăm în prealabil că corespondenţele $K \leftrightarrow C_k$ şi $l_0 \leftrightarrow (k, l_0)$ fiind biunivoce, atît mulţimea claselor cît şi clasele înseşi sînt mulţimi bineordonate, conservînd acelaşi tip de ordine. Evident că bineordonarea trece şi asupra mulţimii N^2.

Prin definiţie, clasa C_k are proprietatea $\mathfrak{P}$ dacă toate perechile sale au această proprietate, ceea ce vom nota $\mathfrak{P}(k, i)_{i=0,1,2,\ldots}$

Aşadar, dacă o mulţime M are proprietatea $\mathfrak{P}$, atunci fiecare submulţime a sa are această proprietate şi reciproc.

Avem deci în particular:

$$(\mathrm{T}_1) \qquad \mathfrak{P}(M_1 \cup M_2) = \mathfrak{P}(M_1) \,\&\, \mathfrak{P}(M_2).$$

De asemenea, dacă mulţimea N este inclusă în M şi dacă M are proprietatea $\mathfrak{P}$, atunci şi N are proprietatea $\mathfrak{P}$, ceea ce ne permite să scriem:

$$(\mathrm{T}_2) \qquad N \subset M \rightarrow [\mathfrak{P}(M)] \rightarrow \mathfrak{P}(N)].$$

Pe baza celor de mai sus putem aplica regula inducţiei simple (1.1) la m mulţimea $\{C_i\}$ sub forma

$$(2.1) \qquad \mathfrak{P}(C_0) \,\&\, (\forall k)\, [\mathfrak{P}(C_k) \rightarrow \mathfrak{P}(C_{k+1})] \rightarrow \mathfrak{P}(C_m).$$

4. În virtutea afirmaţiilor de la punctul precedent putem transpune inducţia (2.1) asupra perechilor din clasele respective.

$$\text{Deoarece: } C_0 = \{(0, i)\}_{i=0,1,\ldots} = \{(0, n)\}\,;\ \mathfrak{P}(C_0) = \mathfrak{P}[(0, n)] = \mathfrak{P}(0, n)$$

$$C_k = \{(k, i)\}_{i=0,1\ldots} = \{(k, n)\}\,;\ \mathfrak{P}(C_k) = \mathfrak{P}[(k, n)] = \mathfrak{P}(k, n)$$

$$C_{k+1} = \{(k+1, i)\}_{i=0,1,\ldots} = \{(k+1, n)\}\,;\ \mathfrak{P}(C_{k+1}) = \\ = \mathfrak{P}[(k+1, n)] = \mathfrak{P}(k+1, n).$$

Aplicînd (2.1) obţinem

$$(2.1_a) \qquad \mathfrak{P}(0, n) \,\&\, (\forall k)\, [\mathfrak{P}(k, n) \rightarrow \mathfrak{P}(k+1, n)] \rightarrow \mathfrak{P}(m, n).$$

Cum în general $\mathfrak{P}(0, n)$ nu este evidentă, pentru demonstrarea ei aplicăm (1.1) la mulţimea $C_0 = \{(0, n)\}$ astfel:

$$(2.1_b) \qquad \mathfrak{P}(0,0) \,\&\, (\forall j)\, [\mathfrak{P}(0, j) \rightarrow \mathfrak{P}(0, j+1)] \rightarrow \mathfrak{P}(0, n).$$

Așadar inducția (2.1) conduce la două inducții simple (2.1_a) și (2.1_b) de tipul (1.1), dintre care (2.1_b) constituie etapa inițială pentru (2.1_a).

Spre a reuni ultimele două formule ne folosim de lema

$$(\mathfrak{L}) \qquad \mathfrak{A} \to \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \& \mathfrak{C} \to \mathfrak{D} \vdash \mathfrak{A} \& \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$$

Demonstrație. În expresia $\mathfrak{B} \& \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ separăm ipotezele și obținem $\mathfrak{B} \to (\mathfrak{C} \to \mathfrak{D})$, iar aceasta prin silogism cu $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ne conduce la $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{C} \to \mathfrak{D})$, unde reunind ipotezele obținem concluzia $\mathfrak{A} \& \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$.

Aplicînd $(\mathfrak{L})$ pentru $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}(0, 0) \& (\forall j)\,[\mathfrak{P}(0, j) \to \mathfrak{P}(0, j + 1)]$; $\mathfrak{B}/\mathfrak{P}(0, n)$; $\mathfrak{C}/(\forall k)\,[\mathfrak{P}(k, n) \to \mathfrak{P}(k + 1, n)]$; $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}(m, n)$ și ținînd cont de (2.1_a) și (2.1_b) obținem *inducția dublă* :

$$(2.2) \qquad \mathfrak{P}(0, 0) \& (\forall j)\,[\mathfrak{P}(0, j) \to \mathfrak{P}(0, j+1)] \& (\forall k)\,[\mathfrak{P}(k, n) \to \mathfrak{P}(k + 1, n)] \to \mathfrak{P}(m, n)$$

a cărei reprezentare schematică este :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{(0, 0)} \arrow[r] \arrow[d] & (0, 1) \arrow[r] \arrow[d] & (0, 2) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & (0, n) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
(1, 0) \arrow[d] & (1, 1) \arrow[d] & (1, 2) \arrow[d] & \ldots & (1, n) \arrow[d] & \ldots \\
(2, 0) \arrow[d] & (2, 1) \arrow[d] & (2, 2) \arrow[d] & \ldots & (2, n) \arrow[d] & \ldots \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
(n, 0) \arrow[d] & (n, 1) \arrow[d] & (n, 2) \arrow[d] & \ldots & (n, n) \arrow[d] & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Atît rezultatele, cît mai ales procedeele de mai sus le vom utiliza în cele ce urmează.

§ 3. INDUCȚIA SIMULTANĂ

1. În aceeași mulțime N^2 să introducem o nouă ordonare și anume :

$$(n_1, n_1') > (n_2, n_2')$$

dacă

a) $\min(n_1, n_1') > \min(n_2, n_2')$ sau

b) $\min(n_1, n_1') = \min(n_2, n_2')$ iar $\max(n_1, n_1') > \max(n_2, n_2')$ sau

c) $\min(n_1, n_1') = \min(n_2, n_2')$, $\max.\ (n_1, n_1') = \max(n_2, n_2')$ iar $n_1 > n_2$ (deci perechile diferă doar prin ordinea componentelor)

Evident că în cazul ultim dacă am avea $n_1 = n_2$, atunci perechile ar coincide : $(n_1, n_1') = (n_2, n_2')$.

Se verifică în același mod că axiomele ordonării A_D și A_T sînt satisfăcute.

2. Să considerăm acum în mulțimea N^2 o nouă relație, R', definită prin:

$$(n_1, n_1')\, R'\, (n_2, n_2') \leftrightarrow \min(n_1, n_1') = \min(n_2, n_2').$$

Dacă $n_1 = n_1'$, atunci $\min(n_1, n_1') = n_1 = n_1'$.
Putem deci scrie că

$$(n_1, n_1') \equiv (n_2, n_2') \bmod R'.$$

Constatăm că și R' este o relație de echivalență și deci furnizează mulțimea claselor $\{C_i'\} = N^2/R'$, unde o clasă are forma:

$$C_l' = \{(l, i)\}_{i \geqslant l} \cup \{(j, l)\}_{j \geqslant l}$$

ceea ce înseamnă că am socotit perechea (l, l) ca fiind luată de două ori, fapt care nu afectează cu nimic raționamentul. Vom nota deci

$$C_l' = \{(l, i)\} \cup \{(j, l)\}_{i,\, j \geqslant l}.$$

Astfel, toate considerentele asupra claselor $\{C_i\}$ se mențin și la clasele $\{C_i'\}$.

3. Aplicînd acestor clase regula (1.3) obținem:

$$(\exists l)\,\{\mathfrak{P}(C_0')\,\&\,[\mathfrak{P}(C_l') \rightarrow \mathfrak{P}(C_{l+1}')] \rightarrow \mathfrak{P}(C_n')\}. \tag{3.1}$$

Ținînd cont că $C_0' = \{(0, i)\} \cup \{(j, 0)\}_{i,\, j \geqslant 0} = \{(m, 0)\} \cup \{(0, n)\}$, unde atît m cît și n reprezintă orice număr natural, utilizînd (T_1) avem:

$$\mathfrak{P}(C_0') = \mathfrak{P}[\{(0, n)\} \cup \{(m, 0)\}] = \mathfrak{P}(0, n)\,\&\,\mathfrak{P}(m, 0).$$

Analog

$$\mathfrak{P}(C_l') = \mathfrak{P}(l, i)\,\&\,\mathfrak{P}(j, l)_{i,\, j \geqslant l}$$

iar

$$\mathfrak{P}(C_{l+1}') = \mathfrak{P}(l+1, i')\,\&\,\mathfrak{P}(j', l+1)_{i',\, j' \geqslant l+1}$$

Astfel (3.1) devine:

$$(\exists l)\,\{\mathfrak{P}(0, n)\,\&\,\mathfrak{P}(m, 0)\,\&\,[\mathfrak{P}(l, i)\,\&\,\mathfrak{P}(j, l)_{i,\, j \geqslant l} \rightarrow \mathfrak{P}(l + \\ + 1, i')\,\&\,\mathfrak{P}(j', l+1)]_{i',\, j' \geqslant l+1} \rightarrow \mathfrak{P}(m, n)\} \tag{3.2}$$

sau

$$(\exists l)\,\{\mathfrak{A}\,\&\,[\mathfrak{X}(l) \rightarrow \mathfrak{Y}(l)] \rightarrow \mathfrak{D}\}.$$

4. Vom efectua unele transformări asupra expresiei obținute astfel ca să avem:

$$\{\mathfrak{A}\,\&\,[\mathfrak{X}(l) \rightarrow \mathfrak{Y}(l)] \rightarrow \mathfrak{D}\} \rightarrow \{\mathfrak{A}\,\&\,[\mathfrak{X}'(l) \rightarrow \mathfrak{Y}'(l)] \rightarrow \mathfrak{D}\}, \tag{α}$$

unde $\mathfrak{X}'(l)$ și $\mathfrak{Y}'(l)$ se obțin respectiv din $\mathfrak{X}(l)$ și $\mathfrak{Y}(l)$ prin eliminarea restricțiilor.

Formula (α) are loc în următoarele cazuri:

$$[\mathfrak{X}'(l) \rightarrow \mathfrak{Y}'(l)] \rightarrow [\mathfrak{X}(l) \rightarrow \mathfrak{Y}(l)]. \tag{a}$$

În lema ($\mathfrak{L}$) permutînd ipotezele $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ respectiv $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ și aplicînd teorema deducției, obținem

$$(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to [(\mathcal{C} \,\&\, \mathcal{B} \to \mathcal{D}) \to (\mathcal{C} \,\&\, \mathcal{A} \to \mathcal{D})].$$

Făcînd substituțiile $\mathcal{A}/\mathfrak{X}'(l) \to \mathfrak{Y}'(l)$; $\mathcal{B}/\mathfrak{X}(l) \to \mathfrak{Y}(l)$; $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ și separînd cu (a) obținem (α).

(b) $\qquad \mathfrak{X}(l) \to \mathfrak{X}'(l)$ și $\mathfrak{Y}'(l) \to \mathfrak{Y}(l)$.

Într-adevăr, avem

(b′) $\qquad \mathfrak{X}(l) \to \mathfrak{X}'(l),\ \mathfrak{Y}'(l) \to \mathfrak{Y}(l),\ \mathfrak{X}'(l) \to \mathfrak{Y}'(l) \vdash \mathfrak{X}(l) \to \mathfrak{Y}(l)$

căci prin aplicarea de două ori a regulei silogismului, din ipotezele date ajungem la concluzia respectivă.

Din (b′) prin teorema deducției rezultă :

$$[\mathfrak{X}(l) \to \mathfrak{X}'(l)] \to \{[\mathfrak{Y}'(l) \to \mathfrak{Y}(l)] \to \{[\mathfrak{X}'(l) \to \mathfrak{Y}'(l)] \to [\mathfrak{X}(l) \to \mathfrak{Y}(l)]\}$$

Aplicînd regula separației de două ori cu ipotezele de la (b) rezultă (a), iar din (a) am demonstrat că rezultă (α).

5. Deoarece $[\{(l+1,\ i')\} \cup \{(j',\ l+1)\}]_{i',j' \geqslant l+1} \subset [\{(l+1, i)\} \cup \cup \{(j,\ l+1)\}]_{i,j \geqslant l}$ aplicînd (T_2) obținem

$$\mathfrak{Q}(l+1,\ i) \,\&\, \mathfrak{Q}(j,\ l+1)_{i,j \geqslant l} \to \mathfrak{Q}(l+1,\ i') \,\&\, \mathfrak{Q}(j';\ l+1)_{i',j' \geqslant l+1}$$

deci o implicație de forma $\mathfrak{Y}'(l) \to \mathfrak{Y}(l)$ din cazul (b), unde $\mathfrak{X}(l)$ rămîne același. Deci implicația $\mathfrak{X}'(l) \to \mathfrak{Y}'(l)$ ia forma :

$$\mathfrak{Q}(l,\ i) \,\&\, \mathfrak{Q}(j,\ l)_{i,j \geqslant l} \to \mathfrak{Q}(l+1,\ i) \,\&\, \mathfrak{Q}(j,\ l+1)_{i,j \geqslant l} = [\mathfrak{Q}(l,\ i) \,\&\, \mathfrak{Q}(j,\ l) \to$$

$$\to \mathfrak{Q}(l+1,\ i) \,\&\, \mathfrak{Q}(j,\ l+1)]_{i,j \geqslant l} = \mathfrak{I}(l).$$

Suprimînd restricțiile din $\mathfrak{I}(l)$ obținem :

$$\mathfrak{I}'(l) = \mathfrak{Q}(l,\ i) \,\&\, \mathfrak{Q}(j,\ l) \to \mathfrak{Q}(l+1,\ i) \,\&\, \mathfrak{Q}(j,\ l+1)$$

iar conform cu (T_2) avem $\mathfrak{I}'(l) \to \mathfrak{I}(l)$ adică o implicație de forma (a).

Așadar (α) devine

$$[\mathcal{A} \,\&\, \mathfrak{I}(l) \to \mathcal{D}] \to [\mathcal{A} \,\&\, \mathfrak{I}'(l) \to \mathcal{D}]$$

sau

(β) $\qquad \mathfrak{A}(l) \to \mathfrak{A}'(l),$

oricare ar fi l.

Dar noi am demonstrat că $(\exists l)\, \mathfrak{A}(l)$, (32). Fie deci l_0 un asemenea parametru pentru care $\mathfrak{A}(l_0)$ este adevărată. Cu substituția l/l_0, (β) devine $\mathfrak{A}(l_0) \to \mathfrak{A}'(l_0)$ din care separînd prin $\mathfrak{A}(l_0)$ obținem $\mathfrak{A}'(l_0)$.

Deci $(\exists l)\, \mathfrak{A}'(l)$ sau avînd în vedere substituțiile făcute pe parcurs și revenind la forma (1.1) :

(3.2 a) $\qquad \mathfrak{Q}(0,\ n) \,\&\, \mathfrak{Q}(m,\ 0) \,\&\, (\forall l)\, [\mathfrak{Q}(l,\ i) \,\&\, \mathfrak{Q}(j,\ l) \to$

$$\to \mathfrak{Q}(l+1,\ i) \,\&\, \mathfrak{Q}(j,\ l+1)] \to \mathfrak{Q}(m,\ n)$$

care este o formulă de *inducție simultană*.

Schematic o putem reprezenta astfel:

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{(0,0)} & \boxed{(0,1)} & \boxed{(1,0)} & \boxed{(0,2)} & \boxed{(2,0)}\ \ldots & \boxed{(0,n)} & \boxed{(n,0)}\ \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
(1,1) & (1,2) & (2,1) & (1,3) & (3,1)\ldots & (1,n+1) & (n+1,1)\ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
(2,2) & (2,3) & (3,2) & (2,4) & (4,2)\ldots & (2,n+2) & (n+2,2)\ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
(n,n) & (n,n+1) & (n+1,n) & (n,n+2) & (n+2,n)\ldots & (n,2n) & (2n,n)\ \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Observație. Așezarea perechilor în schemă s-a făcut conform ordonării introduse.

Avantajul formulei (3.2a) constă în posibilitatea de a presupune simultan valabilitatea proprietăților pentru ambele variabile.

6. Transformările de la punctul 4 al acestui paragraf arată că implicația (α) rămîne valabilă în cazul că se generalizează expresia $\mathfrak{X}(l) \to \mathfrak{Y}(l)$ sau că se particularizează $\mathfrak{X}(l)$ și se generalizează $\mathfrak{Y}(l)$, ceea ce conduce la aceeași concluzie datorită proprietății de monotonie a implicației.

Folosind același procedeu ca la punctul precedent, pe baza observațiilor de mai sus, din (3.2a) obținem

$$\mathfrak{P}(0,n)\,\&\,\mathfrak{P}(m,0)\,\&\,(\forall p)(\forall q)[\mathfrak{P}(p,q-1)\,\&\,\mathfrak{P}(p-1,q) \to \mathfrak{P}(p,q)] \to \mathfrak{P}(m,n) \tag{3.2 b}$$

precum și

$$\mathfrak{P}(0,n)\,\&\,\mathfrak{P}(m,0)\,\&\,(\forall k)(\forall l)[\mathfrak{P}(k,l) \to \mathfrak{P}(k+1,l+1)] \to \mathfrak{P}(m,n) \tag{3.2c}$$

care se verifică după aceeași schemă ca și (3.2a).

7. În mod asemănător putem generaliza formulele obținute pentru cazul a t variabile.

Astfel (2.2) devine

$$\begin{aligned}(3.3)\ \ &\mathfrak{P}(0,\ldots,0)\,\&\,(\forall j_1)[\mathfrak{P}(j_1,\ldots,0) \to \mathfrak{P}(j_1+1,\ldots,0)]\,\&\ldots\\ &\ldots\&\,(\forall j_t)[\mathfrak{P}(0,\ldots,j_t) \to \mathfrak{P}(0,\ldots,j_t+1)]\,\&\,(\forall k_1)[\mathfrak{P}(k_1,\ldots,n_t) \to\\ &\to \mathfrak{P}(k_1+1,\ldots,n_t)]\,\&\ldots\&\,(\forall k_t)[\mathfrak{P}(n_1,\ldots,k_t) \to \mathfrak{P}(n_1,\ldots,k_t+\\ &+1)] \to \mathfrak{P}(n_1,\ldots,n_t).\end{aligned}$$

(3.2 *b*) devine

$$(3.3\,b)\ \mathfrak{L}(0, \ldots, n_t) \,\&\, \mathfrak{L}(n_1, 0, \ldots, n_t) \,\&, \ldots, \&\mathfrak{L}(n_1, n_2, \ldots, 0) \,\& \,\& (\forall p_1)(\forall p_2) \cdots (\forall p_t)[\mathfrak{L}(p_1, \cdots, p_{t-1}, p_t - 1) \,\&\, \mathfrak{L}(p_1, \cdots, p_{t-1} - 1, p_t) \,\& \ldots \&\, \mathfrak{L}(p_1 - 1, \ldots, p_t) \to \mathfrak{L}(p_1, \cdots, p_t)] \to \mathfrak{L}(n_1, \ldots, n_t)$$

iar (3.2*c*) devine

$$(3.3\,c)\ \mathfrak{L}(0, \ldots, n_t) \,\&\, \mathfrak{L}(n_1, 0, n_3, \ldots, n_t) \,\& \ldots \&\, \mathfrak{L}(n_1, \ldots, 0) \,\&\, (\forall l_1) (\forall l_2) \ldots (\forall l_t)[\mathfrak{L}(l_1, \ldots, l_t) \to \mathfrak{L}(l_1 + 1, \ldots, l_t + 1)] \to \mathfrak{L}(n_1, \ldots, n_t).$$

Primită la redacţie în 25 septembrie, 1966.

Institutul pedagogic de 3 ani Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. А. Г. Курош, *Лекции по общей алгебре*.
2. P. S. Novicov, *Elemente de logică matematică*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1966.

ASUPRA MIŞCĂRII APELOR ARTEZIENE ÎN ANUMITE DOMENII CONCAVE

DE

SORIN GOGONEA

Lucrarea studiază mişcarea apelor arteziene în domenii de tipul celor reprezentate în figura 1. Frontiera domeniului ocupat de mediul poros este fie în întregime contur de alimentare, fie conţine anumite porţiuni impermeabile. Pentru cazuri particulare importante se obţin formule simple pentru debit.

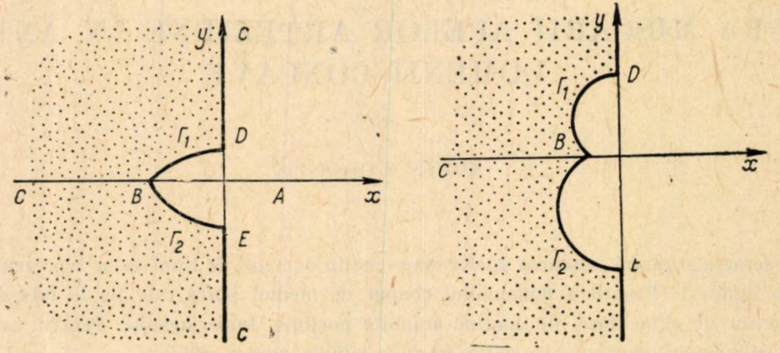
§ 1. Problema mişcării plane orizontale a fluidelor în medii poroase către nişte puţuri perfecte practicate în stratul permeabil, a fost destul de mult studiată, datorită în special importanţei ei practice. În cazul cînd frontiera de alimentare se întinde la infinit, schema cea mai simplă care s-a imaginat este desigur aceea în care mediul poros ocupă un semiplan. Soluţia corespunzătoare este imediată şi ea este reprodusă în toate tratatele de teoria filtraţiei. Această schemă simplă a fost generalizată considerîndu-se că frontiera de alimentare cuprinde şi anumite curbe situate în interiorul semiplanului şi avînd extremităţile pe frontiera lui. Astfel Gh. Petrescu a considerat cazul unui contur de alimentare concav format din două raze situate pe aceeaşi dreaptă unite printr-un arc de cerc [1], precum şi cazul în care domeniul mişcării este un semiplan mai puţin două semicercuri cu centrele pe frontiera semiplanului, întreaga frontieră a acestui domeniu fiind contur de alimentare [2].

O altă direcţie de investigaţie se referă la studiul cazurilor cînd o porţiune a frontierei domeniului în care are loc mişcarea este impermeabilă. O primă problemă a fost considerată de M. Muskat [3], care a studiat mişcarea într-un semiplan a cărui frontieră este permeabilă numai de-a lungul unui segment de lungime finită. Cazul unor domenii de formă mai complicată cu frontiere ce se întind pînă la infinit şi care prezintă unele porţiuni impermeabile a fost considerat de Şt. I. Gheorghiţă [4]. În aceeaşi ordine de idei menţionăm lucrările lui H. Ene, [5], [6] care s-a ocupat de cazul mediilor poroase ce ocupă domenii mărginite.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 9, P. 1259–1272, BUCUREŞTI, 1967

Problema considerată de Muskat a fost generalizată de noi, înlocuind segmentul permeabil printr-un arc de cerc de rază oarecare, situat în semiplanul în care se află mediul poros [7]. Mai general, cazul în care o porțiune oarecare a frontierei domeniului de mai sus este obturată a fost considerat în [8].

§ 2. În această lucrare vom studia mișcarea apelor arteziene într-un mediu poros ce ocupă un semiplan din care s-a extras un domeniu mărginit de două arce de cerc Γ_1 și Γ_2 avînd centrele pe frontiera semiplanului (fig. 1a și 1b). Această configurație poate prezenta interes pentru aproximarea anumitor contururi ce au un punct angulos. După cum se va vedea, problema se poate rezolva pînă la capăt, obținîndu-se pentru debit, în multe cazuri particulare importante, formule foarte simple.



a b

Fig. 1

Vom considera atît cazul frontierei complet permeabile, cît și cazul prezenței unei porțiuni impermeabile pe această frontieră.

Fie atunci $\mathfrak{D}$ domeniul ocupat de mediul poros omogen în planul $z = x + iy$ mărginit de semidreptele DC și EC și de arcele Γ_1 și Γ_2 care se intersectează în punctul $B\,(-a, 0)$. În punctul de afixă $z_0 = x_0 + iy_0$ se află centrat un puț circular perfect γ, a cărui rază δ este considerată, ca de obicei, infinit mică în raport cu celelalte dimensiuni. Considerînd mișcarea permanentă supusă legii de filtrație a lui Darcy, vom avea de determinat o funcție $\varphi\,(x, y)$ armonică și regulată în $\mathfrak{D}$, cu excepția punctului z_0, unde prezintă o singularitate logaritmică care trebuie să satisfacă următoarele condiții la limită [9]:

(1a) φ este mărginită la infinit,

(1b) $\varphi = 0$ pe porțiunile permeabile,

(1c) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ pe porțiunile impermeabile,

(1d) $\varphi = kH$ pe γ,

unde k este coeficientul de filtrație al mediului poros, iar $H > 0$ este diferența între nivelul din fluidul liber și nivelul fluidului care se află în puț.

Datorită ipotezei făcute asupra lui δ, vom căuta soluţia care satisface primele trei condiţii (1), ultima servind pentru determinarea debitului, evitînd în acest mod conexiunea multiplă a domeniului. Fie

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{2}$$

potenţialul complex al mişcării, ψ fiind funcţia de curent, şi $\zeta = \zeta(z)$ funcţia ce realizează reprezentarea conformă a domeniului $\mathfrak{D}$ pe un domeniu din planul ζ. Presupunînd că am reuşit să găsim potenţialul complex transformat $f = f(\zeta)$ şi a cărui dezvoltare în vecinătatea punctului $\zeta_0 = \zeta(z_0)$ este

$$f(\zeta) = -\frac{q}{2\pi}\ln A(\zeta - \zeta_0) + C_1(\zeta - \zeta_0) + \ldots \tag{3}$$

atunci debitul puţului $q > 0$ este dat de relaţia, [7],

$$q = \frac{2kH}{\ln \dfrac{1}{|A|\,\delta_1}}, \tag{4}$$

unde

$$\delta_1 = \delta \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=z_0}. \tag{5}$$

§ 3. Vom considera la început că întreaga frontieră a lui $\mathfrak{D}$ este contur de alimentare.

Să facem transformarea, [7],

$$Z = X + iY = \ln\frac{z-a}{z+a}, \tag{6}$$

determinaţia logaritmului fiind aceea care, în planul z prevăzut cu o tăietură de-a lungul axei Ox între punctele de abscisă $\pm a$, este reală şi po-

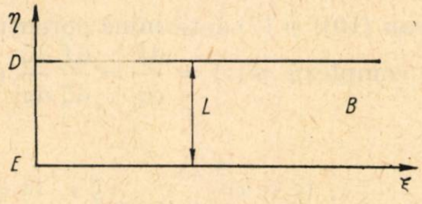


Fig. 2

zitivă pentru $z = x > a$. Domeniul transformat va fi semibanda infinită $X \in (0, +\infty)$, $Y \in (Y_2, Y_1)$, unde $Y = Y_1 > 0$ şi $Y = Y_2 < 0$ sînt imaginile arcelor Γ_1 şi Γ_2. Se vede uşor că Y_1 şi Y_2 sînt egale respectiv cu unghiurile făcute de tangentele în B la arcele Γ_1 şi Γ_2 cu axa Ox. Să punem apoi

$$\zeta = \xi + i\eta = Z - iY_2, \tag{7}$$

şi obţinem ca domeniu semibanda din figura 2 avînd lăţimea

$$L = Y_1 - Y_2, \tag{8}$$

L fiind egal cu unghiul făcut de tangentele în B la arcele Γ_1 şi Γ_2.

Imaginea izvorului va fi

$$\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 = \ln \frac{z_0 - a}{z_0 + a} - iY_2, \tag{9}$$

adică

$$\xi_0 = \ln \left| \frac{z_0 - a}{z_0 + a} \right|; \qquad \eta_0 = \arg \frac{z_0 - a}{z_0 + a} - Y_2. \tag{9'}$$

Vom avea deci de determinat o funcție $f = f(\zeta)$, analitică în domeniul $\xi \in (0, \infty)$, $\eta \in (0, L)$ avînd o singularitate logaritmică în punctul ζ_0 și a cărei parte reală se anulează pe frontieră. Ea poate fi prelungită prin simetrie în semibanda $\xi \in (-\infty, 0)$, $\eta \in (0, L)$ și condițiile la limită vor fi satisfăcute dacă introducem în punctul $-\bar{\zeta}_0$ (simetricul lui ζ_0 față de 0η), un puț de debit $-q$. Atunci potențialul complex va fi, ținînd seama de relația (13) din [7],

$$f(\zeta) = \frac{q}{2\pi} \left[\ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2L}(\zeta - \bar{\zeta}_0)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2L}(\zeta - \zeta_0)} - \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2L}(\zeta + \zeta_0)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2L}(\zeta + \bar{\zeta}_0)} \right], \tag{10}$$

sau efectuînd calcule simple

$$f(\zeta) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{L} \zeta - \operatorname{ch} \frac{\pi}{L} \bar{\zeta}_0}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{L} \zeta - \operatorname{ch} \frac{\pi}{L} \zeta_0}. \tag{11}$$

Relațiile (11) (sau (10)) și (7) determină potențialul complex în planul fizic. Pentru viteza complexă $w(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}$ obținem din aceleași relații

$$\begin{aligned} w = \frac{qa}{L} & \left[\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{L}Y_2} \frac{(z-a)^{\frac{\pi}{L}-1}}{(z+a)^{\frac{\pi}{L}+1}} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{L}Y_2} \frac{(z+a)^{\frac{\pi}{L}-1}}{(z-a)^{\frac{\pi}{L}+1}} \right] \times \\ \times & \left[\frac{1}{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{L}Y_2} \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{\frac{\pi}{L}} + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{L}Y_2} \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{-\frac{\pi}{L}} - 2\operatorname{ch} \frac{\pi}{L} \bar{\zeta}_0} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{L}Y_2} \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{\frac{\pi}{L}} + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{L}Y_2} \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{-\frac{\pi}{L}} - 2\operatorname{ch} \frac{\pi}{L} \zeta_0} \right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Se vede uşor că $|w|$ este mărginit în $\mathfrak{D}$ şi tinde către zero dacă $z \to \infty$.

Cînd $z \to -a$ obţinem că $|w| \to \infty$ dacă $L > \pi$, $|w| \to 0$ dacă $L < \pi$ şi $|w|$ tinde către o limită finită diferită de zero dacă $L = \pi$, rezultat explicabil dacă ţinem seama de semnificaţia lui L.

Pentru calculul debitului vom face uz de formula (4). Utilizînd relaţia (10) se găseşte că în vecinătatea punctului ζ_0, $f(\zeta)$ admite dezvoltarea

$$f(\zeta) = -\frac{q}{2\pi}\ln\left[(\zeta-\zeta_0)\frac{\pi}{2L}\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{L}i\eta_0}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{L}\zeta_0}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{L}\xi_0}\right] + O(\zeta-\zeta_0),$$

şi deci

$$A = \frac{\pi}{2L}\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{L}i\eta_0}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{L}\zeta_0}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{L}\xi_0}. \tag{13}$$

Apoi din (5), (6) şi (7) rezultă

$$\delta_1 = \frac{2a\delta}{|z_0^2 - a^2|} \tag{14}$$

şi debitul este astfel complet determinat.

Ca un prim exemplu să considerăm că $Y_1 = -Y_2 = \frac{\pi}{2}$, ceea ce corespunde faptului că Γ_1 şi Γ_2 formează împreună un semicerc. Să mai presupunem că izvorul se află pe axa Ox în punctul de abscisă $-d$.

Atunci avem $L = \pi$, $\eta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\xi_0 = \ln\frac{d+a}{d-a}$ şi rezultă $A = \frac{1}{4}\frac{d^2+a^2}{ad}$.

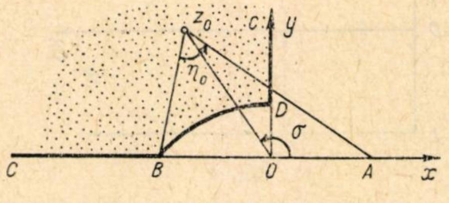


Fig. 3

Debitul se va obţine din (4) şi (14) sub forma

$$q_1 = \frac{2\pi kH}{\ln\frac{2d(d^2-a^2)}{\delta(d^2+a^2)}}. \tag{15}$$

Un caz interesant se obţine dacă facem în formulele precedente $Y_2 = 0$, rezultînd domeniul din figura 3.

Să considerăm în plus că $Y_1 = \frac{\pi}{2}$, adică Γ_1 este un sfert de cerc, iar centrul puţului se află în punctul de afixă $z_0 = de^{i\sigma}$, $\sigma \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Avem deci $\eta_0 = \arg \frac{z_0 - a}{z_0 + a}$ şi se vede uşor că η_0 este unghiul format de dreptele care pleacă din izvor şi trec prin punctele $A\,(a, 0)$, $B\,(-a, 0)$, cei doi poli ai sistemului de coordonate bipolare definit de (6). Cîteva calcule elementare arată că

$$\cos \eta_0 = \frac{d^2 - a^2}{|z_0^2 - a^2|}. \tag{16}$$

Va rezulta atunci, efectuînd toate calculele, că debitul este dat de relaţia

$$q_2 = \frac{2\pi k H}{\ln \dfrac{d(d^4 - a^4)\,|\sin 2\sigma|}{\delta \sqrt{(d^4 + a^4)^2 - 4d^4a^4 \cos^2 2\sigma}}}. \tag{17}$$

Se vede, din această relaţie, că σ poate fi înlocuit cu oricare din unghiurile făcute de raza vectoare ce trece prin izvor cu una din frontierele rectilinii ale domeniului.

Evident, dacă în (17) facem ca $a \to 0$ se obţine formula debitului pentru un domeniu ce ocupă un sfert din plan.

§ 4. Vom presupune acuma că unul din cele două arce de cerc Γ_1 sau Γ_2 este impermeabil. Fie, pentru a preciza ideile, Γ_2 acest arc. Atunci transformarea (6), urmată de

$$\zeta = Z - iY_1 \tag{18}$$

reprezintă domeniul mişcării pe semibanda $\xi \in (0, \infty)$, $\eta \in (0, -L)$

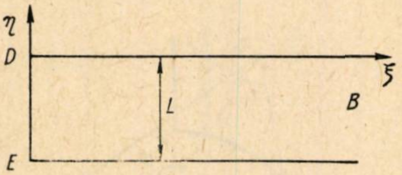


Fig. 4

din planul ζ (fig. 4), imaginea izvorului fiind punctul de afixă

$$\zeta_0 = \ln \frac{z_0 - a}{z_0 + a} - iY_1. \tag{19}$$

Va trebui să determinăm o funcţie $f = f(\zeta)$ analitică în această semibandă avînd o singularitate logaritmică în ζ_0 şi care satisface condiţiile la limită :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,\{f(\zeta)\} = 0 \text{ pentru } \eta = 0,\ \xi \in (0, \infty) \text{ şi } \xi = 0\ \ \eta \in (-L, 0),\\ &\mathrm{Im}\,\{f(\zeta)\} = 0 \text{ pentru } \eta = -L,\ \xi \in (0, \infty). \end{aligned} \tag{20}$$

Ca şi în cazul precedent, vom obţine soluţia efectuînd o prelungire analitică în semibanda simetrică faţă de axa imaginară. Ţinînd seama de formula (32) din [7] care ne dă potenţialul complex în banda $\xi \in (-\infty, +\infty)$, $\eta \in (-L, 0)$, pentru care dreapta $\eta = 0$ este contur de alimentare şi dreapta $\eta = -L$ frontieră impermeabilă, obţinem

$$f(\zeta) = \frac{q}{2\pi}\left[\ln \frac{\operatorname{th}\frac{\pi}{4L}(\zeta - \overline{\zeta}_0)}{\operatorname{th}\frac{\pi}{4L}(\zeta - \zeta_0)} - \ln \frac{\operatorname{th}\frac{\pi}{4L}(\zeta + \zeta_0)}{\operatorname{th}\frac{\pi}{4L}(\zeta + \overline{\zeta}_0)}\right], \tag{21}$$

sau după transformări simple

$$f(\zeta) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2L}\zeta + \left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{2L}\zeta_0 - \operatorname{ch}\frac{\pi}{2L}\overline{\zeta}_0\right)\operatorname{ch}\frac{\pi}{2L}\zeta - \operatorname{ch}\frac{\pi}{2L}\zeta_0 \operatorname{ch}\frac{\pi}{2L}\overline{\zeta}_0}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2L}\zeta + \left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{2L}\overline{\zeta}_0 - \operatorname{ch}\frac{\pi}{2L}\overline{\zeta}_0\right)\operatorname{ch}\frac{\pi}{2L}\zeta - \operatorname{ch}\frac{\pi}{2L}\zeta_0 \operatorname{ch}\frac{\pi}{2L}\overline{\zeta}_0}. \tag{22}$$

Relaţiile (7) şi (21) ne dau potenţialul complex în planul fizic. Ca şi mai înainte, se poate obţine expresia vitezei complexe. Această expresie fiind destul de lungă, însă uşor de obţinut, nu o mai scriem. Vom menţiona numai că ea se anulează la infinit, iar în punctul B va fi infinită, nulă sau finită şi diferită de zero după cum $L > \frac{\pi}{2}$, $L < \frac{\pi}{2}$ sau $L = \frac{\pi}{2}$, ceea ce trebuia să ne aşteptăm ţinînd seama de semnificaţia lui L.

Dezvoltarea (3) în vecinătatea punctului ζ_0 se obţine luînd

$$A = \frac{\pi}{4L} \frac{1}{\operatorname{th}\frac{\pi}{2L} i\eta_0} \frac{\operatorname{th}\frac{\pi}{2L}\zeta_0}{\operatorname{th}\frac{\pi}{2L}\xi_0}, \tag{23}$$

unde

$$\xi_0 = \ln\left|\frac{z_0 - a}{z_0 + a}\right|, \quad \eta_0 = \arg\frac{z_0 - a}{z_0 + a} - Y_1, \tag{24}$$

în timp ce δ_1 este dat de (14).

Vom explicita acum formulele pentru debit în cîteva cazuri particulare

a) Fie $Y_1 = -Y_2 = \frac{\pi}{2}$ deci şi Γ_1 şi Γ_2 formează un semicerc şi ca mai înainte fie $z_0 = -d$. Atunci $L = \pi$, $\eta_0 = -\frac{\pi}{2}$ şi rezultă $|A| = \frac{1}{4}\left(\operatorname{ch}\frac{\xi_0}{2}\right)\left(\operatorname{sh}\frac{\xi_0}{2}\right)^{-1}$. Pentru debit se obţine

$$q_3 = \frac{2\pi kH}{\ln\frac{2(d^2 - a^2)}{\delta d}}. \tag{25}$$

Cum este și firesc, se vede din (15) și (25) că $q_3 < q_1$.

b) Dacă $Y_1 = - Y_2 = \pi$, Γ_1 și Γ_2 se reduc la o tăietură de-a lungul segmentului $(-a, 0)$ de pe axa Ox, marginea inferioară a tăieturii fiind impermeabilă. Dacă $z_0 = - d$ obținem, avînd în vedere că $\eta_0 = \pi$,

$$q_4 = \frac{2\pi kH}{\ln \dfrac{4(d^2 - a^2)}{\delta(d + \sqrt{(d^2 + a^2)}}}. \tag{26}$$

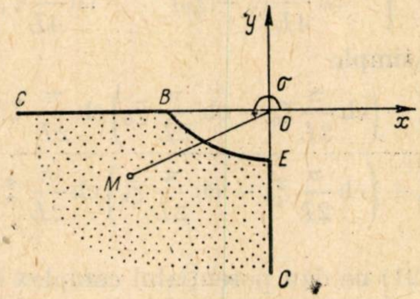


Fig. 5

c) Dacă $Y_1 = 0$, formulele acestui paragraf ne dau elementele mișcării în domeniul din figura 5.

Să considerăm ca și mai înainte că Γ_2 este un semicerc $\left(Y_2 = - \dfrac{\pi}{2}\right)$ și $z_0 = de^{i\sigma}$, $\sigma \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Considerații întrutotul analoage celor din paragraful precedent ne conduc pentru debit la formula

$$q_5 = \frac{2\pi kH}{\ln \dfrac{d\,|\sin 2\sigma|\sqrt{(d^4 + a^4)^2 - 4a^4d^4\cos^2 2\sigma}}{\delta(d^4 - a^4)}}, \tag{27}$$

unde din nou σ poate fi înlocuit cu unghiul făcut de OM cu una din laturile BC sau EC. Prin simplă comparație se vede că $q_5 < q_2$, cum era și firesc. Dacă facem ca $a \to 0$, regăsim debitul pentru cazul domeniului ce ocupă un sfert de plan.

§ 5. În acest paragraf vom considera că numai arcele Γ_1 și Γ_2 sînt frontiere de alimentare, dreptele DC și EC fiind impermeabile. Atunci transformările (6) și (7) ne vor conduce la domeniul din figura 2, centrul puțului fiind dat de relațiile (9) și (9'). Potențialul complex transformat $f = f(\zeta)$ va trebui determinat din condițiile la limită

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{f(\zeta)\} = 0 \text{ pentru } \eta = 0,\ \xi \in (0, \infty) \text{ și } \eta = L,\ \xi \in (0, \infty) \\ &\operatorname{Im}\{f(\zeta)\} = 0 \text{ pentru } \xi = 0,\ \eta \in (0, L) \end{aligned} \tag{28}$$

L fiind dat de relaţia (8). Vom putea satisface imediat aceste condiţii dacă vom introduce în punctul de afixă $-\bar{\zeta}_0$ un izvor de debit q şi scriind potenţialul pentru banda $\xi \in (-\infty, +\infty)$, $\eta \in (0, L)$, a cărui parte reală se anulează pe frontieră. Analog cu relaţia (10) va rezulta

$$f(\zeta) = \frac{q}{2\pi}\left[\ln\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2L}(\zeta - \bar{\zeta}_0)}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2L}(\zeta - \zeta_0)} + \ln\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2L}(\zeta + \zeta_0)}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2L}(\zeta + \bar{\zeta}_0)}\right], \tag{29}$$

sau

$$f(\zeta) = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{L}(\zeta + i\eta_0) - \mathrm{ch}\,\frac{\pi}{L}\,\xi_0}{\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{L}(\zeta - i\eta_0) - \mathrm{ch}\,\frac{\pi}{L}\,\xi_0}. \tag{30}$$

Relaţiile (29) şi (7) ne dau expresia potenţialului complex în planul fizic. Dacă se calculează viteza complexă, se obţine o expresie analoagă cu (12), comportamentul în vecinătatea punctului de la infinit şi a punctului $z = -a$ fiind acelaşi ca în cazul frontierei complet permeabile.

Dezvoltînd potenţialul complex dat de (29) în vecinătatea punctului $\zeta = \zeta_0$ se obţine că

$$A = \frac{\pi}{2L}\,\frac{1}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{L}\,i\eta_0}\,\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{L}\,\xi_0}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{L}\,\zeta_0}. \tag{31}$$

Evident, δ_1 va fi dat de (14) şi în acest mod debitul este complet determinat.

Ca aplicaţie vom considera aceleaşi cazuri din paragraful precedent, pentru care se obţin din nou formule foarte simple

a) Fie $Y_1 = -Y_2 = \frac{\pi}{2}$, $z_0 = -d$, deci $\eta_0 = \frac{\pi}{2}$ şi $\xi_0 = \ln\frac{d+a}{d-a}$.

Rezultă uşor $|A| = \frac{ad}{d^2 + a^2}$ şi cum $\delta_1 = \frac{2a}{d^2 - a^2}$ avem

$$q_6 = \frac{2\pi kH}{\ln\left(\frac{d^2 - a^2}{\delta a}\,\frac{d^2 + a^2}{2da}\right)}. \tag{32}$$

Regăsim astfel formula (35) din [7].

b) Fie $Y_1 = -Y_2 = \pi$, $z_0 = -d$, deci considerăm cazul cînd porţiunea permeabilă se reduce la o tăietură de lungime a, puţul fiind centrat pe axa tăieturii. Atunci $\eta_0 = \pi$, ξ_0 are aceeaşi valoare ca mai sus şi rezultă pentru debit

$$q_7 = \frac{2\pi kH}{\ln\frac{2d(d^2 - a^2)}{\delta a^2}}. \tag{33}$$

E clar că $q_7 \to 0$ cînd $a \to 0$ aşa cum trebuia, căci în acest caz se ajunge la cazul semiplanului cu întreaga frontieră obturată.

c) Dacă luăm $Y_2 = 0$ obţinem mişcarea în domeniul din figura 3, la care însă frontiera DC este impermeabilă. Dacă Γ_2 este un semicerc $\left(Y_2 = -\dfrac{\pi}{2}\right)$, iar $z_0 = de^{i\sigma}$, $\sigma \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ vom avea $\zeta_0 = \ln\dfrac{z_0 - a}{z_0 + a}$, $\zeta_0 = = \ln\left|\dfrac{z_0 - a}{z_0 + a}\right|$, iar η_0 satisface relaţia (16).

Calculînd valoarea (31) a lui A şi ţinînd seama de (14), relaţia (4) ne dă pentru debit expresia

$$q_8 = \frac{2\pi kH}{\ln\dfrac{2\,|\operatorname{tg}\sigma|\,(d^2 - a^2)\sqrt{d^4 + a^4 + 2d^2a^2\cos^2 2\sigma}}{\delta\,(d^2 + a^2)\sqrt{d^4 + a^4 - 2d^2a^2\cos^2 2\sigma}}}. \tag{34}$$

Se constată imediat că în (34) σ poate fi înlocuit cu unghiul făcut de raza vectoare ce trece prin izvor cu frontiera de alimentare rectilinie (BC).

Pentru $a \to 0$, q_8 ne dă debitul mişcării într-un sfert de plan, una din cele două drepte care-l mărginesc fiind impermeabilă.

§ **6**. Vom presupune acuma că din întreaga frontieră a domeniului $\mathcal{D}$ numai unul din cele două arce de cerc, fie Γ_1, constituie frontiera de alimentare, restul frontierei fiind obturată.

Utilizînd transformările (6) şi (18) vom obţine în planul ζ domeniul din figura 4 la care se adaugă faptul că segmentul DE corespunde unei frontiere impermeabile. Potenţialul complex se va obţine introducînd în punctul de afixă $-\overline{\zeta}_0$ un izvor de debit q (ca şi la § 5). Vom avea, ţinînd seama de formula (32) din [7],

$$f(\zeta) = \frac{q}{2\pi}\left[\ln\frac{\operatorname{th}\dfrac{\pi}{4L}(\zeta - \overline{\zeta}_0)}{\operatorname{th}\dfrac{\pi}{4L}(\zeta - \zeta_0)} + \ln\frac{\operatorname{th}\dfrac{\pi}{4L}(\zeta + \zeta_0)}{\operatorname{th}\dfrac{\pi}{4L}(\zeta + \overline{\zeta}_0)}\right]. \tag{35}$$

Ţinînd seama de analogia cu formula (21), rezultă că în acest caz

$$A = \frac{\pi}{4L}\,\frac{1}{\operatorname{th}\dfrac{\pi}{2L}\,i\eta_0}\,\frac{\operatorname{th}\dfrac{\pi}{2L}\,\xi_0}{\operatorname{th}\dfrac{\pi}{2L}\,\zeta_0}. \tag{36}$$

Ca exemplificare şi pentru a face anumite comparaţii, vom relua cazurile particulare considerate în paragrafele precedente. Ţinînd seama de forma lui A dat de (36), în raport cu cea dată de (23), şi de faptul că ξ_0, η_0 şi ζ_0 vor avea respectiv aceleaşi expresii, rezultatele calculelor pentru debit se transpun uşor în acest caz.

a) Cazul semicercului $\left(Y_1 = -Y_2 = \frac{\pi}{2}\right)$. Avem pentru debit expresia

$$q_9 = \frac{2\pi k H}{\ln \dfrac{2d\,(d^2 - a^2)}{\delta a^2}}. \tag{37}$$

Se verifică imediat că există neegalitățile $q_9 < q_3$ și $q_9 < q_6$, ceea ce este în acord cu imaginea fizică a fenomenului.

b) Cazul $Y_1 = -Y_2 = \pi$ corespunde tăieturii permeabile numai pe una din cele două margini. Debitul va fi dat de

$$q_{10} = \frac{2\pi k H}{\ln \dfrac{4\,(d^2 - a^2)\,(d + \sqrt{d^2 + a^2})}{\delta a^2}}. \tag{38}$$

și rezultă ușor că $q_{10} < q_7$.

c) Cazul $Y_1 = 0$, $Y_2 = -\frac{\pi}{2}$ corespunde mișcării în domeniul din figura 5 la care în plus semidreapta EC este impermeabilă.

Rezultă pentru debit

$$q_{11} = \frac{2\pi k H}{\ln \dfrac{2d\,(d^2 + a^2)}{\delta\,(d^2 - a^2)}\, \dfrac{\sqrt{d^4 + a^4 - 2a^2d^2\cos 2\sigma}}{\sqrt{d^4 + a^4 + 2a^2d^2\cos 2\sigma}}\,\operatorname{tg}\sigma}, \tag{39}$$

unde σ poate fi înlocuit cu unghiul făcut de raza vectoare a izvorului cu peretele rectiliniu impermeabil.

d) Este interesant de observat că potențialul complex dat de (35), (6) și (18) convine și pentru domeniul din figura 3 dacă se consideră că frontierele rectilinii BC și CD sînt impermeabile. Este suficient pentru aceasta să luăm $Y_1 \neq 0$, $Y_2 = 0$. Să presupunem în particular că $Y_1 = \frac{\pi}{2}$, adică Γ_1 este un sfert de cerc. Atunci $\eta_0 = \arg \frac{z_0 - a}{z_0 + a} - \frac{\pi}{2}$, $\xi_0 = \ln \left|\frac{z_0 - a}{z_0 + a}\right|$, unde $z_0 = d e^{i\sigma}$, $\sigma \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și rezultă pentru debit expresia

$$q_{12} = \frac{2\pi k H}{\ln \dfrac{(d^4 - a^4)\sqrt{(d^4 + a^4)^2 - 4a^4d^4\cos^2 2\sigma}}{4a^4d^3\delta\,|\sin 2\sigma|}}. \tag{40}$$

Ca verificare observăm că $q_{12} \to 0$ pentru $a \to 0$, ceea ce e firesc, căci în acest caz frontierele domeniului sînt complet obturate.

§ 7. Vom studia acum un ultim caz, acela în care arcele Γ_1 şi Γ_2 sînt impermeabile, frontierele rectilinii constituind conturul de alimentare. Utilizînd transformările (6) şi (7) vom obţine în planul ζ domeniul din figura 2 în care semidreptele DB şi EB sînt impermeabile iar segmentul DE permeabil, afixa izvorului de debit q fiind ζ_0 dat de (9). Potenţialul complex pentru acest domeniu se poate obţine utilizînd bine cunoscuta metodă a imaginilor. Rezultă astfel formula

$$f(\zeta) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\mathrm{ch} \frac{\pi}{L} (\zeta + \xi_0) - \cos \frac{\pi}{L} \eta_0}{\mathrm{ch} \frac{\pi}{L} (\zeta - \xi_0) - \cos \frac{\pi}{L} \eta_0}, \tag{41}$$

care împreună cu (7) ne dă expresia potenţialului complex în planul fizic. Se poate arăta destul de uşor că partea reală a acestui potenţial coincide cu potenţialul vitezelor utilizat de M. Muskat în problema la care ne-am referit la § 1.

Fără a mai insista asupra expresiei vitezei complexe şi a comportamentului ei la infinit şi în punctul B, care este cel normal, vom trece la determinarea debitului. În acest caz calcule simple arată că A din formula (3) este dat de :

$$A = \frac{\pi}{2L} \frac{\mathrm{sh} \frac{\pi}{L} i\eta_0}{\mathrm{sh} \frac{\pi}{L} \zeta_0 \, \mathrm{sh} \frac{\pi}{L} \xi_0}, \tag{42}$$

în timp ce δ_1 este dat de (14) ceea ce determină complet debitul.

Reluînd iarăşi exemplele de mai sus vom avea

a) Cazul $Y_1 = -Y_2 = \frac{\pi}{2}$, $z_0 = -d$, deci $\eta_0 = \frac{\pi}{2}$, ne dă pentru debit

$$q_{13} = \frac{2\pi kH}{\ln \frac{2d(d^2 + a^2)}{\delta(d^2 - a^2)}},$$

şi se constată uşor că $q_{13} < q_1$ şi $q_{13} < q_3$ cum era şi firesc.

b) Dacă $Y_1 = -Y_2 = \pi$, adică avem cazul tăieturii impermeabile, iar $z_0 = -d$ se obţine pentru debit relaţia

$$q_{14} = \frac{2\pi kH}{\ln \frac{2d}{\delta}}, \tag{44}$$

care coincide cu formula debitului pentru semiplan, ceea ce era de aşteptat deoarece axa Ox este acum linie de curent şi prezenţa tăieturii nu influenţează, în acest caz, cu nimic mişcarea.

c) Cazul $Y_2 = 0,\ Y_1 = \frac{\pi}{2}$ coincide cu exemplul c) de la § 6 şi îi corespunde debitul dat de q_{11}.

§ 8. Să remarcăm în încheiere că în această lucrare am considerat numai cazurile în care porţiunea impermeabilă acoperă în întregime una din cele patru componente ale frontierei domeniului $\mathfrak{D}$ (arcele Γ_1 şi Γ_2 şi razele DC şi EC).

Cazul în care porţiunea impermeabilă ocupă o poziţie oarecare pe frontiera lui $\mathfrak{D}$ este mai complicat. El poate fi abordat combinînd metoda utilizată în această lucrare cu aceea din [7], ceea ce vom face într-un articol viitor.

Primită la redacţie la 16 mai 1967

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. GH. PETRESCU, *Asupra debitului puţurilor arteziene în cîteva cazuri particulare.* Gazeta matematică, seria A. **LXIX**, *9*, 331 (1964).
2. GH. PETRESCU, *Asupra mişcării apelor arteziene într-un domeniu concav.* St. cerc. mat., **17**, *7*, 1453 (1965).
3. M. MUSKAT, *The flow of homogeneous fluids through porous media.* Michigan, 1946.
4. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, *Asupra mişcării apelor arteziene.* Analele Univ. Buc., Seria St. Naturii, **15**, *51* (1957).
5. H. ENE, *Generalizarea unei probleme din mişcarea apelor arteziene.* St. cerc. mec. apl., **19**, *4*, 1043 (1965).
6. H. ENE, *Asupra unor probleme din mişcarea apelor arteziene.* St. cerc. mat., **19**, *1*, 55 (1967).
7. S. GOGONEA, *Sur les mouvements plans dans les milieux poreux en présence d'une classe des frontiéres d'alimentation.* Journal de Mécanique, **5**, *3*, 309 (1966).
8. S. GOGONEA, *Sur le mouvement des eaux artésiennes en présence des quelques contoure d'alimentation partiellement obturés.* Rev. Roum. math. pures et appl. (1967).
9. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană.* Ed. Academiei, Bucureşti, 1966.

O REPREZENTARE A CLASELOR CHERN ÎNTREGI CU AJUTORUL FORMELOR CU SINGULARITĂȚI

DE

ALEXANDRU MIHAI

Se dă o reprezentare pentru clasele Chern întregi analoagă celei dată de Allendoerfer și Eells [1], [2].

Fie $\mathfrak{C}(X, R)$ algebra formelor diferențiale pe varietatea X și $\mathfrak{H}(X, R)$ algebra de coomologie.

Pentru orice $\theta \in \mathfrak{C}(X, R)$ se asociază un colanț singular (diferențiabil) $h\theta$ după formula

$$h\theta \cdot c = \int_c \theta (c - \text{lanț diferențiabil real}).$$

Din formula lui Stokes rezultă că h induce un omomorfism $h^* : \mathfrak{H}(X, R) \to H(X, R)$. Teorema lui de Rham afirmă că h^* este un izomorfism al algebrei $\mathfrak{H}(X, R)$ pe algebra de coomologie singulară $H(X, R)$. Clasa de coomologie a oricărui cociclu singular real este în acest mod reprezentabilă prin clasa de coomologie a unei forme diferențiale închise.

Sînt cunoscute expresiile formelor care reprezintă clasele caracteristice Chern reale [3].

Allendoerfer și Eells [1] dau o reprezentare prin așa-numitele forme diferențiale cu singularități pentru coomologia cu coeficienți în orice subinel dat al numerelor reale.

Reprezentarea claselor caracteristice Stiefel-Whitney corespunzătoare este dată de Eells în [2].

Scopul acestei lucrări este de a da o reprezentare de același tip pentru clasele Chern întregi.

I

O (A, r) pereche de forme diferențiabile (θ, ω) pe varietatea diferențiabilă X constă din : o $(r-1)$- formă diferențiabilă ω definită pe X eventual cu excepția unui poliedru diferențiabil $e(\omega)$ de dimensiune $\leqslant n - r$, o

CERC. MAT. TOM. 19, NR. 9, P. 1273–1283, BUCUREȘTI, 1967

r-formă diferențiabilă θ definită pe X cu excepția unui subpoliedru $e(\theta)$ al lui $e(\omega)$ de dimensiune $\leqslant n-r-1$, cerînd ca $d\omega = \theta$ pe intersecția domenilor de definiție corespunzătoare și ca pentru orice lanț întreg diferențiabil c îndeplinind condițiile $|c| \cap e(\theta) = \emptyset$, $|\partial c| \cap e(\omega) = \emptyset$, valoarea expresiei

$$\int_c \theta - \int_{\partial c} \omega$$

să aparțină subinelului $A \subset R$.

Valoarea acestei expresii va fi numită reziduumul perechii (θ, ω) asociat lanțului c, cu notația

$$R[(\theta, \omega) : c] = \int_c \theta - \int_{\partial c} \omega .$$

Dacă $e(\omega) = \emptyset$, orice r-lanț este admisibil și reziduumul corespunzător este nul.

Suma a două (A, r)-perechi $(\theta_1 + \theta_2, \omega_1 + \omega_2)$ se definește ca avînd singularitățile $e(\theta_1 + \theta_2) = e(\theta_1) \cup e(\theta_2)$, $e(\omega_1 + \omega_2) = e(\omega_1) \cup e(\omega_2)$. Putem defini și operația externă $a(\theta, \omega) = (a, \theta, a\omega)$, $a \in A$.

Sînt satisfăcute relațiile de comutare

$$R[(\theta_1, \omega_1) + (\theta_2, \omega_2) : c] = R[(\theta_1, \omega_1) : c] + R[(\theta_2, \omega_2) : c]$$
$$R[a(\theta, \omega) : c] = aR[(\theta, \omega) : c],$$

punînd în prealabil condițiile ca toți termenii care intervin să aibă sens.

Se spune că deformarea diferențiabilă c_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ a lanțului admis c $(|c| \cap e(\theta) = \emptyset$, $|\partial c| \cap e(\omega) = \emptyset)$ este admisă dacă pentru orice $0 \leqslant t \leqslant 1$, lanțul c_t este admis.

PROPOZIȚIA I. 1. *Dacă lanțul c_1 provine printr-o deformare admisă a unui lanț admis dat c_0, atunci*

$$R[(\theta, \omega) : c_0] = R[(\theta, \omega) : c_1].$$

Demonstrație. Este adevărată relația $c_1 - c_0 = D\partial c_0 + \partial Dc_0$, unde D este operatorul de omotopie. Deformarea fiind admisă $|D\partial c_0| \cap e(\omega) = \emptyset$, deci lanțul $D\partial c_0$ este admis.

Suportul lui fiind inclus în $X - e(\omega)$, unde este adevărată teorema lui Stokes, rezultă că $R[(\theta, \omega) : D\partial c_0] = 0$.

Relația $|\partial Dc_0| \cap e(\omega) = \emptyset$ dovedește că lanțul ∂Dc_0 este de asemenea admis. Astfel

$$R[(\theta, \omega) : c_1 - c_0] = R[\theta, \omega) : D\partial c_0] + R[(\theta, \omega) : \partial Dc_0] = \int_{\partial Dc_0} \theta = 0$$

din $R[(\theta, \omega) : c_1] = R[(\theta, \omega) : c_0]$.

Nefiind posibilă definirea opusului unei perechi (θ, ω) cu $e(\omega) \neq \emptyset$, mulțimea (A, r) perechilor nu este un A-modul.

Vom defini o structură de A-modul pe mulțimea care rezultă factorizînd după relația de echivalență următoare :

$$(\theta, \omega) \sim (\theta', \omega') \text{ dacă } R\,[(\theta, \omega) : c] = R\,[(\theta'\ \omega') : c]$$

pentru orice lanț c admis pentru ambele perechi.

Evident, relația este reflexivă și simetrică. Fie $(\theta, \omega) \sim (\theta', \omega')$, $(\theta', \omega') \sim (\theta'', \omega'')$ și c un lanț admis pentru perechile (θ, ω) și (θ'', ω'') După deformări admise suficient de mici conform propoziției I.1 obținem lanțuri admise.

Întrucît orice lanț printr-o deformare oricît de mică poate fi adus într-o poziție în care este admis pentru o pereche dată, printr-o deformare admisă în raport cu (θ, ω) și (θ'', ω'') a lanțului dat c, obținem un lanț c' admis pentru cele trei perechi. Avem

$$R\,[(\theta, \omega) : c] = R\,[(\theta, \omega) : c'] = R\,[(\theta', \omega') : c'] = R\,[(\theta'', \omega'') : c'] =$$
$$= R\,[(\theta'', \omega'') : c] \text{ deci } (\theta, \omega) \sim (\theta'', \omega'').$$

Clasa perechii (θ, ω) va fi notată cu $[\theta, \omega]$.

Liniaritatea reziduumului în argumentul (θ, ω) permite definirea operațiilor de adunare și înmulțire cu elemente din A pentru clase de perechi.

Perechile cu reziduumuri nule pe orice lanț admis sînt echivalente. Clasa acestor perechi are rolul elementului neutru față de adunarea claselor.

Evident, opusul unei clase : $-[\theta, \omega] = [-\theta, -\omega]$.

Notăm cu $\mathfrak{C}^r(X, A)$ A-modulul claselor de (A, r)-forme.

Dacă (θ, ω) este o (A, r)-pereche, $(0, \theta)$ este o $(A, r+1)$-pereche.

Fie c_{r+1} un $r+1$ lanț admis pentru perechea $(0, \theta)$, $|\partial c_{r+1}| \cap e(\theta) = \varnothing$, deci ∂c_{r+1} este un r-lanț admis pentru perechea (θ, ω), atunci

$$A \ni R\,[(\theta, \omega) : \partial c_{r+1}] = \int_{\partial c_{r+1}} \theta = -R\,[(0, \theta) : c_{r+1}].$$

Aceasta permite definirea diferențialei

$$d : \mathfrak{C}^r(X, A) \to \mathfrak{C}^{r+1}(X, A) \text{ prin } d\,[\theta, \omega] = [0, \theta]$$

Se verifică imediat că α este un A-omomorfism și că satisface condiția $d \cdot d = 0$.

Nucleul lui d, $\mathfrak{Z}^r(X, A)$, constă din clasele $[\theta, \omega]$ cu proprietatea că pentru orice reprezentant (θ, ω) avem

$$\int_{\partial c_{r+1}} \theta = 0 \text{ dacă } |\partial c_{r+1}| \cap e(\theta) = \varnothing$$

Prin urmare dacă $(\theta, \omega) \in \mathfrak{Z}^r(X, A)$ și dacă $e(\theta) = \varnothing$, atunci θ este o formă închisă.

Suma directă $\mathfrak{C}(X, A) = \sum_{r \geqslant 0} \mathfrak{C}^r(X, A)$ este un complex de colanțuri, numit complexul A-perechilor de forme pe X.

În cele ce urmează vom expune modul în care se construiesc perechile cu singularități și cu reziduumuri date.

Prelungirea singularităţilor $e(\omega)$, $e(\theta)$ păstrînd condiţiile asupra dimensiunilor ($\dim e(\omega) \leqslant n-r$, $\dim e(\theta) \leqslant n-r+1$) nu schimbă clasa de echivalenţă a perechii (θ, ω). Prin urmare putem presupune că $e(\theta)$ este scheletul de dimensiune $n-r-1$ a unei anumite descompuneri în celule incluse în vecinătăţi de coordonate ale poliedrului $e(\omega)$ de dimensiune $n-r$.

Fiecărei celule de dimensiune $n-r$ i se poate asocia un element din A. Simplexele de dimensiuni r care intersectează o singură dată o aceeaşi celulă a lui $e(\omega)$ pot fi modificate unul în celălalt printr-o deformare admisă. Asociem acestei celule reziduumul comun pe astfel de lanţuri al perechii (θ, ω).

Deci problema construirii unor perechi cu singularităţi şi reziduumuri date are sens.

În spaţiul euclidian E_n $(n \geqslant 2)$ presupunem dat un sistem de coordonate ortonormale, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Fie

$$\omega(x) = k(n) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-n/2} \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

aşa-numita formă index a lui Kronecker, unde $k(n)$ este inversul măsurii $(n-1)$ - sferei unitate în E_n.

Forma ω (de grad $n-1$) este armonică (în particular închisă) pe domeniul $E_n - 0$. Pentru un n-simplex σ a cărui frontieră $\partial\sigma$ nu conţine originea 0 :

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \begin{cases} 0 \text{ dacă } 0 \notin |\sigma| \\ \pm 1 \text{ dacă } 0 \in |\sigma|, \end{cases}$$

semnul depinzînd de orientarea lui σ în E_n.

Pentru propoziţia care urmează facem următoarele notaţii :

$$B_n = \{x \in E_n : \|x\| \leqslant 1\}, \; E^{n-r} = \{x \in E_n : x = (0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots, x_n)\},$$

$$B^{n-r} = B_n \cap E^{n-r}, \; \partial B^{n-r} = \{x \in B^{n-r} : \|x\| = 1\}.$$

PROPOZIŢIA I. 2. *Există o* $(r-1)$ *- formă diferenţiabilă* ω *pe* $E_n - B^{n-r}$ $(2 \leqslant r < n)$ *astfel încît : 1) diferenţiala sa exterioară se prelungeşte în mod unic la o r-formă* θ *pe* $E_n - \partial B^{n-r}$ *şi 2) pentru orice r-simplex* σ *în* E_n *care nu se intersectează cu* ∂B^{n-r} *şi a cărui frontieră nu se intersectează cu* B^{n-r} :

$$R\,[(\theta, \omega) : \sigma] = \int_{\sigma} \theta - \int_{\partial\sigma} \omega = \begin{cases} 0 \textit{ dacă } |\sigma| \cap B^{n-r} = \varnothing \\ \pm 1 \textit{ dacă } |\sigma| \cap B^{n-r} \neq \varnothing, \end{cases}$$

semnul depinzînd de orientarea lui σ.

Demonstraţie : Fie $C = \{x \in E_n : 4x_1^2 + \ldots + 4x_r^2 + x_{r+1}^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$ şi $D = \{x \in E_n : \|x\| \geqslant 1\}$. Atunci $C' = C - D\, B^{n-r}$ şi $D' = D - \partial B^{n-r}$ sînt mulţimi închise disjuncte în varietatea $E_n - \partial B^{n-r}$.

Există o funcţie reală diferenţiabilă ψ pe $E_n - \partial B^{n-r}$ astfel încît $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $\psi(x) = 0$ dacă $x \in D'$, $\psi(x) = 1$ dacă $x \in C'$.

Dacă $\pi : E_n \to E_r$ este proiecţia $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r)$ şi ω_0 este forma index pe E_r, atunci forma indusă $\pi^* \omega_0$ este $(r-1)$-formă închisă pe $E_n - E^{n-r}$.

Fie

$$\omega(x) = \begin{cases} \psi(x)\, \pi^* \omega_0(x) & \text{pentru } x \in E_n - E^{n-r} \\ 0 & \text{pentru } x \in E^{n-r} \text{ şi } \|x\| > 1 \end{cases}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} \mathrm{d}\omega(x) & \text{pentru } x \in E_n - B^{n-r} \\ 0 & \text{pentru } x \in E^{n-r} \text{ şi } \|x\| < 1. \end{cases}$$

Evident, ω şi θ au proprietăţile din 1); unicitatea prelungirii lui $\mathrm{d}\omega$ rezultă din continuitatea sa şi din faptul că B^{n-r} este o mulţime rară în E_n.

Calculul reziduumului se face aducînd printr-o deformare admisă simplexul σ în subspaţiul E_r, avînd în vedere că ω_0 este forma index pe E_r.

Aplicînd biliniaritatea reziduumului putem face ca $R[(\theta, \omega) : \sigma] = a$, pentru $a \in A$ dat.

Construcţia este evidentă pentru cazul în care $e(\omega)$ este o celulă inclusă într-o vecinătate de coordonate a varietăţii X, iar $e(\theta)$ este frontiera celulei.

Allendoerfer şi Eells [1] demonstrează următoarea teoremă.

TEOREMA I. 3. *Fie X o varietate diferenţiabilă paracompactă şi A un subinel al numerelor reale. Modulele de coomologie $\mathfrak{H}(X, A)$ şi $H(X, A)$ sînt canonic izomorfe.*

Pentru scopul nostru este utilă considerarea perechilor relative la o diviziune a varietăţii X.

Fie K o descompunere simplicială local finită a varietăţii X şi K_* complexul celular dual. Presupunem că steaua fiecărui vîrf al lui K este inclusă într-o vecinătate de coordonate a lui X. Existenţa unei astfel de descompuneri este dovedită de Whitney [5].

Pentru fiecare $0 \leqslant r \leqslant n$ fie $\mathfrak{C}^r(K, A) = \{[\theta, \omega] \in \mathfrak{C}^r(X, A) : e(\omega) \subset K_*^{(n-r)}$ şi $e(\theta) \subset K_*^{(n-r-1)}\}$ unde $K_*^{(p)}$ este p-scheletul lui K_*. În aceste condiţii $\mathfrak{C}(K, A) = \sum_{r=0}^{n} \mathfrak{C}^r(K, A)$ este un subcomplex al complexului de colanţuri $\mathfrak{C}(X, A)$.

Notînd cu $C^r(K, A)$ modulul r-colanţurilor simpliciale ale lui K (cu coeficienţi în A) avem:

PROPOZIŢIA 1.4. *Aplicaţia $h : \mathfrak{C}^r(K, A) \to C^r(K, A)$*

$$h([\theta, \omega]) \cdot c = \int_c \theta - \int_{\partial c} \omega$$

pentru orice lanţ simplicial $c \in C_r(K, Z)$ este un izomorfism satisfăcînd relaţia de comutare $\mathrm{d}h = -h\mathrm{d}$.

Demonstrație. Avem :

$$\mathrm{d}(h[\theta, \omega])\cdot c_{r+1} = h([\theta, \omega])\cdot \partial c = \int_{\partial c_{r+1}} \theta = -h([0,\theta])\cdot \partial c_{r+1} = -h(\mathrm{d}[\theta,\omega])\cdot c_{r+1}.$$

Dacă $h([\theta, \omega]) = 0$, aceasta înseamnă că toate reziduumurile reprezentantului (θ, ω) pe lanțurile lui K sînt nule. Orice lanț similar admis fiind deformabil printr-o omotopie admisă într-un lanț al lui K, rezultă că (θ, ω) face parte din clasa de echivalență nulă, deci h este o aplicație injectivă. Dacă $f \in C^r(K, A)$, $f = \sum a_i f_i$, unde $f_i(\sigma_j) = \delta_{ij}$ prin construcția descrisă obținem o (A, r)-pereche (θ, ω_i) pe X cu reziduumul δ_{ij} pe σ_j, astfel încît $e(\omega)$ este suportul celulei $\partial\sigma_*^i$ din K_*, duală lui σ^i, iar $e(\theta)$ este suportul lui $\partial\sigma_*^i$. Punînd $\theta = \sum a_i \theta_i$, $\omega = \sum a_i \omega_i$ (sumă local finită), obținem o (A, r)-pereche îndeplinind condiția

$$f(c) = \int_c \theta - \int_{\partial c} \omega$$

pentru orice $c \in C_r(K, Z)$; deci h este surjectivă.

COROLARUL I.5. *Izomorfismul h induce un izomorfism h^* al modulului de coomologie $\mathfrak{H}^r(K, A)$ pe $H^r(K, A)$ (prin urmare pe $H^r(X, A)$.*

Fie $C_p(K_*, A)$ modulul p-lanțurilor simpliciale local finite ale lui K_*. Notăm cu $K : C_{n-r}(K, A) \to \mathfrak{C}^r(K, A)$ aplicația care asociază fiecărei celule σ_*^i clasa perechii de singularități $e(\omega) = |\sigma_*^i|$, $e(\theta) = |\partial\sigma_*^i|$ și reziduum $R[(\theta, \omega) : \sigma_j] = \delta_{ij}$ pentru orice r-simplex σ_j al lui K.

Putem scrie diagrama comutativă de izomorfisme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}^r(K, A) & & C^r(K, A) \arrow[ll, "h"'] \arrow[dl, "\mathcal{D}"] \\
& C_{n-r}(K_*, A) \arrow[ul, "k"] &
\end{tikzcd}$$

unde $\mathcal{D}$ este cap-produsul unui r-colanț cu n-ciclul fundamental al lui X.

Din această diagramă și propoziția I.4 rezultă :

PROPOZIȚIA I.6. *Clasa $[\theta, \omega] \in \mathfrak{Z}^r(K, A)$, dacă și numai dacă admite un reprezentant (θ, ω) astfel încît $e(\omega)$ este suportul unui $(n-r)$-ciclu al lui K_*, iar $e(\theta) = \varnothing$.*

COROLARUL I.7. *Orice clasă de coomologie din $\mathfrak{H}^r(X, A)$ admite un reprezentant $[\theta, \omega]$ cu θ închisă și definită pe toată varietatea X.*

TEOREMA I.8. *Fiind dată o r-formă închisă ω pe X cu perioade (relativ la o bază a r-ciclilor întregi) din A, există o $(r-1)$- formă ω pe $X - e(\omega)$, cu $e(\omega)$ suportul unui $(n-r)$-ciclu, astfel încît (θ, ω) este o (A, r) pereche.*

Demonstrație. Fie K o diviziune simplicială a varietății X astfel încît steaua fiecărui vîrf al lui K este inclusă într-o vecinătate de coordonate și fie $f \in C^r(K, A)$ definit de $f(z) = \int_z \theta$ pentru $z \in Z_r(K, Z)$.

Din propozițiile I.4 și I.6 rezultă că există o (A, r)- pereche (α, β) astfel încît : 1) $f(c) = R[(\alpha, \beta) : c]$ pentru orice $c \in C_r(K, Z)$; 2) α este definită și închisă pe X și 3) $e(\beta)$ este suportul unui $(n-r)$-ciclu al lui K_*.

Forma închisă $\theta - \alpha$ are perioade nule relativ la o bază de r-cicli ai lui K, prin urmare din teorema lui de Rham rezultă existenţa unei $(r-1)$ - forme γ pe X astfel încît $d\gamma = \theta - \alpha$. Punînd $\omega = \beta + \gamma$, deducem că $R\ [(\theta, \omega) : c] = R\ [(\alpha, \beta) : c]$ pentru orice $c \in C_r\ (K, A)$; în particular (θ, ω) este o (A, r) pereche relativ la K şi $e(\omega) = e(\beta)$.

II

În cele ce urmează vom utiliza următoarele notaţii :

$$E_{(n+m)} = C^{n+m} \text{ cu structura hermetică } < z, z' > = \sum_{i=1}^{n+m} z_i \bar{z}_i ;$$

$z = (z_1, \ldots, z_{n+m})$ în raport cu o bază dată $e_1, \ldots, e_{n+m}$; $U_{(n+m)}$ grupul unitar acţionînd în $E_{(n+m)}$; $V^{(r)}_{(n+m,\, n)}$, $(0 \leqslant r \leqslant n)$, mulţimea perechilor (x, f), X subspaţiu n-dimensional al lui $E_{(n+m)}$, f un $(n-r)$ -reper ortonormal al lui X cu vîrful în origine.

Evident, $V^{(n)}_{(n+m,\, n)} = G_{(n+m,\, n)}$ — varietatea Grassmann complexă a n-subspaţiilor lui $E_{(n+m)}$, $V^{(0)}_{(n+m,\, n)} = V_{(n+m,\, n)}$ — varietatea lui Stiefel a n-reperelor ortonormale ale lui $E_{(n+m)}$. Fiecare $V^{(r)}_{(n+m,\, n)}$ se poate interpreta ca spaţiu cît $U_{(n+m)} / U_{(r)} \times U^{(m)}$, $U_{(r)}$ fiind reprezentabil prin $(n+m) \times$ $\times\ (n+m)$ matrici unitare de forma $u_{ij} = 0$ dacă $i \neq j$ şi $i > r$ sau $j > r$, iar $U^{(m)}$ prin $(m+n) \times (n+m)$ matrici unitare de forma $u_{ij} = 0$ dacă $i \neq j$ *şi* i $< n$ sau $j < n$.

Putem scrie următorul şir de $U_{(n)}$-fibrări :

$$V_{(n+m,\, n)} = V^{0}_{(n+m,\, n)} \rightarrow V^{(1)}_{(n+m,\, n)} \rightarrow \ldots \rightarrow V^{(r)}_{(n+m,\, n)} \rightarrow \ldots \rightarrow V^{(n)}_{(n+m,\, n)} .$$

Fiecare compunere $V^{(r)}_{(n+m,\, n)} \rightarrow G_{(n+m,\, n)}$ este o fibrare de fibră tip $V_{(n,\, n-r)} = U_{(n)} / U_{(r)}$ asociată $U_{(n)}$-fibrării principale $V_{(n+m,\, n)} \rightarrow G_{(n+m,\, n)}$.

Fie θ_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n + m$, componentele matricii $\theta = u^{-1} du$, $u \in U_{(m+n)}$. Acestea generează algebra Lie a grupului $U_{(n+m)}$.

Fie

$$\theta_{ij} = \sum_{s=n+1}^{n+m} \theta_{is} \wedge \theta_{sj},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

şi

$$\Phi_r = \frac{1}{(2\pi i)^{n-r+1} (n-r+1)!} \sum \delta\, (i_1, \ldots, i_{n-r+1}, j_1, \ldots$$
$$\ldots, j_{n-r+1})\ \Theta i_1\, j_1 \wedge \ldots \wedge \Theta i_{n-r+1}\, j_{n-r+1},$$

unde $\delta\, (i_1, \ldots, i_{n-r+1} ; j_1, \ldots, j_{n-r+1})$ este simbolul lui Kronecker, însumarea făcîndu-se după toate alegerile $i_1, \ldots, i_{n-r+1}$, dintre $1, \ldots, n$.

Forma Φ_r fiind $G_{(n+m,\, n)}$-bazică, poate fi considerată ca definită pe $G_{(n+m,\, n)}$. Relativ la acţiunea grupului $U_{(n+m)}$ pe $G_{(n+m,\, n)}$, Φ_r este invariantă.

După Chern [3], teorema 5, formele Φ_r reprezintă clasele caracteristice Chern reale de dimensiuni $2(n - r + 1)$, $1 \leqslant r \leqslant n$.

Se spune că cociclul $\gamma \in C^{2(n-r+1)}\ (G_{(n+m,\, n)}, Z)$ reprezintă clasa caracteristică de dimensiune $2(n-r+1)$ a fibrării $V_{(n+m,\, n} \rightarrow G_{(n+m,\, n)}$ dacă

γ^*, imaginea cociclului γ prin omomorfismul indus de proiecţia $V^{(n-r)}_{(n+m,\, n)} \to G_{(n+m,\, n)}$, îndeplineşte condiţia $\gamma^* = \delta\beta$, unde β este un colanţ de dimensiune $2n - 2r + 1$ pe $V^{(n-r)}_{(n+m,\, n)}$ a cărui restricţie la fibra $V_{(n,\, r)}$ reprezintă cociclul fundamental.

În lucrarea citată [3], Chern demonstrează echivalenţa acestei definiţii cu definiţia claselor caracteristice ca obstrucţie la construirea secţiunilor globale pentru fibrarea

$$V^{(n-r)}_{(n+m,\, n)} \to G_{(n+m,\, n)}\,.$$

Prin urmare există o formă π_r pe $V^{(n-r)}_{(n+m,\, n)}$ care corespunde colanţului β. Mai mult, se demonstrează că există un polinom Π_r în formele $\theta_{A\alpha}$, $\bar{\theta}_{A\alpha}$ θ_{AB}, Θ_{AB} $(A = 1, \ldots, r-1, n+2, \ldots, n+m;\ B = r, \ldots \ldots, n+1,\ \alpha = r, \ldots, n)$ cu coeficienţi constanţi definit pe $V^{(n-r)}_{(n+m,\, n)}$ astfel încît $d\,\Pi_r = \Phi_r$.

Restricţia formei Π_r, la fibra fibrării $V^{(n-r)}_{(n+m,\, n)} \to G_{(n+m,\, n)}$ determină cociclul fundamental al grupului $H^{2n-2r+1}\,(V_{(n,r)}, Z)$.

Pentru a construi perechile de forme care reprezintă clasele Chern întregi, definim secţiunile diferenţiabile

$$f_p : G_{(n+m,\, n)}\ (\underbrace{m-1, \ldots, m-1}_{p+1 \text{ ori}}, m, \ldots, m)_* \to V^{(p)}_{(n+m,\, n)}\,,$$

$0 \leqslant p \leqslant n$, unde $(m-1, \ldots, m-1, m, \ldots, m)_* = \{X_{(n)} \in G_{(n+m,\, n)}$, $\dim\,(X\,(n) \cap L\,(n+p)) \geqslant p+1\}$, subspaţiul $L\,(m+p)$ fiind generat de vectorii $e_{n-p+1}, \ldots, e_{n+m}$.

Fie $u_1, \ldots, u_{n-p}$ proiecţiile ortogonale ale vectorilor $e_1, \ldots, e_{n-p}$ pe $X\,(n)$. Vectorii $u_1, \ldots, u_{n-p}$ generează complementul ortogonal al subspaţiului $X\,(n) \cap L\,(m+p)$ relativ la $X(n)$. Dacă vectorii $u_1, \ldots, u_{n-p}$ sînt liniar independenţi, $\dim\,(X\,(n) \cap L\,(n+p)) \leqslant p$, deci $X\,(n) \notin (m-1, \ldots, m-1, m, \ldots, m)_*$. Dacă vectorii $u_1, \ldots, u_{n-p}$ nu sînt liniar independenţi, înfăşurătoarea lor liniară are dimensiunea $\leqslant n-p+1$, deci $\dim\,(X\,(n) \cap L\,(m+p)) \geqslant p+1$, adică $X\,(n) \in (m-1, \ldots, m-1, m, \ldots, m)$.

Astfel am construit o secţiune $\widetilde{f}_p$ definită pe $G_{(n+m,\, n)} - (m-1, \ldots, m-1, m, \ldots, m)$ cu valori în $\widetilde{V}^{(p)}_{(n+m,\, n)}$, unde $\widetilde{V}^{(p)}_{(n+m,\, n)}$ se defineşte ca $V^{(p)}_{(n+m,\, n)}$ fără a pune condiţia ca $n-p$ reperul corespunzător să fie ortonormal.

$V^{(p)}_{(n+m,\, n)}$ este un retract de deformare al lui $\widetilde{V}^{(p)}_{(n+m,\, n)}$. Compunînd retracţia cu secţiunea $\widetilde{f}_p$ obţinem secţiunea căutată f_p.

TEOREMA II.1. *Fie* $\Psi_r = f^*_{n-r}\ \Pi_r$. *Atunci,* (Φ_r, Ψ_r) *este o* $(Z, 2\,(n-r+1))$ *– pereche, ale cărei singularităţi sînt* $e(\Phi_r) = \varnothing$ *şi* $e\,(\Psi_r) = (\underbrace{m-1, \ldots, m-1}_{n-r+1 \text{ ori}}, m, \ldots, m)$.

Pentru orice $2\,(n-r+1)$*-lanţ admis* $a_{2\,(n-r+1)}$

$$c^{2(n-r+1)} \cdot a_{2(n-r+1)} = \int\limits_{a_{2(n-r+1)}} \Phi_r - \int\limits_{\partial a_{2(n-r+1)}} \Psi_r, \tag{1}$$

unde $c^{(2n-r+1)}$ *este clasa Chern* $\in H^{2(n-r+1)}\ (G_{(n+m,\, n)}, Z)$.

Demonstrație. Dimensiunea singularității $e(\Psi_r)$ fiind $2(mn-n+r-1)$, condiția referitoare la dimensiunile singularităților unui $2(n-r+1)$ perechi este îndeplinită.

Pe domeniul de definiție al lui Ψ_r, $d\Psi_r = df^*_{n-r}\,\Pi_r = f^*_{n-r+1}\cdot d\Pi_r = \Phi_r$. Pentru a dovedi că această pereche are reziduumuri întregi pe orice $2(n-r+1)$-lanț admis este suficient să verificăm pentru $2(n-r+1)$-lanțurile descompunerii celulare K a lui $G_{(n+m,\,n)}$ date de subspațiile $L^{(1)} = [e_1]$, $L^{(2)} = [e_1, e_2], \dots, L^{(n+m)} = E_{(n-m)}$; perechea (Φ_r, Ψ_r) este o pereche relativă la diviziunea K a varietății $G_{(n+m,\,n)}$.

Membrul stîng al relației (1) este nul pentru toate $2(n-r+1)$-celulele lui K, excepție făcînd cea determinată de simbolul lui Schubert $(\underbrace{0, \dots, 0}_{r-1 \text{ ori}}, 1, \dots, 1)$, cînd ia valoarea 1. Dacă $a_{2(n-r+1)}$ este o celulă diferită de $(\underbrace{0, \dots, 0}_{r-1 \text{ ori}}, 1, \dots, 1)$, după Chern [3], teorema 5, restricția formei Φ_r la $a_{2(n-r+1)}$ este nulă, deci și integrala din membrul drept. Atunci cînd $a_{2(n-r+1)} = (0, \dots, 0, 1, \dots 1)$, după calculul lui Chern [3], teorema 5,

$$\int_{a_{2(n-r+1)}} \Phi_r = 1.$$

Membrul stîng este de asemenea egal cu 1 din motive de dualitate. Deci $R\,[(\Phi_r, \Psi_r) : a_{2(n-r+1)}] = 1$.

III

Fie $B \xrightarrow{p} M$, o fibrare $U(n)$-principală pe varietatea diferențiabilă M, iar $f : M \to G_{(m+n,\,n)}$, $m \geqslant \dim M$, aplicația caracteristică.

Ne propunem să construim o pereche de forme pe varietatea M care să reprezinte clasa caracteristică Chern întreagă de dimensiune $2(n-r+1)$ a fibrării date $B \xrightarrow{p} M$. Există un număr întreg m și o aplicație $f : M \to G_{(n+m,\,n)}$ care îndeplinește condiția ca $f(M)$ și $e(\Psi_r) = (\underbrace{m-1, \dots, m-1}_{n-r+1 \text{ ori}}, m, \dots, m)_*$ sînt în poziție generală (subspațiile tangente în punctele comune generează spațiile tangente la varietatea $G_{(n+m,\,n)}$).

Poziția generală se păstrează după o deformare suficient de mică a aplicației f.

Dacă indicele m este astfel ales încît $2mn \geqslant 2 \dim M + 1$, după o teoremă a lui Whitney [6] după o deformare oricît de mică putem face ca f să fie injectivă.

Poziția generală implică $\dim M - \dim (f(M) \cap e(\Psi_r)) = 2mn - 2(mn-n+r-1)$, deci $\dim (f(M) \cap e(\Psi_r)) = \dim f(M) - 2(n-r+1)$. Aplicația fiind injectivă, $f(M) \cap e(\Psi_r)$ și $f^{-1}(f(M) \cap e(\Psi_r))$ au aceeași dimensiune.

TEOREMA III.1. *$(f^{\star}\,\Phi_r, f^{\star}\,\Psi_r)$ este o $(Z, 2\,(n-r+1))$ -pereche ale cărei singularități sînt $e(f^{\star}\,\Phi_r)=\Phi$ și $e(f^{\star}\Psi_r)=f^{-1}\,(f\,(M)\cap e(\Psi_r))$. Pentru orice lanț admis $a_{2(n-r+1)}$*

$$c^{2(n-r+1)}\,(M)\cdot a_{2(n-r+1)} = \int\limits_{a_2(n-r+1)} f^{\star}\,\Phi_r - \int\limits_{\partial a_2(n-r+1)} f^{\star}\,\Psi_r, \tag{2}$$

unde $c^{2(n-r+1)}\,(M)$ este clasa Chern $\in H^{2(n-r+1)}\,(M, Z)$.

Demonstrație. Evident,

$$R\,[(f^{\star}\,\Phi, f^{\star}\,\Psi_r) : a_{2(n-r+1)}] = R\,[(\Phi_r, \Psi_r) : f_{*}\,a_{2(n-r+1)}] \in Z,$$

lanțul $f_{*}\,a_{2(n-r+1)}$ fiind admis pentru perechea (Φ_r, Ψ_r).

Din relațiile

$$c^{2(n-r+1)}\cdot f_{*}\,a_{2(n-r+1)} = R\,[(\Phi_r, \Psi_r) : f_{*}\,a_{2(n-r+1)}]$$

$$c^{2(n-r+1)}\,(M)\cdot a_{2(n-r+1)} = c^{2(n-r+1)}\cdot f_{*}\,a_{2(n-r\,1)}$$

rezultă formula (2).

Exemplu : Vom construi perechea care reprezintă clasa Chern întreagă pentru fibrarea obținută prin complexificarea fibrării canonice cu linii peste spațiul proiectiv real.

Dacă $x=(x_1, \ldots, x_{m+1})$ sînt coordonatele omogene pentru spațiul proiectiv real RP^m, funcțiile de trecere ale fibrării canonice corespunzătoare acoperirii cu vecinătățile V_j sînt $h_{ij}\,(x)=\dfrac{x_i}{x_j}\cdot$

Funcțiile de trecere pentru fibrarea canonică peste spațiul proiectiv complex CP^m sînt $g_{ij}\,(z)=\dfrac{z_i}{z_j}$, pentru acoperirea cu vecinătățile $U_j\ (z_j\neq 0)$.

Aplicația $f: RP^m\to CP^m$, $f\,(x_1, \ldots, x_{m+1})=(x_1, \ldots, x_{m+1})$ induce din fibrarea complexă canonică peste CP^m fibrarea complexă peste PP^m cu funcțiile de trecere $h'_{ij}\,(x)=\dfrac{x_i}{x_j}$, care este tocmai complexificarea fibrării reale canonice peste RP^m.

Întrucît $f(RP^m)$ și CP^{m-1}, $(z_1=0)$, ciclul corespunzînd clasei Chern de dimensiune doi prin operatorul de dualitate al lui Poincaré, nu sînt în poziție generală vom utiliza aplicația f' omotopă cu f

$$f'\,(x_1, \ldots, x_{m+1})=(x_1+ix_2, x_2+ix_3, \ldots, x_{m+1}+ix_1)$$

pentru care condiția de poziție generală este îndeplinită.

Forma

$$\omega=\frac{1}{\pi R^2}\sum_{k=1}^{m+1}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}y_k-\frac{1}{\pi R^4}\sum_{k=1}^{m+1}(x_k\,\mathrm{d}x_k+y_k^d\,y_k)\wedge\sum_{k=1}^{m+1}(x_k\,\mathrm{d}y_k-y_k\,\mathrm{d}x_k),$$

unde $R^2=\sum\limits_{k=1}^{m+1}(x_k^2+y_k^2)$, iar x_k, y_k sînt coordonatele omogene reale pe spaţiul proiectiv complex CP^{m+1}, corespunde structurii kähleriene a varietăţii şi are proprietatea că $\int_{CP^1} \omega = 1$, $CP^1 = \{z = (z_1, z_2, 0, \ldots, 0)\}$, vezi Chern [4], cap. 5.

Fie forma

$$\theta = -\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{y_j\,\mathrm{d}x_j - x_j\,\mathrm{d}y_j}{R^2} - \frac{y_1\,\mathrm{d}x_1 - x_1\,\mathrm{d}y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)$$

definită pe $CP^m - CP^{m-1}$, care are proprietatea că $\mathrm{d}\theta = \omega$.

Perechea (ω, θ) cu singularităţile $e(\omega) = \Phi$, $e(\theta) = CP^{m-1}$ reprezintă clasa Chern de dimensiune doi corespunzătoare fibrării canonice peste CP^m. Pentru a dovedi aceasta este suficient să observăm că

$$R\,[(\omega, \theta), CP^1] = \int_{CP^1} \omega = 1.$$

Expresiile formelor $f'^*\omega$ şi $f'^*\theta$ se obţin compunînd cu aplicaţia $f'(x_1, \ldots, x_{m+1}) = (x_1, x_2, x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}, x_1)$.

Singularităţile perechii $(f'^*\omega, f'^*\theta)$ sînt $e(f'^*\omega) = \emptyset$, $e(f'^*\theta) = RP^{m-2} = \{x = (0, 0, x_3, \ldots, x_{m+1})\}$.

Primită la redacţie la 7 aprilie 1967

Facultatea de matematică
şi mecanică a Universităţii din Bucureşti
Str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. C. B. Allendoerfer, J. Eells, *On the cohomology of smooth manifolds.* Comment. Math. Helv. **32**, 165–179 (1958).
2. J. Eells, *A Generalization of the Gauss-Bonnet Theorem.* Trans. Amer. Math. Soc., **92**, 142–159 (1959).
3. S. S. Chern, *Classes of Hermitian manifolds.* Ann. of. Math., **47**, 85–121 (1946).
4. S. S. Chern, *Complex manifolds.* Recife (1959).
5. H. Whitney, *Geometric Integration Theory.* Princeton, 1957.
6. H. Whitney, *Differentiable manifolds.* Ann. of Math., **37**, 645–680 (1936).

REZOLUŢII STANDARD ÎN CATEGORII CU MULTIPLICARE

DE

CONSTANTIN I. NIŢĂ

Folosind conceptul de „tripletă” asociată unei categorii cu multiplicare se obţin toate rezoluţiile utilizate în algebra omologică.

În [1], Bénabou introduce categoriile cu multiplicare pentru care se pot face diverse consideraţii de algebră elementară.

Vom apela la acest articol ca şi la celelalte din bibliografie pentru unele definiţii şi consideraţii ce vor fi folosite.

Într-un anumit sens, aceste categorii generalizează categoriile în care s-a definit o construcţie standard [3].

Astfel, dacă k este o categorie oarecare, atunci $\mathfrak{M} = \text{Fonct}\,(k, k)$ devine în mod evident o categorie cu multiplicare. Comonoidele asociative cu counitate coincid cu construcţiile din [3], obiectele semisimpliciale din $\mathfrak{M}$ sînt functorii semisimpliciali din k în k.

Dacă $\mathfrak{M}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}$ sînt două categorii cu multiplicare, un morfism $\Phi : \mathfrak{M} \to \overline{\mathfrak{M}}$ păstrează comonoidele cu counitate.

Fie $\mathfrak{M} = (\mathcal{C}, \otimes, \Lambda, \theta, \gamma, \delta)$ o categorie cu multiplicare. Considerăm un comonoid (A, μ, η) de comultiplicare $\mu : A \to A \otimes A$, asociativ şi counitate $\eta : A \to \Lambda$.

Punem pentru orice întreg $n \geqslant 0$,

$$A_n = \bigotimes_{1}^{n+i} A$$

$$d_n^i = \Big(\bigotimes_{1}^{i} I_A\Big) \otimes \eta \otimes \Big(\bigotimes_{1}^{n-i} I_A\Big) : A_n \to A_{n-1}$$

$$s_n^i = \Big(\bigotimes_{1}^{i} I_A\Big) \otimes \mu \otimes \Big(\bigotimes_{1}^{n-i} I_A\Big) : A_n \to A_{n+1},$$

I_A fiind morfismul identic al obiectului A.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 9, P. 1285–1288, BUCUREŞTI, 1967

Evident că $A = (A_n,\ d_n^i,\ s_n^i)$ este un obiect semisimplicial al lui $\mathcal{A}$.

Fie $\mathcal{M} = (\mathcal{A},\ \otimes,\ \Lambda,\ \theta,\ \gamma,\ \delta)$ o categorie cu multiplicare şi $\mathcal{L}$ o categorie oarecare.

Definiţia 1. Spunem că categoria $\mathcal{M}$ este o $\mathcal{L}$-categorie dacă s-a dat un functor:

$$\mathcal{L} \times \mathcal{A} \to \mathcal{L}$$

$$(L,\ A) \to L \boxtimes A$$

$$(1,\ a) \to 1 \boxtimes a, \qquad 1 : L_1 \to L_2$$

$$a : A_1 \to A_2$$

astfel încît să existe izomorfismele functoriale:

$$L \boxtimes \Lambda \approx \Lambda \boxtimes L \approx L,$$

în care Λ este unitatea pentru $\otimes$ în $\mathcal{A}$.

Fie acum $A \in \mathcal{A}$ un comonoid de comultiplicare $\mu : A \to A \otimes A$ şi counitate $\eta : A \to \Lambda$ şi K un obiect al categoriei $\mathcal{L}$.

Definiţia 2. Comonoidul A este un K-comonoid dacă există un morfism $h : K \to K \boxtimes A$ încît să avem izomorfismul functorial:

$$(K \boxtimes A) \boxtimes A \approx K \boxtimes (A \otimes A).$$

Definiţia 3. Comonoidul A se numeşte K-trivial dacă diagrama:

$$\begin{tikzcd} K \boxtimes A \arrow[rr, "I_K \boxtimes \eta"] & & K \boxtimes A \\ & K \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[ur, dashed, "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

este comutativă.

Teoremă. *Fie $\mathcal{L}$ o categorie abeliană şi K un obiect al său. Dacă comonoidul $A \in \mathcal{A}$ este K-trivial, atunci există şirul exact:*

$$\ldots \xrightarrow{d^1} K \boxtimes A \otimes A \xrightarrow{d^0} K \boxtimes A \xrightarrow{I_K \boxtimes \eta} K \to 0,$$

unde: $d^n = \sum\limits_{i=0}^{n+1} (-1)^i I_K \boxtimes d_n^i$.

Demonstraţie. Deoarece h este un invers la dreapta pentru $I_K \boxtimes \eta$, rezultă că $I_K \boxtimes \eta$ este epimorfism.

Fie morfismele $h_n : K \boxtimes \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{n} \to K \boxtimes \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{n+1}$ definite prin relaţia:

$$h_n = h \boxtimes \left(\bigotimes_1^{n+1} I_A\right), \qquad n \geqslant 0.$$

Din cele de mai sus rezultă printr-un calcul simplu că:

$$(*) \qquad d_n \circ h_n + h_{n-1} \circ d_{n-1} = 1$$

Într-adevăr :

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (I_K \boxtimes d_n^i) \circ h_n + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i h_n \circ (I_K \boxtimes d_{n-1}^i) =$$

$$= (I_K \boxtimes d_n^0) \circ h_n + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [h_{n-1} \circ (I_K \boxtimes d_{n-1}^i) - (I_K \boxtimes d_n^i) \circ h_n].$$

Deoarece :

$$(I_K \boxtimes d_n^0) \circ h_n = 1 \qquad (n \geqslant 0),$$

$$\left(h \boxtimes \left(\overset{i}{\underset{1}{\otimes}} I_A\right)\right) \circ \left(I_K \boxtimes \left(\overset{i}{\underset{1}{\otimes}} I_A\right)\right) \otimes \eta =$$

$$= \left(\left(I_K \boxtimes \left(\overset{i+1}{\underset{1}{\otimes}} I_A\right)\right) \otimes \eta\right) \circ \left(h \boxtimes \left(\overset{i+1}{\underset{1}{\otimes}} I_A\right)\right), \qquad (0 \leqslant i \leqslant n)$$

rezultă imediat relația (*).

Or, cu asta demonstrația e terminată.

Aplicații. 1. Fie $\{C, k, p\}$ o construcție standard pe o categorie $\mathcal{L}$ și $T : O \to \mathcal{L}$ un functor într-o categorie abeliană $\mathcal{L}$. Presupunem că construcția standard este T-trivială, adică există un morfism functorial :

$$h : T \to T \circ C$$

așa încît

$$(T * k) \circ h = i^* T.$$

Atunci există șirul exact :

$$\ldots \to T_2(X) \xrightarrow{d_1} T_1(X) \xrightarrow{d_0} T_0(X) \xrightarrow{T*k} T(X) \to 0,$$ din [3], unde :

$$T_n = T \circ C^{n+1}$$

$$d_n^i = C^i * k * C^{n-i+1}$$

$$d_n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \, T * d_n^i.$$

2. Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu sume finite (deci o categorie cu multiplicare) și $\mathcal{C}'$ o categorie abeliană. Dacă $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ e un functor covariant, atunci acestui functor i se asociază în mod evident un obiect semisimplicial cu valori în $\mathcal{C}'$, și deci, conform celor de mai sus, o rezoluție standard cu valori în $\mathcal{C}'$.

Aceasta este rezoluția standard a lui Grothendreck asociată functorului G.

3. Fie A o algebră peste inelul comutativ Λ și $\mathcal{A}$ categoria A-bimodulelor. $\mathcal{A}$ este o categorie cu multiplicare dată de produsul tensorial peste Λ.

Se obţin pe această cale rezoluţiile standard din teoria algebrelor asociative.

Se pot enumera multe aplicaţii, dar ele fiind cunoscute, nu este locul potrivit.

Primită la redacţie la 15 mai 1967

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti
Str. Academiei Nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. J. Bénabou, *Catégories avec multiplication.* C.R. Acad. Sci. Paris, **256**, 1887—1890 (1963).
2. — *Algèbre élémentaire dans les catégories avec multiplication.* C. R. Acad. Sci. Paris. **258**, 771—779, (1964).
3. P. Huber, *Homotopy Theory in General Categories.* Math. Annalen, November 1961.
4. A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tohoku Mathematical Journal.

OBSERVAȚII ASUPRA REZOLVĂRII SISTEMELOR DE ECUAȚII CU AJUTORUL PROCEDEELOR ITERATIVE[1]

DE

ION PĂVĂLOIU

(Cluj)

În lucrare se dă un criteriu de convergență a procedeului iterativ de tip Gauss-Seidel folosit la rezolvarea sistemului de ecuații :

$$x = \varphi(x, y)$$
$$y = \psi(x, y).$$

În cadrul aceleași probleme se dau apoi evaluările erorilor în cazul calculului exact și apoi în cazul calculului aproximativ. De asemenea se dă un criteriu de convergență pentru cazul cînd sistemul de mai sus conține un număr k de ecuații cu k necunoscute.

INTRODUCERE

Fie dat sistemul de ecuații :

$$\begin{aligned} x &= \varphi(x, y) \\ y &= \psi(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

unde despre funcțiile φ și ψ presupunem că îndeplinesc următoarele condiții :

a) Funcțiile φ și ψ sînt definite pe domeniul $\overline{D}$, închis și transformă acest domeniu în el însuși.

b) Funcțiile φ și ψ satisfac condițiile lui Lipschitz în domeniul $\overline{D}$, adică există constantele nenegative α, β, a și b astfel ca :

$$|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)| \leqslant \alpha |x_1 - x_2| + \beta (y_1 - y_2|$$

$$|\psi(x_1, y_1) - \psi(x_2, y_2)| \leqslant a |x_1 - x_2| + b |y_1 - y_2| \text{ pentru orice } (x_i, y_i) \in \overline{D},\ i = 1,2.$$

---

[1] Comunicare prezentată la cea de-a doua sesiune științifică a tineretului din 20 – 22 mai 1966, București.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 9, P. 1289–1298. BUCUREȘTI, 1967

Pentru rezolvarea sistemului (1) propunem următorul procedeu iterativ. Fie $(x_0, y_0) \in \overline{D}$ un punct oarecare; atunci considerăm următoarele două şiruri:

$$x_i = \varphi(x_{i-1}, y_{i-1}) \qquad (2)$$
$$y_i = \psi(x_i, y_{i-1}),\ i = 1, 2, 3, \ldots,$$

În legătură cu şirurile (2) este bine cunoscut următorul rezultat [1]:

TEOREMA 1. *Dacă funcţiile* φ *şi* ψ *satisfac condiţiile a) şi b) cu următoarele restricţii* $\alpha + \beta < 1$, $a + b < 1$ *sau* $a + \alpha < 1$, $b + \beta < 1$, *atunci şirurile (2) sînt convergente către limitele* $\overline{x}$ *şi* $\overline{y}$ *astfel că punctul* $M(\overline{x}, \overline{y})$ *constituie o soluţie pentru sistemul (1), şi această soluţie este unică.*

Deoarece teorema 1 ne oferă condiţii suficiente dar nu şi necesare pentru convergenţa şirurilor (2), există multe cazuri în care constantele α, β, a şi b nu satisfac condiţiile teoremei 1 şi totuşi şirurile (2) converg. În această Notă ne propunem să dăm condiţii asupra constantelor α, β, a şi b diferite de cele prezentate în teorema 1 care cuprind pe acestea şi în plus în condiţiile date de noi vor intra şi alte cazuri pentru care sistemul (1) admite soluţie unică şi soluţia se calculează cu ajutorul şirurilor (2).

§ 1. PROPOZIŢII AJUTĂTOARE

Fie date două şiruri de numere nenegative:

$$G = \{g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots\} \qquad (1.1)$$
$$f = \{f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots\}.$$

Presupunem că elementele celor două şiruri de mai sus sînt legate prin următoarele inegalităţi:

$$f_n \leqslant \alpha' f_{n-1} + \beta' g_{n-1} \qquad (1.2)$$
$$g_n \leqslant a' f_n + b' g_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots,$$

unde α', β' şi a', b' sînt numere reale nenegative. Sistemului de inegalităţi recurente (1.2) îi ataşăm următorul sistem de ecuaţii algebrice în necunoscutele k şi h:

$$\alpha' + \beta' h = kh, \qquad (1.3)$$
$$a'k + b' = kh.$$

LEMA 1. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca sistemul (1.3) să admită o soluţie* (h_1, k_1), $h_1 \geqslant 0$, $k_1 \geqslant 0$, *pentru care*

$$0 \leqslant h_1 k_1 \leqslant q < 1 \qquad (1.4)$$

este ca constantele α', β', a' *şi* b' *să satisfacă următoarele inegalităţi:*

$$\alpha' + b' + a'\beta' < 2 \qquad (1.5)$$
$$(1 - \alpha')(1 - b') > a'\beta'.$$

Demonstraţie. Necesitatea. Din sistemul (1.3) deducem următoarea ecuaţie în h:

$$\beta' h^2 - (b' + \beta' a' - \alpha') h - \alpha' a' = 0. \qquad (1.6)$$

Dacă la sistemul (1.3) adăugăm relația :

$$p = k \cdot h \tag{1.7}$$

și eliminăm din cele trei egalități obținute pe k și h și ținem cont de ecuația (1.6), obținem următoarea ecuație în p :

$$F(p) = p^2 - (b' + \beta' a' + \alpha')\, p + b'\alpha' = 0. \tag{1.8}$$

Tot din sistemul (1.3) mai deducem următoarea ecuație în k :

$$a'k^2 - (\alpha' + \beta' a' - b')\, k - \beta' b' = 0. \tag{1.9}$$

Se observă că ecuațiile (1.6) și (1.9) admit rădăcini reale și deoarece termenii liberi de la ambele ecuații sînt negativi, rezultă că ambele ecuații admit respectiv rădăcini de semne contrare.

Fie (h_1, h_2) rădăcinile ecuației (1.6) și (k_1, k_2) rădăcinile ecuației (1.9) ; atunci rădăcinile ecuației (1.8) vor fi $p_1 = k_1 h_1$ și $p_2 = k_2 h_2$ și aceste rădăcini sînt totdeauna reale. Dacă (k_1, h_1) este perechea de rădăcini pozitive a ecuațiilor (1.6) și (1.9), atunci evident că $p_1 > p_2$ și $p_2 \geqslant 0$. Presupunem că $p_1 < 1$. Dar pentru ca această inegalitate să fie satisfăcută, este necesar ca $F(1) > 0$ și $\frac{p_1 + p_2}{2} < 1$ ceea ce conduce la inegalitățile (1.5).

Suficiența. Dacă inegalitățile (1.5) sînt îndeplinite, rezultă că :

$$F(0) = b'\alpha' \geqslant 0$$

$$F(1) = (1 - \alpha')(1 - b') - a'\beta' > 0$$

și

$$\frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{(\alpha' + b' + a'\beta')}{2} < 1$$

de unde rezultă că $p_1 < 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

LEMA 2. *Dacă α', β', a' și b' satisfac inegalitățile (1.5) iar elementele șirurilor (1.1) satisfac inegalitățile (1.2), atunci există o constantă nenegativă c_1 pentru care*

$$\begin{aligned} f_n &\leqslant c_1 h_1^{n-1} k_1^{n-1} \\ g_n &\leqslant c_1 h_1^{n} k_1^{n-1} \end{aligned} \tag{1.10}$$

și în plus seriile $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i$ și $\sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i$ sînt convergente.

Demonstrație. Fie (h_1, k_1) o soluție a sistemului (1.3) pentru care sînt satisfăcute condițiile lemei de mai sus. Presupunem că pentru $n = 1$ avem :

$$\begin{aligned} f_1 &\leqslant c_1 \\ g_1 &\leqslant c_1 h_1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

se observă fără nici un fel de dificultate că pentru ca aceste inegalităţi să fie satisfăcute este suficient să alegem pe c_1 astfel ca :

$$c_1 \geqslant \max\left\{\alpha' f_0 + \beta' g_0, \frac{a' f_1 + b' g_0}{h_1}\right\}. \tag{1.12}$$

Dar dacă inegalităţile (1.11) sînt satisfăcute cu c_1 astfel ales, atunci vom presupune prin inducţie că :

$$f_{n-1} \leqslant c_1 h_1^{n-2} k_1^{n-2}$$
$$g_{n-1} \leqslant c_1 h_1^{n-1} k_1^{n-2}.$$

Dar bazîndu-ne pe faptul că sistemul (1.3) este verificat de soluţiile h_1 şi k_1 din (1.2) avem :

$$f_n \leqslant c_1 h_1^{n-2} k_1^{n-2} (\alpha' + \beta' h_1) = c_1 h_1^{n-1} k_1^{n-1}$$

şi

$$g_n \leqslant c_1 h_1^{n-1} k_1^{n-2} (a' k_1 + b') = c_1 h_1^{n} k_1^{n-1}.$$

Conform principiului inducţiei, prima parte a lemei 1 este demonstrată. Cea de a doua parte nu mai necesită nici un fel de demonstraţie, deoarece termenii celor două serii sînt majoraţi de termenii a două serii geometrice cu raţia subunitară.

CONSECINŢA 1. Dacă $\alpha' + \beta' < 1$ şi $a' + b' < 1$ sau $\alpha' + a' < 1$ şi $\beta' + b' < 1$, inegalităţile (1.5) sînt satisfăcute.

LEMA 3. *Dacă elementele şirurilor (1.1) satisfac următoarele inegalităţi :*

$$\begin{aligned} f_n &\leqslant \alpha' f_{n-1} + \beta' g_{n-1} + \delta \\ g_n &\leqslant a' f_n + b' g_{n-1} + \delta, \end{aligned} \tag{1.13}$$

unde δ este o constantă pozitivă şi dacă α', β', a' şi b' satisfac inegalităţile (1.5), atunci există o constantă pozitivă c_1 pentru care :

$$\begin{aligned} f_n &\leqslant c_1 h_1^{n-1} k_1^{n-1} + \frac{\delta}{1 - h_1 k_1} \\ g_n &\leqslant c_1 h_1^{n} k_1^{n-1} + \frac{\delta h_1}{1 - h_1 k_1}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Demonstraţia acestei leme este analoagă cu demonstraţia lemei 1 şi de aceea aici nu ne vom ocupa de ea.

§ 2. TEOREMA DE EXISTENŢĂ ŞI UNICITATE A SOLUŢIEI

TEOREMA 2. *Dacă funcţiile φ şi ψ satisfac condiţiile a) şi b) şi în plus constantele α, β, a şi b sînt astfel ca inegalităţile :*

$$\begin{aligned} &a + b + a\beta < 2 \\ &(1 - \alpha)(1 - b) > a\beta \end{aligned} \tag{2.1}$$

să fie satisfăcute, atunci sistemul (1) admite o soluţie unică în domeniul $\overline{D}$, dată de limitele şirurilor (2).

Demonstraţie. Vom arăta mai întîi că şirurile (2) sînt convergente. Se observă că sumele parţiale ale următoarelor două serii

$$\text{(2.2)}\qquad \begin{aligned} &(X) \qquad x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_{i-1}) \\ &(Y) \qquad y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (y_i - y_{i-1}) \end{aligned}$$

coincid cu termenii şirurilor (2). Dar dacă notăm $f_{n-1} = | x_n - x_{n-1} |$ şi $g_{n-1} = |y_n - y_{n-1}|$, atunci ţinînd cont de condiţia b) şi de termenii şirurilor (2) găsim următoarele inegalităţi :

$$\begin{aligned} f_n &\leqslant \alpha f_{n-1} + \beta g_{n-1} \\ g_n &\leqslant a f_n + b g_{n-1} \end{aligned}$$

acum folosindu-ne de lema 2, rezultă că seriile (2.2) sînt absolut convergente şi deci convergente. Dar aşa cum am observat mai înainte, rezultă că există două numere $\overline{x}$ şi $\overline{y}$, pentru care avem :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x} \qquad \text{şi } \lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y}.$$

Dacă ţinem acum cont că funcţiile φ şi ψ satisfac condiţia b), rezultă că ele sînt continue pe domeniul $\overline{D}$ şi deci trecînd la limită în egalităţile :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi\,(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= \psi\,(x_{n+1} y_n) \end{aligned}$$

obţinem :

$$\overline{x} = \varphi\,(\overline{x}, \overline{y})$$

şi

$$\overline{y} = \psi\,(\overline{x}, \overline{y})$$

de unde rezultă că $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ verifică sistemul (1). Să arătăm acum că soluţia obţinută este unica soluţie a sistemului (1) în domeniul $\overline{D}$. Presupunem că pe lîngă soluţia $(\overline{x}, \overline{y})$ sistemul mai admite şi o altă soluţie $(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ diferită de prima. Vom arăta mai întîi că dacă $(\overline{x}, \overline{y})$ este o soluţie a sistemului (1) şi $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ este un punct oarecare din domeniul $\overline{D}$, atunci există două şiruri

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi\,(x_0, y_0), \ldots, x_n = \varphi\,(x_{n-1}, y_{n-1}), \ldots \\ y_1 &= \varphi\,(x_1, y_0), \ldots, y_n = \varphi\,(x_n, y_{n-1}), \ldots \end{aligned}$$

pentru care

$$\text{(2.3)}\qquad \begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} | \overline{x} - x_n | = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} | \overline{y} - y_n | = 0. \end{aligned}$$

Într-adevăr, din faptul că soluția $(\overline{x}, \overline{y})$ verifică sistemul (1) și dacă ținem cont de condiția b) rezultă următoarele inegalități :

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \alpha |\overline{x} - x_{n-1}| + \beta |\overline{y} - y_{n-1}|$$

$$|\overline{y} - y_n| \leqslant a |\overline{x} - x_n| + b |\overline{y} - y_{n-1}|,$$

din care dacă ținem cont de lema 1 rezultă că au loc egalitățile (2.3). Dacă (x_0, y_0) și (x'_0, y'_0) sînt două puncte distincte din domeniul $\overline{D}$ și

$$x_n = \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}) \qquad x'_n = \varphi(x'_{n-1}, y'_{n-1})$$

$$y_n = \psi(x_n, y_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots, \qquad y'_n = \psi(x'_n, y'_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots$$

sînt șirurile care le corespund lor, atunci vom arăta că :

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x'_n| = 0 \tag{2.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} |y_n - y'_n| = 0.$$

Într-adevăr, avem :

$$|x_n - y'_n| \leqslant \alpha |x_{n-1} - x'_{n-1}| + \beta |y_{n-1} - y'_{n-1}|$$

$$|y_n - y'_n| \leqslant a |x_n - x'_n| + b |y_{n-1} - y'_{n-1}|.$$

Atunci din lema 1 rezultă egalitățile (2.4). Dar din cele demonstrate mai sus rezultă că dacă $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ sînt două șiruri pentru care :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y}$$

și $\{x'_n\}$, $\{y'_n\}$ sînt două șiruri pentru care :

$$\lim x'_n = \overline{x}_1,$$

$$\lim y'_1 = \overline{y}_1,$$

atunci avem :

$$|\overline{x} - \overline{x}_1| \leqslant |\overline{x} - x_n| + |x_n - x'_n| + |x'_n - \overline{x}_1|$$

$$|\overline{y} - \overline{y}_1| \leqslant |\overline{y} - y_n| + |y_n - y'_n| + |y'_n - \overline{y}_1|.$$

Aceste inegalități sînt adevărate pentru orice n. Atunci trecînd la limită pentru $n \to \infty$ și ținînd seamă de observațiile de mai sus avem :

$$\overline{x} = \overline{x}_1 \text{ și } \overline{y} = \overline{y}_1$$

și deci sistemul are soluție unică.

CONSECINȚA 2. Din consecința lemei 2 rezultă nemijlocit că condițiile cuprinse în teorema 1 sînt cuprinse și în teorema 2, dar în teorema 2 sînt cuprinse și alte cazuri pentru care teorema 1 nu ne poate spune nimic. Acest lucru îl vom ilustra prin următorul exemplu :

Exemplul 1. Fie dat sistemul liniar :

$$x = 0{,}1\,x + 8y - 0{,}6$$

$$y = 0{,}05\,x + 0{,}45\,y - 0{,}5.$$

Despre acest sistem teorema 1 nu ne poate spune nimic, în schimb dacă aplicăm teorema 2 obținem sistemul

$$0{,}1 + 8h = hk$$

$$0{,}05\,k + 0{,}45 = hk$$

care după cum se observă satisface condițiile (1.5). De aici putem trage concluzia că procedeul (2) aplicat sistemului de mai sus converge către soluția acestui sistem. Plecînd de la $x_0 = 0$ și $y_0 = 0$ în aproximativ 150 de iterații se obține pentru acest sistem următoarea soluție aproximativă : $x = -45{,}578936$, $y = -5{,}052631$.

§ 3. EVALUAREA ERORILOR ÎN CAZUL CALCULULUI EXACT

Pentru a evalua erorile presupunem în acest caz că avem posibilitatea să obținem valorile exacte ale funcțiilor φ și ψ pe orice punct din domeniul $\overline{D}$. Considerăm

$$|x_{n+p}-x_n| \leqslant |x_{n+p}-x_{n+p-1}| + \ldots + |x_{n+1}-x_n| \leqslant$$
$$\leqslant c_1(h_1^{n+p-2}\,k_1^{n+p-2} + \ldots + h_1^{n-1}\,k_1^{n-1}),$$

de unde, trecînd la limită pentru $p \to \infty$, obținem :

$$|\overline{x}-x_n| \leqslant c_1 \frac{h_1^{n-1}k_1^{n-1}}{1-h_1k_1}. \tag{3.1}$$

Analog obținem pentru cea de a doua soluție următoarea evaluare :

$$|\overline{y}-y_n| \leqslant \frac{c_1h_1^n\,k_1^{n-1}}{1-h_1k_1}. \tag{3.2}$$

§ 4. EVALUAREA ERORILOR ÎN CAZUL CALCULULUI APROXIMATIV

Aici vom considera că nu avem posibilitatea să calculăm valorile exacte ale funcțiilor φ și ψ pe punctele domeniului $\overline{D}$, dar în schimb avem posibilitatea să calculăm valorile exacte a două funcții φ_1 și ψ_1 care sînt definite tot pe domeniul $\overline{D}$ și acest domeniu este transformat de funcțiile φ_1 și ψ_1 în el însuși. Presupunem de asemenea că este dat un număr pozitiv δ pentru care avem :

$$\begin{aligned} &|\varphi(x,y) - \varphi_1(x,y)| \leqslant \delta \\ &|\psi(x,y) - \psi_1(x,y)| \leqslant \delta \text{ pentru orice } (x,y) \in D. \end{aligned} \tag{4.1}$$

În locul sistemului (1) vom considera acum sistemul aproximativ :

$$\begin{aligned} x^* &= \varphi_1(x^*,\ y^*) \\ y^* &= \psi_1(x^*,\ y^*). \end{aligned} \tag{4.2}$$

În general despre funcţiile φ_1 şi ψ_1 nu am presupus decît că ele satisfac condiţiile (4.1) şi nu putem şti dacă procedeul de tip Gauss-Seidel aplicat acestui sistem converge. De asemenea dacă ne propunem ca acest procedeu să fie oprit la acel pas pentru care sînt îndeplinite simultan inegalităţile :

$$\begin{aligned} &|x^*_{n+1} - x^*_n| \leqslant \varepsilon \\ &|y^*_{n+1} - y^*_n| \leqslant \varepsilon \end{aligned} \tag{4.3}$$

nu putem şti că, alegînd pe ε arbitrar, la un anumit pas inegalităţile (4.3) sînt satisfăcute. De aceea, în cele ce urmează vom da un criteriu după care trebuie ales ε astfel ca inegalităţile (4.3) să fie satisfăcute. Întradevăr, considerăm procedeul iterativ aproximativ :

$$\begin{aligned} x^*_{n+1} &= \varphi_1(x^*_n, y^*_n) \\ y^*_{n+1} &= \psi_1(x^*_{n+1}, y^*_n). \end{aligned}$$

Avem

$$|x^*_{n+1} - x^*_n| \leqslant \alpha |x^*_n - x^*_{n-1}| + \beta |y^*_n - y^*_{n-1}| + 2\delta$$

şi

$$|y^*_{n+1} - y^*_n| \leqslant a |x^*_{n+1} - x^*_n| + b |y^*_n - y^*_{n-1}| + 2\delta.$$

Dacă ţinem cont de concluziile lemei 3 avem :

$$\begin{aligned} &|x^*_{n+1} - x^*_n| \leqslant c_1 h_1^{n-1} k_1^{n-1} + \frac{2\delta}{1 - h_1 k_1} \\ &|y^*_{n+1} - y^*_n| \leqslant c_1 h_1^n k_1^{n-1} + \frac{2\delta h_1}{1 - h_1 k_1}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

de unde rezultă că dacă alegem pe ε astfel ca :

$$\varepsilon > \max \left\{ \frac{2\delta}{1 - h_1 k_1}, \frac{2\delta h_1}{1 - h_1 k_1} \right\}, \tag{4.5}$$

la un anumit pas n' inegalităţile (4.3) vor fi satisfăcute în mod necesar. Fie acum ε ales ca în (4.5) ; atunci există un număr n' pentru care :

$$\begin{aligned} &|x^*_{n'+1} - x^*_{n'}| \leqslant \varepsilon \\ &|y^*_{n'+1} - y^*_{n'}| \leqslant \varepsilon ; \end{aligned} \tag{4.6}$$

avem

$$|\overline{x} - x^*_{n'+1}| \leqslant \alpha |\overline{x} - x^*_{n'}| + \beta |y - y^*_n| + \delta.$$

Dacă ţinem cont acum de faptul că, pentru ca sistemul (1.3) să admită o soluţie (h_1, k_1) pentru care :

$$0 \leqslant h_1 k_1 \leqslant q < 1,$$

este necesar ca $\alpha < 1$ şi $b < 1$. Atunci avem :

$$(4.7)\qquad |\bar{x} - x^*_{n'+1}| \leqslant \frac{\alpha\varepsilon + \delta + \beta\,|\bar{y} - y^*_{n'}|}{1-\alpha}.$$

Analog găsim pentru $|\bar{y} - y^*_{n'+1}|$ următoarea evaluare :

$$(4.8)\qquad |\bar{y} - y^*_{n'+1}| \leqslant \frac{b\varepsilon + \delta + a\,|\bar{x} - x^*_{n+1}|}{1-b}.$$

Din (4.7) şi (4.8) obţinem

$$(4.9)\qquad \begin{aligned} |\bar{x} - x^*_{n'+1}| &\leqslant \frac{(\alpha+\beta)\,\varepsilon+\delta}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\alpha}\,|\bar{y} - y^*_{n'+1}| \\ |\bar{y} - y^*_{n'+1}| &\leqslant \frac{b\varepsilon+\delta}{1-b} + \frac{a}{1-b}\,|\bar{x} - x^*_{n'+1}|\,. \end{aligned}$$

Din acest sistem de inegalităţi, ţinînd cont de inegalităţile (1.5), deducem :

$$(4.10)\qquad \begin{aligned} |\bar{x} - x^*_{n'+1}| &\leqslant \frac{(1-b)\,[(\alpha+\beta)\,\varepsilon+\delta]+\beta\,(b\varepsilon+\delta)}{(1-\alpha)\,(1-b)-\beta a} \\ |\bar{y} - y^*_{n'+1}| &\leqslant \frac{(1-\alpha)[b\varepsilon+\delta]+a[(\alpha+\beta)\,\varepsilon+\delta]}{(1-\alpha)\,(1-b)-\beta a}. \end{aligned}$$

§ 5. GENERALIZARE

Considerăm acum un sistem de k ecuaţii cu k necunoscute de forma :

$$(5.1)\qquad x_i = \varphi_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_k), \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Asupra funcţiilor φ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, facem ipoteze analoage ca şi pentru funcţiile sistemului (1).

a′) Funcţiile φ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, transformă domeniul $\overline{D}$ din spaţiul E_k în el însuşi.

b′) Există o matrice de constante nenegative $\beta = (\beta_i^j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, pentru care sînt îndeplinite inegalităţile :

$$|\varphi_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_k) - \varphi_i\,(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k)| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \beta_i^j\,|x_j - x'_j| \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ şi $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$ două puncte din domeniul $\overline{D}$.

Avem următoarea teoremă:

TEOREMA 3. *Dacă funcțiile* φ_i, $i = 1, 2 \ldots, k$, *satisfac condițiile a') și b') și elementele matricei* β *sînt în așa fel ca sistemul*

$$\beta_1^1 + \beta_2^1 h_1 + \ldots + \beta_k^1 h_1 h_2 \ldots h_{k-1} = h_1 h_2 \ldots h_k$$

. . . .

$$\beta_1^i h_i h_{i+1} \ldots h_k + \beta_2^i h_1 h_i \ldots h_k + \ldots + \beta_i^i + \beta_{i+1}^i h_i + \\ + \ldots + \beta_k^i h_i h_{i+1} \ldots h_{k-1} = h_1 h_2 \ldots h_k$$

. . . .

$$\beta_1^k h_k + \beta_2^k h_1 h_k + \ldots + \beta_{k-1}^k h_1 h_2 \ldots h_{k-2} h_k + \beta_k^k = h_1 h_2 \ldots h_k$$

să fie compatibil și să posede o soluție $(h_1^0, h_2^0, \ldots, h_k^0)$ $h_i \geqslant 0$ $i=1, 2, \ldots, k$ *pentru care*

$$0 \leqslant h_1^0 h_2^0 \ldots h_k^0 \leqslant q < 1,$$

atunci sistemul (*5.1*) *are o soluție unică în domeniul* $\overline{D}$ *care se poate obține cu ajutorul următorului procedeu iterativ:*

$$x_i^{(n)} = \varphi_i\,(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{i-1}^{(n)}, x_i^{n-1}, \ldots, -x_k^{n-1}), \quad i=1,2,\ldots,k;\ n=1,2,3,\ldots,$$

oricare ar fi punctul $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0) \in D$.

Demonstrația acestei teoreme se face în mod analog cu demonstrația teoremei 2 şi de aceea nu ne vom ocupa de ea.

Primită la redacţie la 23 martie 1967

Institutul de calcul al Academiei
Republicii Socialiste România — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Б. П. Демидович и И. А. Марон, *Основы вычислительной математики.* Гос. изд. физ. мат. лит. Москва, 1960, pp. 148—151.
2. J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1964, pp. 38—39.
3. А. Н. Островский, *Решение уравнений и систем уравнений.* Изд. иностр. лит. Москва, 1963, pp. 83—94.
4. I. Păvăloiu, *Asupra unor inegalități recurente și aplicații ale lor.* Comunicare ţinută la Sesiunea Ştiinţifică a Institutului de Mine Petroşani din 7—10 februarie 1966.

O CARACTERIZARE A SPAŢIILOR UNIFORME

DE

EUGEN POPA

(Iaşi)

Se ştie [1] că definiţia spaţiilor uniforme se dă cu ajutorul filtrului de anturaje sau cu o familie de semidistanţe. În Nota de faţă vom defini o „pseudometrică“, care induce o structură topologică echivalentă cu cea de spaţiu uniform.

DEFINIŢIA 1. *Fie D o mulţime ordonată, cu cel mai mic element d_0 în care s-a definit o aplicaţie* : $(d_1, d_2) \to d_1 + d_2$ *încît* :

(D1) $d_0 + d = d + d_0 = d$

(D2) $d_1 + d_2 = d_2 + d_1$

(D3) $d_1 \leqslant d_2 \Rightarrow d + d_1 \leqslant d + d_2, \ \forall\, d \in D$

şi există o submulţime $D_1 \subseteq D$, nevidă şi dirijată la stînga încît :

(D4) $\forall\, d \in D_1 \ \exists\, d_1 \in D_1$ încît : $d_1 + d_1 \leqslant d$.

Mulţimea X fiind nevidă, vom numi pseudometrică o aplicaţie

$\rho : X \times X \to D$ *dacă* :

(X1) $\rho(x, y) = d_0 \Leftrightarrow x = y$

(X2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(X3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y), \ \forall\, z \in X$.

Vom nota cu (X, ρ, D) o mulţime în care s-a definit o pseudometrică. Într-un astfel de spaţiu, mulţimea :

$$B(x_0, d) = \{x : \rho(x_0, x) \leqslant d\}, \ \forall\, d \in D_1$$

se numeşte bulă de centru x_0. Rezultă imediat că $x_0 \in B(x_0, d)$, căci $\rho(x_0, x_0) = d_0 \leqslant d$. De asemenea, pentru orice două bule $B(x_0, d_1)$, $B(x_0, d_2)$ există $d_3 \leqslant d_1$, $d_3 \leqslant d_2$, mulţimea D_1 fiind dirijată la stînga ; deci $B(x_0, d_3) \subseteq B(x_0, d_1) \cap B(x_0, d_2)$. În sfîrşit, fiind dată bula $B(x_0, d)$,

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 9, P. 1299–1301 BUCUREŞTI, 1967

există d_1 încît $d_1 + d_1 \leqslant d$. Fie bula $B(y, d_1)$ oricare ar fi $y \in B(x_0, d)$ şi un element oarecare $z \in B(y, d_1)$. Va urma :

$$\rho(x_0, z) \leqslant \rho(x_0, y) + \rho(y, z) \leqslant d_1 + d_1 \leqslant d$$

deci $z \in B(x_0, d)$ şi $B(y, d_1) \subseteq B(x_0, d)$. Demonstraţiile de mai sus justifică :

TEOREMA 1. *Mulţimea* $\{B(x_0, d)\}_{d \in D_1}$ *formează baza unui filtru de vecinătăţi ale punctului* x_0.

Într-un spaţiu (X, ρ, D) pseudometrica induce deci o topologie. Un spaţiu (X, ρ, D) cu această topologie se va numi spaţiu pseudometric. Fie într-un spaţiu pseudometric mulţimile :

$$V_d = \{(x, y) : \rho(x, y) \leqslant d\}, \forall d \in D_1.$$

D_1 fiind nevidă, urmează că $\{V_d\}_{d \in D_1}$ este nevidă. X fiind nevidă, urmează că $V_d \neq \emptyset$ căci $(x, x) \in V_d$. Mulţimea D_1 fiind dirijată la stînga, pentru orice V_{d_1}, V_{d_2} există $d_3 \leqslant d_1$, $d_3 \leqslant d_2$, deci $V_{d_3} \subseteq V_{d_1} \cap V_{d_2}$. După cum am mai observat, $(x, x) \in V_d$, prin urmare $\bigcap_{d \in D_1} V_d \supseteq \Delta$, unde Δ este diagonala spaţiului $X \times X$. Dacă $(x, y) \in V_d$, atunci $\rho(y, x) = \rho(x, y) \leqslant d$ şi prin urmare : $(y, x) \in V_d$, ceea ce arată că $\overset{-1}{V_d} = V_d$. În sfîrşit, pentru orice V_d există d_1 încît $d_1 + d_1 \leqslant d$. Pentru orice $(x, y) \in V_{d_1}$, $(y, z) \in V_{d_1}$ vom avea :

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \leqslant d_1 + d_1 \leqslant d$$

deci $(x, z) \in V_d$ şi prin urmare $\overset{2}{V_{d_1}} \subseteq V_d$. Cu aceasta am demonstrat :

TEOREMA 2. *Mulţimea* $\{V_d\}_{d \in D_1}$ *este baza unui filtru de anturaje a spaţiului* X.

Se observă uşor că cele două topologii, de spaţiu pseudometric şi de spaţiu uniform, coincid. În adevăr, dacă notăm $B(x_0, V_d)$ tăietura prin V_d corespunzătoare lui x_0, avem evident $B(x_0, d) = B(x_0, V_d)$; corespondenţa $V_d \rightleftarrows d$ fiind biunivocă, urmează

TEOREMA 3. *Orice spaţiu pseudometric este uniformizabil.*

Fie X un spaţiu uniform şi D familia părţilor lui $X \times X$ care conţin diagonala Δ. Relaţia de ordine este cea de incluziune. Δ este prin definiţie cel mai mic element. Dacă $V_1, V_2 \in D$, definim :

$$V_1 + V_2 = (V_1 \circ V_2) \cup (V_2 \circ V_1).$$

Este evident o aplicaţie a lui $D \times D$ în D, căci dacă $\Delta \subseteq V_1$, $\Delta \subseteq V_2$, urmează : $\Delta \subseteq V_1 \circ V_2$. Din $\Delta \circ V = V$ rezultă : $\Delta + V = V + \Delta = V$. De asemenea :

$$V_1 + V_2 = (V_1 \circ V_2) \cup (V_2 \circ V_1) = (V_2 \circ V_1) \cup (V_1 \circ V_2) = V_2 + V_1.$$

Fie $V_1 \subseteq V_2$ şi V oarecare ; fie $(x, y) \in V_1$ şi $(y, z) \in V$, deci $(x, z) \in V_1 \circ V$. Cum $V_1 \subseteq V_2$, $(x, y) \in V_2$ deci $(x, z) \in V_2 \circ V$; fie $(x, y) \in V$ şi $(y, z) \in V_1$, deci $(x, z) \in V \circ V_1$; dar $(y, z) \in V_2$, deci $(x, z) \in V \circ V_2$ şi : $V_1 + V \subseteq V_2 + V$. Notăm cu D_1 mulţimea anturajelor simetrice. Prin definiţie este dirijată la stînga. Pentru orice anturaj simetric V există un anturaj simetric V_1 încît $V_1 \circ V_1 \subseteq V$, deci $V_1 + V_1 \subseteq V$. Definim :

$$\rho(x, y) = \{(x, y), (y, x)\} \cup \Delta.$$

Evident, $\rho(x, x) = \Delta$. Dacă $\rho(x, y) = \Delta$, urmează $(x, y) \in \Delta$, deci $x = y$. Din definiţie rezultă imediat : $\rho(x, y) = \rho(y, x)$. De asemenea :

$$\begin{aligned}\rho(x, z) + \rho(z, y) &= \{(x, z), (z, x)\} \cup \Delta + \{(z, y), (y, z)\} \cup \Delta = \\ &= \{(x, z), (z, x), (x, y), (z, y), (y, z), (y, x)\} \cup \Delta \supseteq \\ &\supseteq \{(x, y), (y, x)\} \cup \Delta = \rho(x, y).\end{aligned}$$

Din cele de mai sus rezultă

TEOREMA 4. *Aplicaţia* $\rho : X \times X \to D$ *este o pseudometrică.*

D_1 fiind mulţimea anturajelor simetrice, între mulţimea bulelor din spaţiul pseudometric astfel construit şi mulţimea anturajelor simetrice se poate stabili o corespondenţă biunivocă. Fie o bulă $B(x_0, V)$; $x \in B(x_0, V)$ înseamnă $\rho(x_0, x) = \{(x_0, x), (x, x_0)\} \cup \Delta \subseteq V$, deci $(x_0, x) \subseteq V$ sau x să aparţină vecinătăţii lui x_0 dată de V. Reciproc, dacă x face parte din vecinătatea lui x_0 dată de un anturaj simetric carecare V, atunci $(x_0, x) \in V$ iar datorită simetriei $(x, x_0) \in V$, deci $\rho(x_0, x) \subseteq V$. Prin urmare $x \in B(x_0, V)$, ceea ce arată că bula $B(x_0, V)$ coincide cu vecinătatea lui x_0 dată de anturajul V. Cele de mai sus justifică :

TEOREMA 5. *Orice spaţiu uniform este pseudometrizabil.*

Noţiunile de spaţiu uniform şi de spaţiu pseudometrizabil sînt deci topologic echivalente.

Se ştie că un spaţiu uniform este separat dacă şi numai dacă : $\bigcap\limits_{d \in D_1} V_d = \Delta$. În continuare vom demonstra

TEOREMA 6. *Condiţia necesară şi suficientă ca un spaţiu pseudometric să fie separat este ca :* $\forall d_1 \in D_1, d \in D', d \leqslant d_1 \Rightarrow d = d_0$ *(*D' *fiind mulţimea elementelor* d *din* D *pentru care există cel puţin un* $(x, y) \in X \times X$ *încît* $\rho(x, y) = d$*).*

În adevăr, fie (X, ρ, D) un spaţiu separat. Presupunînd că există $d \in D'$ încît $d \leqslant d_1$ pentru orice $d_1 \in D_1$, urmează că există (x, y) astfel ca $\rho(x, y) = d$ şi deci y face parte din orice vecinătate a lui x. Spaţiul fiind presupus separat, rezultă în mod necesar $x = y$, deci $d = d_0$. Reciproc, fie un spaţiu în care se realizează condiţiile teoremei. Să presupunem că n-ar fi separat, deci că există (x, y) cu $x \neq y$ încît oricare ar fi $d \in D_1$ cu $d_1 + d_1 \leqslant d$, bulele $B(x, d_1)$, $B(y, d_1)$ nu sînt disjuncte, deci există $z \in B(x, d_1) \cap B(y, d_1)$ de unde :

$$d' = \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) \leqslant d_1 + d_1 \leqslant d$$

ceea ce contrazice ipoteza, căci $d' = \rho(x, y) \neq d_0$, c.c.t.d.

Primită la redacţie la 3 aprilie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. N. BOURBAKI, *Topologie générale*. Act. Sci. Ind. Herman Cie, Paris, 1951.

TEOREMA DE REDUCERE A LUI GIRAUD

DE

ALEXANDRU RADU şi CONSTANTIN ANGHEL

Vom da o demonstraţie a teoremei de reducere a lui Giraud folosind altă tehnică decît în [1].

1. Categoriile ce apar sînt $\mathcal{U}$-categorii mici în care $\mathcal{U}$ este un univers fixat.

Fie $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ două categorii, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor, $S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ un adjunct la dreapta pentru T şi $\psi : 1_{\mathcal{C}} \to ST$, $\Phi : TS \to 1_{\mathcal{C}'}$ săgeţile de adjuncţie cvasiinverse una alteia.

Lema 1. *Sînt adevărate următoarele afirmaţii :*

i) T *este fidel* $\Leftrightarrow$ ψ *este monomorfism* ;

ii) T *este deplin fidel* $\Leftrightarrow$ ψ *este izomorfism* ;

iii) S *este fidel* $\Leftrightarrow$ Φ *este epimorfism* ;

iv) S *este deplin fidel* $\Leftrightarrow$ Φ *este izomorfism* ;

Afirmaţiile i) şi ii) rezultă din şirul de morfisme canonice :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, \psi_y)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, STY) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX, TY)$$

iar afirmaţiile iii), iv) din şirul

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', Y') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\Phi_{X'},\, Y')} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TSX', Y') \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(SX', SY').$$

Lema 2. *Dacă* T *este deplin fidel rezultă :*

a) $S\Phi : STS \to S$ şi $\Phi_T : TST \to T$ *izomorfisme* ;

b) $TS\Phi : TSTS \to TS$ şi $\Phi TS : TSTS \to TS$ *izomorfisme egale.*

Într-adevăr, deoarece ψ şi Φ sînt cvasiinverse una alteia, avem :

$$(\ast) \qquad \begin{array}{c} S \xrightarrow{\psi_S} STS \xrightarrow{S_\Phi} S = S \xrightarrow{1_S} S \\ T \xrightarrow{T_\psi} TST \xrightarrow{\Phi_T} T = T \xrightarrow{1_T} T \end{array}$$

Din lema 1, ii) rezultă ψ izomorfism, deci şi ψ_S, T_ψ de unde afirmaţia a) iar afirmaţia b) rezultă imediat căci din $(\ast)$ rezultă că $T\psi S$ este izomorfism invers atît pentru $TS\Phi$ cît şi pentru ΦTS.

Notăm prin $\mathcal{C}^\wedge = \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}^0, \mathrm{Ens})$-categoria prefasciculelor pe $\mathcal{C}$ cu valori în Ens.

Functorul $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ induce un functor canonic $T_* : \mathcal{C}'^\wedge \to \mathcal{C}^\wedge$ numit functorul imagine directă de prefascicule. T_* are un adjunct la stînga T^* şi un adjunct la dreapta T^+ ([1]) definiţi prin

$$T^+ F(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(T_* Y, F), \quad F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^\wedge, \quad Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$$

$$T^* F(Y) = \varinjlim_{X_\alpha \in \mathcal{C}/F} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, TX_\alpha), \quad F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^\wedge, \quad Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'.$$

Deci T_* comută cu limitele inductive şi proiective. Rezultă imediat că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$, functorul $F \rightsquigarrow F(X)$ de la $\mathcal{C}'^\wedge$ la Ens comută cu limitele proiective şi inductive. Este suficient să luăm pentru $\mathcal{C}$ subcategoria lui $\mathcal{C}'$ formată din singurul obiect X şi singurul morfism 1_X iar pentru T functorul incluziune.

Aceasta nu exprimă altceva decît faptul că limitele proiective şi inductive în $\mathcal{C}^\wedge$ se calculează pe componente.

Din adjuncţie rezultă că T^* comută cu limitele inductive iar din definiţie rezultă că acţionează pe obiectele reprezentabile din $\mathcal{C}^\wedge$ ca şi T, mai exact avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{C}' \arrow[d, "h'"] \\
\mathcal{C}^\wedge \arrow[r, "T^*"] & \mathcal{C}'^\wedge
\end{tikzcd}$$

LEMA 3. *Dacă T este deplin fidel, atunci şi T^* este deplin fidel. Dacă T are un adjunct la stînga S, atunci T^* comută cu limitele proiective.*

Într-adevăr, pentru

$$F, G \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^\wedge, \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(T^*,F, T^*G) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(T^*(\varinjlim_{\mathcal{C}/F} h_{X\alpha}), T^*(\varinjlim_{\mathcal{C}/G} h_{Y_\beta}) \approx$$

$$\approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(\varinjlim_{\mathcal{C}/F} T^* h_{X_\alpha}, \varinjlim_{\mathcal{C}/G} T^* h_{Y_\beta}) \approx$$

$$\approx \varprojlim_{\mathcal{C}/F} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(h'_{TX_\alpha}, \varinjlim_{\mathcal{C}/G} h'_{TY_\beta}) \approx$$

$$\approx \varprojlim_{\mathcal{C}/F} \varprojlim_{\mathcal{C}/G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(h'_{TX_\alpha}, h'_{TY_\beta}) \approx$$

$$\approx \varprojlim_{\mathcal{C}/F} \varprojlim_{\mathcal{C}/G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX_\alpha, TY_\beta) \approx \varprojlim_{\mathcal{C}/F} \varprojlim_{\mathcal{C}/G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\alpha, Y_\beta) \approx$$

$$\approx \varprojlim_{\mathcal{C}/F} \varprojlim_{\mathcal{C}/G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_{X_\alpha}, h_{Y_\beta}) \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(F, G).$$

A doua afirmație rezultă din faptul că $T^* = S_*$ căci pentru orice $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^\wedge$ și orice $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}'$,

$$T^* F(Y) = \varinjlim_{\mathcal{C}/F} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, TX_\alpha) \approx \varinjlim_{\mathcal{C}/F} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(SY, X_\alpha) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(SY, F) \approx FS(Y) = S_*, F(Y).$$

Să presupunem acum că $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ sînt înzestrate cu topologia τ respectiv τ' și fie $\mathcal{C}^\sim$ respective $\mathcal{C}'^\sim$ subcategoriile pline din $\mathcal{C}^\wedge$ respectiv $\mathcal{C}'^\wedge$ ale căror obiecte sînt fascicule; $i : \mathcal{C}^\sim \to \mathcal{C}^\wedge$ functorul de incluziune și $a : \mathcal{C}^\wedge \to \mathcal{C}^\sim$ functorul fascicul asociat, adjunct la stînga pentru i și care comută cu limitele proiective finite.

Aceeași semnificație o au functorii i' și a' relativ la $\mathcal{C}'^\wedge$ și $\mathcal{C}'^\sim$.

O categorie $\mathcal{C}$ înzestrată cu o topologie τ se numește sit și se notează $(\mathcal{C}, \tau)$.

Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ și $(\mathcal{C}', \tau')$ două situri, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor între categoriile subiacente.

Definiție. Functorul T se numește continuu dacă există un functor $T_1 : \mathcal{C}'^\sim \to \mathcal{C}^\sim$, numit functorul imagine directă de fascicule, în așa fel încît să fie comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}'^\wedge \arrow[r, "T_*"] & \mathcal{C}^\wedge \\
\mathcal{C}'^\sim \arrow[u, "i'"] \arrow[r, "T_1"] & \mathcal{C}^\sim \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

T_1 comută cu limitele proiective deoarece admite evident un adjunct la stînga T_1' $(\approx a'\ T^*\ i)$ cu proprietatea $T_1'\, a \approx a'\ T^*$. Dacă T_1 comută cu limitele proiective finite, T se numește morfism de situri. Aceasta se întîmplă, de exemplu, dacă T admite un adjunct la stînga.

Definiție. Functorul T se numește comorfism de situri dacă există un functor $T_2 : \mathcal{C}^\sim - \mathcal{C}'^\sim$ în așa fel încît să fie comutativă diagrama :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\wedge \arrow[r, "T+"] & \mathcal{C}'^\wedge \\
\mathcal{C}^\sim \arrow[u, "i"] \arrow[r, "T_2"] & \mathcal{C}'^\sim \arrow[u, "i'"']
\end{tikzcd}$$

T_2 comută cu limitele proiective căci admite evident un adjunct la stînga T_2' $(\approx aT_*\, i')$ cu proprietatea $T_2'\ a' \approx aT_*$. Evident, T_2' comută cu limitele inductive oarecare și cu limitele proiective finite.

Lema 4. *Dacă T este continuu și comorfism, functorul imagine directă de fascicole comută cu limitele proiective și inductive.*

În adevăr, T_1 comută cu limitele proiective iar T_2' cu limitele inductive. Totul este dovedit dacă arătăm că $T_1 \approx T_2'$, fapt ce rezultă din $T_*\, i' = i T_1$ prin compunere la stînga cu a și ținînd seama că i este deplin fidel, adică $ai \approx id$ (lema 1, IV).

Definiție. Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit și $\theta : F \to H$ un morfism din $\mathcal{C}^\wedge$. Morfismul θ se numește acoperitor în topologia τ dacă $a(\theta) : a(F) \to a(H)$ este epimorfism în $\mathcal{C}^\sim$. Morfismul θ se numește biacoperitor în topologia τ dacă $a(\theta)$ este izomorfism în $\mathcal{C}^\sim$.

Evident, o limită inductivă de morfisme acoperitoare este un morfism acoperitor.

În [1] se arată că θ este biacoperitor dacă și numai dacă este acoperitor și pentru orice diagramă comutativă

$$G \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} F \xrightarrow{\theta} \mathrm{H} \quad (\theta f = \theta g)$$

există o diagramă comutativă $K \xrightarrow{i} G \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} F$ cu i morfism acoperitor.

Tot în [1] se arată că dacă $(\mathcal{C}', \tau')$ este un sit și dacă $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este un functor, atunci există pe $\mathcal{C}$ o topologie τ pentru care T este continuu și este cea mai fină cu această proprietate.

τ se numește topologia indusă de T și are următoarea descriere: $R \xrightarrow{i} X$, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ este un ciur al lui X acoperitor în topologia τ dacă pentru orice morfism $Y \xrightarrow{f} X$ din $\mathcal{C}$, $T^* (R_X \times Y) \to T(Y)$ este morfism biacoperitor în topologia τ'.

DEFINIȚIE. Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit și $(X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X)_{\alpha \in A \in \mathfrak{U}}$ o familie de morfisme din $\mathcal{C}$. Familia dată se numește acoperitoare în topologia τ dacă $\bigcup\limits_{\alpha \in A} (f_\alpha (X_\alpha)) \to X$ este un ciur al lui X acoperitor în topologia τ (suma directă este calculată în $\mathcal{C}^\wedge$!).

TEOREMA DE REDUCERE A LUI GIRAUD.

Fie $(\mathcal{C}', \tau')$ *un sit,* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor deplin fidel și* τ *topologia pe* $\mathcal{C}$ *indusă de* T.

Dacă pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ *există o familie* $(T(X_\alpha) \to Y)_{\alpha \in A \in \mathfrak{U}}$ *acoperitoare în topologia* τ', *aiunci functorul imagine directă de fascicule* $T_1 : \mathcal{C}'^\sim \to \mathcal{C}^\sim$ *este o echivalență de categorii.*

Demonstrație. Vom arăta mai întîi că pentru orice $H \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'^\wedge$, $\Phi_H : T^* T_* H \to H$ este morfism biacoperitor în topologia τ'.

Pentru a dovedi că Φ_H este acoperitor, este suficient să arătăm că pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$, Φ_Y este acoperitor căci $H = \varinjlim\limits_{\mathcal{C}'/H} Y_\alpha$, T^*, T_* comută cu limitele inductive și o limită inductivă de morfisme acoperitoare este un morfism acoperitor.

Prin ipoteză există familia acoperitoare $(T(X_\alpha) \xrightarrow{f_\alpha} Y)_{\alpha \in A \in \mathfrak{U}}$ adică avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[dr, "i_R"] & \\
T^* (\oplus X_\alpha) = \oplus T(X_\alpha) \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "\oplus f_\alpha"] & & Y
\end{tikzcd}$$

cu $R = I_m (\oplus f_\alpha) \xrightarrow{i_R} Y$ ciur al lui Y acoperitor în topologia τ'.

Din adjuncție, rezultă că pentru $\oplus f_\alpha : T^* (\oplus X_\alpha) \to Y$ exista un morfism unic $\theta : \oplus X_\alpha \to T_* (Y)$ astfel ca diagrama

$(\ast)$

$$\begin{tikzcd}
T^* (\oplus X_\alpha) \arrow[r, "\oplus f_\alpha"] \arrow[d, "T^*(\theta)"'] & Y \\
T^* T_* (Y) \arrow[ur, "\Phi_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă. Deoarece i_R este monomorfism acoperitor deci biacoperitor în τ', rezultă că $a'(i_R)$ este izomorfism. Cum p este epimorfism, rezultă $a'(p)$ epimorfism, deci $a'(\oplus f_\alpha)$ epimorfism şi din (*) rezultă $a'(\Phi_Y)$ epimorfism adică Φ_Y morfism acoperitor în τ'.

Fie $F \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} T^* T_* H \xrightarrow{\Phi_H} H$ o diagramă comutativă în $\mathcal{C}'^\wedge$, adică $\Phi_H \cdot u = \Phi_H \cdot v$. Deoarece $\Phi_F : T^* T_* F \to F$ este acoperitor, Φ_H va rezulta biacoperitor dacă vom arăta că diagrama $T^* T_* F \xrightarrow{\Phi_F} F \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} T^* T_* H$ este comutativă. Conform lemei 3, T^* este deplin fidel, deci

$$u \Phi_F = T^*(u')\,;\; v \Phi_F = T^*(v') \text{ cu } T_* F \overset{u'}{\underset{v'}{\rightrightarrows}} T_* H.$$

Prin compunere la stînga cu Φ_H găsim

$$\Phi_H\, T^*(u') = \Phi_H\, T^*(v')$$

de unde rezultă $u' = v'$ căci $\Phi\, T^*$ este izomorfism (lema 2, a) şi totul este terminat.

Să arătăm acum că T este un comorfism.

Pentru aceasta este suficient [1] să arătăm că pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ şi orice ciur $R \xrightarrow{i} T(Y)$ acoperitor în τ', ciurul $T_*(R) \underset{T_* T_Y}{\times} Y \xrightarrow{i'} Y$, obţinut din monomorfismul $T_*(R) \xrightarrow{T_*(i)} T_* T(Y')$ prin schimbarea de bază $Y \xrightarrow{\psi_Y} T_* T(Y)$, este acoperitor în τ.

Deci pentru a arăta că i' este ciur acoperitor în τ, este suficient să arătăm că $T_*(i)$ este monomorfism acoperitor în τ şi cum ψ_Y este izomorfism, este suficient să arătăm că $T_* R \xrightarrow{T_*(i)} T_* T_Y \xrightarrow{\psi_Y^{-1}} Y$ este monomorfism acoperitor în τ adică, ţinînd seama de descrierea topologiei induse, pentru orice morfism $X \xrightarrow{f} Y$ din $\mathcal{C}$, $T^*(T_* R \underset{Y}{\times} X) \xrightarrow{h} TX$ este morfism biacoperitor în τ', fapt ce rezultă din următoarea diagramă comutativă :

$$\begin{tikzcd}
T^*T_*(R \underset{T_Y}{\times} TX) \approx T^*(T_* R \times_Y X \arrow[rrr, "h"] \arrow[drr, "\Phi_{R \underset{T_Y}{\times} TX}"'] \arrow[ddd] & & & T(X) \arrow[ddd, "T(f)"] \\
 & & R \underset{T_Y}{\times} TX \arrow[ur, "\theta"'] \arrow[dl] & \\
 & R \arrow[drr] & & \\
T^*T_* R \arrow[ur, "\Phi_R"] \arrow[rr, "T^*T_*(i)"] & & T^*T_* T_Y \arrow[r, "T^*(\psi_Y^{-1})"] & T(Y)
\end{tikzcd}$$

unde $\Phi\ \mathrm{R} \underset{T_Y}{\times} TX$ şi θ sînt biacoperitoare şi atunci h rezultă biacoperitor ca compunere de morfisme biacoperitoare.

Vom arăta că functorii T_1 şi T_1' sînt cvasiinverşi unul altuia, de unde va rezulta echivalenţa celor două categorii $\mathcal{C}'^{\sim}$ şi $\mathcal{C}^{\sim}$. Într-adevăr, dacă $F \in \mathcal{C}'^{\sim}$, atunci $T_1' \, T_1 \, (F) \approx T_1' \, aT_* \, i' \, (F) \approx a' \, T^* \, T_* \, i' \, (F) \approx$ $\approx a' \, i' F \approx F$ deci $T_1' T_1 \approx \mathrm{Id}_{\mathcal{C}'^{\sim}}$ (am folosit faptul că $\Phi_{i'(F)}$ este biacoperitor !).

Reciproc, dacă $G \in \mathcal{C}^{\sim}$, atunci $T_1 \, T_1' \, (G) \approx T_1 \, a' T^* \, iG \approx a T_* \, T^* iG \approx$ $\approx aiG \approx G$ deci $T_1 \, T_1' \approx \mathrm{Id}_{\mathcal{C}^{\sim}}$ (am folosit faptul că $T_1 \approx T_2'$ şi T^* deplin fidel !).

Observaţie. Fie X un spaţiu topologic, $\mathfrak{D}(X)$ categoria deschişilor lui X, $\mathfrak{B}(X)$ o bază de deschişi şi $T : \mathfrak{B}(X) \to \mathfrak{D}(X)$ functorul incluziune. Evident, $\mathfrak{D}(X)$ poate fi înzestrată cu o topologie, anume cea generată de acoperiri, faţă de care condiţia din teorema lui Giraud este realizată. Se regăseşte astfel rezultatul clasic graţie căruia, un fascicul pe un spaţiu topologic se poate defini dacă se cunosc valorile sale pe o bază de deschişi.

Primită la redacţie la 7 aprilie 1967

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România, Str. M. Eminescu
nr. 47, Bucureşti
Facultatea de chimie, Catedra de matematică

BIBLIOGRAFIE

1. VERDIER JEAN LOUIS, *Topologies et faisceaux*. Chap. III, I.E.H.S. Paris, 1964.
2. POPESCU NICOLAE, St. cerc. mat., **18**, *4*, *5*, *6* (1966).

ALGEBRA LIMBAJELOR FORMALIZATE

DE

TEODOR RUS

(Cluj)

În lucrare se studiază CF-gramaticile din punctul de vedere al posibilității simplificării regulilor lor de producere. Pornindu-se apoi de la noțiunea de CF-gramatică normală, care este definită ca și o CF-gramatică a cărei reguli de producere au o formă standard, se cercetează posibilitatea organizării limbajului formalizat $L(G)$, generat de o astfel de gramatică ca și o structură algebrică. Se demonstrează astfel că gramatica G induce în $L(G)$ un domeniu de operații algebrice Ω', astfel că

$$\mathcal{A}_G = \{L(G) \cup \{\varepsilon\}, \Omega'\}$$

este o algebră universală liberă.

Fie V o mulțime nevidă de simboluri, care admite o descompunere de forma $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V_T = \emptyset$, $V_N \neq \emptyset$, $V_T = \emptyset$.

Elementele lui V_N se vor numi în continuare categorii sintactice și vor fi notate cu litere mari latine, însoțite de indici dacă este nevoie. Elementele mulțimii V_T se vor numi litere ale alfabetului limbajului formalizat și vor fi notate cu litere mici latine, însoțite de indici dacă este nevoie.

Notăm cu $W(V)$ semigrupul liber cu unitate generat de mulțimea V. Prin urmare $W(V)$ este mulțimea tuturor cuvintelor peste alfabetul V, înzestrată cu o operație — juxtapunerea — care de altfel este operația de semigrup. Elementul unitate va fi notat cu ε și este cuvîntul vid. Elementele mulțimii $W(V)$ le vom numi cuvinte și le vom nota cu litere mici latine de la sfîrșitul alfabetului, însoțite de indici dacă este nevoie. Dacă notăm cu $\circ$ operația de juxtapunere (sau uneori concatenare), atunci avem :

(a) $V \subset W$

(b) $x, y \in W \Rightarrow x_0 y = xy \in W$

(c) $x \in W \Rightarrow \varepsilon \circ x = x \circ \varepsilon = x \in W$.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 9, P. 1309–1324, BUCUREȘTI, 1967

Fie acum $\mathcal{P}$ o mulţime finită de perechi de forma

$$\mathcal{P} = \{(A_1, w_1), (A_2, w_2), \ldots, (A_n, w_n)\} \quad A_i \in V_N, \ w_i \in W \ w_i \neq \varepsilon .$$

Mulţimea $\mathcal{P}$ va fi numită în continuare mulţimea producţiilor sau a regulilor de producere a limbajului formalizat. Dacă perechea $(A_i, w_i) \in \mathcal{P}$ uneori o vom nota cu $A_i \to w_i$ şi o vom numi regulă de producere.

După cum am observat în [1], fiecare regulă de producere induce în W o relaţie binară [2], [4] pe care o notăm cu R_i şi care se defineşte în felul următor :

$$x, y \in W, xR_iy \Leftrightarrow (x = x_1A_ix_2 \& y = x_1w_ix_2 \& (A_i, w_i) \in \mathcal{P})$$

cuvintele x_1, x_2 putînd fi identice cu cuvîntul vid ε. Dacă notăm cu Δ_{R_i} domeniul relaţiei R_i şi cu Γ_{R_i} rangul ei, atunci

$$\Delta_{R_i} = \{x \in W \mid x = x_1 \ A_ix_2\}$$

$$\Gamma_{R_i} = \{y \in W \mid y = x_1w_ix_2\}.$$

În cele ce urmează xR_iy va fi notat cu $x \vdash_{R_i} y$.

DEFINIŢIA 1. Un cvadruplu ordonat de forma

$$(W, V_N, V_T, \mathcal{P})$$

va fi numit gramatică în semigrupul liber W şi va fi notat cu G.

DEFINIŢIA 2. Dacă x, $y \in W$, atunci spunem că y este o derivare a lui x cu ajutorul gramaticii G dacă $x = y$ sau dacă există şirul de cuvinte $x_0, x_1, \ldots, x_m$ astfel ca :

$$x_0 = x$$

$$x_i \vdash_{R_{j_i}} x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1$$

$$x_m = y.$$

După cum s-a observat în [1], dacă y este o derivare a lui x, atunc există relaţiile $R_{j1}, R_{j2}, \ldots, R_{j_m}$ astfel ca

$$x \prod_{i=1}^{m} R_{j_i} y.$$

Dacă notăm cu $R_j = \prod_{i=1}^{m} R_{j_i}$ şi cu $x \models y$, faptul că y este o derivare a lui x, atunci este justificată notaţia

$$x \models_{R_j} y, \ R_j = \prod_{i=1}^{m} R_{j_i}.$$

DEFINIȚIA 3. Numim limbaj formalizat în semigrupul liber W generat de gramatica G cea mai mare submulțime $L \subset W$ cu următoarele proprietăți :

(a) Dacă $x \in L$, atunci $x \in W(V_T)$.

(b) Dacă $x \in L$, atunci există $A_i \in V_N$ astfel ca $A_i \models_R x$, unde R este un produs finit de relații binare induse de $\mathcal{P}$ în W.

Notăm limbajul formalizat generat de gramatica G cu $L(G)$.

DEFINIȚIA 4. Două gramatici G și G' în semigrupul liber W se numesc echivalente dacă $L(G) = L(G')$.

În lucrarea [1] am demonstrat că dacă G este o gramatică în W, atunci există un algoritm finit $\mathfrak{A}$ care partiționează mulțimea $\mathcal{P}$ în submulțimile $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_N$, astfel ca

(a) $\mathcal{P} = \bigcup\limits_{i=0}^{N} \mathcal{G}_i$.

(b) Dacă $(A_j w_j) \in \mathcal{G}_0$, atunci $w_j \in W(V_T)$

(c) $\mathcal{G}_0 \neq \Phi$ și dacă notăm cu $\mathcal{A}_0 = \{A_{01}, A_{02}, \ldots, A_{0p}\}$ mulțimea tuturor categoriilor sintactice care apar în părțile stîngi ale perechilor din $\mathcal{G}_0$ și dacă $\mathcal{A}_1 = \{A_{j0}, A_{j1}, \ldots, A_{jk_j}\}$, $j = 1, 2, \ldots, N$ este mulțimea tuturor categoriilor sintactice care apar în părțile stîngi ale perechilor mulțimilor $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_N$ atunci

$$\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$$

(d) $\mathcal{G}_j \cap \mathcal{G}_i = \varnothing$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots, N$, $i \neq j$.

(e) Dacă $(A_j, w_j) \in \mathcal{G}_i$, $i > 0$, atunci cuvîntul w_j conține numai intrările acelor categorii sintactice care apar în părțile stîngi ale perechilor grupelor $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_i$, și pentru fiecare $(A_j, w_j) \in \mathcal{G}_i$, w_j conține intrări ale cel puțin uneia din categoriilor sintactice care este parte stîngă a cel puțin uneia din perechile grupei $\mathcal{G}_{i-1}$.

Fie acum $\mathcal{G}_N = \{(A_{N_1}, w_{N_1}), (A_{N_2}, w_{N_2}), \ldots, (A_{N_k}, w_{N_k})\}$.

DEFINIȚIA 5. Limbajul formalizat $L(G)$ generat de gramatica G cu proprietățile înșirate mai sus se numește CF-limbaj (Context-Free).

O gramatică G care definește un CF-limbaj se numește CF-gramatică.

Fie acum G o CF-gramatică și fie $(A_{N_i}, w_{N_i}) \in \mathcal{G}_N$. Considerăm toate lanțurile de perechi de forma

$$(A_{N_i}, A_1) \in \mathcal{G}_N,\ A_{N_i}, A_1 \in V_N$$

$$(A_1, A_2) \in \mathcal{G}_{j_1},\ A_1, A_2 \in V_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(A_{p-1}, A_p) \in \mathcal{G}_{j_{p-1}},\ A_p, A_{p-1} \in V_N$$

$$(A_p, w_p) \in \mathcal{G}_{j_p},\ A_p \in V_N,\ w_p \in W$$

$$0 \leqslant j_p \leqslant j_{p-1} \leqslant \cdots \leqslant j_1 \leqslant N,$$

unde $w_p = t_1 x_1 t_2 x_2 \ldots t_n x_n t_{n+1}$, $t_i \in W(V_T)$, $x_i \in W(V_N)$.

Dacă nu există i astfel ca $t_i \neq \varepsilon$ în reprezentarea lui w_p, atunci se presupune că $l(w_p) > 1$, unde prin $l(x)$ am notat lungimea lui x.

Un lanţ de forma de mai sus se va numi în continuare lanţ cu proprietatea (s).

Fie acum $\mathfrak{M}_{A_{N_i}}$ mulţimea tuturor lanţurilor de perechi cu proprietatea (s) pentru o anumită pereche $(A_{N_i}, w_{N_i}) \in \mathcal{G}_N$.

DEFINIŢIA 6. O CF-gramatică G se va numi simplificată dacă pentru orice $(A_{N_i}, w_{N_i}) \in \mathcal{G}_N$, $\mathfrak{W}_{A_{N_i}} \neq \emptyset$ şi dacă orice lanţ obţinut pornind de la (A_{N_i}, w_{N_i}) poate fi completat la un lanţ cu proprietatea (s).

Are loc următoarea teoremă :

TEOREMA 1. *Dacă G este o CF-gramatică şi dacă numărul grupelor sale $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_N$ este astfel ca $N > 0$ şi cel puţin o pereche din $\mathcal{G}_i$, $i > 0$ este de forma (A_i, w_i), $l(w_i) > 1$, $w_i \notin W(V_T)$, atunci există o CF-gramatică G' simplificată, echivalentă cu prima, astfel ca dacă $\mathcal{G}'_0, \mathcal{G}'_1, \ldots, \mathcal{G}'_{N'}$ sînt grupele sale, atunci pntru fiecare $(A_{N'_i}, w_{N'_i}) \in \mathcal{G}'_{N'}$, $\mathfrak{W}_{A_{N'_i}} \neq \emptyset$ şi $N' > 0$.*

Demonstraţie. Fie G o CF-gramatică. Să considerăm $(A_{N_i}, w_{N_i}) \in \mathcal{G}_N$. Dacă $\mathfrak{W}_{A_{N_i}} \neq \emptyset$, atunci avem următoarele două cazuri :

(1) $\mathfrak{W}_{A_{N_i}}$ conţine numai lanţuri cu proprietatea (s).

(2) $\mathfrak{W}_{A_{N_i}}$ conţine şi lanţuri de altă formă.

În primul caz dacă $\mathfrak{W}_{A_{N_i}}$ are această proprietate pentru fiecare $(A_{N_i}, w_{N_i}) \in \mathcal{G}_N$, atunci G este o gramatică simplificată. În cazul al doilea fiecare lanţ care nu are proprietatea (s) şi nu poate fi prelungit la un lanţ cu această proprietate are una din formele :

$$(A_{N_i}, A_1)(A_1, A_2), \ldots, (A_p, w_p);\ (A_{N_i}, A'_1) \in \mathcal{G}_N,\ (A_p, w_p) \in \mathcal{P};$$

$$(A_i, A_{i+1}) \in \mathcal{P};\ i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

unde

(a) $w_p \in W(V_T)$ sau

(b) $w_p \in W(V'_N)$, $l(w_p) = 1$.

Să considerăm acum toate lanţurile de forma

$$(l_1)\quad (A_{N_i}, A_1), (A_1, A_2), \ldots, (A_i, A_{i+1}), \ldots, (A_p, w_p)$$

$$(l_2)\quad (A_{N_i}, A_1), (A_1, A_2), \ldots, (A_i, B_{i+1}), \ldots, (B_k, w_k)$$

în care (l_1) nu posedă proprietatea (s) pe cînd (l_2) posedă această proprietate

Dacă $w_p \in W(V_T)$, atunci din punct de vedere generativ perechile $(A_i, A_{i+1}), \ldots, (A_{p-1}, A_p)$ pot fi eliminate din $\mathcal{P}$ deoarece

$$A_{N_i} \models_R x, \quad x = x_1 w_p x_2$$

este echivalentă cu

$$A_p \vdash_{R_p} x, \quad x = x_1 w_p x_2 .$$

Pentru realizarea acestei eliminări se propune următorul algoritm :

Se consideră un lanţ cu proprietatea (s) de tipul (l_2). Se formează apoi un lanţ de tipul (l_1) care nu posedă proprietatea (s) şi care coincide cu (l_2) pe o anumită porţiune şi diferă de acesta pe o altă porţiune, terminîndu-se cu perechea (A_p, w_p), unde $w_p \in W(V_T)$. Se elimină apoi din $\mathcal{P}$ toate perechile care nu coincid cu perechile lanţului (l_2), mai puţin ultima pereche (A_p, w_p). Se procedează apoi în mod analog cu toate lanţurile de tipul (l_1) care se pot forma în acest fel pornindu-se de la perechea $(A_{N_i}, w_{N_i}) \in \mathcal{G}_N$.

Dacă are loc cazul (b), adică $w_p \in V_N$, atunci în mod absolut analog se arată că se pot elimina din $\mathcal{P}$ de data aceasta toate perechile lanţurilor care nu coincid cu perechile unui lanţ de tipul (l_2) cu proprietatea (s). Aceasta deoarece nu pot exista cuvinte $z \in L(G\ )$ astfel ca să avem

$$A_{N_i} \models_R y \vdash_{R_p} z.$$

Dacă ar exista astfel de cuvinte, atunci am avea

$$y = y_1 A_p y_2$$

$$z = y_1 w_p y_2$$

şi deoarece $w_p \in V_N$, ar urma că $z \notin L(G)$, ceea ce reprezintă o contradicţie. De aici rezultă că (A_p, w_p) se poate elimina.

După examinarea tuturor lanţurilor mulţimii $\mathfrak{W}_{A_{N_i}}$ avem sau $\mathfrak{W}_{A_{N_i}} \neq \emptyset$ sau $\mathfrak{W}_{A_{N_i}} = \emptyset$. Dacă există cel puţin o pereche (A_{N_i}, w_{N_i}) în $\mathcal{G}_N$ astfel ca în urma eliminărilor făcute mai sus să avem $\mathfrak{W}_{A_{N_i}} \neq \emptyset$, atunci gramatica obţinută este gramatica G'.

Dacă asemenea perechi nu există, înseamnă că prin eliminările făcute am eliminat din $\mathcal{P}$ toate perechile mulţimii $\mathcal{G}_N$. Gramatica astfel obţinută o notăm cu G_1. Cu această gramatică se procedează în mod absolut analog ca şi cu gramatica G. În felul acesta după un număr finit de paşi se ajunge la o gramatică G_i care posedă fie numai producţii din $\mathcal{G}_0$, fie la o gramatică G_i simplificată şi echivalentă cu G. Să presupunem acum că are loc cazul în care gramatica G_i are numai producţii din $\mathcal{G}_0$. Atunci este contrazisă ipoteza teoremei care afirmă că pentru cel puţin o pereche (A_i, w_i) din $\mathcal{G}_i$, $i > 0$, (A_i, w_i) este astfel ca $l(w_i) > 1$, şi $w_i \notin W(V_T)$. Această contradicţie demonstrează complet teorema.

TEOREMA 2. *Dacă G este o CF-gramatică, atunci ea este echivalentă cu o CF-gramatică G' ale cărei reguli de producere au următoarele proprietăţi :*

Dacă $(A_i, w_i) \in \mathcal{P}'$, $A_i \in V'_N$, $w_i \in W(V')$, *atunci* w_i *este de una din formele*

(a) $w_i \in W(V_T)$

(b) $w_i = AB, \quad A, B \in V_N,$

(c) $w_i = B, \quad B \in V_N,$

(d) $w_i = t_1 B_1 t_2 B_2 \ldots t_n B_n t_{n+1}\ ; B_i \in V_N,\ i = 1, 2, \ldots, n$

$t_i \in W(V_T)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, şi $t_i \neq \varepsilon$ pentru $i \neq 1$, $i \neq n+1$.

Demonstrație. Vom construi în continuare gramatica G' care satisface condițiile teoremei și este echivalentă cu G. Fie pentru aceasta gramatica G dată și fie descompunerea mulțimii $\mathcal{P}_G$ în grupele $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots \mathcal{G}_N$. Notăm cu $\mathcal{G}'_0, \mathcal{G}'_1, \ldots, \mathcal{G}'_{N'}$ grupele gramaticii G'. Aceste grupe se construiesc în felul următor :

(1) $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}'_0$.

(2) Fie $\mathcal{G}_1 = \{(A_{11}, w_{11}) (A_{12}, w_{12}), \ldots, (A_{pp}, w_{pp})\}$; $\mathcal{G}'_1$ se va construi atunci astfel : Considerăm prima producție $(A_{11}, w_{11}) \in \mathcal{G}_1$. Dacă w_{11} are una din formele (a)—(d), atunci $(A_{11}, w_{11}) \in G'_1$. Să presupunem acum că w_{11} nu este de una din formele (a)—(d). Atunci

$$w_{11} = A_1 A_2 \ldots A_k, \quad A_j \in V_N, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad k, k > 1$$

sau

$$w_{11} = t_1 x_1 t_2 x_2 \ldots t_n x_n t_{n+1}, \ t_i \in W(V_T), \ t_i \neq \varepsilon, \ i \neq 1, i \neq n + 1$$

unde pentru cel puțin un i, $l(x_i) > 1$ și $x_i \in W(V_N)$. Construim atunci un șir de perechi de producere care din punct de vedere generativ este echivalent cu perechea (A_{11}, w_{11}) și înlocuim această pereche cu șirul astfel construit. Pentru aceasta considerăm simbolurile $B^1, B^2, \ldots, B^{k-1}$ care nu aparțin mulțimii V. Fie atunci

$$V' = V \cup \{B^1, B^2, \ldots, B^{k-1}\}.$$

și luăm

$$V'_N = V_N \cup \{B^1, B^2, \ldots, B^{k-1}\}.$$

Considerăm acum șirul de perechi

$$(B^1, A_1 A_2), (B^2, B^1 A_3), \ldots, (B^{k-1}, B^{k-2} A_k) (A_{11}, B^{k-1}).$$

Notăm cu $R^1, R^2, \ldots, R^k$ relațiile binare induse de aceste perechi în $W(V')$ și cu R_{11} relația binară indusă de (A_{11}, w_{11}) în $W(V)$. Atunci are loc următoarea egalitate :

$$\prod_{i=k}^{1} R^i = R_{11}.$$

Într-adevăr, fie $(x, y) \in R_{11}$. Atunci

$$x = x_1 A_{11} x_2, \quad y = x_1 w_{11} x_2.$$

Construim acum șirul de cuvinte $x_0, x_1, \ldots, x_k$ astfel ca

$$x_0 = x$$

$$x_i \vdash_{R_{j_i}} x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, i - 1$$

$$x_k = y.$$

Pentru aceasta punem

$$
\begin{aligned}
x_0 &= x = x_1 A_{11} x_2 \\
x_1 &= x_1 B^{k-1} x_2 \\
x_2 &= x_1 B^{k-1} A_k x_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_k &= x_1 A_1 A_2 \ldots A_k x_2
\end{aligned}
$$

şi prin urmare $(x, y) \in \prod_{i=k}^{1} R^i = R_k \circ R_{k-1} \circ \ldots \circ R_1$. În mod analog se arată şi invers, dacă $(x, y) \in \prod_{i=k}^{1} R^i$, atunci $(x, y) \in R_{11}$. Acest lucru justifică înlocuirea lui (A_{11}, w_{11}) cu şirul de perechi construit mai sus. În acest caz punem :

$$
\begin{aligned}
&(B^1, A_{11}) \in \mathcal{G}'_1 \\
&(B^i, B^{i-1} A_{i+1}) \in \mathcal{G}'_i, \quad i = 2, 3, \ldots, k-1 \\
&(A_n, B^{k-1}) \in \mathcal{G}'_k.
\end{aligned}
$$

Considerăm acum cazul $(A_{11}, w_{11}) \in \mathcal{G}_1$, unde w_{11} are forma $w_{11} = t_1 x_1 t_2 x_2 \ldots t_n x_n t_{n+1}$, $t_i \in W(V_T)$, $t_i \neq \varepsilon$, $i \neq 1$, $i \neq n+1$ şi pentru cel puţin un j, $l(x_j) > 1$, $x_j \in W(V_N)$.

Notăm cu $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}$ toate cuvintele care intră în w_{11}, $x_{j_i}, \in W\ (V_N)$, $i = 1, 2, \ldots, p$ şi $l(x_{j_i}) > 1$. Să presupunem că acestea sînt de forma

$$x_{j_i} = A_i^1 A_i^2 \ldots A_i^{s_i}, s_i > 1, A_i^l \in V_N,\ l=1, 2, \ldots, s_i.$$

Fie atunci mulţimea

$$
\begin{aligned}
V'' = V' \cup \{B_i^1, B_i^2, \ldots, B_i^{s_i-1}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \\
B_i^l \notin V', \ l = 1, 2, \ldots, s_i - 1
\end{aligned}
$$

şi punem

$$V''_N = V'_N \cup \{B_i^1, B_i^2, \ldots, B_i^{s_i-1}\}.$$

În continuare alegem perechile

$$(B_i^1, A_i^1 A_i^2), (B_i^2, B_i^1 A_i^3) \ldots (B_i^{s_i-1}, B^{s_i-2} A_i^{s_i})$$

şi notăm cu $R_i^1, R_i^2, \ldots, R_i^{s_i-1}$ relaţiile binare induse de aceste perechi în semigrupul liber $W(V'')$. Considerăm apoi perechea (A_{11}, w'_{11}), unde w'_{11} se obţine din w_{11} prin înlocuirea lui x_{j_i} cu $B_i^{s_i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Atunci se vede imediat că avem $R_i^{s_i-1} \circ \ldots \circ {}'_1 \circ R^{s_2-1} \circ \ldots \circ R_p^{s_p-1} \circ \ldots \circ R'_p \circ \circ R'_{11} = R'_{11}$, unde R_{11} este relaţia binară indusă de perechea (A_{11}, w'_{11}) $W(V'')$.

În felul acesta perechea (A_{11}, w_{11}) se poate înlocui cu perechile

$$(B_1^1,\ A_1^1A_1^2), (B_1^2,\ B_1^1A_1^3), \ldots, (B_1^{s_1-1},\ B^{s_1-2}A_1^{s_1})$$

$$(B_2^1,\ A_2^1A_2^2), (B_2^2,\ B_2^1,\ A_2^3), \ldots, (B_2^{s_2-1},\ B_2^{s_2-2}A_2^{s_2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(B_p^1,\ A_p^1A_p^2),\ (B_p^2,\ B_p^1A_p^3,\ \ldots,\ (B_p^{s_p-1}),\ B_p^{s_p-2}A_p^{s_p})$$

$$(A_{11},\ w'_{11}).$$

În acest caz punem

$$(B_i^1,\ A_i^1A_1^2) \in \mathcal{G}'_1,\ i = 1, 2, \ldots p$$

$$(B_i^j,\ B^{j-1}A_i^{j+1}) \in \mathcal{G}'_j\ \ j = 2, 3, \ldots, s_i - 1,\ i = 1, 2, \ldots, p.$$

$$(A_{11},\ w'_{11}) \in \mathcal{G}'_l\ \ l = \max_{i=1}^{p} s_i.$$

Aplicînd acest procedeu pentru toate regulile de producere din $\mathcal{G}_1$, vom construi regulile de producere ale grupei $\mathcal{G}'_1$. Procesul se repetă apoi în mod absolut analog pentru grupele $\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \ldots, \mathcal{G}_N$. Gramatica obţinută în urma acestui proces este echivalentă cu G şi satisface condiţiile cerute în teoremă.

Se poate observa acum că procesul descris mai sus are drept scop o anumită simplificare a regulilor de producere a unei CF-gramatici. Această simplificare aduce după sine o mărire uneori substanţială a numărului acestor reguli.

Vom arăta în continuare că regulile de producere ale unei CF-gramatici pot fi simplificate şi mai mult în sensul că fiecare regulă de producere de forma $(A_i,\ w_i)$ cu $w_i = t_1 B_1 t_2 B_2, \ldots t_n B_n t_{n+1}$, $t_i \in W(V_T)$, $t_i \neq \varepsilon$, $i \neq 1$ şi $i \neq n+1$, $B_i \in V_N^1$, se poate înlocui cu un şir de reguli de forma $(A_i,\ w'_i)$, unde w'_i are forma

$$t_1B_2t_2,\ B \in V'_N,\ t_1,\ t_2 \neq \varepsilon,\ t_1, t_2 \in W\ (V_T) \text{ sau}$$

$$A\ t\ B,\ A,\ B \in V'_N,\ t \neq \varepsilon,\quad t \in W(V_T).$$

Pentru aceasta facem următoarea analiză a regulii $(A_i,\ w_i)$, unde

$$w_i = t_1B_1t_2B_2, \ldots, t_nB_nt_{n+1},\ t_i \in W(V_T),\ t_i \neq \varepsilon \text{ pentru } i \neq 1,\ i \neq n+1$$
$$B_i \in V_N.$$

a) Dacă $t_1 = \varepsilon$, atunci considerăm regula de producere

$$(B_t,\ B_1t_2B_2),\ B_t \notin V'_N,$$

unde V'_N este mulţimea categoriilor sintactice ale gramaticii G'. Considerăm apoi regula de producere $(A_i,\ B_tw'_i)$, unde w'_i se obţine din w_i prin ştergerea cuvîntului $B_1t_2B_2$.

Dacă $t \neq \varepsilon$, atunci $w_i = t_1B_1t_2\ w'_i$ şi noua regulă de producere care este considerată are forma :

$$(B_t,\ t_1B_1t_2),\ t_1,\ t_2 \neq \varepsilon,\ t_1, t_2 \in W(V_T),\ B_1 \in V'_N B_t\ \notin V'_N.$$

După aceea se consideră regulile de producere de forma (A_i, B_i, w'_i) cu care se procedează în mod analog ca şi mai sus. Aplicînd acest procedeu, eventual alternat cu procedeul descris în demonstraţia teoremei 2, se vede uşor că după un număr finit de paşi obţinem o gramatică G'' echivalentă cu gramatica G ale cărei reguli de producere (A_i, w_i) au proprietatea că w_i are una din formele :

(a) $w_i \in W(V_T)$

(b) $w_i = B,\ B \in V''_N$

(c) $w_i = AB,\ A,\ B \in V''_N$

(d) $w_i = t_1Bt_2,\ B \in V''_N,\ t_1,\ t_2 \in W(V_T),\ t_1, t_2 \neq \varepsilon$

(e) $w_i = A\,t\,B, A, B \in V''_N,\ t \in W(V_T),\ t \neq \varepsilon.$

Definiţia 7. O *CF*-gramatică simplificată ale cărei reguli de producere sînt $(A_i,\ w_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, unde w_i are una din formele (a)—(e), va fi numită *CF*-gramatică normală.

Teorema 3. *Dacă G este o CF-gramatică în semigrupul liber $W(V)$, $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V = \varnothing$, $V_N = \varnothing$, $V_T \neq \varnothing$, atunci există o extindere V' a lui V şi o CF-gramatică normală G' în semigrupul liber $W(V')$, $V' = V'_N \cup V_T$ echivalentă cu G.*

Această teoremă este o consecinţă a teoremelor 1 şi 2 şi a procedeului de simplificare a regulilor de producere expus mai sus.

Vom demonstra în continuare cîteva leme care ne vor servi la organizarea unui *CF*-limbaj ca şi o algebră universală liberă indusă de G în $W(V)$.

Lema 1. *Dacă G este o CF-gramatică normală în semigrupul liber W, atunci mulţimea $\mathcal{P}_G$ a regulilor ei de producere induce în W un domeniu Ω de operaţii algebrice.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{P}_G$ mulţimea regulilor de producere ale gramaticii G, împărţită în grupele $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1 \ldots, \mathcal{G}_N$. Vom construi pentru fiecare regulă $(A_i,\ w_i) \in \mathcal{P}_G$ o operaţie algebrică în W. Pentru aceasta vom proceda pe rînd cu grupele $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1 \ldots, \mathcal{G}_N$. Înainte de aceasta considerăm însă grupa $\mathcal{G}_0$ astfel că

$$\mathcal{G}_0 = \{(A_{01}, w_{01}),\ (A_{02}, w_{02}),\ \ldots,\ (A_{0p}, w_{0p})\},$$

unde $A_{0i} \in V_N$, $w_{0i} \in W(V_T)$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Vom numi în continuare cuvintele w_{0i}, $i = 1, 2, \ldots, p$, constante individuale şi atunci vom avea

$$\mathcal{C} = \{w_{0i} \mid w_{0i} \in W(V_T)\ \&\ \exists\ (A_{01},\ w_{0i}) \in \mathcal{G}_0\}.$$

Elementele lui $\mathcal{C}$ vor fi notate cu c_i.

Operaţiile induse de perechile grupei $\mathcal{G}_0$ se definesc astfel : Dacă $(A_{0i},\ w_{0i}) \in \mathcal{G}_0$, atunci θ_i^0 se defineşte prin schema :

$$\theta_i^0(x) = \begin{cases} x_1A_{0i}x_2 & \text{dacă } x \in W \text{ şi } x = x\,w_{0i}x_2,\ x_1 \neq vw_{0i}z. \\ \varepsilon & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Presupunem acum că $(A_i, w_i) \in \mathcal{G}_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Deoarece G este o CF-gramatică normală, w_i are una din formele :

(b) $w_i = B$, $B \in V_N$

(c) $w_i = AB$, $A, B \in V_N$

(d) $w_i = t_1 B t_2$, $B \in V_N$, $t_1, t_2 \in W(V_T), t_1, t_2 \neq \varepsilon$

(e) $w_i = AtB$, $A, B \in V_N$, $t \in W(V_T)$, $t \neq \varepsilon$.

Operaţia θ_i^j indusă de perechea (A_i, w_i) în cazul (b) se defineşte astfel

$$\theta_i^j(x) = \begin{cases} x_1 A_i x_2 & \text{dacă } x \in W \text{ şi } x = x_1 B x_2,\ x_1 \neq vBz. \\ \varepsilon & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

În cazul (c) vom avea

$$\theta_i^j(x) = \begin{cases} x_1 A_i x_2 & \text{dacă } x \in W \text{ şi } x = x_1 A B x_2,\ x_1 \neq vABz \\ \varepsilon & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

În cazul (d) vom avea

$$\theta_i^j(x) = \begin{cases} x_1 A_i x_2 & \text{dacă } x \in W \text{ şi } x = x_1 t_1 B t_2 x_2,\ x_1 \neq v t_1 B t_2 z \\ \varepsilon & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

În cazul (e) vom avea

$$\theta_i^j(x) = \begin{cases} x_1 A_i x_2 & \text{dacă } x \in W \text{ şi } x = x_1 AtB x_2,\ x_1 \neq vAtBz, \\ \varepsilon & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

În toate aceste cazuri x_1, x_2, V, z pot fi egale cu cuvîntul vîd ε.

Dacă notăm cu $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_N$ operaţiile algebrice astfel definite de către toate regulile de producere din $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_N$ respective, atunci

$$\Omega = \mathcal{C} \cup \Theta_0 \cup \Theta_1 \cup \cdots \cup \Theta_N.$$

Fie acum limbajul formalizat $L(G)$ generat de către CF-gramatica normală G, adică

$$L = \{ x \in W(V_T) \mid (\exists A_i \in V_N)\ A_i \models_R x \},$$

unde R este un produs finit de relaţii binare induse de mulţimea $\mathfrak{P}_G$ în W. Notăm cu $[A_i]$ mulţimea tuturor cuvintelor limbajului $L(G)$ astfel ca

$$[A_i] = \{ x \mid A_i \models x, x \in L(G) \}.$$

Atunci este evidentă egalitatea

$$L(G) = \bigcup_{i \in I} [A_i],$$

unde $I = (0, 1, 2, \ldots, m)$, $m = \text{Card}\ (V_N)$.

LEMA 2. *Dacă* $A_i \in V_N$ *şi* $x \in [A_i]$, *atunci există un şir finit de operaţii* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ *în* Ω *aşa ca*

$$\theta_1\, \theta_2, \ldots, \theta_p(x) = A_i,$$

unde prin $\theta_1 \theta_2 \dots, \theta_p (x)$ *am notat aplicarea succesivă a operaţiilor* $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ *asupra cuvîntului* x.

Demonstraţie. Deoarece $x \in [A_i]$, urmează că există $R = \prod_{i=0}^{p-1} R_{j_i}$, unde R_{j_i} este relaţia binară indusă de perechea (A_i, w_i) în W, pentru $i = 0, 1, \dots, p-1$, astfel ca $A_i \models_R x$. Prin urmare există şirul de cuvinte $x_0, x_1, \dots, x_p$ astfel ca să avem

$$x_0 = A_i$$

$$x_i \vdash_{R_{j_i}} x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, p-1$$

$$x_p = x.$$

Aceasta înseamnă că

$$x_{n-1} = x^1 A_{j_{p-1}} x^2$$

$$x_n = x^1 w_{j_{p-1}} x^2$$

unde $x_n = x \in L(G)$, $(A_{j_{p-1}}, w_{j_{p-1}}) \in \mathcal{P}_G$. Prin urmare vom avea $(A_{j_{p-1}}, w_{j_{p-1}}) \in \mathcal{G}_0$. Fie atunci θ_p operaţia indusă de perechea $(A_{j_{p-1}}, w_{j_{p-1}})$ în W. Atunci

$$\theta_p (x) = \theta_p (x_p) = x^1 A_{j_{p-1}} x^2 = x_{p-1}.$$

Procedînd analog cu x_{p-1} ca şi cu x_p, din aproape în aproape ajungem la egalitatea

$$\theta_1 (\theta_2 (\dots, (\theta_p (x)))) = A_i$$

sau

$$\theta_1 \theta_2 \dots \theta_p (x) = A_i$$

ceea ce demonstrează lema.

LEMA 3. *Dacă* $x \in L(G)$ *şi dacă există şirul de operaţii* $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ *din* Ω *astfel ca* $\theta_1 \theta_2 \dots, \theta_p (x) = A_i$, *atunci există relaţiile* $R_{j_1}, R_{j_2}, \dots, R_{j_p}$ *induse de către perechile* $(A_{j_1}, w_{j_1}), (A_{j_2}, w_{j_2}), \dots, (A_{j_p} w_{j_p})$ *astfel ca să avem*

$$A_i \models_R x, \quad R = \prod_{i=1}^{p} R_{j_i}.$$

Demonstraţie. Fie $x \in L(G)$ şi $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p \in \Omega$ astfel ca $\theta_1 \theta_2 \dots \theta_p (x) = A_i$. Conform definiţiei lui Ω avem

$$x = x_1 w_{j_p} x_2, \quad x_1 \neq v\, \omega_{j_p} z, \quad (A_{j_p}, w_{j_p}) \in \mathcal{P}_G$$

iar operaţia θ_p indusă de această pereche aplicată la x ne dă

$$y = \theta_p (x) = x_1 A_{j_p} x_2.$$

Procedăm analog cu y ca şi cu x şi apoi din aproape în aproape punem în evidenţă perechile (A_j, w_{j_1}), $(A_{j_2}, w_{j_2}), \dots, (A_{j_p}, w_{j_p})$ astfel ca $A_i \models_R x$, $R = \prod_{i=1}^{p} R_{j_i}$, ceea ce demonstrează lema 3.

DEFINIŢIA 8. Dacă $x \in L(G)$ şi $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ este un şir de operaţii algebrice din Ω astfel ca $\theta_1 \theta_2, \ldots, \theta_p(x) = A_i$, unde $A_i \in V_N$, atunci vom spune că $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ este o analiză a cuvîntului x în mulţimea $[A_i]$.

LEMA 4. *Fie* $x \in L(G)$ *şi* $x \in [B]$, $B \in V_N$. *Dacă în mulţimea* $\mathcal{P}_G$ *există regula* (A_i, B), *atunci* $x \in [A_i]$.

Demonstraţie. Deoarece $x \in L(G)$ şi $x \in [B]$, conform lemei 2 există o analiză $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ a lui x în $[B]$.

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p(x) = B.$$

Dar în $\mathcal{P}$ există perechea (A_i, B). Atunci în Ω există operaţia θ_k indusă de această pereche, astfel ca $\theta_k(B) = A_i$. Aceasta înseamnă că şirul $\theta_k, \theta_1, \ldots, \theta_p$ este o analiză a cuvîntului x în $[A_i]$. După lema 3 rezultă că $A_i \models_R x$.

LEMA 5. *Dacă* $x_1, x_2 \in L(G)$ *şi* $x_1 \in [A], x_2 \in [B]$, *iar* $A, B \in V_N$ *şi dacă în* $\mathcal{P}$ *există perechea* (A_i, AB), *atunci avem* $x = x_1 x_2 \in L(G)$ *şi* $x = x_1 x_2 \in [A_i]$.

Demonstraţie. Fie $\theta_1^1, \theta_2^1, \ldots, \theta_{p_1}^1$ şi $\theta_1^2, \theta_2^2, \ldots, \theta_{p_2}^2$ analizele lui x_1 şi respectiv x_2 în $[A]$ respectiv în $[B]$. După lema 3 avem

$$\theta_1^1 \theta_2^1 \ldots \theta_{p_1}^1(x_1) = A$$

$$\theta_1^2 \theta_2^2 \ldots \theta_{p_2}^2(x_1) = B.$$

Presupunem acum că θ_k este operaţia indusă de perechea (A_i, AB). Atunci, evident, vom avea $\theta_k(\theta_1^1 \ldots, \theta_{p_1}^1(x_1) \circ \theta_1^2 \theta_2^2 \ldots \theta_{p_2}^2(x_2)) = A_i$, unde $\circ$ este operaţia de semigrup. De aici urmează că şirul operaţiilor $\theta_k, \theta_1^1, \theta_2^1, \ldots, \theta_{p_1}^1, \theta_1^2, \theta_2^2, \ldots, \theta_{p_2}^2$, este o analiză a cuvîntului $x = x_1 x_2$ în $[A_i]$ şi prin urmare lema este demonstrată.

LEMA 6. *Dacă* $x_1 \in L(G)$ *şi* $x_1 \in [B]$, $B \in V_N$, *şi dacă în* $\mathcal{P}$ *există perechea* $(A_i, t_1 B t_2)$, *atunci cuvîntul* $x = t_1 x_1 t_2$ *aparţine limbajului* $L(G)$ *şi* $t_1 x_1 t_2 \in [A_i]$.

Demonstraţie. Fie $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ o analiză a cuvîntului x_1 în B. Considerăm atunci cuvîntul $x = t_1 \circ \theta_1 \theta_2, \ldots, \theta_p(x_1) \circ t_2$ şi operaţia θ_k indusă de $(A_i, t_1 B_1 t_2)$ în W. Este evident că

$$\theta_k(t_1 \circ \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_p(x_1) \circ t_2) = A_i.$$

Prin urmare $\theta_k, \theta_1, \ldots, \theta_p$ este o analiză a lui $t_1 x_1 t_2$ în $[A_i]$ şi deci $t_1 x_1 t_2 \in L(G)$ şi $t_1 x_1 t_2 \in [A_i]$ ceea ce demonstrează lema.

LEMA 7. *Dacă* $x_1, x_2 \in L(G)$ *şi* $x_1 \in [A]$, $x_2 \in [B]$, $A, B \in V_N$ *şi dacă există perechea* (A_i, AtB), *atunci* $x_1 t x_2 \in [A_i]$ *şi* $x_1 t x_2 \in L(G)$.

Demonstraţie. Fie $\theta_1^1, \theta_2^1, \ldots, \theta_{p_1}^1$ şi $\theta_1^2, \theta_1^2, \ldots, \theta_{p_2}^2$ analizele lui x_1 şi x_2 în $[A]$ respectiv $[B]$. Considerăm cuvîntul $x = \theta_1^1, \theta_2^1, \ldots$ $\ldots \theta_p^1(x_1) \circ t \circ \theta_2^1 \theta_2^2, \ldots, \theta_{p_2}^2(x_2) = AtB$. Să presupunem că θ_k este operaţia indusă de (A_i, AtB) în W. Atunci avem $\theta_k(x) = A_i$ şi prin urmare şirul operaţiilor $\theta_k, \theta_1^1, \ldots, \theta_{p_1}^1, \theta_1^2, \theta_2^2, \ldots, \theta_{p2}^2$ este o analiză a lui $x_1 t x_2$ în $[A_i]$, de unde rezultă lema.

Fie acum un limbaj formalizat $L(G)$ generat de o CF-gramatică G şi fie Ω domeniul de operaţii induse de $\mathcal{P}_G$ în W. Vom defini în continuare în limbajul $L(G)$ un domeniu de operaţii algebrice Ω' astfel ca să avem Card (Ω) = Card (Ω').

Mulţimea Ω' se construieşte în felul următor: dacă $c_i \in \mathcal{C}$, atunci evident $c_i \in L(G)$ şi prin urmare putem considera $\mathcal{C}$ drept mulţimea constantelor individuale din Ω'. Fie acum operaţia $\theta_k^i \in \Theta_j$, $j = 0, 1, \ldots, N$. Atunci θ_k^i este indusă în W de o pereche de una din formele:

(a) (A_k, w_k), $A_k \in V_N$, $w_k = c_k$

(b) (A_k, B), $A_k, B \in V_N$

(c) $(A_k, A\,B)$, $A_k, A, B \in V_N$

(d) (A_k, t_1Bt_2), $A_k, B \in V_N$, $t_1t_2 \in W(V_T)$, $t_1, t_2 \neq \varepsilon$

(e) (A_k, AtB), $A_k, A, B \in V_N$, $t \in W(V_T)$, $t \neq \varepsilon$.

Dacă θ_k^i este indusă în W de o pereche de forma (a), atunci acesteia îi va corespunde în $L(G)$ o operaţie $\theta_k'^j$ definită astfel

$$\theta_k'^i(x)\begin{cases} x \text{ dacă } x \in L(G) \text{ şi } x \in [A_k] \\ \varepsilon \text{ dacă } x \in L(G) \text{ şi } x \notin [A_k]. \end{cases}$$

În felul acesta corespunzător cazurilor (b)—(e) vom avea definită operaţia $\theta_k'^i$ după schemele următoare:

$$\theta_k'^i(x) = \begin{cases} x \text{ dacă } x \in L(G) \text{ şi } x \in [B] \\ \varepsilon \text{ dacă } x \in L(G) \text{ şi } x \notin [B] \end{cases}$$

$$\theta_k'^i(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1x_2 \text{ dacă } x_1, x_2 \in L(G) \text{ şi } x_1 \in [A],\ x_2 \in [B] \\ \varepsilon \text{ dacă } x_1, x_2 \in L(G) \text{ şi } x_1 \notin [A] \text{ sau } x_2 \notin [B] \end{cases}$$

$$\theta_k'^i(x) = \begin{cases} t_1xt_2 \text{ dacă } x \in L(G) \text{ şi } x \in [B] \\ \varepsilon \text{ dacă } x \in L(G) \text{ şi } x \notin [B] \end{cases}$$

$$\theta_k'^i(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1tx_2 \text{ dacă } x_1, x_2 \in L(G) \text{ şi } x_1 \in [A],\ x_2 \in [B] \\ \varepsilon \text{ dacă } x_1, x_2 \in L(G) \text{ şi } x \notin [A] \text{ sau } x_2 \notin [B]. \end{cases}$$

Procedînd analog pentru $j = 0, 1, \ldots, N$, obţinem domeniul de operaţii Ω', cu proprietatea indicată mai sus. Construcţia de mai sus este posibilă avînd în vedere lemele 2—7.

TEOREMA 4. *Mulţimea $L(G) \cup \{\varepsilon\}$ este o algebră universală relativ la domeniul de operaţii algebrice Ω'.*

Demonstraţie. Teorema rezultă imediat din construcţia mulţimii Ω'. Vom nota în continuare cu $\mathcal{A}_G$ algebra universală pusă în evidenţă prin teorema 4, şi prin urmare avem

$$\mathcal{A}_G = \{L(G) \cup \{\varepsilon\}, \Omega'\}.$$

CONSECINŢA 1. Dacă $\mathcal{A}_G$ este algebra universală a limbajului formalizat $L(G)$ şi dacă $A_k \in V_N$, atunci $[A_k] \cup \{\varepsilon\}$ este o subalgebră a algebrei $\mathcal{A}_G$.

Această consecinţă rezultă imediat din definiţia mulţimii $[A_k]$ precum şi din definiţia algebrei $\mathcal{A}_G$.

CONSECINȚA 2. Dacă $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_p$ sînt toate categoriile sintactice din V_N care apar în partea stîngă a perechilor din mulțimea $\mathcal{G}_1$ atunci

$$[A_1] \cup [A_2] \cup \cdots \cup [A_p] \cup \{\varepsilon\}$$

este o subalgebră a lui $\mathcal{A}_G$.

Această consecință rezultă ușor din consecința 1 și din definiția algebrei $\mathcal{A}_G$. Notăm în continuare cu $\mathcal{A}_G^1$ subalgebra algebrei $\mathcal{A}'_G$ pusă în evidență în consecința 2.

TEOREMA 5. *Algebra $\mathcal{A}'_G$ este o algebră liberă a cărei mulțime de generatori coincide cu mulțimea $\mathcal{C}$.*

Demonstrație. Să considerăm toate perechile grupelor

$$\mathcal{G}_0 = \{(A_{01}, w_{01}), (A_{02}, w_{02}), \ldots, (A_{0p} w_{0p})\}$$

$$\mathcal{G}_1 = \{(A_{11}, w_{11},) \, (A_{12}, w_{12}), \ldots, (A_{1q}, w_{1q})\}$$

În acest caz $A_1, A_2, \ldots, A_p$ din consecința 2 sînt chiar $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{19}$. Cuvintele w_{1i} sînt de una din formele

(b) $w_{1i} = B, \; B \in V_N$

(c) $w_{1i} = AB, \; A, B \in V_N$

(d) $w_{1i} = t_1 B t_2, \; B \in V_N, \; t_1, t_2 \in W(V_T), \; t_1, t_2, \neq \varepsilon$

(e) $w_{1i} = AtB, \; A, B \in V_N, \; t \in W(V_T), \; t \neq \varepsilon.$

Conform definiției grupelor $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_N$, categoriile sintactice care pot interveni în descompunerea cuvîntului w_{1i} au proprietatea că

$$A, B \in \left(\bigcup_{j=0}^{p} A_{0j}\right) \cup \{A_{1i}\}.$$

Din proprietatea (e) enunțată la definirea partiționării mulțimii $\mathcal{P}'_G$ în grupele $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_N$ urmează că nu există perechi de forma $(A_k, w_k) \in \mathcal{P}_G$, cu w_k de una din formele (b)—(c) astfel ca $A, B \in \left(\bigcup_{j=0}^{p} A_{0j}\right) \cup \cup \{A_k\}$, unde (A_k, w_k) să aparțină uneia din grupele $\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \ldots, \mathcal{G}_N$. Aceasta înseamnă că $\mathcal{A}_G^1$ este cea mai mică subalgebră a algebrei $\mathcal{A}_G$ diferită de $\mathcal{C}$ care conține mulțimea $\mathcal{C}$. De aici urmează că mulțimea $\mathcal{C}$ este o mulțime de generatori pentru algebra $\mathcal{A}_G^1$.

Vom arăta acum că $\mathcal{C}$ este o mulțime de generatori liberi pentru $\mathcal{A}_G^1$. Pentru aceasta fie $\mathcal{B}$ o altă algebră similară cu $\mathcal{A}_G^1$. Vom demonstra că dacă o transformare

$$f : \mathcal{C} \to B$$

poate fi extinsă la un homomorfism

$$h : \mathcal{A}_G^1 \to \mathcal{B},$$

atunci această extindere este unică. Vom construi homomorfismul h în felul următor:

$$h(x) = f(x) \quad \text{dacă} \quad x \in \mathcal{C}.$$

Dacă $x \notin \mathcal{C}$ deoarece $\mathcal{C}$ este o mulţime de generatori pentru algebra $\mathcal{A}_G^1$, există elementele $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathcal{C}$ şi de asemenea operaţiile θ_1^1, $\theta_2^1, \ldots, \theta_k^1$ definite în $\mathcal{A}_G^1$ care aplicate la $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ într-o anumită ordine să ne dea elementul x. Pentru construirea lui h în continuare vom proceda prin inducţie după lungimea lui x, în raport cu x_1, $x_2, \ldots, x_m$. Astfel, dacă $x = \theta_1'(x_1)$, atunci $h(x) = \theta_1'(h(x_1))$ iar dacă $x = \theta_1'(x_1, x_2)$, atunci $h(x) = \theta_1'(h(x_1), h(x_2))$. În felul acesta este evident că transformarea $h : \mathcal{C} \rightarrow B$ se prelungeşte la homomorfismul

$$h : \mathcal{A}_G^1 \rightarrow \mathcal{B}.$$

Să arătăm acum că această prelungire homomorfă a lui f este unică. Pentru aceasta să presupunem că există o altă extindere homomorfă h' a lui $f : \mathcal{C} \rightarrow B$ diferită de h. Dar, conform definiţiei acestor homomorfisme, avem

$$h(x) = h'(x) = f\ (x) \text{ pentru } x \in \mathcal{C}.$$

Dacă $x \notin \mathcal{C}$ şi $x \in \mathcal{A}_G^1$, atunci există operaţia θ_k' şi elementele x_1, x_2 astfel ca $x = \theta_k'(x_1)$ sau $x = \theta_N'(x_1, x_2)$. Atunci deoarece h' este un homomorfism, avem

$$h'(x) = \theta_k'(h'(x_1))$$

sau

$$h'(x) = \theta_k'(h'(x_1), h'(x_2).$$

Dacă $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$, se vede imediat că $h(x) = h'(x)$. Dacă însă $x_1, x_2 \notin \mathcal{C}$, asupra acestora se aplică acelaşi raţionament şi deoarece $\mathcal{C}$ este o mulţime de generatori pentru $\mathcal{A}_G^1$ iar elementul x are o lungime finită, din aproape în aproape se ajunge la cazul $x = \theta_1^1, \theta_2^1, \ldots, \theta_p^1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathcal{C}$. Atunci avem

$$h'(x) = \theta_1^1 \theta_2^1 \ldots, \theta_p^1(h'(x_1), h'(x_2) \ldots, h'(x_m)).$$

Deoarece însă h şi h' coincid pe mulţimea $\mathcal{C}$ şi sînt homomorfisme, deducem uşor că $h(x) = h'(x)$. Această concluzie arată că mulţimea $\mathcal{C}$ este o mulţime de generatori liberi pentru algebra $\mathcal{A}_G^1$, ceea ce demonstrează teorema.

CONSECINŢA 3. Dacă notăm cu $\mathcal{A}_G^j$ subalgebra algebrei $\mathcal{A}_G$ astfel ca

$$\mathcal{A}_G^j = \{[A_{j_1}] \cup [A_{j_2}] \cup \cdots \cup [A_{ja_i}] \cup \{\varepsilon\}, \Omega_j'\},$$

unde $\Omega_j' \in \Omega'$ şi este mulţimea operaţiilor din Ω' definite în $\mathcal{A}_G^j$, atunci $\mathcal{A}_G^j$ este o subalgebră liberă a lui $\mathcal{A}_G$, care are drept mulţime de generatori liberi mulţimea

$$\mathcal{A}_G^{j-1} - \{\varepsilon\}.$$

Demonstraţie. Consecinţa 3 se demonstrează în mod absolut analog ca şi teorema 5.

TEOREMA 6. *Algebra universală $\mathcal{A}_G$ este o algebră liberă a cărei mulţime de generatori este $\mathcal{A}_G^{N-1} - \{\varepsilon\}$.*

Demonstrație. Teorema rezultă imediat din teorema 5 și din consecința 3.

În lucrarea [4] au fost obținute rezultate analoage pentru cazul limbajelor logico-matematice de primul ordin.

Primită la redacție la 5 aprilie 1967

Institutul de Calcul
al Academiei Republicii Socialiste România — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. T. Rus, *Tratarea algebrică a limbajelor formalizate.* St. cerc. mat., **19**, *2*, 259—272 (1967).
2. В. В. Вагнер (Editor), *Теория полугрупп и ее приложения*, Сб. статей, Вып. 1, Изд. Саратовского Ун-та, 1965, p. 3—179.
3. P. M. Cohn, *Universal Algebras.* Harper-Row, New-York, 1965.
4. R. Sikorski, *Algebra of formalized languages.* Colloquium Mathematicum, *9*, 1—31 (1962).

MODELE MATEMATICE DE REGLARE A HEMATOPOIEZEI

DE

Z. SIMON și S. ROSIN

Cinetica celulară a hematopoiezei, homeostazia mitotică și dereglarea acestor funcții în neoplazii au fost analizate cu ajutorul unor sisteme de ecuații diferențiale liniare, de tipul celor utilizate în cinetica chimică. Se demonstrează aplicabilitatea acestui tip de ecuații în studiile de cinetică celulară : granulopoieză, eritropoieză, homeostazie mitotică. Cu ajutorul aceluiași sistem de ecuații și luînd în considerație teoria chalonică a lui Bullough au mai fost analizate compartimentul celulelor sușă și un model matematic pentru leucemiile acute și cronice.

În această lucrare sînt analizate cinetica celulară a hematopoiezei și homeostazia mitotică cu ajutorul unui sistem de ecuații diferențiale liniare. Se iau în considerație compartimentul de celule sușă și compartimentele corespunzătoare diferitelor stadii de maturație din seriile eritrocitară și granulocitară. Se calculează fluxul de celule sușă, diferențiate pe seria roșie și pe seria albă. Homeostazia mitotică este analizată cu ajutorul mecanismului de feedback chalonic, propus de Boullough [4], mecanism folosit și în analiza disfuncției proliferative din neoplazii.

Modelul matematic. În studiul cantitativ al diferitelor sisteme celulare transcrierea datelor biologice într-un model matematic constituie o necesitate ; ea rezultă din faptul că sistemele celulare prezintă o mare varietate de fenomene neinvestigabile prin observație directă și interacțiuni prea complexe, pentru a putea fi deduse empiric sau tratate prin pură intuiție. Modelarea matematică constituie un prețios instrument pentru descifrarea acestei categorii de fenomene.

Iată enunțurile principale ale modelului nostru :

a) Se cunoaște conținutul fiecărui compartiment (stadiu de maturație) al hematopoïezei, dar nu se cunosc modalitățile de autoîntreținere a fiecărui compartiment.

b) Se cunosc conținutul celular și parametrii proliferării întregului sistem (al măduvei hematopoietice, în general) dar nu se cunoaște ce intră

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 9, P. 1325–1336 BUCUREȘTI, 1967

(din compartimentul celulelor sușă) și ce iese (elemente mature, funcționale) din sistem, adică, în general, un tablou diametral opus problemei „camerii negre'' în cibernetică.

În linii mari, hematopoieza decurge astfel : există un compartiment de celule sușă (mezenchim static hematopoietic [14]), comun pentru seriile eritro- și granulopoietică, de care se ocupă analiza noastră. Numărul de celule sușă, care se divid, este menținut constant grație unui mecanism de feedback, probabil de natură chalonică, iar fluxul de celule, care diferențiază în proeritroblaști sau mieloblaști este controlat de eritropoietine, respectiv granulopoietine [4]. Proeritroblastul, după aproximativ 5 diviziuni heteroplastice, generează eritrocite [12]. În seria granulocitară compartimentele proliferante se divid și maturează, iar de la metamielocit se transformă numai (maturează), pînă la stadiul final de granulocit adult [14], [19].

Există un număr destul de mare de lucrări privind cinetica hematopoiezei [6], [7], [10], [12], [15], [17], [23], [24]. Cel mai utilizat model matematic pare cel bazat pe ecuații prin diferențe, folosit de Lajtha [12]. El notează prin n, $n-1$, $n-2, \ldots$ momentele de timp ; prin S_n, $S_{n-1}, \ldots$ stocul de celule sușă în repaus la momentul n, $n-1, \ldots$; prin $t_n, \ldots$ numărul de celule sușă, comutate spre diviziune în unitatea de timp ; cu d_n, cele comutate spre diferențiere, iar prin x_n, numărul de celule care apar în unitatea de timp, prin diviziune. Astfel, pentru heterogenitatea compartimentului S căpătăm următoarea expresie :

$$S_n = S_{n-1} - d_{n-1} - t_{n-1} + x_{n-1}. \tag{1}$$

Dacă ciclul celular este, de exemplu, de 10 unități de timp, atunci numărul de celule care apar prin diviziune în unitatea de timp va fi :

$$x_n = 2 \cdot t_{n-10} \tag{2}$$

Dacă p_n este proporția de celule care diferențiază în unitatea de timp, iar π, proporția celor comutate spre diviziune, atunci

$$d_n = p_n S_n, \quad t_n = \pi_n S_n \tag{3}$$

Dacă facem ca unitatea de timp să tindă spre zero, avem :

$$\lim \frac{S_n - S_{n-1}}{1} = \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}$$

care reprezintă cîtul între variația infinit mică $\mathrm{d}S(t)$ în număr de celule, în intervalul infinit mic de timp, $\mathrm{d}t$, la momentul t. Vom nota prin T durata ciclului celular și dacă ținem seama că p_n și π_n pot fi funcții de timp, din ecuațiile (1), (2) și (3) obținem ecuația diferențială :

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = -p(t) \cdot S(t) - \pi(t) \cdot S(t) + 2 \cdot \pi(t-T) \cdot S(t-T). \tag{4}$$

Din cauza dificultăților matematice, un sistem de ecuații diferențiale de tip (4) se rezolvă, de obicei, tot printr-un sistem de ecuații prin diferențe de tip (1), (2), (3).

Nu vom folosi totuşi sisteme de ecuaţii prin diferenţă din următoarele două motive. În primul rînd în stare staţionară stocul de celule suşă în repaus este constant :

$$S_n = S_{n-1}; \quad \mathrm{d}S/\mathrm{d}t = 0$$

sau aproape constant cînd numărul de celule variază încet în raport cu durata ciclului celular :

$$|\, S(t) - S(t-T) \,| \ll S(t-T)$$

ecuaţia (4) devine în acest caz o ecuaţie diferenţială liniară :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -pS - \pi S + 2\pi S. \tag{4'}$$

Un sistem de ecuaţii de tip (4') este uşor de manipulat, în special în condiţii de staţionaritate. Al doilea motiv este că în ecuaţiile prin diferenţă (1), (2), (3) şi în ecuaţia diferenţială (4) se presupune că toate celulele au acelaşi ciclu celular T şi aceleaşi probabilităţi de transformare p şi π. În realitate, condiţiile în care se află celulele unui compartiment nu sînt perfect identice, iar la fiecare diviziune celulară au loc, în medie, probabil cîteva mutaţii spontane (frecvenţa mutaţiilor punctuale spontane, la o diviziune, circa 10^{-9},numărul de perechi de nucleotizi în genomul celulei de mamifer, circa 5.10^9) [22].

Este vorba deci, de populaţii celulare totdeauna neomogene şi ceea ce ne interesează sînt valori medii pentru numere de celule mari. Aceste fapte sugerează că pentru cinetici celulare vom putea folosi metodele matematice ale cineticii chimice, care presupune o comportare randomizată a moleculelor, adică cu probabilităţi de transformare independente de istoria moleculelor. Afirmaţia aceasta nu este strict valabilă în cazul sistemelor celulare, cu toată neomogenitatea lor : o celulă abia ieşită din mitoză va avea oricum o probabilitate nulă de a începe o nouă mitoză. În sisteme celulare nesincronizate, populaţia unui compartiment celular este însă efectiv repartizată uniform în toate momentele ciclului celular. Aceasta constituie un motiv în plus ca să permită utilizarea ecuaţiilor din cinetica chimică (sau din cinetica transformării seriilor de elemente radioactive) la majoritatea problemelor de cinetică celulară.

În cele ce urmează vom utiliza sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de forma generală :

$$\left\{\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t} = \chi_i \cdot n_{i-1} + (k_i - \rho_{i,\,i+1})\, n_i\right. \tag{5}$$

Indicele i indică compartimentul celular ; n_i, numărul de celule din compartimentul i. Variaţia numărului de celule din compartimentul i în unitatea de timp, $\mathrm{d}n_i/\mathrm{d}t$, este dată de suma următoarele fluxuri : 1) numărul de celule χ_{i-1}, n_i venit în unitatea de timp din compartimentul anterior ; 2) numărul de celule, $k_i \cdot n_i$ apărut în urma diviziunii celulare în compartimentul i şi 3) numărul de celule $\rho_{i,\,i+1} \cdot n_i$ plecat din compartimentul i în cel următor. k_i şi $\rho_{i,\,i+1}$ sînt constante de viteză care măsoară probabilitățile proceselor respective. Relațiile între aceste constante de viteză și durata medie T_i a ciclului celular în compartimentul i, respectiv timpul mediu de maturație i sînt :

$$\text{(6a)} \qquad k_i = \frac{0{,}693}{T_i}; \qquad \text{(6b)} \quad \rho_{i,i+1} = \frac{1}{\theta_i}.$$

Deducerea acestor relații este prezentată în Anexa I. În ceea ce privește fluxul celular $\chi_i\, n_{i-1}$, venit din compartimentul anterior, el este nul ($\chi_i = 0$) în cazul compartimentului de celule sușă. Dacă trecerea din compartimentul $i-1$ în compartimentul i are loc în urma unor diviziuni heteroplastice, atunci constanta de viteză χ_i are expresia :

$$\text{(6c)} \qquad \chi_i = 2\, p_{i-1} \cdot k_{i-1},$$

unde p_{i-1} este probabilitatea ca o diviziune celulară în compartimentul $i-1$ să fie heteroplastică. Dacă trecerea aceasta are loc în urma maturării unor celule $i-1$, fără ca o diviziune să fie necesară, expresia devine :

$$\text{(6d)} \qquad \chi_i = \rho_{i-1,\,i}.$$

În stare staționară, cînd numărul de celule din fiecare compartiment rămîne constant în timp ($\mathrm{d}n_i/\mathrm{d}t = 0$), relațiile (5) furnizează următorul raport între numerele de celule din două compartimente subsecvente :

$$\text{(7)} \qquad n_i = \frac{\chi_i}{\rho_{i,\,i+1} - k_i}\, n_{i-1}\,; \text{ se presupune } \rho_{i,i+1} > k_i$$

care permite deducerea constantelor de viteză χ_i, k_i, $\rho_{i,\,i+1}$ dintr-un număr relativ mic de date experimentale.

În ceea ce privește mecanismul de menținere a stării staționare, în cazul compartimentului de celule sușă, unde $\chi_i = 0$, trebuie menținută egalitatea între k_i și $\rho_{i,\,i+1}$ (între probabilitatea de diviziune și de diferențiere a celulelor). Feedback-ul chalonic — existența unei substanțe, chalona — a cărei concentrație, Ch, este proporțională cu numărul de celule din compartiment și care micșorează viteza de diviziune k_i, poate servi ca un asemenea mecanism. Necunoscînd dependența exactă între k_i și Ch vom presupune o relație liniară între k_i și Ch, punînd totodată condiția $k_i \geqslant 0$ și existența unui număr maxim de celule n_i mx. Se obține astfel următoarea relație aproximativă :

$$\mathrm{Ch} = \alpha n_i$$

$$\text{(8)} \qquad k_i = k_i^{\mathrm{mx}}\left(1 - \frac{1}{\alpha n_i^{\mathrm{mx}}} \cdot \mathrm{Ch}\right) \cdot H(\alpha n_i^{\mathrm{mx}} - \mathrm{Ch})$$

k_i^{mx} este valoarea maximă a constantei de viteză de diviziune (T_i minim este în jur de 12 ore pentru celule de mamifere [1], valoarea minimă cunoscută părînd a fi de 6—7 ore (13). Funcția H este simbolul lui Heaviside, care are valoarea $H = 1$ pentru $\mathrm{Ch} < \alpha\, n_i^{\mathrm{mx}}$ și $H = 0$ pentru $\mathrm{Ch} \geqslant \alpha\, n_i^{\mathrm{mx}}$.

Cinetica granulopoiezei și a eritropoiezei. Vom începe cu studiul granulopoiezei și a eritropoiezei întrucît din datele cantitative existente pentru aceste sisteme se poate calcula fluxul de celule care pleacă din compartimentul de celule suşă prin diferenţiere în seriile granulocitară şi eritrocitară. Existenţa acestui compartiment comun de celule suşă îşi găseşte recente confirmări în modelele experimentale de analiză cinetică a hematopoiezei [12], [23].

Cinetica granulopoiezei a fost studiată de Rosin şi Simon [21] cu ajutorul sistemului de ecuaţii :

$$\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}t} = \varphi_{gr} + (k_1 - \rho_{12})\, n_1 \tag{9 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}n_2}{\mathrm{d}t} = \rho_{12} n_1 + (k_2 - \rho_{23})\, n_2 \tag{9 b}$$

$$\frac{\mathrm{d}n_3}{\mathrm{d}t} = \rho_{23} n_2 + (k_3 - \rho_{34})\, n_3 \tag{9 c}$$

$$\frac{\mathrm{d}n_4}{\mathrm{d}t} = \rho_{34} n_3 + \rho_{45} n_4 \tag{9 d}$$

$$\frac{\mathrm{d}n_5}{\mathrm{d}t} = \rho_{45} n_4 - \rho_{56} n_5 \tag{9 e}$$

$$\frac{\mathrm{d}n_6}{\mathrm{d}t} = \rho_{56} n_5 - \rho_{\mathrm{elib.}} n_6 \tag{9 f}$$

n_1 reprezintă numărul mieloblaştilor din măduva osoasă umană (20.10^9) ; n_2 al promielocitelor (40.10^9) n_3, al mielocitelor (140.10^9) ; n_4, al metamielocitelor (146.10^9) ; n_5, al nesegmentatelor (88.10^9) şi n_6 al granulocitelor segmentate (195.10^9). Constantele de viteză k_i şi $\rho_{i,i+1}$ au semnificaţiile deja discutate. Constanta $\rho_{\mathrm{elib.}}$, se referă la eliberarea din măduvă în circulaţie. Fluxul ρ_{gr} de celule din compartimente anterioare promielocitelor a fost considerat nul în condiţii de staţionaritate. Adoptînd timpii $T_1 - T_2 = 15$ ore, $T_3 = 18$ ore pentru timpii de generaţie a elementelor proliferative (9) în condiţii normale de staţionaritate, s-au obţinut următoarele rezultate : timpul de maturaţie, de la promielocit la granulocitul adult, eliberat în circulaţie este 84,9 ore ; timpul minim pentru apariţia elementelor marcate în circulaţie (corespunde timpului necesar ajungerii ultimului element capabil de diviziune, a mielocitului în circulaţie) este de 52 ore ; fluxul de celule eliberate în circulaţie este de 8,1. 10^9 celule/oră. Aceste date obţinute cu sistemul (4) în condiţii de staţionaritate ($\mathrm{d}n_i/\mathrm{d}t = 0$, $i = 1, 2, \ldots, 6$) corespund schemei cu diviziuni exclusiv homoplastice. Rezultatele obţinute cu o schemă care admite transformările prin intermediul diviziunilor heteroplastice nu se deosebesc semnificativ de cele obţinute în schema prezentată [21].

Timpul pentru apariţia marcajului în circulaţie este însă de 150—180 ore [18]. Probabil că timpii de generaţie utilizaţi [21] după Journoud [9] sînt prea mici. De altfel pentru măduva osoasă de şobolani timpii de generaţie obţinuţi de Rosin [20] pentru mieloblast, promielocit şi mielocit au fost respectiv de 19, 36 şi 72 ore. Chiar şi aşa, fluxul de granulocite în afara măduvei este de cel puţin 2.10^9 celule/oră, ceea ce —

pentru o viață medie de 60 ore a granulocitelor extramedulare [16] — cere un pool granulocitar total de cel puțin 320 × 10^9 celule, în bună concordanță cu datele obținute prin leucafereză la om [3].

Fluxul de celule din compartimentul anterior mieloblaștilor, probabil din compartimentul de stem cells, s-a evaluat din rezultatele blocajului metafazic prin colchicină în măduva normală de șobolan [20]. După menținerea concentrației de colchicină timp de 19 ore — durata ciclului celular al mieloblastului la șobolan — numai 80 % din mieloblaști sînt blocați în metafază, ceea ce înseamnă fie că există un pool de 20 % de mieloblaști care nu se divid, fie că cei 20 % mieloblaști provin dintr-un compartiment anterior. În ipoteza că și la om 20 % din mieloblaști provin din stem cells, cu un ciclu celular de 15 h., se obține următoarea expresie pentru fluxul de mieloblaști din celule sușă,

$$\varphi_{gr} = 2{,}6.10^8 \text{ celule/hr.}$$

În cazul eritropoiezei datele cariometrice ale lui Iagnov și colaboratorii [8] permit cantificarea proliferării heteroplastice din această serie. În funcție de diametrul nuclear eritroblaștii se grupează în 6 categorii dimensionale 12μ; 10,5μ; 9 μ; 7,5μ; 6 μ; 4,5μ, — corespunzînd următoarelor distribuții : 1 : 8 : 16 : 32 : 10. Celularitatea medie totală a elementelor proliferante din seria roșie fiind de 350 × 10^9 celule [19], [24], numerele de stare staționară pentru categoriile dimensionale de mai sus vor fi : $n_1 = 5.10^9$, $n_2 = 10.10^9$, $n_3 = 40.10^9$, $n_4 = 80.10^9$, $n_5 = 160.10^9$, $n_6 = 50.10^9$. Masa circulantă a eritronului n_7 este de 25 × × 10^{12} eritrocite. Întrucît fiecare tip de celulă ia naștere din tipul precedent prin diviziune heteroplastică ($\chi_i = 2\ k_{i-1}$), cinetica seriei eritrocitare va fi descrisă de următorul sistem de ecuații (în stare staționară) :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}n_1/\mathrm{d}t = \varphi_{er} - k_1 n_1 = 0\\
&\mathrm{d}n_2/\mathrm{d}t = 2k_1 n_1 - k_2 n_2 = 0\\
&\mathrm{d}n_3/\mathrm{d}t = 2k_2 n_2 - k_3 n_3 = 0\\
&\mathrm{d}n_4/\mathrm{d}t = 2k_3 n_3 - k_4 n_4 = 0\\
&\mathrm{d}n_5/\mathrm{d}t = 2k_4 n_4 - k_5 n_5 = 0\\
&\mathrm{d}n_6/\mathrm{d}t = 2k_5 n_5 - \rho_{67} n_6 = 0\\
&\mathrm{d}n_7/\mathrm{d}t = \rho_{67} n_6 - \rho_7 n_7 = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

unde $k_i = 0{,}693/T_i$, $\rho_{i,\,i+1} = 1/\theta_i$

Cunoscînd viața medie $\theta_7 \approx 2\,500$ h (2) a eritrocitului, se calculează următoarele valori pentru durata ciclurilor celulare și pentru fluxul de celule din compartimentul de celule sușă :

$$\theta_6 = 5 \text{ h},\ T_5 = 20{,}2 \text{ h},\ T_4 = 20{,}2 \text{ h},\ T_3 = 20{,}2 \text{ h},$$

$$T_2 = 10{,}1 \text{ h},\ T_1 = 10{,}1 \text{ h}.$$

$$\varphi_{peb} = 3{,}210^8 \text{ celule/h.}$$

Timpii de ciclu celular rezultați din acest model concordă cu datele experimentale ale lui Lajtha [12]. De altfel, existînd 5 cicluri mitotice între compartimentul de celule sușă, și eritrocit, fluxul de eritrocite (Φ_{er}), trebuie să fie de 2^5 ori mai mare decît fluxul din compartimentul celulelor sușă în cel al proeritroblaștilor (φ_{peb}).

$$\Phi_{er} = 2^5 \times \varphi_{peb} \tag{11}$$

Astfel, dacă granulopoieza, care are compartimente capabile de a se autoîntreține (prin diviziune homoplastică) poate fi reglată prin modificarea tipului de proliferare în fiecare compartiment, în cazul eritropoiezei, dată fiind diviziunea exclusiv sau predominant heteroplastică, reglarea se realizează, în special la nivelul fluxului celular din compartimentul de celule sușă, adică din mezenchinul static în mezenchinul dinamic hematopoietic [14].

Cinetica compartimentului de celule sușă a fost analizată cu ajutorul unui sistem de ecuații diferențiale liniare de către Kretschmar [11]. Acesta considera că diferențierea se încheie la sfîrșitul fazei S, fluxul $S \to G_2$ fiind mai mic decît fluxul $G_1 \to S$ și pentru a putea obține starea staționară presupune o pierdere accidentală de celule în faza G_1. Sistemul de ecuații utilizat de Kretschmar este discutat în Anexa II, împreună cu dificultățile pe care le ridică. Noi vom utiliza un sistem de ecuații puțin modificat în care starea staționară este în mare măsură asigurată de termenul H ($N° - N$) din expresia de tip (8) pentru constanta vitezei de diviziune k_i. Notăm prin N numărul total de celule sușă și prin n_{G_1}, n_S, n_{G_1}, n_M, numărul de celule în fazele respective ale ciclului celular. Sistemul de ecuații utilizat este :

$$\frac{dn_{G_1}}{dt} = -\left[A - \frac{A}{N_0} N\right] \cdot H\,(N_0 - N)\, n_{G_1} + 2 \cdot c\, n_M - bn_{G_1} \tag{12 a}$$

$$\frac{dn_S}{dt} = \left[A - \frac{A}{N_0} N\right] \cdot H\,(N_0 - N)\, n_{G_1} - en_S \tag{12 b}$$

$$\frac{dn_{G_2}}{dt} = e \cdot (1 - \rho_d)\, n_S - h \cdot n_{G_2} \tag{12 c}$$

$$\frac{dn_M}{dt} = h \cdot n_{G_2} - cn_M \tag{12 d}$$

$$N = n_{G_1} + n_S + n_{G_2} + n_M. \tag{12 e}$$

Pentru $b = 0$ și o probabilitate nulă de diferențiere, $\rho_d = 0$, numărul de celule N crește pînă la N_0, cînd, datorită factorului H ($N_0 - N$), lungimea fazei G_1 devine infinită și toate celulele se acumulează în faza G_1. Dacă $b = 0$, pentru a putea obține starea staționară trebuie să fie satisfăcută egalitatea $\rho_d = 1/2$.

Kretschmar [11] studiază caracteristicile eritropoiezei la șoarece unde fluxul de eritrocite în sînge este în mod normal $1{,}2 \times 10^7$ celule/oră. Pentru asigurarea acestui debit eritrocitar este necesară diferențierea pe serie roșie a $7{,}5 \times 10^5$ celule sușă, pe oră din totalul de $2{,}5 \times 10^6$ celule sușă angajate în fiecare oră în procesul de diferențiere. Întregul compartiment al celulelor sușă la șoarece este constituit din 8×10^7 elemente.

Kretschmar analizează variantele cinetice ale modelului său printr-un calculator analogic. Astfel pentru două situații extreme, el ajunge la următoarele concluzii : la un număr de $3{,}75/10^5$ celule sușă diferențiate pe oră, valoarea lui G_1 este de 72 ore, numărul total al celulelor sușă fiind de 6×10^7.

Creșterea numărului de celule sușă diferențiate pe oră la $2{,}1.10^6$ se realizează prin scurtarea lui G_1, la 7 ore și menținerea constantă (6×10^7) a numărului de celule sușă.

Reglajul homeostazei mitotice în hematopoieză poate fi explicată prin chalone și poietine. În ceea ce privește compartimentul de celule sușă, feedback-ul numărului total de celule (N) asupra vitezei de diviziune poate fi explicat prin mecanismul chalonic. Expresia $A\,(1-N/N0).\,H\,(N_0-N)$ pentru inversul duratei fazei G_1 este în fond educația (8), dedusă în ipoteza mecanismului chalonic. Creșterea eritropoiezei la sîngerare trebuie pusă pe seama intensificării via eritropoietine a diferențierii celulelor sușă (creșterea lui ρ_d). Stimularea granulopoiezei la sîngerare ar putea să se facă și prin mecanismul chalonic dacă granulocitele adulte produc chalonă ; sîngerarea produce scăderea numărului total de granulocite și de chalonă. Se admite deci că celulele din toate compartimentele granulopoiezei au o chalonă comună [4].

În cazul leucemiilor, Bullough și Rytömaa [5] au sugerat că dereglarea s-ar datora unei sensibilități scăzute la chalonă a celulelor canceroase și eventual și unei produceri mai active de chalonă de către aceste celule puțin sensibile la chalonă. Astfel s-ar putea obține situații în care coexistă celule normale și canceroase sau situații în care celulele canceroase se înmulțesc în detrimentul celor normale. Acest dereglaj ar putea fi analizat, în ipoteza mecanismului chalonic al homeostazei mitotice, cu ajutorul următorului sistem de ecuații, sugerat de cel utilizat de Kretschmar [11] :

$$(13)\quad \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t} = \chi_i n_{i-1} + \left[k_{0i}\,(1-\sigma_i \mathrm{Ch})\cdot H\left(\dfrac{1}{\sigma_i} - \mathrm{Ch}\right) - \rho_{i,\,i+1}\right]\cdot n_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\mathrm{dCh}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{V}\sum\limits_i \beta_i n_i - \rho_{\mathrm{Ch}}\cdot \mathrm{Ch}. \end{cases}$$

Indicele i marchează compartimentele de celule normale și canceroase. Constantele χ_i, $\rho_{i,\,i+1}$ au aceeași semnificație ca în ecuația (8). Constantele de viteză de diviziune maxime sînt k_{0i}. Concentrația chalonei este notată prin Ch, viteza sintezei de către o celulă din compartimentul i prin β_i, constanta de viteză a dispariției chalonei prin ρ_{Ch}. Volumul în care se găsesc celulele este notat prin V iar prin σ_i este notată sensibilitatea celulelor compartimentului i la acțiunea chalonei.

Într-un model pentru reglajul vitezei de diviziune, bazat pe competiția între operonii activați pentru precursorii micromoleculari (22 a) se poate arăta că o viteză mărită de producere β_i a chalonei și o sensibilitate σ_i redusă la chalonă în celulele canceroase se poate explica, printr-o sinteză mai activă de precursori în aceste celule, în comparație cu cele normale.

Vom analiza un model simplificat pentru leucemii.

Lucrările lui Perry și Moxley [18] prezintă dovezi importante în favoarea ipotezei că în leucemiile cronice coexistă celulele normale cu cele canceroase, pe cînd în cele acute existența celulelor canceroase este exclusivă. Astfel curbele de apariție a elementelor marcate în sîngele periferic arată în primul caz două vîrfuri la 24—40 ore și 50—60 ore, pe lîngă un maxim mai persistent la 5—7 zile; la indivizii sănătoși apare numai acesta din urmă, reflectînd cinetica trasorului în elementele normale. În leucemiile acute absența acestui maxim din zilele 5—7 confirmă exclusivitatea populației leucemice.

Vom analiza interacțiunea dintre cele două tipuri de celule, normale (n_N) și canceroase (n_c), considerînd că sintetizează și sînt sensibile la o singură chalonă Ch. Drept singură alternativă la diviziune vom admite dispariția celulelor (cu constantele de viteză ρ_N, respectiv ρ_c). Cinetica acestui sistem va fi descrisă de sistemul de ecuații :

$$\text{(14)}\qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}n_N}{\mathrm{d}t} &= \left[K_{0N}(1-\sigma_N\cdot \mathrm{Ch})\cdot H\left(\frac{1}{\sigma_N}-\mathrm{Ch}\right)-\rho_N\right]n_N \\ \frac{\mathrm{d}n_c}{\mathrm{d}t} &= \left[K_{0c}(1-\sigma_c\cdot \mathrm{Ch})\cdot H\left(\frac{1}{\sigma_c}-\mathrm{Ch}\right)-\rho_c\right]n_c \\ \mathrm{Ch} &= \frac{\beta_N}{\rho_{\mathrm{Ch}}V}\,n_N+\frac{\beta_c}{\rho_{\mathrm{Ch}}V}\,n_c. \end{aligned}$$

Pot coexista ambele tipuri de celule numai dacă constanța în timp (starea staționară) a numărului n_N de celule normale se obține la aceeași concentrație de chalonă, la care este constant în timp și numărul n_c de celule canceroase.

În aceste condiții avem

$$\text{(15)}\qquad \begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}n_N}{\mathrm{d}t}=0\quad \frac{\mathrm{d}n_c}{\mathrm{d}t}=0 \\ &\mathrm{Ch}=\frac{1}{\sigma_N}\left(1-\frac{\rho_N}{K_{0N}}\right)=\frac{1}{\sigma_c}\left(1-\frac{\rho_c}{K_{0c}}\right) \end{aligned}$$

și numerele de stare staționară ale celulelor sînt :

$$\text{(16)}\qquad \begin{aligned} n_{N0} &= \frac{\rho_{\mathrm{Ch}}V}{\beta_N\,\sigma_N}\left(1-\frac{\rho_N}{K_{N0}}\right), \\ n_{c0} &= \frac{\rho_{\mathrm{Ch}}V}{\beta_c\,\sigma_c}\left(1-\frac{\rho_c}{K_{c0}}\right). \end{aligned}$$

Bullough și Rytömaa au emis ipoteza că în leucemiile cronice celulele canceroase au aceeași sensibilitate la chalonă ca și cele normale ($\sigma_N = \sigma_c$), dar cele canceroase au o viteză redusă de producere a chalonei :

$\beta_c < \beta_N$. În acest caz (dacă şi $\rho_N/K_{N0} = \rho_c/K_{c0}$) vor coexista, potrivit sistemului de ecuaţii (14), celule normale cu cele canceroase, numărul celor din urmă fiind mai mare.

Tot Bullough şi Rytömaa [18] presupun că în leucemiile acute celulele canceroase produc chalonă, dar cu o sensibilitate redusă la ea: $\sigma_c > \sigma_N$. În acest caz cu sistemul de ecuaţii (14) se poate arăta că multiplicarea celulelor canceroase este oprită la concentraţii de chalonă mai mari decît multiplicarea celulelor normale şi că, în timp, celulele normale dispar, rămînînd numai cele canceroase. Modelul matematic folosit este, desigur, foarte simplificat, dar explică unele caracteristici ale leucemiilor cronice şi acute.

Analiza sistemelor de ecuaţii tip (13) privind stările staţionare posibile şi evoluţia lor în timp, este îngreunată de lipsa unor date experimentale, pe care sperăm să le putem obţine în viitor. Aceasta ar putea aduce unele contribuţii la cunoaşterea mecanismelor de producere a leucemiilor.

ANEXA I

Dacă T_i este durata ciclului celular, atunci

$$n_i(t) = n_i(0)\cdot 2\,\frac{t}{T_i}\cdot$$

Creşterea pe unitate de timp a numărului de celule este:

$$\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t} = k_i,\ n_i = \frac{\ln 2}{T_i}\cdot N_i(0)\cdot 2\,\frac{t}{T_i}\cdot$$

Logaritmul lui 2 în baza $e = 2{,}718\ldots$ este $\ln 2 = 0{,}693$ de unde $k_i = 0{,}693/T_i$.

Dacă avem un număr n_i^0 de celule care se maturează, fără a suferi alt proces, ele se vor fi transformat toate după trecerea timpului de maturaţie θ_i, viteza de transformare fiind constantă cît timp mai există celule i:

$$\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t} = -\ \rho_{i,\,i+1}\cdot n_i = -\ \frac{n_i(0)}{\theta_i}$$

$$n_i(t) = n_i(0)\cdot\left(1 - \frac{t}{\theta_i}\right)\cdot$$

În condiţii de staţionaritate vom putea pune $\rho_{i,\,i+1} = 1/\theta_i$, pentru că $n_i = n_i(0)$. Dacă probabilitatea de transformare ar fi fost independentă de istoria celulelor, numărul de celule ar fi scăzut asimptotic şi nu liniar spre zero:

$$n_i(t) = n_i(0)\cdot \mathrm{e}^{-t/T_i}.$$

Formula (6 b) reprezintă o considerare parţială a faptului că probabilitatea de maturaţie a unei celule nu poate fi independentă de istoria ei (de vîrsta celulei).

ANEXA II

Sistemul preconizat de Kretschmar este, în stare staționară :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}n_{G_1}}{\mathrm{d}t} = -\left\{\left[A - \dfrac{A}{N_0}N\right] + b\right\} n_{G_1} + 2c\cdot n = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}n_S}{\mathrm{d}t} = \left[A - \dfrac{A}{N_0}N\right]\cdot n_{G_1} - e\cdot n_S = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}n_{G_2}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}\,(1-\rho_d)\cdot n_S - h\cdot n_{G_2} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}n_M}{\mathrm{d}t} = h\cdot n_{G_2} - cn_M = 0 \\ N = n_{G_1} + n_S + n_{G_2} + n_M. \end{cases}$$

Primele patru ecuații formează un sistem de ecuații liniare fără termen liber în n_{G_1}, n_M, n_S și n_{G_2} care are soluții nenule numai cînd determinantul coeficienților este nul :

$$\begin{vmatrix} -\left(A - \dfrac{A}{n_0}N + b\right) & 0 & 0 & 2c \\ A - \dfrac{A}{N_0}N & -e & 0 & 0 \\ 0 & e(1-\rho_d) & -h & 0 \\ 0 & 0 & h & -c \end{vmatrix} = 0$$

sau :

$$(\alpha) \qquad ceh\left\{-2(1-\rho_d)\left(A - \frac{A}{N_0}N\right) + \left(A - \frac{A}{N_0}N + b\right)\right\} = 0 :$$

Dacă $b = 0$, ecuația (α) devine $\left(A - \dfrac{A}{N_0}\cdot N\right)(2\rho_d - 1) = 0$ și este satisfăcută numai pentru $N = N_0$ sau $\rho_d = 1$. Pentru $b \neq 0$:

$$(\beta) \qquad N = N_0 - \frac{bN_0}{A(1-2\rho_d)}$$

Fluxul de celule diferențiate este

$$\varphi_{\mathrm{er}} + \varphi_{\mathrm{gr}} = e\rho_d N_0 \frac{1 - \dfrac{b}{A(1-2\rho_d)}}{1 + \dfrac{e(1-\rho_d)}{h} + \dfrac{e(1-\rho_d)}{c} + \dfrac{e(1-2\rho_d)}{h}}$$

Primită la redacție la 1 ianuarie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. R. Baserga, Cancer Res., **25**, 581 (1965).
2. M. Bessis, in *The Cell* edit. J. Brachet, E. Mirsky, Academic Press, 1961, vol. V, cap. 3.
3. H. R. Bierman, R. Kelly Jr., G. J. Marshall, Brit. J. Haematol, **7**, 5 (1961).
4. W. S. Bullough, Cancer Res., **25**, 1683 (1965).
5. W. S. Bullough, T. Rytömaa, Nature, **205**, 573 (1966).
6. C. G. Craddock jr., S. Perry, J. S. Lawrence, in *The Kinetics of Cellular Proliferation*, Grune & Stratton, New York, 1959, pg. 242.
7. D. Firescu, P. Tăutu, St. cerc. mat., **17**, 345 (1964).
8. E. Ignov, M. Dumitrescu, O. Dimitriu, *Cercetări asupra condițiilor eritropoietice ale reticulocitului*. Edit. Acad. R.P.R., București, cap. 2.
9. R. Journoud, Sang, **24**, 355 (1953).
10. S. A. Killman, E. P. Cronkite, T. M. Fliedner, V. P. Bond, G. Brechner, Blood, **21**, 141 (1963).
11. A. L. Kretschmar, Science, **152**, 367 (1966).
12. L. G. Postgrad, Med. J., **38**, 41 (1962); *Stem Cell Kinetics and Erytropoietin* în „*Erythropoiosis*, Grune & Stratton, New York, 1962.
13. D. Metcalf, M. Wiadrowski, Cancer Res., **26**, 483 (1966).
14. C. T. Nicolau, *Hematologie*, Edit. Medicală, București, 1959.
15. E. E. Osgood, în *Homeostatic Mechanisms*. Brookhaven Symposia in Biology, 10, 31; Upton, New York, 1957.
16. J. Ottesen, Acta physiol. scand., **32**, 75 (1954).
17. H. M. Path, M. A. Maloney, Ann. N. Y. Acad. Sci., **113**, 515 (1964).
18. S. Perry, J. H. Moxley, Nature, **209**, 882 (1966).
19. E. R. Popescu, *Hematologie clinică*, Ed. Medicală, București, 1966.
20. S. Rosin: Date nepublicate.
21. S. Rosin, Z. Simon, Medicina Internă, **17**, 537 (1965).
22. R. Sager, F. J. Ryan; *Cell Heredity*, John Wiley & Sons, New York, 1962.
22. a. Z. Simon; *Radiobiologia și Biologia Moleculară* (sub tipar)
23. J. E. Till, E. A. Mc Culloch, L. Simonovitch, Proc. Natl. Ac. Sci U. S. **51**, 29 (1964).
24. M. M. Wintrobe, *Clinical Haematology*, 5th ed., Lea and Febiger, Philadelphia, 1961.

ASUPRA UNOR CONEXIUNI COPARALELE

DE

P. STAVRE

(Craiova)

Se pune în evidență un spațiu cu conexiune afină L_n ce posedă o formă Pfaff invariantă și se dă forma canonică a conexiunii.

1. Fie spațiile cu conexiune afină, L_n, $\overline{L}_n$ cu obiectele de conexiune Γ^i_{jk} respectiv $\overline{\Gamma}^j_{jk}$ și cu tensorii de curbură R^i_{jkl}, $\overline{R}^i_{jkl}$. Să presupunem că între L_n și $\overline{L}_n$ avem o corespondență punctuală biunivocă și regulată de clasă C^N

$$X^i = \psi^i\,(x^1 \ldots x^n), \quad \left| \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j} \right| \neq 0. \tag{1.1}$$

În aceste condiții, putem considera (1.1) ca o schimbare de coordonate în L_n și deci Γ^i_{jk}, $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ în punctele corespunzătoare sînt $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}\,(x)$; $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk}\,(x)$.

Avem o corespondență între L_n și $\overline{L}_n$ care va defini o transformare de conexiune între Γ^i_{jk}, $\overline{\Gamma}^i_{jk}$. Să notăm

$$J^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \overline{\Gamma}^i_{jk} \tag{1.2}$$

tensorul deformării afine.

Propoziția 1.1. *Dacă* L_n, $\overline{L}_n$ *sînt fără torsiune și* $R^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jkl}$, *atunci avem identitatea:*

$$R^s_{jkl}\,J^i_{sr} + R^s_{jlr}\,J^i_{sk} + R^s_{jrk}\,J^i_{sl} = R^i_{skl}\,J^s_{jr} + R^i_{slr}\,J^s_{jk} + R^i_{srk}\,J^s_{jl}. \tag{1.3}$$

Avem, ținînd seama de (1.2) și $R^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jkl}$,

$$\overline{R}^i_{jkl/\overline{r}} = R^i_{jkl/r} - R^s_{jkl}\,J^i_{sr} + R^i_{skl}\,J^s_{jr} + R^i_{jsl}\,J^s_{kr} + R^i_{jks}\,J^s_{lr}. \tag{1.4}$$

Folosind aici identitățile lui Bianchi, obținem (1.3).

ST. CERC. MAT. TOM. 19, NR. 9, P. 1337 – 1340, BUCUREȘTI, 1967

Propoziția 1.2. *Dacă* L_n, $\overline{L}_n$ *(cu torsiune) sînt coparalele și* $R^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jkl}$, *atunci avem (1.3).*

Prin ipoteză avem :

$$J^i_{jk} = \delta^i_j V_k, \tag{1.5}$$

unde V_k este un vector covariant arbitrar. Dar [2]

$$R^i_{jkl/r} + R^i_{jlr/r} + R^i_{jrk/l} = R^i_{jks} T^s_{lr} + R^i_{jls} T^s_{rk} + R^i_{jrs} T^s_{kl}, \tag{1.6}$$

unde $T^s_{jk} = \Gamma^s_{jk} - \Gamma^s_{kj}$. Cum L_n, $\overline{L}_n$ sînt coparalele, avem :

$$\overline{T}^i_{jk} = T^i_{jk} + (\delta^i_j V_k - \delta^i_k V_j). \tag{1.7}$$

Ținînd seama de (1.5), (1.6), (1.7) în (1.4), obținem (1.3), adică ceea ce doream.

2. Fie L_n, $\overline{L}_n$ (cu torsiune) cu $R^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jkl}$ și în care avem dat cîte un cîmp de tensori g_{ij}, $\overline{g}_{ij}$ simetrici, nedegenerați, pozitiv definiți, astfel încît este păstrată la transportul paralel o metrică a lungimilor definite cu ajutorul lui g_{ij} respectiv $\overline{g}_{ij}$, adică avem

$$g_{ij/k} = 0, \quad \overline{g}_{ij/\overline{k}} = 0. \tag{2.1}$$

Conexiunile care conservă metrica lungimilor sînt date după cum se știe de :

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{jk} &= \left\{{i \atop jk}\right\} + \frac{1}{2} T^i_{jk} + \frac{1}{2} (T^h_{jp} g_{hk} + T^h_{kp} g_{hj}) g^{pi}, \\ \overline{\Gamma}^i_{jk} &= \left\{{\bar{i} \atop jk}\right\} + \frac{1}{2} \overline{T}^i_{jk} + \frac{1}{2} (\overline{T}^h_{jp} \overline{g}_{hk} + \overline{T}^h_{kp} \overline{g}_{hj}) \overline{g}^{pi}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Din sistemele de ecuații cu diferențiale totale (2.1) avem condițiile de integrabilitate

$$R^s_{jkl} g_{si} + R^s_{ikl} g_{sj} = 0, \quad \overline{R}^s_{jkl} \overline{g}_{si} + \overline{R}^s_{ikl} \overline{g}_{sj} = 0. \tag{2.3}$$

Cum $R^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jkl}$, (din (2.3) rezultă că g_{ij}, $\overline{g}_{ij}$ sînt soluții ale sistemului

2.4) $$R^s_{jkl} u_{si} + R^s_{ikl} u_{sj} = 0$$

care în ipoteza că $\mathfrak{M}_{kl} = \| R^\alpha_{\beta kl} \|$ formează un sistem ireductibil de transformări liniare, duce la

$$\overline{g}_{ij} = k g_{ij}, \tag{2.5}$$

unde putem lua $k = e^{2u}$ cu $u = u(x^1, \ldots, x^n)$. Rezultă

$$\left\{{\bar{i} \atop jk}\right\} = \left\{{i \atop jk}\right\} + \delta^i_j \frac{\partial u}{\partial x^k} + \delta^i_k \frac{\partial u}{\partial x^j} - g_{jk} g^{pi} \frac{\partial u}{\partial x^p}. \tag{2.6}$$

Avem dar

Propoziția 2.1. *Dacă* L_n, $\overline{L}_n$ *conservă o metrică a lungimilor, iar* $R^i_{jkl} = \overline{R}^j_{jkl}$, *atunci avem (2.5) iar conexiunile sînt date de (2.2), (2.6).*

Dacă conexiunile Γ^i_{jk}, $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ sînt simetrice, din (2.2), (2.6), (1.3) rezultă ușor că în (2.5) avem $k =$ const.

3. Dacă L_n, $\overline{L}_n$ sînt coparalele, iar $T^i_{jk} = \overline{T}^i_{jk}$ și conservă o metrică a lungimilor, adică avem (2.1) atunci din (1.5), (1.7) rezultă ușor

$$R^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jkl}. \tag{3.1}$$

Aplicația este chiar afină căci $\Gamma^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk}$ în punctele corespunzătoare. În ipotezele de mai sus și (3.1) avem (2.5). Din (2.5) și (2.2) avem (căci $J^i_{jk} = 0$)

$$0 = \delta^i_j \frac{\partial u}{\partial x^k} + \delta^i_k \frac{\partial u}{\partial x^j} - g_{jk}\, g^{pi} \frac{\partial u}{\partial x^p}. \tag{3.2}$$

Făcînd $i = j$ și sumînd avem

$$\frac{\partial u}{\partial x^k} = 0 \Leftrightarrow u = \text{const}. \tag{3.3}$$

de unde :

PROPOZIȚIA 3.1. *Două spații cu conexiune afină L_n, $\overline{L}_n$ ce conservă o metrică a lungimilor dacă sînt coparalele și au $T^i_{jk} = \overline{T}^i_{jk}$, atunci metrica unuia este determinată de metrica celuilalt, abstracție făcînd de un factor constant.*

PROPOZIȚIA 3.2. *Dacă L_n, $\overline{L}_n$ conservă o metrică a lungimilor și au $T^i_{jk} = \overline{T}^i_{jk}$, $g_{ij} = k\overline{g}_{ij}$ cu $k = const$, atunci sînt coparalele (aplicația este chiar afină în sensul $\Gamma^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk}$).*

PROPOZIȚIA 3.3. *Paralelismul direcțiilor în spații Riemann V_n, $\overline{V}_n$ determină metrica spațiului, abstracție făcînd de un factor constant.*

4. Dacă L_n e cu conexiune semisimetrică [1], adică este coparalel cu un $\overline{L}_n = \overline{A}_n$ ($\overline{T}^i_{jk} = 0$), avem

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{n-1}\, \delta^i_j\, T_k \tag*{4.1)}$$

$$T^i_{jk} = \frac{1}{n-1}\, (\delta^i_j\, T_k - \delta^i_k\, T_j), \tag{4.2}$$

unde T_k este vectorul de torsiune a lui L_n.

Să presupunem în continuare că L_n, $\overline{A}_n$ conservă o metrică a lungimilor (și deci $\overline{A}_n$ este un V_n) și că $R^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jkl}$ în punctele corespunzătoare.

În acest caz avem încă (2.5), (2.6) și

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \left\{ {\bar{i} \atop jk} \right\} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + \delta^i_j \frac{\partial u}{\partial x^k} + \delta^i_k \frac{\partial u}{\partial x^j} - g_{jk}\, g^{pi} \frac{\partial u}{\partial x^p} \tag{4.3}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + \frac{1}{2}\, T^i_{jk} + \frac{1}{2} (T^s_{jp}\, g_{sk} + T^s_{kp}\, g_{js})\, g^{pi}. \tag{4.4}$$

Ținînd seama de (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), obținem

$$\frac{\partial u}{\partial u^k} = -\frac{1}{n-1}\, T_k. \tag{4.5}$$

Ca atare, forma Pfaff invariantă ($u = u\ (x^1 \ldots, x^n)$ este de clasă cel puțin C^2)

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial x^k} \mathrm{d}x^k \tag{4.6}$$

are covariant biliniar $\Delta\varphi$ cu coeficienții

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^l \partial x^k} = 0 \tag{4.7}$$

și deci există o transformare de coordonate care duce (4.6) la forma canonică,

$$\varphi = \mathrm{d}x^1. \tag{4.8}$$

adică T_k la forma canonică $(1 - n,\ 0,\ 0, \ldots, 0)$. Cum $T_k \neq 0$, avem

$$\begin{cases} T^1_{jk} = 0 \\ T^i_{11} = 0 \\ T^i_{hl} = 0 \\ -\ T^i_{j1} = \delta^i_j = T^i_{1j}. \end{cases} \qquad i > 1,\ h > 1,\ l > 1 \tag{4.9}$$

Cum $\Gamma^i_{jk} = S^i_{jk} + \frac{1}{2} T^i_{jk}$ avem

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{jk} = S^1_{jk} \\ &\Gamma^i_{11} = S^i_{11} \\ &\Gamma^i_{hl} = S^i_{hl} && i > 1, \quad h > s, \quad l > s \\ &\Gamma^i_{j1} = S^i_{j1} - \frac{1}{2} \delta^i_j && i > 1, \quad j > 1 \\ &\Gamma^i_{1j} = S^i_{1j} + \frac{1}{2} \delta^i_j && i > 1, \quad j > 1 \end{aligned}$$

de unde :

PROPOZIȚIA 4.1. *Dacă L_n este coparalel cu un V_n și L_n păstrează o metrică a lungimilor, iar $R^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jkl}$, atunci L_n este spațiul cu formă Pfaff invariantă, cu metrica (2.5) iar conexiunea sa are forma canonică (4.10).*

Dacă $L_n = V_n$, atunci $U = \text{const.}$ Din propozițiile de mai sus, ținînd seama de (1.3), avem :

PROPOZIȚIA 4.2. *Condiția necesară și suficientă ca două spații Riemann V_n, $\overline{V}_n$ să fie coparalele este : $R^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jkl}$ în punctele corespunzătoare.*

Primită la redacție la 15 aprilie 1967

Institutul pedagogic Craiova

BIBLIOGRAFIE

1. SCHAUTEN, *Ricci-Calculus*, 1958.
2. G. VRĂNCEANU, *Lecții de geometrie diferențială*, vol. I, Ed. didactică și pedagogică, București, 1961.
3. L. P. EISENHART, *Non-Riemannian Geometry*, New York, 1927.

UTILIZAREA METODELOR VECTORIALE LA STUDIUL COMPATIBILITĂȚII A DOUĂ ECUAȚII ALGEBRICE DE GRADUL n CU O NECUNOSCUTĂ

DE

MARCEL DRAGOŞ STOICA

Se studiază compatibilitatea a două ecuații algebrice de gradul n cu o necunoscută, stabilindu-se condiția necesară și suficientă ca un număr de k soluții ($k = 1, 2, \ldots, n$) să fie comune, cu ajutorul unor algebre vectoriale (algebre Lie, produse exterioare). În mod analog, prin procedee similare, se studiază şi compatibilitatea a două ecuații diferențiale liniare de ordinul n cu coeficienți variabili.

Fiind date două ecuații de gradul n cu o necunoscută :

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_nx + a_{n+1} = 0 \tag{1}$$

$$b_1x^n + b_2x^{n-1} + \ldots + b_nx + b_{n+1} = 0 \tag{2}$$

se cere a se găsi condiția necesară şi suficientă ca cel puțin una din soluțiile ecuației (1) să verifice şi ecuația (2). De asemenea, se poate pune şi problema : care sînt condițiile ca ecuațiile (1) și (2) să aibă k soluții comune ($k \leqslant n$).

Pentru rezolvarea acestei probleme, în cele ce urmează se introduc anumite sisteme multiplicative. Aceste sisteme conduc la nişte determinanți iterați care constituie un instrument eficace de abordare a problemei propuse.

A. ALGEBRA $A_{2,n+1}$

În spațiul cu $n+1$-dimensiuni se consideră doi vectori (γ) avînd drept componente coeficienții ecuațiilor (1) și (2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n + a_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} \\ \mathbf{V}_2 &= b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \ldots + b_n\mathbf{u}_n + b_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} \end{aligned} \tag{γ}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 9, P. 1341–1355, BUCUREŞTI, 1967

şi un vector funcţie de variabila x, avînd componentele în progresie geometrică :

$$\mathbf{V} = x^n\mathbf{u}_1 + x^{n-1}\mathbf{u}_2 + \ldots + x\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}$$

Hodograful acestui vector, considerat cu punctul de aplicaţie în origine, reprezintă curba normală în spaţiul cu $n+1$-dimensiuni.

Ecuaţiile (1) şi (2) reprezintă tocmai condiţiile de perpendicularitate a vectorului cu componentele în progresie geometrică pe vectorii (γ). Deci aceste două ecuaţii pot fi exprimate şi prin anularea produselor scalare :

$$(1') \qquad \mathbf{V}_1 \,.\, \mathbf{V} = 0$$

$$(2') \qquad \mathbf{V}_2 \,.\, \mathbf{V} = 0.$$

Pentru a defini produsul vectorial a doi vectori în spaţiul cu $n+1$-dimensiuni se porneşte de la produsul vectorial a doi versori, ai unei baze ortonormate, efectuat conform relaţiilor :

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_i = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n, \; n+1 \\ &\mathbf{u}_{i_1} \times \mathbf{u}_{i_2} = \Sigma_j (-1)^{P_j} \mathbf{u}_j , \end{aligned}$$

unde j ia toate valorile de la 1 la $n+1$ afară de i_1 şi i_2, iar exponentul P_j este nul sau unitar după cum permutarea i_1, i_2, j este o permutare pară sau impară a numerelor i_1, i_2, j scrise în ordine crescătoare. Acest sistem multiplicativ constituie un caz particular de algebră Lie care se notează $A_{2.\,n+1}$, deoarece se referă la doi vectori, în spaţiul cu $n+1$-dimensiuni. Deoarece în definiţia sistemului multiplicativ intervin numai doi vectori, deci numărul minim posibil, acest produs vectorial poate fi denumit şi „simplu definit".

Prin înmulţirea cu un vector a produsului vectorial se obţine produsul mixt. Prin definiţie, în cazul a 3 vectori se obţin relaţiile :

$$(\mathbf{u}_{i_1} \times \mathbf{u}_{i_2}) \cdot \mathbf{u}_j = (-1)^{P_j}$$

cînd j ia oricare din cele $n+1$ valori, afară de i_1 şi i_2 şi

$$(\mathbf{u}_{i_1} \times \mathbf{u}_{i_2}) \cdot \mathbf{u}_j = 0$$

cînd j ia una din valorile i_1 sau i_2.

Din definiţia dată rezultă că produsul vectorial a doi vectori are următoarele proprietăţi :

1) *Anticomutativitate* :

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = - \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_1 ,$$

deci în general :

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = - \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1 .$$

2) *Distributivitate faţă de adunare* :

$$\mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3 .$$

3) *Neasociativitate* :

$$(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \times \mathbf{u}_3 \neq \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3).$$

Deci :

$$(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \times \mathbf{u}_3 \neq \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3.$$

Pe baza definiţiei şi proprietăţilor de mai sus se calculează produsul vectorial a doi vectori oarecare :

$$\begin{aligned}
(4)\qquad \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i \mathbf{u}_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_j \mathbf{u}_j\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{i=n+1} \sum_{j=1}^{j=n+1} a_i b_j \mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{i=n+1} \sum_{j=1}^{j=n+1} (a_i b_j - a_j b_i) \mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j = \\
&= \sum_{i=1}^{i=n+1} \sum_{j=1}^{j=n+1} \begin{vmatrix} a_i a_j \\ b_i b_j \end{vmatrix} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_{i-1} - \mathbf{u}_{i+1} \ldots - \\
&\quad - \mathbf{u}_{j-1} + \mathbf{u}_{j+1} + \ldots + \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}) = \\
&= \sum_{i=1}^{i=n+1} \sum_{j+1}^{j=n+1} \sum_{k=1}^{k=n+1} \begin{vmatrix} a_j a_k \\ b_j b_k \end{vmatrix} \mathbf{u}_i - \sum_{i=1}^{i=n+1} \sum_{j=1}^{j=n+1} \sum_{k=1}^{k=n+1} \begin{vmatrix} a_i a_k \\ b_i b_k \end{vmatrix} \mathbf{u}_j + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{i=n+1} \sum_{j=1}^{j=n+1} \sum_{k=1}^{k=n+1} \begin{vmatrix} a_i a_j \\ b_i b_j \end{vmatrix} \mathbf{u}_k = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{i=n-1} \mathbf{u}_i & \sum\limits_{i=2}^{i=n} \mathbf{u}_i & \sum\limits_{i=3}^{i=n+1} \mathbf{u}_i \\ \sum\limits_{i=1}^{i=n-1} a_i & \sum\limits_{i=2}^{i=n} a_i & \sum\limits_{i=3}^{i=n+1} a_i \\ \sum\limits_{i=1}^{i=n-1} b_i & \sum\limits_{i=2}^{i=n} b_i & \sum\limits_{i=3}^{i=n+1} b_i \end{vmatrix} = \\
&= \sum_{i=1}^{i=n+1} \sum_{j=1}^{j=n+1} \sum_{k=1}^{k=n+1} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j \mathbf{u}_k \\ a_i a_j a_k \\ b_i b_j b_k \end{vmatrix} = \sum_{l=1}^{l=C_{n+1}^3} \mathbf{W}_l
\end{aligned}$$

în care s-a notat :

$$\mathbf{W}_l = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_i & \mathbf{u}_j & \mathbf{u}_k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}.$$

Numărul acestor vectori este :

$$C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)\, n(n-1)}{1.2.3}.$$

Calculînd produsul scalar al vectorilor $\mathbf{W}_l$ şi $\mathbf{V}_j$ în care : $l = 1, 2, \ldots \dfrac{(n+1)\, n(n-1)}{1.2.3}$ se obţine :

$$(5)\qquad \mathbf{W}_l \cdot \mathbf{V}_j = 0, \quad j = 1, 2.$$

Deci vectorii $\mathbf{W}_l$ sînt perpendiculari pe vectorii $({}^{\vee}\gamma)$. Dacă se consideră $n-1$ vectori din mulţimea vectorilor $\mathbf{W}_l$, de exemplu : $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, ...

$\ldots, \mathbf{W}_{n-1}$, care au următoarele expresii obținute prin permutări circulare :

$$\mathbf{W}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \ \mathbf{W}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}; \ \mathbf{W}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 & \mathbf{u}_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 \\ b_3 & b_4 & b_5 \end{vmatrix}; \ \ldots$$

$$\ldots; \ \mathbf{W}_{n-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_{n-1} & \mathbf{u}_n & \mathbf{u}_{n+1} \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \\ b_{n-1} & b_n & b_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Vectorii $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \ldots, \mathbf{W}_{n-1}$ se aleg astfel ca să constituie o bază, deci matricea componentelor lor :

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \ldots & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ b_n & b_{n-2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{n-2} & a_{n-1} \\ b_{n-2} & b_{n-1} \end{vmatrix} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{n+1} & a_{n-1} \\ b_{n+1} & b_{n-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} & \end{array} \right\|$$

să fie de rang $n-1$. Sînt două cazuri :

I. Vectorii $\mathbf{V}_1$ și $\mathbf{V}_2$ sînt paraleli, caz în care matricea M este de rang nul (deci mai mic decît $n-1$), deci vectorii $\mathbf{W}_i$, oricare ar fi aleși, sînt liniar dependenți. În acest caz toate soluțiile ecuației (1) verifică ecuația (2). Deci condiția ca să fie n soluții comune este :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

II. Vectorii $\mathbf{V}_1$ și $\mathbf{V}_2$ nu sînt paraleli, deci există cel puțin un vector $\mathbf{W}_i \neq 0$, deci cel puțin un determinant de forma $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \neq 0$. Determinantul $\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix}$ este sau diferit de zero, sau nul, dar atunci $\begin{vmatrix} a_j & a_k \\ b_j & b_k \end{vmatrix} \neq 0$. Dar k parcurge $n-1$ valori, deci există cel puțin $n-1$ determinanți de forma $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$ situați pe linii distincte, diferiți de zero. Formînd o matrice de tipul M, prin împărțirea cu determinanți diferiți de zero se obține o matrice scară. Deci rangul matricii este $n-1$. Rezultă că dacă vectorii $\mathbf{V}_1$ și $\mathbf{V}_2$ nu sînt paraleli, există totdeauna $n-1$ vectori $\mathbf{W}_i$, liniar independenți.

Atunci între vectorii $\mathbf{W}_i$ și vectorul $\mathbf{V}$, cu componentele în progresie geometrică, există o dependență liniară. Pentru demonstrația acestei afirmații se consideră vectorii : $\mathbf{V}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \ldots, \mathbf{W}_{n-1}$, adică $n+2$ vectori. În spațiul cu $n+1$-dimensiuni între $n+2$ vectori există totdeauna o dependență liniară, deci se poate scrie :

$$\mathbf{V} = \alpha \mathbf{V}_1 + \beta \mathbf{V}_2 + \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i \mathbf{W}_i \tag{6}$$

în care : $\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ nu sînt toți nuli (cel puțin unul din acești parametri este diferit de zero).

Înmulțind scalar această relație cu vectorul $\mathbf{V}_1$ și apoi cu vectorul $\mathbf{V}_2$ și ținînd seama de relațiile (1), (2) și (5), se obține :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V} &= \alpha \mathbf{V}_1^2 + \beta \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = 0 \\ \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V} &= \alpha \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 + \beta \mathbf{V}_2^2 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Determinantul acestui sistem de ecuații în care α și β sînt considerate necunoscute, conform identității lui Lagrange, are expresia :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \mathbf{V}_1^2 & \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 & \mathbf{V}_2^2 \end{vmatrix} = \mathbf{V}_1^2 \mathbf{V}_2^2 - (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)^2 = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{i=n+1} a_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{j=n+1} b_j \right) - \left(\sum_{k=1}^{k=n+1} a_k b_k \right)^2 = \sum_{i=1}^{i=n+1} \sum_{j=1}^{j=n+1} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Prin ipoteză coeficienții ecuațiilor (1) și (2) nu sînt proporționali, deci măcar unul din determinanții expresiei nu este nul. Rezultă că determinantul Δ al sistemului (7) este diferit de zero. Deci sistemul (7) admite numai soluțiile banale :

$$\alpha = \beta = 0.$$

În acest caz, relația (6) devine :

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i \mathbf{W}_i . \tag{6'}$$

Adică :

$$x^n \mathbf{u}_1 + x^{n-1} \mathbf{u}_2 + \ldots + x \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1} =$$

$$= \lambda_1 \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} + \ldots + \lambda_{n-1} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_{n-1} & \mathbf{u}_n & \mathbf{u}_{n+1} \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \\ b_{n-1} & b_n & b_{n+1} \end{vmatrix} .$$

De aici rezultă următoarele relații :

$$\begin{aligned} x^n &= \lambda_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ x^{n-1} \lambda_1 &= \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
x^{n-2} &= \lambda_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ b_4 & b_5 \end{vmatrix} \\
x^{n-3} &= \qquad \lambda_2 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} a_5 & a_3 \\ b_5 & b_3 \end{vmatrix} + \lambda_4 \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ b_5 & b_6 \end{vmatrix} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x &= \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_{n-2} \begin{vmatrix} a_{n-2} & a_{n-1} \\ b_{n-2} & b_{n-1} \end{vmatrix} + \lambda_{n-1} \begin{vmatrix} a_{n+1} & a_{n-1} \\ b_{n+1} & b_{n-1} \end{vmatrix} \\
1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_{n-1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Pentru simplificare se notează :

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}.$$

Se cunoaşte relaţia :

$$\Delta_{ip}\, \Delta_{jk} + \Delta_{jp}\, \Delta_{ki} + \Delta_{kp}\, \Delta_{ij} = 0 \tag{10}$$

care se mai poate scrie şi sub forma :

$$\begin{vmatrix} \Delta_{ij} & \Delta_{ip} \\ \Delta_{kj} & \Delta_{kp} \end{vmatrix} = \Delta_{jp}\, \Delta_{ik}. \tag{10'}$$

Pentru simplificare din nou se poate nota :

$$\Delta^i_{k,jp} = \begin{vmatrix} \Delta_{ij} & \Delta_{ip} \\ \Delta_{kj} & \Delta_{kp} \end{vmatrix}.$$

Deci relaţia (10) se poate scrie şi sub forma :

$$\Delta^i_{k,jp} = \Delta_{jp}\, \Delta_{ik}$$

în care $\Delta^i_{k,jp}$ este un determinant format din determinanţi şi are proprietatea de a se anula cînd indicii scrişi vertical sau cei scrişi orizontal sînt egali :

$$\Delta^i_{i,jp} = 0$$

$$\Delta^i_{k,jj} = 0.$$

De altfel şi această proprietate arată că $\Delta^i_{k,jp}$ este divizibil cu Δ_{ik}, respectiv cu Δ_{jp}.

Cu notaţiile introduse sistemul (9) se mai poate scrie :

$$\begin{aligned}
x^n &= \lambda_1\, \Delta_{23} \\
x^{n-1} &= \lambda_1\, \Delta_{31} + \lambda_2\, \Delta_{34} \\
x^{n-2} &= \lambda_1\, \Delta_{12} + \lambda_2\, \Delta_{42} + \lambda_3\, \Delta_{45} \\
x^{n-3} &= \;\ldots\; \lambda_2\, \Delta_{23} + \lambda_3\, \Delta_{53} + \lambda_4\, \Delta_{56} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x^2 &= \ldots\ldots\; \lambda_{n-3}\, \Delta_{n-3,n-2} + \lambda_{n-2}\, \Delta_{n,n-2} + \lambda_{n-1}\, \Delta_{n,n+1} \\
x &= \ldots\ldots\ldots\ldots\; \lambda_{n-2}\, \Delta_{n-2,n-1} + \lambda_{n-1}\, \Delta_{n+1,n-1} \\
1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \lambda_{n-1}\, \Delta_{n-1,n}
\end{aligned} \tag{9'}$$

Acest sistem poate fi scris mai concis sub forma :

$$x^{n-q} = \lambda_{q-1}\, \Delta_{q-1,q} + \lambda_q\, \Delta_{q+2,q} + \lambda_{q+1}\, \Delta_{q+2,q+3}\,. \tag{9''}$$

Înlocuind aceste expresii în ecuațiile (1) și (2) se constată că le verifică identic, deoarece coeficienții factorilor λ_i se anulează, întrucît se obține un determinant de ordinul 3 cu două linii identice :

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i\,(\Delta_{i+1,i+2}\, a_i + \Delta_{i+2,i}\, a_{i+1} + \Delta_{i,i+1}\, a_{i+2}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n+1} \lambda_i \begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} & a_{i+2} \\ a_i & a_{i+1} & a_{i+2} \\ b_i & b_{i+1} & b_{i+2} \end{vmatrix} \equiv 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} \lambda_i\,(\Delta_{i+1,i+2}\, b_i + \Delta_{i+2,i}\, b_{i+1} + \Delta_{i,i+1}\, b_{i+2}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n+1} \lambda_i \begin{vmatrix} b_i & b_{i+1} & b_{i+2} \\ a_i & a_{i+1} & a_{i+2} \\ b_i & b_{i+1} & b_{i+2} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Amplificînd în sistemul (9) ecuațiile : 2, 3, ..., $n+1$ respectiv cu $\Delta_{21}, \Delta_{31}, \ldots, \Delta_{n+1,1}$ și ținînd seama de relația (10), precum și de identitatea evidentă :

$$\Delta_{31}\, \Delta_{21} + \Delta_{12}\, \Delta_{31} = \Delta_{31}\, \Delta_{21} - \Delta_{21}\, \Delta_{31} \equiv 0$$

se obține :

$$\Delta_{21}\, x^{n-1} + \Delta_{31}\, x^{n-2} + \Delta_{41}\, x^{n-3} + \ldots + \Delta_{n,1}\, x + \Delta_{n+1,1} = 0. \tag{11}$$

În mod similar se amplifică în sistemul (9) ecuațiile 1, 2, 3, ..., n respectiv cu : $\Delta_{1,n+1}, \Delta_{2,n+1}, \ldots, \Delta_{n,n+1}$ și ținînd seama de relația (10) se obține :

$$\Delta_{1,n+1}\, x^n + \Delta_{2,n+1}\, x^{n-1} + \ldots + \Delta_{n,n+1}\, x = 0. \tag{12}$$

Sînt două cazuri :

a) $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = 0$, deci $a_{n+1} = b_{n+1} = 0$,

deci o soluție comună este chiar $x = 0$. Rămîne de analizat dacă mai există și o altă soluție comună, după ce s-a simplificat prin x.

b) $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 \neq 0$, deci soluția comună este diferită de zero. În acest caz se poate simplifica prin x și se obține :

$$\Delta_{1,n+1}\, x^{n-1} + \Delta_{2,n+1}\, x^{n-2} + \ldots + \Delta_{n-1,n+1}\, x + \Delta_{n,n+1} = 0. \tag{12'}$$

Este necesar a se analiza următoarele două cazuri posibile :

I) $\Delta_{1,n+1} = 0$, deci :

$$a_1 = \rho\, a_{n+1}$$

$$b_1 = \rho\, b_{n+1}\,.$$

Ecuaţiile (11) şi (12′) după simplificările aduse în această ipoteză devin :

$$(11')\qquad \begin{aligned} &\Delta_{2,1}\, x^{n-2} + \Delta_{3,1}\, x^{n-3} + \ldots + \Delta_{n-1,1}\, x + \Delta_{n,1} = 0 \\ &\Delta_{2,1}\, x^{n-2} + \Delta_{3,1}\, x^{n-3} + \ldots + \Delta_{n-1,1}\, x + \Delta_{n,1} = 0 \end{aligned}$$

adică cele două ecuaţii nu sînt distincte, ci sînt de fapt una şi aceeaşi. Pentru a analiza mai departe compatibilitatea, se ia una din ecuaţiile (1) şi (2), de exemplu (1) cu (11′) :

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + a_4x^{n-3} + \ldots + a_nx + a_{n-1} = 0$$

$$\Delta_{2,1}\, x^{n-2} + \Delta_{3,1}\, x^{n-3} + \ldots + \Delta_{n-1,1}\, x + \Delta_{n,1} = 0.$$

Dacă şi $\Delta_{n,1} = 0$, din nou se simplifică a doua ecuaţie. Operaţia se repetă pînă cînd se obţine $\Delta_{k,1} \neq 0$, deci nu mai este de fapt cazul I.

II) $\Delta_{1,n+1} \neq 0$, deci ecuaţiile (11) şi (12′) sînt distincte :

$$(13_1)\qquad \begin{aligned} &\Delta_{2,1}\, x^{n-1} + \Delta_{3,1}\, x^{n-2} + \Delta_{4,1}\, x^{n-3} + \ldots + \Delta_{n,1}\, x + \Delta_{n+1,1} = 0 \\ &\Delta_{1,n+1}\, x^{n-1} + \Delta_{2,n+1}\, x^{n-2} + \Delta_{3,n+1}\, x^{n-3} + \ldots + \Delta_{n-1,n+1}\, x + \\ &\qquad + \Delta_{n,n+1} = 0. \end{aligned}$$

La aceeaşi relaţie se putea ajunge şi punînd condiţia ca matricea extinsă a sistemului (9) sau (9′) să fie de rangul n.

În cazul cînd a_1 sau b_1 sînt unul nul, iar altul nenul, se formează un sistem de forma (13_1) (cu un grad mai mic decît cel iniţial) compus dintr-o ecuaţie de tipul (12) şi ecuaţia în care a_1 sau b_1 este nul.

Se introduce notaţia :

$$\Delta_{ij,\overset{1}{n+1}} = \begin{vmatrix} \Delta_{i+1,1} & \Delta_{j+1,1} \\ \Delta_{i,n+1} & \Delta_{j,n+1} \end{vmatrix}.$$

Din nou se analizează determinentul :

$$\Delta_{1,n,\overset{1}{n+1}} = \begin{vmatrix} \Delta_{2.1} & \Delta_{n+1.1} \\ \Delta_{1.\,n+1} & \Delta_{n.\,n+1} \end{vmatrix}.$$

Cînd $\Delta_{1n.\,\overset{1}{n+1}} = 0$ se procedează aşa cum s-a arătat la cazul I. Cînd $\Delta_{1.n.\,\overset{1}{n+1}} \neq 0$, sistemul (13_1) se poate reduce iarăşi cu un grad :

$$(13_2)\qquad \begin{aligned} &\Delta_{2,1.\,\overset{1}{n+1}}\, x^{n-2} + \Delta_{3,1.\,\overset{1}{n+1}}\, x^{n-3} + \ldots\, \Delta_{n-1.\,1.\,\overset{1}{n+1}}\, x + \Delta_{n1.\,\overset{1}{n+1}} = 0. \\ &\Delta_{1.\,n.\,\overset{1}{n+1}}\, x^{n-2} + \Delta_{2n.\,\overset{1}{n+1}}\, x^{n-3} + \ldots\, \Delta_{n-2.\,n.\,\overset{1}{n+1}}\, x + \Delta_{n-1.\,n,\overset{1}{n+1}} = 0. \end{aligned}$$

Din nou se notează :

$$\Delta_{ij.\,\overset{1}{n}.\,\overset{1}{n+1}} = \begin{vmatrix} \Delta_{i+1.\,1.\,\overset{1}{n+1}} & \Delta_{j+1.\,1.\,\overset{1}{n+1}} \\ \Delta_{i.\,n.\,\overset{1}{n+1}} & \Delta_{j.\,n.\,\overset{1}{n+1}} \end{vmatrix}.$$

Se analizează cele două cazuri :

I) $\Delta_{1.\,n-1.\,\overset{1}{n}.\,\overset{1}{n+1}} = 0$

şi

II) $\Delta_{1.\,n-1.\,\overset{1}{n}.\,\overset{1}{n+1}} \neq 0.$

În cel de-al doilea caz iarăși se reduce gradul sistemului (13_2):

$$\Delta_{2,1,\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}x^{n-3}+\Delta_{3,1,\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}x^{n-4}+\ldots+\Delta_{n-2,1,\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}x+\Delta_{n-1,1,\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}=0$$

$$(13_3)\qquad \Delta_{1,n-1,\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}x^{n-3}+\Delta_{2,n-1,\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}x^{n-4}+\ldots+$$

$$+\Delta_{n-3,n-1,\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}x+\Delta_{n-2,n-1,\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}=0.$$

Repetînd această operație în final se obține:

$$(13_{n-1})\qquad \begin{aligned}&\Delta_{2,1,\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}x+\Delta_{3,1,\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}=0\\&\Delta_{1,3,\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}x+\Delta_{2,3,\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}=0.\end{aligned}$$

Deci condiția de compatibilitate a ecuațiilor (1) și (2), în condițiile arătate pe parcurs (pentru cel puțin o rădăcină), este:

$$(13_n)\qquad \Delta_{1,2,\overset{1}{3},\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}=0$$

sau:

$$\frac{\Delta_{2,1,\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}{\Delta_{1,3,\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}=\frac{\Delta_{3,1,\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}{\Delta_{2,3,\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}.$$

Soluția comună este:

$$(14)\qquad x=\frac{-\Delta_{3,1,\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}{\Delta_{2,1,\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}=\frac{-\Delta_{2,3,\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}{\Delta_{1,3,\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}.$$

Din sistemul (9) sau (9′) se pot determina și coeficienții λ_i.

Condiția ca ecuațiile (1) și (2) să aibă două rădăcini comune este dată de următoarele două egalități:

$$(15)\qquad \frac{\Delta_{2,1,\overset{1}{5},\overset{1}{6}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}{\Delta_{1,4,\overset{1}{5},\overset{1}{6}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}=\frac{\Delta_{3,1,\overset{1}{5},\overset{1}{6}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}{\Delta_{2,4,\overset{1}{5},\overset{1}{6}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}=\frac{\Delta_{4,1,\overset{1}{5},\overset{1}{6}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}{\Delta_{3,4,\overset{1}{5},\overset{1}{6}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}.$$

În general, condiția ca ecuațiile (1) și (2) să aibă *k* soluții comune este:

$$(16)\qquad \frac{\Delta_{2,1,\overset{1}{k+3},\overset{1}{k+4}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}{\Delta_{1,k+2,\overset{1}{k+3},\overset{1}{k+4}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}}=\frac{\Delta_{3,1,\overset{1}{k+3}\ldots\overset{1}{n+1}}}{\Delta_{2,k+2,\overset{1}{k+3}\ldots\overset{1}{n+1}}}=\ldots=\frac{\Delta_{k+2,1,\overset{1}{k+3}\ldots\overset{1}{n+1}}}{\Delta_{k+1,k+2,\overset{1}{k+3}\ldots\overset{1}{n+1}}}.$$

Condiția (13_n) se mai poate găsi și prin alte metode, așa cum se arată în cele ce urmează.

B. ALGEBRA $A_{n,\overset{1}{n+1}}$

Produsul vectorial „multiplu definit'' (proporțional cu un produs exterior), este un produs, în mod obligatoriu, a mai mult de doi vectori. Relațiile de definiție sînt:

$$\mathbf{u}_{i_1}\times\mathbf{u}_{i_2}\times\ldots\times\mathbf{u}_{i_k}=(-1)^{P_{i_{k+1}}}\mathbf{u}_{i_{k+1}}+(-1)^{P_{i_{k+2}}}\mathbf{u}_{i_{k+2}}+\ldots(-1)^{P_{i_{n+1}}}\mathbf{u}_{i_{n+1}}$$

în care exponentul $P_{i_{k+h}}$ este zero sau unu, după cum permutarea $(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+h})$ este pară sau impară față de aceeași mulțime scrisă în ordine crescătoare. Cel mai mare ordin de multiplicitate (prin definiţie) este :

$$\mathbf{u}_{i_1} \times \mathbf{u}_{i_2} \ldots \times \mathbf{u}_{i_n} = (-1)^{P_{i_{n+1}}} \mathbf{u}_{i_{n+1}}$$

în care $P_{i_{n+1}}$ este zero sau unu după cum permutarea

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \ldots & n, & n+1 \\ i_1, & i_2, & i_3 \ldots & i_n, & i_{n+1} \end{pmatrix}$$

este pară sau impară. Aceasta este algebra $A_{n,\, n+1}$ în care n indică numărul de versori care definesc produsul, iar $n+1$ numărul de dimensiuni.

Se vede că produsul vectorial „multiplu definit'' are proprietăţi similare cu produsul vectorial „simplu definit''.

Vectorii $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ şi $\mathbf{V}$ se consideră în spaţiul cu $2n$ dimensiuni, după cum urmează :

$$\mathbf{V}_1 = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} + 0\cdot\mathbf{u}_{n+2} + \ldots + 0\cdot\mathbf{u}_{2n}$$

$$\mathbf{V}_2 = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \ldots + b_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} + 0\cdot\mathbf{u}_{n+2} + \ldots + 0\cdot\mathbf{u}_{2n}$$

$$\mathbf{V} = x^{2n-1}\mathbf{u}_1 + x^{2n-2}\mathbf{u}_2 + \ldots + x\mathbf{u}_{2n-1} + \mathbf{u}_{2n}\,.$$

Efectuînd prima permutare între axele de referinţă ale spaţiului cu $2n$ dimensiuni, adică :

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & 2n \\ 2, & 3, & \ldots, & 1 \end{pmatrix}$$

vectorii $\mathbf{V}_1$ şi $\mathbf{V}_2$ devin :

$$\mathbf{V}_1^1 = 0\cdot\mathbf{u}_1 + a_1\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{n+1}\mathbf{u}_{n+2} + \ldots + 0\cdot\mathbf{u}_{2n}\,.$$

$$\mathbf{V}_2^1 = 0\cdot\mathbf{u}_2 + b_1\mathbf{u}_2 + \ldots + b_{n+1}\mathbf{u}_{n+2} + \ldots + 0\cdot\mathbf{u}_{2n}\,.$$

La fel se poate face a doua permutare :

$$\mathbf{V}_1^2 = 0\cdot\mathbf{u}_1 + 0\cdot\mathbf{u}_2 + \ldots + a_n\mathbf{u}_{n+2} + \ldots + 0\cdot\mathbf{u}_{2n}.$$

$$\mathbf{V}_2^2 = 0\cdot\mathbf{u}_1 + 0\cdot\mathbf{u}_2 + \ldots + b_n\mathbf{u}_{n+2} + \ldots + 0\cdot\mathbf{u}_{2n}.$$

Se fac în total $n-1$ permutări. Vectorii astfel obţinuţi sînt perpendiculari pe vectorul $\mathbf{V}$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_1^k\cdot\mathbf{V} &= 0 \\ \mathbf{V}_2^k\cdot\mathbf{V} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

Pentru $k = 0$ se obţin chiar ecuaţiile (1) şi (2). Rezultă $2n$ relaţii de acest tip. Deci $2n$ vectori sînt perpendiculari pe un alt vector, în spaţiul cu $2n$ dimensiuni. Considerînd primii $2n-1$ vectori permutaţi, se poate scrie produsul lor vectorial multiplu definit, care, de asemenea, este perpendicular pe vectorii $\mathbf{V}_1^k$ şi $\mathbf{V}_2^k$:

$$(\mathbf{V}_1^0\times\mathbf{V}_2^0\times\mathbf{V}_1^1\times\mathbf{V}_2^1\times\ldots\times\mathbf{V}_1^{n-1})\cdot\mathbf{V}_j^k = 0 \;\; \begin{cases} k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-2 \\ j = 1,\ 2, \end{cases} \begin{cases} k = n-1 \\ j = 1 \end{cases}$$

Rezultă că produsul vectorial „multiplu definit'' este proporțional cu vectorul $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V}_1^0 \times \mathbf{V}_2^0 \times \mathbf{V}_1^1 \times \ldots \times \mathbf{V}_1^{n-1} = \rho \mathbf{V}.$$

Deoarece $\mathbf{V}$ verifică ecuația :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_2^{n-1} = 0,$$

rezultă că și produsul vectorial „multiplu definit'' o verifică, deci se obține un produs mixt :

$$(\mathbf{V}_1^0 \times \mathbf{V}_2^0 \times \mathbf{V}_1^1 \times \mathbf{V}_2^1 \times \ldots \times \mathbf{V}_1^{n-1}) \cdot \mathbf{V}_2^{n-1} =$$
$$= [\mathbf{V}_1^0, \mathbf{V}_2^0, \mathbf{V}_1^1, \mathbf{V}_2^1, \ldots, \mathbf{V}_1^{n-1}, \mathbf{V}_2^{n-1}] = 0.$$

Acest produs mixt formează un determinant, notat cu Δ_S^{2n}, denumit determinantul lui Sylvester.

Deci condiția (13_n) se mai scrie :

$$\Delta_S^{2n} = [\mathbf{V}_1^0 \mathbf{V}_2^0, \mathbf{V}_1^1, \mathbf{V}_2^1, \ldots, \mathbf{V}_1^{n-1}, \mathbf{V}_2^{n-1}] = \tag{17}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n & b_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & & \ldots & a_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & & \ldots & b_{n+1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_2 & \ldots & & & & a_n & a_{n+1} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & \ldots & & & & b_n & b_{n+1} & \ldots & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & & & a_n & a_{n+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & & & b_n & b_{n+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Rezultă că determinantul $\Delta_{1,2,\overset{1}{3},\overset{1}{4},\overset{1}{5}\overset{\ldots}{\ldots}\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}}$, este divizibil cu determinantul lui Sylvester Δ_S^{2n}, factorii de proporționalitate fiind tocmai determinanții :

$$\Delta_{1,n+1}\,;\ \Delta_{1,n,\overset{1}{n+1}}\,;\ \Delta_{1,n-1,\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}} \cdots \Delta_{1,\overset{1}{3},\overset{1}{4},\overset{1}{5}\overset{\ldots}{\ldots}\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}},$$

care de altfel sînt similari cu determinanții care se obțin atunci cînd se aplică metoda eliminării a lui Gauss.

Acești determinanți au fost presupuși, pe parcursul expunerii, diferiți de zero. Această divizibilitate se poate dovedi aplicînd succesiv proprietatea (10''). Se obține :

$$\Delta_{1,2,\overset{1}{3},\overset{1}{4},\overset{1}{5}\ldots\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}} = (\Delta_{1,n+1})^{n-2}\,(\Delta_{1,n,\overset{1}{n+1}})^{n-3}\,(\Delta_{1,n-1,\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}})^{n-4}\cdot$$
$$\cdot\,(\Delta_{1,n-2,\overset{1}{n-1},\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}})^{n-5} \cdots \Delta_{1\,\overset{1}{3},\overset{1}{4},\overset{1}{5}\overset{\ldots}{\ldots}\overset{1}{n},\overset{1}{n+1}} \cdot \Delta_S^{2n}. \tag{18}$$

De exemplu, în cazul a două ecuații de gradul patru, această relație capătă forma :

$$\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_2&a_5\\b_2&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_5\\b_4&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_5&a_1\\b_5&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_3&a_5\\b_3&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_5\\b_4&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_4&a_1\\b_4&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_5&a_1\\b_5&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
\\
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1&a_5\\b_1&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_3&a_5\\b_3&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_2&a_1\\b_2&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_1\\b_4&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1&a_5\\b_1&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_5\\b_4&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_2&a_1\\b_2&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_5&a_1\\b_5&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_3&a_5\\b_3&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_5\\b_4&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_4&a_1\\b_4&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_5&a_1\\b_5&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1&a_5\\b_1&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_5\\b_4&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_2&a_1\\b_2&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_5&a_1\\b_5&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
\\
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1&a_5\\b_1&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_5\\b_4&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_2&a_1\\b_2&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_5&a_1\\b_5&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1&a_5\\b_1&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_2&a_5\\b_2&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_2&a_1\\b_2&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
\end{vmatrix}
\\
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_3&a_5\\b_3&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_5\\b_4&b_4\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_4a_1\\b_4&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_5&a_1\\b_5&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1&a_5\\b_1&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_5\\b_4&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_2&a_1\\b_2&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_5&a_1\\b_5&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
\\
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1&a_5\\b_1&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_5\\b_4&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_2&a_1\\b_2&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_5&a_1\\b_5&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1&a_5\\b_1&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_2&a_5\\b_2&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_2&a_1\\b_2&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1&a_5\\b_1&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_5\\b_4&b_4\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_2&a_1\\b_2&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_5&a_1\\b_5&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_2&a_5\\b_2&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_5\\b_4&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_5&a_1\\b_5&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
\\
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1&a_5\\b_1&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_2&a_5\\b_2&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_2&a_1\\b_2&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1&a_5\\b_1&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_3&a_5\\b_3&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_2&a_1\\b_2&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_1\\b_4&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
\end{vmatrix}
\end{vmatrix}
=$$

$$= \begin{vmatrix}a_1&a_5\\b_1&b_5\end{vmatrix}^2
\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1&a_5\\b_1&b_5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_4&a_5\\b_4&b_5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_2&a_1\\b_2&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_5&a_1\\b_5&b_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
0&0&0&a_1&a_2&a_3&a_4&a_5\\
0&0&0&b_1&b_2&b_3&b_4&b_5\\
0&0&a_1&a_2&a_3&a_4&a_5&0\\
0&0&b_1&b_2&b_3&b_4&b_5&0\\
0&a_1&a_2&a_3&a_4&a_5&0&0\\
0&b_1&b_2&b_3&b_4&b_5&0&0\\
a_1&a_2&a_3&a_4&a_5&0&0&0\\
b_1&b_2&b_3&b_4&b_5&0&0&0
\end{vmatrix}.$$

Ordinul determinantului din primul membru este 2^n.

Suma ordinelor determinanților din membrul al doilea este de asemenea 2^n, după cum rezultă din identitatea cunoscută :

$$2^n \equiv (n-2)\cdot 2^1 + (n-3)\cdot 2^2 + (n-4)\cdot 2^3 + (n-5)\cdot 2^4 + \dots$$

$$\dots + 2.2^{n-3} + 1.2^{n-2} + 2n.$$

Această metodă se aplică și pur algebric prin înmulțirea ecuațiilor (1) și (2) cu $x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ și anulîndu-se determinantul coeficienților, care este tocmai determinantul lui Sylvester.

COMBINAREA LINIARĂ A VECTORILOR (γ)

Se consideră vectorii $\mathbf{V}_1$ și $\mathbf{V}_2$, care au drept componente coeficienții ecuațiilor. Se definește combinarea liniară a vectorilor $\mathbf{V}_1$ și $\mathbf{V}_2$ prin componenta k cu ajutorul expresiei :

$$\mathbf{V}_{1,2}^{k} = b_k\mathbf{V}_1 - a_k\mathbf{V}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & a_k \\ \mathbf{V}_2 & b_k \end{vmatrix},$$

Se vede că există proprietățile :

$$\mathbf{V}_{1,2}^{k} = -\mathbf{V}_{2,1}^{k} \quad \text{și} \quad \mathbf{V}_{1,2}^{k}\cdot\mathbf{V} = 0.$$

În particular se consideră combinarea liniară prin componenta 1 :

$$\mathbf{V}_{1,2}^{1} = \begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & a_1 \\ \mathbf{V}_2 & b_1 \end{vmatrix} = \Delta_{2,1}\mathbf{u}_2 + \Delta_{3,1}\mathbf{u}_3 + \ldots + \Delta_{n+1,1}\mathbf{u}_{n+1}$$

și prin componenta $n+1$:

$$\mathbf{V}_{1,2}^{n+1} = \begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & a_{n+1} \\ \mathbf{V}_2 & b_{n+1} \end{vmatrix} = \Delta_{1,n+1}\mathbf{u}_1 + \Delta_{2,n+1}\mathbf{u}_2 + \ldots + \Delta_{n,1}\mathbf{u}_n.$$

Ținînd seama de proprietățile combinației liniare se obține :

$$\mathbf{V}_{1,2}^{1}\cdot\mathbf{V} = 0$$

și

$$\mathbf{V}_{1,2}^{n+1}\cdot\mathbf{V} = 0.$$

Ultima relație se poate simplifica prin x, ajungîndu-se astfel la sistemul (13_1). Repetînd combinarea liniară prin prima și ultima componentă a noilor sisteme, se ajunge la relația (13_n). De fapt această metodă corespunde metodei reducerii sau eliminării folosită în algebră (metoda lui Gauss), care constă în eliminarea succesivă a termenilor de grad mare în ecuațiile (1) și (2). Se amplifică ecuația (1) cu b_1 și (2) cu a_1 și se scade ; apoi (1) cu b_{n+1} și (2) cu a_{n+1}, se scade și se amplifică etc.

Din cele expuse rezultă că algebrele multiplicative conduc fie la determinanți simpli, dar de ordin mare, atunci cînd produsul vectorial este „multiplu definit'', cu numărul maxim posibil de factori, fie la determinanți iterați (determinanți de determinanți, de determinanți, de determinanți etc.), dar de ordinul cel mai mic posibil (ordinul doi), atunci cînd produsul vectorial este „simplu definit'', deci cînd numărul de factori este minim posibil (adică doi).

Le determinanții iterați există avantajul că la fiecare iterație se dezvoltă determinanți de ordinul doi.

În cazul folosirii unor mașini electronice, rezultatele fiecărei iterații ar putea fi păstrate în memoria mașinii, iar după utilizarea la iterația următoare ar putea fi șterși din memorie, cu excepția cazului cînd la un moment dat este îndeplinită condiția de compatibilitate pentru k soluții comune, caz în care mașina păstrează rezultatele obținute și se oprește.

În concluzie, pentru studiul compatibilității a două ecuații de gradul n cu o necunoscută, cel mai adecvat instrument este algebra $A_{2,n+1}$, care prezintă o serie de avantaje.

În primul rînd se pot stabili notații mai simple.

În al doilea rînd se creează premisele studiului determinanților de determinanți, care se întrevăd a fi instrumentul cel mai potrivit pentru discuția sistemelor de ecuații de grad superior.

Această teorie se poate aplica și la studiul compatibilității a două ecuații diferențiale omogene de ordinul n, în care coeficienții sînt funcții de x de $n-1$ ori derivabile:

$$a_1 y^{(n)} + a_2 y^{(n-1)} + a_3 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y' + a_{n+1} y = 0. \tag{19}$$

$$b_1 y^{(n)} + b_2 y^{(n-1)} + b_3 y^{(n-2)} + \ldots + b_n y' + b_{n+1} y = 0. \tag{20}$$

Ecuațiile (19) și (20) sînt compatibile cînd cel puțin una din soluțiile lor fundamentale este comună.

Conform relației (9″) se poate scrie:

$$y^{(n-q)} = \lambda_{q-1} \Delta_{q-1,q} + \lambda_q \Delta_{q+2,q} + \lambda_{q+1} \Delta_{q+2,q+3}, \tag{21}$$

unde λ sînt funcții de x.

Relația (11) se scrie:

$$\Delta_{2,1} y^{(n-1)} + \Delta_{3,1} y^{(n-2)} + \Delta_{4,1} y^{(n-3)} + \ldots + \Delta_{n,1} y' + \Delta_{n+1,1} y = 0 \tag{22_1}$$

Derivînd se obține:

$$\begin{aligned} &\Delta_{2,1} y^{(n)} + (\Delta'_{2,1} + \Delta_{3,1}) y^{(n-1)} + (\Delta'_{3,1} + \Delta_{4,1}) y^{(n-2)} + \ldots \\ &\ldots + (\Delta_{n-1,1} + \Delta_{n,1}) y'' + (\Delta'_{n,1} + \Delta_{n+1,1}) y' + \Delta_{n+1,1} y = 0. \end{aligned} \tag{23_1}$$

Această relație, împreună cu (19) și cu (20), dă:

$$\Delta a^{21}_{23} y^{(n-1)} + \Delta a^{31}_{34} y^{(n-2)} + \Delta a^{41}_{45} y^{(n-3)} + \ldots + \Delta a^{n\ 1}_{n,n+1} y = 0 \tag{19_1}$$

$$\Delta b^{21}_{23} y^{(n-1)} + \Delta b^{31}_{34} y^{(n-2)} + \Delta b^{41}_{45} y^{(n-3)} + \ldots + \Delta b^{n\ 1}_{n,n+1} y = 0, \tag{20_1}$$

unde s-a notat:

$$\Delta E^{k\ 1}_{k,k+1} = \begin{vmatrix} \Delta E_k & \Delta E_1 \\ \Delta'_{k,1} + \Delta_{k+1,1} & \Delta'_{2,1} + \Delta_{k-1,1} \end{vmatrix}; \ E = a, b$$

Apoi se procedează analog: (19_1) și (20_1) dă:

$$\Delta^{21\ 31}_{2,3,3,4} y^{(n-2)} + \Delta^{21\ 41}_{2,3,4,5} y^{(n-3)} + \ldots + \Delta^{21\ n\ 1}_{2,3,n,n+1} y = 0, \tag{22_2}$$

unde s-a notat:

$$\Delta^{2,1,k\ 1}_{2,3,k,k+1} = \begin{vmatrix} a^{k\ 1}_{k,k+1} & a^{21}_{23} \\ b^{k\ 1}_{k,k+1} & b^{21}_{23} \end{vmatrix}.$$

Apoi (22_2) se derivează şi se obţine (23_2), iar împreună cu (19_1) şi (20_1) dă (19_2) şi (20_2) etc. În final se obţine :

$$(22_n) \qquad \Delta^{2,1,3,1,4,1,\ \ldots\ ,\ n+1}_{2,3,3,4,4,5,\ \ldots\ ,\ n+1,1,n+2} = 0$$

Acest determinant este divizibil cu un alt determinant funcţional, analog cu cel al lui Sylvester : $\Delta^{2n}_{S(f)}$.

Într-adevăr, ecuaţiile (19) şi (20) se pot deriva succesiv, pînă la ordinul $n-1$. Anulîndu-se determinantul sistemului format, se obţine o altă formă a condiţiei de compatibilitate :

$$(24) \quad \Delta^{2n}_{S(f)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots\ldots 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots a_{n+1} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots 0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots b_{n+1} \\ 0 & 0 & \ldots 0 & a_1 & a_1' + a_2 & a_2' + a_3 & a_3' + a_4 \quad \ldots a'_{n+1} \\ 0 & 0 & \ldots 0 & b_1 & b_1' + b_2 & b_2' + b_3 & b_3' + b_4 \quad \ldots b'_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & (n-1)\,a_1' + a_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots a^{(n-1)}_{n+1} \\ b_1 & (n-1)\,b_1' + b_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots b^{(n-1)}_{n+1} \end{vmatrix} = 0\cdot$$

Determinantul din (22_n) are însă avantajul de a se calcula uşor, fiind format numai din determinanţi de ordinul doi prin repetări.

Relaţia (22_n) sau (24) reprezintă condiţia ca să existe cel puţin o ecuaţie diferenţială de ordinul întîi a cărei soluţie generală să fie o soluţie fundamentală atît pentru ecuaţia (19) cît şi pentru ecuaţia (20). Dacă la un moment dat ecuaţiile (19_k) şi (20_k) au coeficienţi proporţionali cu aceeaşi funcţie $\varphi(x)$, atunci există cel puţin o ecuaţie diferenţială de ordinul $n-k$ a cărei soluţie generală este o soluţie particulară atît pentru ecuaţia (19), cît şi (20).

Se poate arăta că algebra de tipul $A_{k,n+1}$ are un cîmp vast de aplicabilitate în studiul sistemelor de ecuaţii algebrice sau diferenţiale. Aceasta din cauză că problema compatibilităţii poate fi pusă şi în cazul cînd apar două necunoscute. Condiţia de compatibilitate conduce imediat la eliminarea unei necunoscute. În acest fel o problemă aparent îngustă poate conduce la dezvoltări foarte generale, cu mare utilitate pentru calculele care intervin în numeroase situaţii practice.

Primită la redacţie la 20 februarie 1967

INCERC-Bucureşti
Calea Moşilor nr. 126

UNELE APLICAȚII ALE ECUAȚIILOR BOOLEENE ÎN TEORIA ALGEBRICĂ A GRAMATICII

DE

CONSTANTIN TĂNĂSESCU

În lucrare se caută să se determine cantitativ unele mulțimi care intervin în lingvistica algebrică folosind în acest scop ecuațiile booleene.

Ne propunem determinarea cantitativă a unor mulțimi care intervin în lingvistica algebrică folosind în acest scop ecuațiile booleene. Aceste mulțimi au fost introduse și studiate de R. L. Dobrusin, B. H. Mayoh, S. Marcus. Se asociază fiecărei mulțimi un vector boolean, ale cărui componente sînt determinate cu ajutorul ecuațiilor booleene, construite pe baza unor proprietăți relevate de autorii citați. Astfel, se determină generatorii critici, necritici, familiile și nucleul unui clan. Rezultatele obținute sînt ilustrate prin exemple.

PRELIMINARII ; DEFINIȚII ; ENUNȚURI

Se consideră un graf $G = (V, R)$, definit de o relație R, binară, reflexivă și tranzitivă, pe mulțimea de vîrfuri

$$V = \{v_i\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Pentru orice $v_i, v_j \in V$, vom spune că v_i domină v_j, și scriem $v_i \to v_j$, dacă $v_i R v_j$. Grafului G i se poate asocia matricea $M = \| C_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, în care

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } v_i \to v_j \\ 0, \text{ dacă } v_i \not\to v_j. \end{cases}$$

Convenim ca, în absența unei condiții suplimentare, $C_{ii} = 0$.

Definiția 1. *Numim produs saturat al vîrfului* v_i, $v_i \in V$, *mulțimea* :

$$D_i = \{v_k \mid v_i R v_k \,;\; v_i, v_k \in V\}.$$

DEFINIȚIA 2. *Numim produs saturat al mulțimii de vîrfuri* $A = \{v_i\}$ $i \in I$, $A \subseteq V$, mulțimea

$$\hat{A} = \bigcap_{i \in I} D_i$$

în care D_i *este produsul saturat al vîrfului* v_i, *iar* I *este o mulțime finită de indici* [1].

DEFINIȚIA 3. *Spunem, în general, că* A *domină* B, *și scriem* $A \to B$, *dacă, pentru orice* $a \in A$ *și orice* $b \in B$ *avem* $a \to b$.

Proprietăți ale relației de dominare sînt date în [4].

DEFINIȚIA 4. *O mulțime* $A \subseteq V$, *astfel încît nu există nici un vîrf* $v_i \in V$, *cu proprietatea* $v_i \to A$, *se numește mulțime inițială.*

DEFINIȚIA 5. *O mulțime de vîrfuri* $C = \{v_i\}$ $i \in I$, $C \subseteq V$, *se numește clan, dacă există o mulțime nevidă de vîrfuri* $A = \{v_i\}$, $i \in I$, *astfel încît* $A \cup \hat{A} = C$. *În general, dacă* A *este o mulțime inițială, mulțimea* $C = A \cup \hat{A}$ *se numește categorie gramaticală* [1].

Conceptul de clan a fost extins, pentru mulțimi oarecare, de B. H. Mayoh [5].

Se poate defini un subgraf $G_1 = (C, R)$ pe mulțimea $C \subseteq V$, $C = \{v_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \leqslant m$.

Observație. Deși vîrfurile mulțimii C pot să nu aibă indici consecutivi, noi i-am considerat ca atare, pentru comoditatea scrierii. În felul acesta nu se restrînge generalitatea, întrucît pe tot parcursul lucrării vom lucra numai în mulțimea C.

Se asociază grafului G_1 matricea $M_1 = \| a_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, în care

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } v_i \to v_j \\ 0, & \text{dacă } v_i \nrightarrow v_j \end{cases}$$

pentru orice v_i, $v_j \in C$. La fel, în absența unei condiții care să indice contrariul, $a_{ii} = 0$.

DEFINIȚIA 6. *Orice mulțime* $A \subseteq C$, *astfel încît* $A \cup \hat{A} = C$, *se numește generator al clanului* C [1], [5].

DEFINIȚIA 7. *Un generator* B *al clanului* C, *care include sau este inclus de ceilalți generatori, se numește generator critic* [5].

DEFINIȚIA 8. *Un generator al clanului* C *care nu este critic se numește generator necritic* [5].

DEFINIȚIA 9. *Cel mai mic generator critic al clanului* C *se numește nucleul clanului.*

În [8] s-a demonstrat că nucleul unui clan C este unic.

DEFINIȚIA 10. *Numim familia* F_i *a vîrfului* $v_i \in V$, *mulțimea*

$$F_i = \{v_k \mid v_i R v_k \text{ și } v_k R v_i \,;\, v_k \in V\}.$$

DEFINIȚIA 11. *În orice clan* C, *o mulțime de vîrfuri este* F-*critică, dacă există o familie* $F \subset C$, *astfel încît* $A \to F \to C$, A *și* $\hat{F} \subset C$ [5].

PROPOZIȚIA 1. *Un generator* B *al clanului* C *este critic dacă și numai dacă* $B \cap \hat{B} = \varnothing$.

Demonstrație. În [8] s-a arătat că toți generatorii critici au proprietatea din enunț. Rămîne să arătăm că generatorii necritici nu o au. Tot în [8] s-a demonstrat că orice generator necritic A este o mulțime F-critică și $A \cap F \neq \emptyset$. Dar $A \rightarrow F$, deci $F \subseteq \hat{A}$. Atunci

$$A \cap \hat{A} \supseteq A \cap F \neq \emptyset$$

Astfel, propoziția 1 este complet demonstrată.

Vom asocia unei mulțimi $A = \{v_i\}$, $i \in I$, $A \subseteq C$, un vector boolean cu n componente (n fiind numărul de elemente din C) :

$$X = (x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Uneori vom nota vectorul asociat mulțimii A astfel : $X = (x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$; x_i corespunde lui $v_i \in C$ astfel :

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ dacă } v_i \in A \\ 0, \text{ dacă } v_i \notin A. \end{cases}$$

Se vede că $x_i \in B_2$ unde B_2 este o algebră booleană cu 2 elemente. Pe mulțimea $\{0,1\}$ definim functorii booleeni : $\bar{x}$, $x \cup y$, $x \cap y$, astfel :

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

x	y	$x \cup y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x	y	$x \cap y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Functorul ,,—'' se numește negație și se mai notează ,,N''.

Functorii ,,$\cup$'' și ,,$\cap$'' se numesc ,,suma logică'' (sau ,,disjuncție logică''), respectiv ,,produs logic'' (sau ,,conjuncție logică'').

DEFINIȚIA 12. *Numim expresie un șir finit de simboluri, definit prin recurență :*

a) 0 și 1 sînt expresii.

b) a, b, c, ..., x, y, z, ... sînt expresii.

c) Dacă E_1 și E_2 sînt expresii, atunci $f(E_1)$, $f(E_2)$, $g(E_1, E_2)$ sînt expresii, unde f, g sînt functori booleeni unari, respectiv binari.

Observație. Deși în lucrarea noastră, le corespund aceleași semne grafice, trebuie făcută deosebirea între ,,produs logic'' și ,,intersecție'', respectiv între ,,suma logică'' și ,,reuniune''. Reuniunea și intersecția se referă la mulțimi, în timp ce produsul și suma logică operează asupra expresiilor.

În lucrare vom nota mulțimile cu majuscule, cu sau fără indici (A, D_i, C), iar expresiile prin minuscule, cu indici superiori sau inferiori (x_i, x_i^p, z_i^q).

PROPOZIȚIA 2. *Pentru două mulțimi A, $B \subseteq C$, mulțimile*

$$M = A \cup B \text{ și } N = A \cap B$$

au vectorii asociați $X^M = (x_i^M)$, $X^N = (x_i^N)$ cu componentele :

$$x_i^M = x_i^A \cup x_i^B \text{ și } x_i^N = x_i^A \cap x_i^B$$

Propoziţia este evidentă, ţinînd seama de definiţia lui x_i şi a operatorilor „$\cup$" şi „$\cap$".

PROPOZIŢIA 3. *Vectorul asociat produsului saturat D_k al vîrfului $v_k \in C$ are componentele $x_i^k = a_{ki}$, unde a_{ki} este un element al matricei M_1, definite anterior.*

Demonstraţie. Avem schema :

$$(v_k \rightarrow v_i) \Rightarrow (v_i \in D_k)$$

$$(v_k \nrightarrow v_i) \Rightarrow (v_i \notin D_k)$$

(unde „$\Rightarrow$" este simbolul implicaţiei logice), sau

a_{ki}	x_i^k
1	1
0	0

Evident, $x_i^k = a_{ki}$.

PROPOZIŢIA 4. *Vectorul ataşat produsului saturat $\hat{A}$ al mulţimii $A \subseteq C$, are componentele :*

$$Y_i = \bigcap_{k}^{1,n} (a_{ki} \cup \bar{x}_k),$$

unde x_k sînt componentele vectorului $X = (x_k)$ asociat mulţimii $A = \{v_i\}_{i \in I}$.

Demonstraţie. Fie I mulţimea indicilor k pentru care avem $x_k = 1$. Evident, $\hat{A} = \bigcap_{k \in I} D_k$, unde D_k este produsul saturat al vîrfului v_k. Apoi, componentele vectorului $Y = (y_i)$ vor fi : $y_i = \bigcap_{k \in I} a_{ki}$. În expresia lui y_i putem face să apară toţi factorii a_{ki}, $k = 1, 2, \ldots, n$, cu condiţia ca ei să fie introduşi de funcţia booleană f astfel :

x_k	a_{ki}	$f(x_k, a_{ki})$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Se interpolează cu formula cunoscută :

$$f(x, y) = [f(1, 1) - f(0, 1) - f(1, 0) + f(0, 0)]\, xy +$$
$$+ [f(1, 0) - f(0, 0)]\, x + [f(0, 1) - f(0, 0)]\, y + f(0, 0)$$

şi se obţine polinomul boolean :

$$f = a_{ki}\, x_k + x_k + 1.$$

Asupra lui f se operează transformările definite astfel :

$$x + y = (x \cap \bar{y}) \cup (\bar{x} \cap y)$$

$$xy = x \cap y$$

și rezultă :

$$f = a_{ki} \cup \overline{x}_k.$$

În final se obține :

$$y_i = \bigcap_{k}^{1,n} f(x_k,\, a_{ki}) = \bigcap_{k}^{1,n} (a_{ki} \cup \overline{x}_k).$$

Propoziția 4 este demonstrată.

PROPOZIȚIA 5. *Vectorul atașat familiei* $F_k \subset C$, *a vîrfului* $v_k \in C$, *are componentele*

$$x_i^k = a_{ki} \cap a_{ik},$$

unde a_{ki} *și* a_{ik} *sînt elemente ale matricei* M.

Demonstrație. Avem schema :

$$(v_k \to v_i) \;\&\; (v_i \to v_k) \Rightarrow (v_i \in F_k)$$

$$(v_k \to v_i) \;\&\; (v_i \nrightarrow v_k) \Rightarrow (v_i \notin F_k)$$

$$(v_k \nrightarrow v_i) \;\&\; (v_i \to v_k) \Rightarrow (v_i \notin F_k)$$

$$(v_k \nrightarrow v_i) \;\&\; (v_i \nrightarrow V_k) \Rightarrow (v_i \notin F_k)$$

sau :

a_{ki}	a_{ik}	x_i^k
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Se observă că $x_i^k = a_{ki} \cap a_{ik}$.

Exemplul 1. Fie un graf G, definit pe mulțimea $C = \{v_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$ și matricea asociată :

$$M = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

a) Să se determine produsele saturate D_k ale vîrfurilor.

Pentru D_1 avem $X^1 = (011100)$, deci $D_1 = v_2, v_3, v_4$. La fel, avem $X^2 = (101011)$, $X^3 = (010111)$, $X^4 = (000010)$, $X^5 = (111101)$, $X^6 = (001100)$. Deci : $D_2 = \{v_1\, v_3, v_5, v_6\}$, $D_3 = \{v_2, v_4, v_{55}, v_6\}$, $D_4 = \{v_5\}$, $D_5 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$, $D_6 = \{v_3, v_4\}$.

b) Fie mulţimea $A = \{v_3, v_5, v_6\}$, cu vectorul asociat $X = (001011)$. Să se determine mulţimea $\hat{A}$. Vectorul ei asociat este :

$$Y = (\bigcap_{k}^{1,6} (a_{ki} \cup \bar{x}_k)).$$

Înlocuind valorile date, găsim : $Y = (000100)$. Deci $\hat{A} = \{v_4\}$. Obţinem acelaşi reultat dacă folosim formula : $\hat{A} = \bigcap_i D_i$:

$$\hat{A} = D_3 \cap D_5 \cap D_6 = \{v_4\}.$$

c) Să determinăm familiile F_k ale vîrfurilor v_k, $k = 1, \ldots, 6$. Ştiind că $X^k = (a_{ki} \bigcap a_{ik})$, obţinem : $X^1 = (010000)$, $X^2 = (101010)$, $X^3 = (010011)$, $X^4 = (000010)$, $X^5 = (011100)$, $X^6 = (001000)$. Deci : $F_1 = \{v_2\}$, $F_2 = \{v_1, v_3, v_6\}$, $F_3 = \{v_2, v_5, v_6\}$, $F_4 = \{v_5\}$, $F_5 = \{v_2, v_3, v_4\}$, $F_6 = \{v_3\}$.

DETERMINAREA GENERATORILOR CLANULUI *C*

PROPOZIŢIA 6. *Vectorii $X^j = (x_i^j)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, asociaţi generatorilor $A_j \subseteq C$ sînt soluţiile ecuaţiei booleene* :

$$\bigcap_{i,k}^{1,n} (a_{ki} \cup \bar{x}_k \cup x_i) = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Demonstraţie. Prin definiţie $A \cup \hat{A} = C$. Dacă asociem mulţimilor A, $\hat{A}$, C, respectiv vectorii $X = (x_i)$, $Y = (y_i)$, $Z = (z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, avem, pentru relaţia $A \cup \hat{A} = C$, sistemul echivalent de relaţii :

$$\sum x_i \cup y_i = z_i.$$

Rezultă $z_i = 1$, deoarece $C = C$. Deci : $\sum x_i \cup y_i = 1$.

Aceste relaţii pot fi strînse într-o singură relaţie cu ajutorul functorului logic „$\bigcap$", astfel :

$$\bigcap_{i}^{1,n} (x_i \cup y_i) = 1.$$

Deoarece :

$$y_i = \bigcap_{k}^{1,n} (a_{ki} \cup \bar{x}_k)$$

rezultă că :

$$\bigcap_{i,k}^{1,n} (x_i \cup \bigcap_{k}^{1,n} (a_{ki} \cup \bar{x}_k) = 1$$

sau, după simplificare :

$$\bigcap_{i,k}^{1,n} (a_{ki} \cup \bar{x}_k \cup x_i) = 1.$$

Propoziția 6 este astfel demonstrată. Ecuația (1) poate fi înlocuită prin duala ei :

$$(1') \qquad \bigcup_{i,k}^{1,n} (\bar{a}_{ki} \cap x_k \cap \bar{x}_i) = 0$$

DETERMINAREA GENERATORILOR CRITICI AI CLANULUI *C*

Mai întîi vom demonstra :

PROPOZIȚIA 7. *Vectorii* $X^j = (x_i^j)$, $j = 1, 2, \dots, q$, *atașați mulțimilor* $M_j \subseteq C$, *cu proprietatea* $M_j \cap \hat{M}_j = \emptyset$, *sînt soluțiile ecuației booleene* :

$$(2) \qquad \bigcup_{i,k}^{1,n} (a_{ki} \cap x_k \cap x_i) = 0$$

Demonstrație. Fie vectorul $X = (x_i)$ atașat mulțimii M. În baza relației $M \cap \hat{M} = \emptyset$, două vîrfuri v_i, $v_k \in C$ nu pot fi simultan cuprinse în M dacă $v_k \to v_i$ sau $v_i \to v_k$. Aceasta înseamnă că nu putem avea simultan :

$$\begin{cases} x_i = 1 \\ x_k = 1 \\ a_{ki} = 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x_i = 1 \\ x_k = 1 \\ a_{ik} = 1 \end{cases}$$

În cazul $a_{ki} = 0$ sau $a_{ik} = 0$ nu se impune nici o restricție.

Condiția $M \cap \hat{M} = \emptyset$ se poate scrie pentru i și k fixați :

$$a_{ki} \cap x_i \cap x_k = 0 ; \quad a_{ik} \cap x_i \cap x_k = 0 ; \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Condițiile, generalizate pentru orice i și k, sînt unite cu ajutorul functorului „$\cup$” într-o singură ecuație booleeană :

$$\bigcup_{k,i}^{1,n} (a_{ki} \cap x_k \cap x_i) = 0.$$

Deci s-a demonstrat astfel propoziția 7.

PROPOZIȚIA 8. *Vectorii* $X^j = (x_i^j)$, *asociați generatorilor critici* $B_j \subseteq C$ ($j = 1, 2, \dots, r$) *sînt soluțiile ecuației booleene* :

$$(3) \qquad \bigcup_{k,i}^{1,n} ((a_{ki} \cap x_k \cap x_i) \cup (\bar{a}_{ki} \cap x_k \cap \bar{x}_i)) = 0.$$

Demonstrație. O mulțime $B \subset C$ este generator critic al clanului C, dacă satisface simultan condițiile :

$$B \cup \hat{B} = C,$$

$$B \cap \hat{B} = \emptyset.$$

Dacă asociem mulțimii B un vector $X = (x_i)$, acesta trebuie să fie simultan soluție pentru ecuațiile booleene (1′) și (2), sau a ecuației : $(1')\bigcup(2) = 0$ adică :

$$\bigcup_{k,i}^{1,n} ((\overline{a}_{ki}\cap x_k\cap \overline{x}_i)\bigcup(a_{ki}\cap x_k\cap x_i)) = 0.$$

Propoziția 8 s-a demonstrat.

Observație. Ecuația (1′) admite soluțiile banale $X = (1)$ și $X = (0)$. Prima soluție are sens logic, întrucît $C\bigcup\hat{C} = C$, pe cîtă vreme $X = (0)$ nu are sens deoarece mulțimea vidă nu poate fi generator al clanului C. Dacă se obțin numai aceste soluții banale, unicul generator al clanului C este însuși clanul C.

Ecuația (3) admite soluția banală $X = (0)$ care nu are sens din motivul arătat mai sus. Cînd ecuația (3) admite numai soluția $X = (0)$, nu există generatori critici pentru clanul C. Fie soluțiile $X^j = (x_i^j)$, diferite de $X = (0)$, ale ecuației (3), $j = 1, 2, \ldots, r$. Evident, mulțimea nucleu va fi :

$$N = \bigcap_{j}^{1,r} B_j$$

unde B_j este un generator critic. Vectorul asociat lui N va fi

$$\chi = (\varphi_i),\ \text{unde}\ \ \varphi_i = \bigcap_{j}^{1,r} x_i^j.$$

Cînd avem pentru (3) singura soluție $X = (0)$, nu există generatori critici, deci nici nucleu.

Exemplul 2. Fie graful G cu matricea atașată

$$M = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$$

definit pe mulțimea de vîrfuri $C = \{v_i\}$, $i = 1, \ldots 6$.

Ne propunem să găsim generatorii critici ai clanului C. Folosind ecuația (3), obținem în cazul nostru :

$$x_1x_2\cup x_1x_3\cup x_1x_4\cup x_1\overline{x}_5\cup x_1\overline{x}_6\cup x_2x_1\cup x_2x_3\cup x_2\overline{x}_4\cup x_2x_5\cup x_2x_6\cup x_3\overline{x}_1\cup$$
$$\cup\, x_3x_2\cup x_3x_4\cup x_3x_5\cup x_3x_6\cup x_4\overline{x}_1\cup x_4\overline{x}_2\cup x_4\overline{x}_3\cup x_4x_5\cup x_4\overline{x}_6\cup x_5x_1\cup x_5x_2\cup$$
$$\cup\, x_5x_3\cup x_5x_4\cup x_5x_6\cup x_6\overline{x}_1\cup x_6\overline{x}_2\cup x_6x_3\cup x_6x_4\cup x_6\overline{x}_5 = 0$$

În loc de $x_i\cap y_i$ am notat x_iy_i. Ecuația devine, după simplificare :

$$x_1\cup x_2\cup x_3\cup x_4\cup x_6 = 0$$

cu soluțiile $X = (000010)$ și $X = (0)$. Singurul generator critic, care este și nucleul clanului C, este $B = \{v_5\}$. Într-adevăr, $\hat{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$, $B \cap \hat{B} = \varnothing$ și $B \cup \hat{B} = C$.

Primită la redacție la 6 mai 1967.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Marcus, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire.* I. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **7**, *1*, 91—107 (1962).
2. S. Marcus, *Sur un modéle logique de la catégorie grammaticale élémentaire.* II. Zeitschift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, **8**, *4*, 139—145 (1962).
3. C. МАРЗУС *Об одѐой логической моделизлементарной грамматицеской категории*, III. Rev. math. pures et appl., **7**, *4*, 683—691 (1962).
4. S. Marcus, *Lingvistica matematică.* Ed. didactică și pedagogică, București, 1966.
5. B. H. Mayoh, *Simple structures defined on a transitive and reflexive graph.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XI**, *1* (1966).
6. Gr. C. Moisil, *Asupra inelelor de caracteristică 2 sau 3 și aplicațiile lor.* Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest, **XII**, *1* și *2* (1941).
7. Gr. C Moisil, *Teoria algebrică a schemelor cu contacte și relee.* Ed. tehnică, București, 1965.
8. C. Raischi, *Asupra unui model algebric al categoriilor gramaticale.* St. cerc. mat., **19**, *4* (1967).
9. S. Rudeanu, *Axiomele laticelor și algebrelor booleene.* Ed. Academiei R.P.R., București, 1963,
10. S. Rudeanu, *Asupra rezolvării ecuațiilor booleene prin metoda lui Lowenhein.* St. cerc. mat., *2* (1962).

ASUPRA UNOR PERECHI DE SPAŢII RIEMANN

DE

N. N. TEODORESCU

Se studiază perechile de spaţii Riemann $\overline{V}_n$ şi V_n cu tensor de curbură ireductibil pentru care avem $\overline{R}^i_{jkl} = \rho\, R^i_{jkl} + \theta\, (\delta^i_l\, a_{jk} - \delta^i_k\, a_{jl})$. În cazul $\rho = 1$, determinarea acestor perechi de spaţii depinde de intregrarea unui sistem de ecuaţii liniare cu derivate parţiale de ordinul II. În cazul $\rho \neq 1$ se arată că $\overline{V}_n$ şi V_n sînt conform euclidiene şi se dă forma canonică a metricilor.

În această lucrare vom studia perechile de spaţii Riemann $\overline{V}_n$ şi V_n, avînd metricile $d\overline{s}^2 = \overline{a}_{ij}\, dx^i\, dx^j$ şi $ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j$, pentru care tensorii de curbură sînt legaţi prin relaţia :

$$\overline{R}^i_{jkl} = \rho\, R^i_{jkl} + \theta\, (\delta^i_l\, a_{jk} - \delta^i_k\, a_{jl}), \tag{1}$$

presupunînd că matricile $X_{kl} = \| R^i_{jkl} \|$ formează un sistem ireductibil de transformări liniare.

În cazul cînd cele două spaţii $\overline{V}_n$ şi V_n au acelaşi tensor de curbură, adică $\overline{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl}$, C. Teleman arată că $\overline{V}_n$ şi V_n au şi aceeaşi metrică, abstracţie făcînd de un factor constant [1].

Anterior, [3], [4], noi am considerat spaţiile avînd tensorii de curbură proporţionali, adică $\overline{R}^i_{jkl} = \rho\, R^i_{jkl}$, arătînd că, în general, $\rho = 1$, deci conform teoremei lui Teleman, V_n şi $\overline{V}_n$ au şi aceeaşi metrică abstracţie făcînd de un factor constant. Excepţie fac unele spaţii conform euclidiene pentru care tensorul lui Ricci R_{jk} verifică ecuaţia :

$$R_{jk} - \frac{1}{2}(R + \Lambda)\, a_{jk} = \mu \frac{\partial \sigma}{\partial x^j} \frac{\partial \sigma}{\partial x^k} \tag{2}$$

şi spaţiile avînd metricile :

$$\begin{gathered} ds^2 = e^{2\psi}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^n)^2] \\ d\overline{s}^2 = \frac{e^{2\psi}\, [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^n)^2]}{[1 + e^{\psi}\, \{A\, [(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2] + B\, (x^1 + \ldots + x^n) + C\}])^2} \end{gathered} \tag{2'}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 9, P. 1367–1376 BUCUREŞTI, 1967

unde a, A, B, C sînt constante, iar ψ este o soluţie oarecare a ecuaţiei :

$$(3)\qquad \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial U}{\partial x^n}\right)^2=\alpha,$$

unde am notat :

$$U=\lg\frac{\sqrt{1+F\,\mathrm{e}\psi}-1}{\sqrt{1+F\,\mathrm{e}\psi}+1}$$

în care

$$F=A\,[(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2]+B\,(x^1+\ldots+x^n)+C$$

$$\alpha=\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial x^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial F}{\partial x^n}\right)^2}{F^2}-\frac{4A}{F}.$$

În ceea ce priveşte perechile de spaţii care verifică (1), vom arăta că obţinem rezultate analoge formulelor (2) şi (2′).

★

Deoarece matricile $X_{kl}=\|\overline{R}^i_{jkl}\|$ formează un sistem ireductibil de transformări liniare, atunci sistemul de ecuaţii în necunoscutele x_{ij},

$$x_{si}\,\overline{R}^s_{jkl}+x_{sj}\,\overline{R}^s_{ikl}=0$$

are soluţie unică abstracţie făcînd de un factor constant.

Ţinînd seama de (1), rezultă că acest sistem este verificat atît de $\overline{a}_{ij}$, cît şi de a_{ij}. Rezultă deci că :

$$(3')\qquad \overline{a}_{ij}=\mathrm{e}^{2\sigma}\,a_{ij},$$

unde σ este o funcţie de variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Punînd în (1) $i=k$ şi sumînd, se obţine :

$$(3'')\qquad \overline{R}_{jl}=\rho\,R_{jl}-(n-1)\,\theta\,a_{jl}$$

Din (3′) şi (3″) obţinem :

$$(3''')\qquad \begin{aligned}\overline{a}_{jk}\,\overline{R}^i_l&=\rho\,a_{jk}\,R^i_l-(n-1)\,\delta^i_l\,\theta\,a_{jk}\\ \overline{a}_{jk}\,\overline{R}&=\rho\,a_{jk}\,R-n\,(n-1)\,\theta\,a_{jk}.\end{aligned}$$

Considerînd tensorul conform al lui Weyl [7] :

$$W^i_{jkl}=R^i_{jkl}-\frac{1}{n-2}(\delta^i_k\,R_{jl}-\delta^i_l\,R_{jk}-a_{jk}\,R^i_l+a_{jl}\,R^i_k)+$$
$$+\frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^i_k\,a_{jl}-\delta^i_l\,a_{jk}),$$

relaţiile (1), (3″), (3‴) ne arată că :

$$(4)\qquad \overline{W}^i_{jkl}=\rho\,W^i_{jkl}.$$

Pe de altă parte, formula (3′) ne spune că spaţiile $\overline{V}_n$ şi V_n sînt în corespondenţă conformă, deci :

$$\overline{W}^i_{jkl} = W^i_{jkl}. \tag{4′}$$

Relaţiile (4) şi (4′) ne arată că :

$$(\rho - 1)\, W^i_{jkl} = 0$$

de unde rezultă :

$$\rho = 1$$

sau

$$\overline{W}^i_{jkl} = 0 \text{ şi } W^i_{jkl} = 0.$$

★

Să considerăm prima dată cazul $\rho = 1$. Relaţia (1) ne dă :

$$\overline{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl} + \theta\,(\delta^i_l\, a_{jk} - \delta^i_k\, a_{jl}). \tag{5}$$

Din (3′) se obţine :

$$\overline{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl} + \delta^i_l\, P_{jk} - \delta^i_k\, P_{jl} + a_{jk}\, P^i_l - a_{jl}\, P^i_k, \tag{5′}$$

unde am notat :

$$P_{jk} = \sigma_{j;k} - \sigma_j\,\sigma_k + \frac{1}{2}\, a_{jk}\,(\sigma_m\,\sigma^m)$$

$$\sigma_j = \frac{\partial\sigma}{\partial x^j} \tag{5″}$$

$$\sigma_{j;k} = \frac{\partial\sigma^j}{\partial x^k} - \left|\begin{smallmatrix} s \\ jk \end{smallmatrix}\right| \sigma_s.$$

Din (5), (5′) şi (5″) rezultă că spaţiile $\overline{V}_n$ şi V_n sînt determinate de sistemul :

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^j\,\partial x^k} - \left|\begin{smallmatrix} s \\ jk \end{smallmatrix}\right| \frac{\partial\sigma}{\partial x^s} - \frac{\partial\sigma}{\partial x^j}\,\frac{\partial\sigma}{\partial x^k} = \lambda\, a_{jk}. \tag{6}$$

Punînd $V = -\,e^{-\sigma}$, sistemul (6) se poate pune sub forma :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^j\,\partial x^k} - \left|\begin{smallmatrix} s \\ jk \end{smallmatrix}\right| \frac{\partial V}{\partial x^s} + \lambda\, V\, a_{jk} = 0. \tag{7}$$

Rezultă că spaţiile $\overline{V}_n$ şi V_n sînt determinate de sistemul liniar dat de ecuaţiile (7), unde λ şi tensorul metric a_{jk} sînt astfel aleşi încît sistemul să fie complet integrabil.

Un exemplu de spaţii de forma (5) este dat de spaţiile de metrici :

$$(8)\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{e}^{2f(a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n)} [(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2] \\ \mathrm{d}\bar{s}^2 &= \frac{\mathrm{e}^{2f(a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n)} [(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2]}{\left[\int_{a_0}^{a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n} \mathrm{e}^{2f(t)}\, \mathrm{d}t\right]^2} \end{aligned}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt constante.

Spaţiile de forma (5) au proprietatea următoare :

$$(8')\qquad \overline{K}^i_{jkl} = K^i_{jkl},$$

unde K^i_{jkl} este tensorul proiectiv al lui Weyl :

$$K^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \delta^i_k \frac{R_{jl}}{n-1} + \delta^i_l \frac{R_{jk}}{n-1}$$

Printre spaţiile care verifică (8′) sînt spaţiile în corespondenţă geodezică, adică spaţiile pentru care :

$$\overline{\left|{}^{\,i}_{jk}\right|} = \left|{}^{\,i}_{jk}\right| + \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j .$$

Se poate arăta uşor că spaţiile de metrici (8) nu sînt în corespondenţă geodezică, deci nu orice spaţii care au acelaşi tensor proiectiv sînt în corespondenţă geodezică.

★

Să considerăm acum cazul cînd $\overline{W}^i_{jkl} = 0$ şi $W^i_{jkl} = 0$. În acest caz o teoremă a lui Schouten [7] ne spune că spaţiile $\overline{V}_n$ şi V_n sînt conform euclidiene, dacă $n > 3$.

Ţinînd seama de (3′) rezultă că spaţiile V_n şi $\overline{V}_n$ pot fi aduse la forma :

$$(8'')\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{e}^{2\psi} [(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2] \\ \mathrm{d}\bar{s}^2 &= \mathrm{e}^{2\bar{\psi}} [(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2]. \end{aligned}$$

Tensorul de curbură se scrie :

$$(9)\qquad R^i_{jkl} = \delta^i_l P_{jk} - \delta^i_k P_{jl} + \delta_{jk} P_{il} - \delta_{jl} P_{ik},$$

unde am notat :

$$(9')\qquad P_{jk} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \delta_{jk} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^n}\right)^2\right].$$

Din (9) obţinem :

$$(9'')\qquad R_{jl} = (2-n) P_{jl} - \delta_{jl} \left(\Delta\psi + \frac{n-2}{2} \Psi^2\right),$$

unde am notat :

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial(x^2)^2} + \ldots + \frac{\partial^2\psi}{\partial(x^n)^2}$$

$$\Psi^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^n}\right)^2.$$

Din (1), rezultă punînd $i = k$ şi sumînd :

$$\overline{R}_{jl} = \rho\ R_{jl} - (n-1)\ \theta\ a_{jl}. \tag{9'''}$$

Ținînd seama de (9''), (9'''), precum şi de faptul că $a_{jl} = e^{2\psi}\ \delta_{jl}$, obținem :

$$\begin{aligned}(2-n)\ (\overline{P}_{jl} - \rho\ P_{jl}) = \delta_{jl}\Big[\Delta\overline{\psi} +\\ + \frac{n-2}{2}\ \overline{\Psi}^2 - \rho\left(\Delta\psi + \frac{n-2}{2}\ \Psi^2\right) - (n-1)\ \theta\ e^{2\psi}\Big].\end{aligned} \tag{9^{IV}}$$

De aici ținînd seama de (9) şi de (1) obținem :

$$(\delta^i_l\ \delta_{jk} - \delta^i_k\ \delta_{jl})\left[\Delta\overline{\psi} + \frac{n-2}{2}\ \overline{\Psi}^2 - \rho\left(\Delta\psi + \frac{n-2}{2}\ \Psi^2\right) - \frac{n}{2}\ \theta\ e^{2\psi}\right] = 0.$$

Punînd în această relație $i = l$ şi sumînd, apoi punînd $j = k$, obținem :

$$\Delta\overline{\psi} + \frac{n-2}{2}\ \overline{\Psi}^2 = \rho\left(\Delta\psi + \frac{n-2}{2}\ \Psi^2\right) + \frac{n\theta}{2}\ e^{2\psi}. \tag{10)'}$$

Din relațiile (9'), (9^IV) şi (10), obținem :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^j}\ \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\ \delta_{jk}\ \overline{\Psi}^2 =\\ = \rho\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\ \frac{\partial\psi}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\ \delta_{jk}\ \Psi^2\right] + \frac{1}{2}\ \delta_{jk}\ \theta\ e^{2\psi}.\end{aligned} \tag{11}$$

Ținînd seama de (9), (9') şi (9^IV) rezultă că ecuațiile (10) şi (11) reprezintă condițiile necesare şi suficiente ca spațiile de metrici (8'') să fie legate prin relația (1), unde $\rho \neq 1$.

Eliminînd θ între ecuațiile (10) şi (11), obținem :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^j}\ \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^k} - \frac{\delta_{jk}}{n}\ (\Delta\overline{\psi} - \overline{\Psi}^2) =\\ = \rho\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\ \frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \frac{\delta_{jk}}{n}\ (\Delta\psi - \Psi^2)\right].\end{aligned} \tag{12}$$

Dacă nu impunem nici o condiţie asupra funcţiilor ρ şi θ, atunci ecuaţiile (12) reprezintă condiţia necesară şi suficientă ca spaţiile date de (8″) să fie de forma (1) cu $\rho \neq 1$.

★

Notînd cu T^i_{jk} diferenţa simbolilor lui Cristoffel $\overline{\left| {i \atop jk} \right|}$ şi $\left| {i \atop jk} \right|$, avem :

$$\overline{\left| {i \atop jk} \right|} = \left| {i \atop jk} \right| + T^i_{jk}. \tag{13}$$

În relaţia (1) luînd derivata covariantă în raport cu metrica lui $\overline{V}_n$ respectiv V_n obţinem :

$$\overline{R}^i_{jkl;\overline{r}} - = \rho\, R^i_{jkl;r} + \rho_r\, R^i_{jkl} + \rho\, R^s_{jkl}\, T^i_{sr} - \rho\, R^i_{skl}\, T^s_{jr} - \rho\, R^i_{jsl}\, T^s_{kr} - \rho\, R^i_{jks}\, T^s_{lr} +$$
$$+ \theta_r\, (\delta^i_l\, a_{jk} - \delta^i_k\, a_{jl}) + \theta\, [\delta^i_k\, (a_{sl}\, T^s_{jr} + a_{sj}\, T^s_{lr}) - \delta^i_l\, (a_{sk}\, T^s_{jr} + a_{sj}\, T^s_{kr})].$$

Prin permutarea indicilor k, l, r vom obţine alte două relaţii analoge. Adunînd aceste relaţii şi ţinînd seama de identităţile lui Bianchi :

$$R^i_{jkl;r} + R^i_{jlr;k} + R^i_{jrk;l} = 0$$

şi de simetria strîmbă în ultimii doi indici a tensorului R^i_{jkl}, precum şi de faptul că din (3′) şi (13) avem :

$$T^i_{jk} = \delta^i_j\, \sigma_k + \delta^i_k\, \sigma_j - a_{jk}\, \sigma^i,$$

obţinem :

$$\rho_r\, R^i_{jkl} + \rho_k\, R^i_{jlr} + \rho_l\, R^i_{jrk} + \rho\, \delta^i_r\, R^s_{jkl}\, \sigma_s + \rho\, \delta^i_k\, R^s_{jlr}\, \sigma_s + \rho\, \delta^i_l\, R^s_{jrk}\, \sigma_s + \rho a_{jr}\, R^i_{skl}\, \sigma^s +$$
$$+ \rho\, a_{jk}\, R^i_{slr}\, \sigma^s + \rho\, a_{jl}\, R^i_{srk}\, \sigma^s + \delta^i_l\, [a_{jk}\, (\theta_r - 2\,\theta\sigma_r) - a_{jr}\, (\theta_k - 2\,\theta\sigma_k)] +$$
$$+ \delta^i_r\, [a_{jl}\, (\theta_k - 2\,\theta\sigma_k) - a_{jk}\, (\theta_l - 2\,\theta\sigma_l)] + \delta^i_k\, [a_{jr}\, (\theta_l - 2\,\theta\sigma_l) - a_{jl}\, (\theta_r - 2\,\theta\sigma_r)] = 0.$$

Punînd $i = r$ şi sumînd, obţinem :

$$\rho_s\, R^s_{jkl} + R_{jk}\, \rho_l - R_{jl}\, \rho_k + (n-3)\, \rho\, R^s_{jkl}\, \sigma_s + \rho\, a_{jl}\, R^s_k\, \sigma_s -$$
$$- \rho\, a_{jk}\, R^s_l\, \sigma_s + (n-2)\, [a_{jl}\, (\theta_k - 2\theta\sigma_k) - a_{jk}\, (\theta_l - 2\,\theta\sigma_l)] = 0. \tag{14}$$

Înmulţind (14) cu a^{jl} şi sumînd, obţinem :

$$2\rho_s\, R^s_k - R\, \rho_k + 2\,(n-2)\, \rho\, R^s_k\, \sigma_s + (n-1)\,(n-2)\,(\theta_k - 2\theta\sigma_k) = 0. \tag{14′}$$

Înlocuind $\theta_k - 2\theta\, \sigma_k$ din (14′) în (14), şi ţinînd seama că V_n fiind conform euclidian avem :

$$R^i_{jkl} = \frac{1}{n-2}\, (\delta^i_k\, R_{jl} - \delta^i_l\, R_{jk} - a_{jk}\, R^i_l + a_{jl}\, R^i_k) -$$
$$- \frac{R}{(n-1)\,(n-2)}\, (\delta^i_k\, a_{jl} - \delta^i_l\, a_{jk})$$

obținem relația :

$$\begin{aligned} &R_{jk}(\rho_l - \rho\sigma_l) - R_{jl}(\rho_k - \rho\sigma_k) + \frac{1}{n-1}[a_{jk} R^s_l(\rho_s - \rho\sigma_s) - \\ (15)\quad &- a_{jl} R^s_k(\rho_s - \rho\sigma_s)] - \frac{R}{n-1}[a_{jk}(\rho_l - \rho\sigma_l) - a_{jl}(\rho_k - \rho\sigma_k)] = 0. \end{aligned}$$

Să considerăm acum cazul cînd :

$$\rho_l - \rho\sigma_l \neq 0.$$

Înmulțind (15) cu $\rho^l - \rho\sigma^l$ și sumînd, obținem :

$$\begin{aligned} &R_{jk}(\rho_m - \rho\sigma_m)(\rho^m - \rho\sigma^m) - R^s_j(\rho_s - \rho\sigma_s)(\rho_k - \rho\sigma_k) - \\ (15')\quad &- \frac{1}{n-1} R^s_k(\rho_s - \rho\sigma_s)(\rho_j - \rho\sigma_j) + \frac{R}{n-1}(\rho_j - \rho\sigma_j)(\rho_k - \rho\sigma_k) + \\ &+ \frac{a_{jk}}{n-1}[R^{sm}(\rho_s - \rho\sigma_s)(\rho_m - \rho\sigma_m) - R(\rho_m - \rho\sigma_m)(\rho^m - \rho\sigma^m)] = 0 \end{aligned}$$

Înmulțind (15′) cu $\rho^j - \rho\sigma^j$ și sumînd, obținem :

$$(15'')\qquad R^s_k(\rho_s - \rho\sigma_s) = \frac{R^{sm}(\rho_s - \rho\sigma_s)(\rho_m - \rho\sigma_m)}{(\rho_m - \rho\sigma_m)(\rho^m - \rho\sigma^m)}(\rho_k - \rho\sigma_k).$$

Înlocuind (15″) în (15′) rezultă :

$$\begin{aligned} &R_{jk} + \frac{R^{sm}(\rho_s - \rho\sigma_s)(\rho_m - \rho\sigma_m) - R(\rho_m - \rho\sigma_m)(\rho^m - \rho\sigma^m)}{(n-1)(\rho_m - \rho\sigma_m)(\rho^m - \rho\sigma^m)} a_{jk} = \\ &= \frac{nR^{sm}(\rho_s - \rho\sigma_s)(\rho_m - \rho\sigma_m) - R(\rho_m - \rho\sigma_m)(\rho^m - \rho\sigma^m)}{(n-1)[(\rho_m - \rho\sigma_m)(\rho^m - \rho\sigma^m)]^2}(\rho_j - \rho\sigma_j)(\rho_k - \rho\sigma_k). \end{aligned}$$

Notînd :

$$\nu = \lg \rho - \sigma$$

$$\Lambda = \frac{(3-n)R(\rho_m - \rho\sigma_m)(\rho^m - \rho\sigma^m) - 2R^{sm}(\rho_s - \rho\sigma_s)(\rho_m - \rho\sigma_m)}{(n-1)(\rho_m - \rho\sigma_m)(\rho^m - \rho\sigma^m)}$$

$$\mu = \frac{nR^{sm}(\rho_s - \rho\sigma_s)(\rho_m - \rho\sigma_m) - R(\rho_m - \rho\sigma_m)(\rho^m - \rho\sigma^m)}{(n-1)\rho^2[(\rho_m - \rho\sigma_m)(\rho^m - \rho\sigma^m)]^2}$$

rezultă că, în cazul $\rho_l - \rho\sigma_l \neq 0$, spațiile date de (1) verifică relația :

$$(16)\qquad R_{jk} - \frac{1}{2}(R + \Lambda)a_{jk} = \mu \frac{\partial \nu}{\partial x^j}\frac{\partial \nu}{\partial x^k}.$$

Rămîne să arătăm că există perechi de spații care să verifice ecuațiile (16) cu $\rho_k - \rho\sigma_k \neq 0$, adică cu $\rho \neq \frac{1}{a}e^\sigma$ (a = constant).

Într-adevăr, să arătăm că spațiile :

$$(16') \quad \begin{aligned} ds^2 &= e^{2f[(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2]}\,[(dx^1)^2+(dx^2)^2+\ldots+(dx^n)^2] \\ d\bar{s}^2 &= e^{2F[(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2]}\,[(dx^1)^2+(dx^2)^2+\ldots+(dx^n)^2], \end{aligned}$$

unde f și F sînt funcții arbitrare astfel ca,

$$\frac{F''-F'^2}{f''-f'^2} \neq \frac{1}{a}\,e^{F-f}$$

verifică ecuațiile (16).

Punînd :

$$\rho = \frac{F''-F'^2}{f''-f'^2}$$

$$\bar{\psi} = F[(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2]$$

$$\psi = f[(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2]$$

se obține :

$$\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^j}\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^k} - \frac{\delta_{jk}}{n}(\Delta\bar{\psi} - \bar{\Psi}'^2) = \rho\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^j\,\partial x^k} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \frac{\delta_{jk}}{n}(\Delta\psi - \Psi'^2)\right]$$

ceea ce conform cu (12) ne arată că spațiile (16′) verifică ecuațiile (16).

★

Să considerăm acum cazul cînd avem :

$$(17) \qquad \rho_l - \rho\sigma_l = 0, \quad \rho \neq 1.$$

Vom arăta în acest caz că unul din spațiile conform euclidiene (8″) poate fi ales arbitrar, dacă nu impunem nici o condiție funcțiilor ρ sau θ.

Într-adevăr, din (17) rezultă :

$$\rho = \frac{1}{a}\,e^{\sigma}$$

adică :

$$(17') \qquad \rho = \frac{1}{a}\,e^{\bar{\psi}-\psi}.$$

Ținînd seama de (17′), ecuațiile (12) se scriu :

$$(18) \quad \begin{aligned} &a\,e^{-\bar{\psi}}\left[\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^j}\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^k} - \frac{\delta_{jk}}{n}(\Delta\bar{\psi} - \bar{\Psi}'^2)\right] = \\ &= e^{-\psi}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \frac{\delta_{jk}}{n}(\Delta\psi - \Psi'^2)\right] \end{aligned}$$

de unde rezultă :

$$(18') \quad \frac{\partial^2}{\partial x^j\,\partial x^k}\left(e^{-\psi} - a\,e^{-\bar\psi}\right) = \frac{\delta_{jk}}{n}\left[a\,e^{-\bar\psi}\left(\Delta\bar\psi - \bar\Psi^2\right) - e^{-\psi}\left(\Delta\psi - \Psi^2\right)\right].$$

Derivînd (18′) în raport cu x^l, schimbînd apoi k cu l și scăzînd, obținem :

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left[a e^{-\bar\psi}\left(\Delta\bar\psi - \bar\Psi^2\right) - e^{-\psi}\left(\Delta\psi - \Psi^2\right)\right]\delta_{jk} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left[a\,e^{-\bar\psi}\left(\Delta\bar\psi - \bar\Psi^2\right) - e^{-\psi}\left(\Delta\psi - \Psi^2\right)\right]\delta_{jl}$$

de unde rezultă :

$$(19) \quad a\,e^{-\bar\psi}\left(\Delta\bar\psi - \bar\Psi^2\right) = e^{-\psi}\left(\Delta\psi - \Psi^2\right) - 2An,$$

unde A este o constantă.

Înlocuind (19) în (18′), rezultă :

$$(19') \quad \frac{\partial^2}{\partial x^j\,\partial x^k}\left(e^{-\psi} - a\,e^{-\bar\psi}\right) = -\,2A\,\delta_{jk}$$

de unde

$$(20) \quad \begin{aligned} a\,e^{-\bar\psi} &= e^{-\psi} + A\left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2\right] + \\ &+ B\left(x^1 + x^2 + \ldots + x^n\right) + C, \end{aligned}$$

unde B, C sînt constante.

Observăm că dacă nu facem nici o ipoteză asupra funcțiilor ρ sau θ, (folosind (10) sau (17′)) putem alege ψ arbitrar, iar $\bar\psi$ este dat de (20).

Într-adevăr, derivînd de două ori relația (20) avem :

$$a e^{-\bar\psi}\left(\frac{\partial^2\bar\psi}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial\bar\psi}{\partial x^j}\,\frac{\partial\bar\psi}{\partial x^k}\right) = e^{-\psi}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\right) - 2A\,\delta_{jk}.$$

Punînd $j = k$ și sumînd rezultă că ψ și $\bar\psi$ verifică ecuațiile (19) și (18), care sînt echivalente cu ecuațiile (12).

Din (20) rezultă deci că spațiile de metrici :

$$ds^2 = e^{2\psi}\left[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2\right] \text{ și } d\bar s^2 =$$

$$= \frac{a^2\,e^{2\psi}\left[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2\right]}{\left[1 + e^{\psi}\left\{A\left[(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2\right] + B\left(x^1 + \ldots + x^n\right) + C\right\}\right]^2},$$

unde a, A, B, C sînt constante iar ψ o funcție arbitrară, sînt spații care verifică ecuațiile (1), dacă nu facem nici o ipoteză asupra funcțiilor ρ și θ. Dacă presupunem de exemplu $\theta = 0$, atunci ψ trebuie să verifice ecuația (2′) după cum am arătat anterior [4].

Primită la redacție la 15 februarie 1967

Liceul „C. A. Rosetti”

BIBLIOGRAFIE

1. К. ТЕЛЕМАН, *Об одной теореме Бореля-Лихнеровича*. Rev. roum. math. pures et appl., **III** 1958.
2. N. N. TEODORESCU şi GH. RIZESCU, *O demonstraţie a unei teoreme privina tensorul de curbură*. St. cerc. mat., **18**, *4* (1966).
3. N. N. TEODORESCU şi GH. RIZESCU, *Asupra unei teoreme privind tensorul de curbură.* St. cerc. mat., **18**, *9* (1966).
4. N. N. TEODORESCU şi GH. RIZESCU, *Asupra perechilor de spaţii Riemann cu tensori de curbură proporţionali.* St. cerc. mat., **19** (1967).
5. N. N. TEODORESCU, *Asupra unor spaţii Finsler.* St. cerc. mat., **13**, *3* (1962).
6. G. VRĂNCEANU, *Sur la décomposabilité et les groupes d'holonomie des espaces* A_n. Publicationes mathematicae, Debrecen, **7** (1960).
7. G. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială.* vol. I, II. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952.

PROPRIETĂŢI ALE ÎNCHIDERILOR SESTIER DIN TEORIA ALGEBRICĂ A GRAMATICII

DE

ELEONORA TOMA MARCU

Se studiază unele analogii şi deosebiri între închiderile Sestier şi categoriile gramaticale din teoria algebrică a gramaticii.

INTRODUCERE

Există în literatură diferite variante ale analizei algebrice contextuale. Amintim aici pe cele datorite lui R. L. Dobrušin [1] şi [2], lui S. Marcus [3], [4], [5], [6] şi lui A. Sestier [9].

În [8] se arată că noţiunea de închidere introdusă de A. Sestier [9] este echivalentă în anumite condiţii cu noţiunea de categorie gramaticală elementară introdusă de R. L. Dobrušin [1] şi [2]; de asemenea se studiază raportul dintre noţiunea de închidere în sensul lui Sestier şi noţiunea de categorie gramaticală, introdusă de S. Marcus [6] ca generalizare a noţiunii de categorie gramaticală elementară datorită lui Dobrušin. Astfel, se arată că închiderea Sestier a unei mulţimi conţine categoria gramaticală generată de acea mulţime.

În cele ce urmează, studiem în continuare unele analogii şi deosebiri între închiderile Sestier şi categoriile gramaticale din teoria algebrică a gramaticii. După cum se va vedea, închiderea Sestier prezintă unele fenomene de regularitate pe care nu le întîlnim la categoria gramaticală, fapt care ne determină să afirmăm caracterul mai avantajos din punct de vedere algebric, al primei faţă de a doua (vezi propoziţiile 13 şi 22).

În [6] se dau o serie de condiţii necesare şi suficiente ca două mulţimi să genereze aceeaşi categorie gramaticală; în cazul închiderii Sestier condiţiile sînt mai simple; două mulţimi au aceeaşi închidere dacă şi numai dacă sînt admise de aceeaşi mulţime de contexte (vezi propoziţia 18).

§ 1. DEFINIŢII, NOTAŢII ŞI REZULTATE ANTERIOARE

În această lucrare vom folosi terminologia şi notaţiile din [8] precum şi unele rezultate din [6] şi [8]. Le amintim aici.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 9, P. 1377–1384, BUCUREŞTI, 1967

Considerăm o mulţime finită şi nevidă V (*vocabularul*) ale cărei elemente sînt numite *cuvinte*. O frază pe V este un şir finit de elemente din V. Mulţimea frazelor pe V constituie un *limbaj* L. Fraza vidă va fi notată prin O. Operaţia de compunere a frazelor este asociativă şi necomutativă : dacă u, v, w sînt fraze pe V, avem $(uv)\,w = u\,(vw)$, dar, în general, $uv \neq vu$.

Notăm cu $\mathcal{L}$ mulţimea tuturor contextelor pe V.

Orice pereche ordonată $<u, v>$ de fraze pe V constituie un *context* pe vocabularul V. Fiind dat un limbaj L pe V, spunem că un cuvînt $x \in V$ este *acceptat de contextul* $<u, v>$ dacă şi numai dacă $uxv \in L$.

Fie $X = \{x\}$ o mulţime de cuvinte şi $\mathcal{Y} = \{y\}$ o mulţime de contexte pe L. Notăm prin $\alpha\,(x)$ mulţimea tuturor contextelor care acceptă cuvîntul x. Fiind dată o mulţime $X \subseteq V$, punem

$$\alpha\,(X) = \bigcap_{x \in X} \alpha\,(x)\,;$$

$\alpha\,(X)$ este deci mulţimea contextelor care acceptă toate cuvintele $x \in X$. Notăm prin $\alpha^{-1}\,(y)$ mulţimea tuturor cuvintelor care sînt acceptate de contextul y. Fiind dată mulţimea $\mathcal{Y}$ de contexte, punem

$$\alpha^{-1}\,(\mathcal{Y}) = \bigcap_{y \in \mathcal{Y}} \alpha^{-1}\,(y)\,;$$

$\alpha^{-1}\,(\mathcal{Y})$ este deci mulţimea cuvintelor care sînt acceptate de toate contextele $y \in \mathcal{Y}$. Mulţimea

$$\varphi\,(X) = \alpha^{-1}\,[\alpha\,(x)]$$

este, prin definiţie, închiderea lui X, în timp ce mulţimea

$$\psi\,(\mathcal{Y}) = \alpha\,[\alpha^{-1}\,(\mathcal{Y})]$$

este, prin definiţie, închiderea lui $\mathcal{Y}$ [9]. Evident că $\varphi\,(X)$ este o mulţime de cuvinte iar $\psi\,(\mathcal{Y})$ este o mulţime de contexte.

LEMA 1. (*vezi propoziţia 17 din* [8]). *Fiind date două mulţimi* A *şi* B *de cuvinte astfel încît* $A \subseteq B$, *avem* $\alpha\,(B) \subseteq \alpha\,(A)$.

Observaţie. Există cazuri cînd $A \subset B$ *şi* $\alpha\,(A) = \alpha\,(B)$.

Exemplu. Fie $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a\}$, $B = \{a, b, c\}$, $L = \{eag, ebg, gah, gbh, ecg, gch, dce\}$. Avem : $\alpha\,(A) = \alpha\,(a) = \{<e, g>, <g, h>\}$, $\alpha\,(b) = \{<e, g>, <g, h>\}$, $\alpha\,(c) = \{<e, g>, <g, h>, <d, e>\}$, $\alpha\,(B) = \alpha\,(a) \cap \alpha\,(b) \cap \alpha\,(c) = \{<e, g>, <g, h>\} = \alpha\,(A)$.

Fiind dat un limbaj L pe V şi două cuvinte a şi b spunem că *a domină pe b* şi scriem $a \rightarrow b$ dacă pentru orice context $<u, v>$ pentru care $uav \in L$ avem $ubv \in L$. Altfel spus, $a \rightarrow b$ dacă şi numai dacă $\alpha\,(a) \subseteq \alpha\,(b)$. Evident, relaţia de dominare depinde de L. Dacă în acelaşi timp $a \rightarrow b$ şi $b \rightarrow a$, scriem $a \leftrightarrow b$. Dominarea reciprocă între două cuvinte a şi b are loc dacă şi numai dacă $\alpha\,(a) = \alpha\,(b)$. Mulţimea de cuvinte b astfel încît $a \leftrightarrow b$ constituie *familia* cuvîntului a, notată $S\,(a)$.

Fie A şi B două mulţimi de cuvinte. Spunem că *A domină pe B* şi scriem $A \rightarrow B$ dacă pentru toate cuvintele $a \in A$ şi $b \in B$ avem $a \rightarrow b$. Mulţimea A se numeşte *iniţială* dacă pentru orice cuvînt x pentru care $x \rightarrow A$, avem $x \in A$ [1], [2], [3].

Fie A o mulțime inițială ; notăm cu A_1 mulțimea cuvintelor x pentru care $A \rightarrow x$. Reuniunea $G(A) = A \cup A_1$ este, prin definiție, *categoria gramaticală generată de mulțimea A* (pe scurt *c.g*) [3]. În cazul particular în care A este o familie, mulțimea $G(A)$ este, prin definiție, *categoria gramaticală elementară* generată de A [1], [2]. Se pot considera și categorii gramaticale generate de mulțimi care nu sînt inițiale, deoarece cea mai mare parte a proprietăților categoriilor gramaticale rămîn valabile și în acest caz.

Spunem că două mulțimi inițiale sînt ρ-echivalente și scriem $A \rho B$ dacă ele generează aceeași categorie gramaticală, adică $G(A) = G(B)$. Evident, ρ este o relație de echivalență.

TEOREMA I (*vezi teorema 11, pag. 116 din* [*6*]). *Dacă A și B sînt două mulțimi inițiale ρ-echivalente, atunci: 1° $A \cup B$ este ρ-echivalentă cu A și B; 2° $A \cap B$ este o mulțime inițială; 3° $G(A) \subseteq G(A \cap B)$.*

TEOREMA II. (*vezi teorema 12, pag. 117 din* [*6*]). *Există două mulțimi inițiale ρ-echivalente A și B, astfel încît $G(A \cap B) \neq G(B)$.*

În [8] se arată că, fiind dată o familie de cuvinte S, închiderea lui S coincide cu categoria gramaticală elementară generată de S (vezi propoziția 3 din [8]).

PROPOZIȚIA I. (*vezi propoziția 1 din* [*8*]). *Categoria gramaticală generată de o parte oarecare X a lui V este conținută în închiderea lui X; adică $G(X) \subseteq \varphi(X)$.*

§ 2. PROPRIETĂȚI ALE OPERATORULUI α

PROPOZIȚIA 1. *Fie A, B, două mulțimi de cuvinte. Are loc incluziunea*

$$\alpha(A \cup B) \subseteq \alpha(A) \cap \alpha(B). \tag{1}$$

Demonstrație : Avem $A \subseteq A \cup B \supseteq B$; aplicînd lema 1, obținem $\alpha(A) \supseteq \alpha(A \cup B) \subseteq \alpha(B)$, de unde rezultă incluziunea (1).

COROLAR. *Avem*

$$\alpha(A \cup B) \subseteq \alpha(A) \cup \alpha(B). \tag{2}$$

PROPOZIȚIA 2. *Există cazuri în care incluziunea (2) este strictă.*

Demonstrație. Fie, pe vocabularul $V = \{a, b, c\}$, limbajul $L = \{aac, abc, acc, aab, abb, acb, aba, cbc\}$, $A = \{a, b\}$ $B = \{a, c\}$. Avem : $A \cup B = \{a, b, c\}$, $\alpha(a) = \{<a, c>, <0, ac>, <0, bc>, <0, cc>, <a, b>, <0, ab>, <0, bb>, <0, cb>, <0, ba>, <ab, 0>\}$, $\alpha(b) = \{<a, c>, <aa, 0>, <a, b>, <ab, 0>$ $<ac, 0>, <a, a>, <c, c>\}$, $\alpha(c) = \{<aa, 0>, <ab, 0>, <a, c>, <ac, 0>, <a, b>, <0, bc>, <cb, 0>\}$, $\alpha(A \cup B) = \alpha(a) \cap \alpha(b) \cap \alpha(c) = \{<a, c>, <a, b>, <ab, 0>\}$, $\alpha(A) = \alpha(a) \cap \alpha(b) = \{<a, c>, <a, b>, <ab, 0>\}$, $\alpha(B) = \alpha(a) \cap \alpha(c) = \{<a, b>, <a, c>$ $<ab, 0>, <0, bc>\}$, $\alpha(A) \cup \alpha(B) = \{<a, c>, <a, b>, <ab, 0>, <0, bc>\} \supset \{<a, c>, <a, b>, <ab, 0>\} = \alpha(A \cup B)$.

Observație. Dacă $A = B$, incluziunea (2) devine egalitate.

PROPOZIȚIA 3. *Incluziunea (1) este chiar o egalitate, adică*

$$\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cap \alpha(B) \tag{3}$$

Demonstrație. În baza propoziției 1 va fi suficient să demonstrăm că

(4) $$\alpha(A \cup B) \supseteq \alpha(A) \cap \alpha(B).$$

Orice context $<a, b>$ din $\alpha(A) \cap \alpha(B)$ admite toate cuvintele mulțimii A și toate cuvintele mulțimii B, deci admite toate cuvintele mulțimii $A \cup B$, așadar, $<a, b> \in \alpha(A \cup B)$ și incluziunea (4) este astfel demonstrată. Din (1) și (4) rezultă (3).

Observație. Avem aici analogul egalității $(A \cup B)_1 = A_1 \cap B_1$ *semnalate în* [*6*] (*vezi* , *de exemplu, pag. 115*). Propoziția 3 a fost semnalată, fără demonstrație, în [9], pag. 297.

Propoziția 4. *Fiind date două mulțimi de cuvinte A și B, avem*

(5) $$\alpha(A) \cup \alpha(B) \subseteq \alpha(A \cap B).$$

Demonstrație. Avem $A \cap B \subseteq A$ și $A \cap B \subseteq B$; aplicînd lema 1, se obține $\alpha(A \cap B) \supseteq \alpha(A)$ și $\alpha(A \cap B) \supseteq \alpha(B)$, de unde rezultă incluziunea (5).

Propoziția 5. *Există cazuri în care* $\alpha(A) \cup \alpha(B) \subset \alpha(A \cap B)$.

Demonstrație. Fie vocabularul $V = \{a, b, c\}$, $A = \{b, c\}$, $B = \{a, c\}$, $L = \{aac, abc, acc, bac\}$. Avem : $\alpha(a) = \{<a, c>, <0, ac>, <0, bc>, <0, cc>, <b, c>\}$, $\alpha(b) = \{<a, c>, <0, ac>\}$, $\alpha(c) = \{<aa, 0>, <ab, 0>, <a, c>, <ac, 0>, <ba, 0>\}$, $\alpha(A) = \alpha(b) \cap \alpha(c) = \{<a, c>\}$, $\alpha(B) = \alpha(a) \cap \alpha(c) = \{<a, c>\}$, $A \cap B = \{c\}$, $\alpha(A \cap B) = \alpha(c) = \{<aa, 0>, <ab, 0>, <a, c>, <ac, 0>, <ba, 0>\} \supset \{<a, c>\} = \alpha(A) \cup \alpha(B)$.

Propoziția 6. *Dacă $A \neq 0$ și $B = 0$, avem* $\alpha(A \cap B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$.

Demonstrație. Într-adevăr, avem $B \subset A$, deci, în baza lemei 1, $\alpha(B) \supseteq \alpha(A)$ și $\alpha(B) \cup \alpha(A) = \alpha(B) = \alpha(0). = \mathscr{C}$. În același timp, $A \cap B = 0$, deci $\alpha(A \cap B) = \alpha(0) = \mathscr{C} = \alpha(A) \cup \alpha(B)$.

Propoziția 7. *Există cazuri în care $A \neq 0 \neq B$ și* $\alpha(A \cap B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$.

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c\}$. Să luăm $A = \{b\}$, $B = \{a, b\}$, $L = \{aac, abc, acc, bac\}$. Avem : $\alpha(a) = \{<a, c>, <0, ac>, <0, bc>, <0, cc>, <b, c>\}$, $\alpha(b) = \{<a, c>, <0, ac>\}$, $\alpha(A) = \alpha(b)$, $\alpha(B) = \alpha(a) \cap \alpha(b) = \{<a, c>, <0, ac>\}$, $A \cap B = \{b\}$, $\alpha(A \cap B) = \alpha(b) = \{<a, c>, <0, ac>\} = \alpha(A) \cup \alpha(B)$.

§ 3. PROPRIETĂȚI ALE OPERATORULUI α^{-1}

Lema 2. *Fiind date două mulțimi $\mathscr{A}$ și $\mathscr{B}$ de contexte, astfel încît $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ avem* $\alpha^{-1}(\mathscr{A}) \supseteq \alpha^{-1}(\mathscr{B})$.

Demonstrație. Un cuvînt care este acceptat de toate contextele din $\mathscr{B}$, este acceptat de toate contextele aparținînd unei submulțimi a lui $\mathscr{B}$, deci este acceptat și de toate contextele din $\mathscr{A}$.

Observație. Există cazuri în care $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ și $\alpha^{-1}(\mathscr{A}) = \alpha^{-1}(\mathscr{B})$.

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c, e, f, g\}$, $\mathscr{A} = \{<e, f>\}$, $\mathscr{B} = \{<e, f>, <f, g>\}$, $L = \{eaf, ebf, fag, fbg, fcg\}$. Avem : $\alpha^{-1}(\mathscr{A}) = \alpha^{-1}(<e, f>) = \{a, b\}$, $\alpha^{-1}(\mathscr{B}) = \alpha^{-1}(<e, f>) \cap \alpha^{-1}(<f, g>) = \{a, b\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b\} = \alpha^{-1}(\mathscr{A})$.

Propoziția 3 relativă la operatorul α își are un analog relativ la operatorul α^{-1}. Într-adevăr, are loc

PROPOZIȚIA 8. *Fie* $\mathcal{A}$ *și* $\mathcal{B}$ *două mulțimi de contexte pe vocabularul* V. *Are loc egalitatea* $\alpha^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \alpha^{-1}(\mathcal{A}) \cap \alpha^{-1}(\mathcal{B})$.

Demonstrație. Procedăm în esență ca și în demonstrarea propoziției 3. Avem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ și $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Conform lemei 2, $\alpha^{-1}(\mathcal{A}) \supseteq \alpha^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ și $\alpha^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \subseteq \alpha^{-1}(\mathcal{B})$. De aici rezultă

$$\alpha^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \subseteq \alpha^{-1}(\mathcal{A}) \cap \alpha^{-1}(\mathcal{B}). \tag{6}$$

Urmează să stabilim incluziunea inversă, adică

$$\alpha^{-1}(\mathcal{A}) \cap \alpha^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \alpha^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}). \tag{7}$$

Pentru fiecare cuvînt $x \in \alpha^{-1}(\mathcal{A}) \cap \alpha^{-1}(\mathcal{B})$ avem $x \in \alpha^{-1}(\mathcal{A})$ și $x \in \alpha^{-1}(\mathcal{B})$. Rezultă că x este acceptat de toate contextele din $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, deci $x \in \alpha^{-1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ și astfel (7) este stabilită. Din (6) și (7) rezultă egalitatea din enunț.

Propoziția 4, relativă la operatorul α, își are un analog relativ la α^{-1}. Într-adevăr, are loc

PROPOZIȚIA 9. *Fiind date două mulțimi de contexte* $\mathcal{A}$ *și* $\mathcal{B}$ *avem* $\alpha^{-1}(\mathcal{A}) \cup \alpha^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \alpha^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

Demonstrație. Are loc $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ și $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$ deci, aplicînd lema 2, $\alpha^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \supseteq \alpha^{-1}(\mathcal{A})$ și $\alpha^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \supseteq \alpha^{-1}(\mathcal{B})$. De aici rezultă că $\alpha^{-1}(\mathcal{A}) \cup \alpha^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \alpha^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, adică incluziunea din enunț.

PROPOZIȚIA 10. *Există cazuri în care* $\alpha^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \alpha^{-1}(\mathcal{A}) \cup \alpha^{-1}(\mathcal{B})$.

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c\}$, $\mathcal{A} = \{<a, b>, <a, c>\}$, $\mathcal{B} = \{<a, b>, <0, ac>\}$, $L = \{aab, acb, abc, aac, abb, acc\}$. Avem: $\alpha^{-1}(\mathcal{A}) = \{a, b, c\}$, $\alpha^{-1}(\mathcal{B}) = \{a\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{<a, b>\}$, $\alpha^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \{a, b, c\} = \alpha^{-1}(\mathcal{A}) \cup \alpha^{-1}(\mathcal{B})$.

Propoziția 5 relativă la α își are un analog relativ la α^{-1}. Intradevăr, avem

PROPOZIȚIA 11. *Există cazuri în care* $\alpha^{-1}(\mathcal{A}) \cup \alpha^{-1}(\mathcal{B}) \subset \alpha^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $\mathcal{A} = \{<e, f>, <e, g>\}$, $\mathcal{B} = \{<e, f>, <f, g>\}$, $L = \{eaf, ebf, ecf, eag, ebg, fag\}$. Avem: $\alpha^{-1}(\mathcal{A}) = \alpha^{-1}(<e, f>) \cap \alpha^{-1}(<e, g>) = \{a, b\}$, $\alpha^{-1}(\mathcal{B}) = \alpha^{-1}(<e, f>) \cap \alpha^{-1}(<f, g>) = \{a\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{<e, f>\}$, $\alpha^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \alpha^{-1}(<e, f>) = \{a, b, c\} \supset \{a, b\} = \alpha^{-1}(\mathcal{A}) \cup \alpha^{-1}(\mathcal{B})$.

§ 4. PROPRIETĂȚI ALE ÎNCHIDERII SESTIER

PROPOZIȚIA 12. *Dacă* $E \subseteq F$, *atunci* $\varphi(E) \subseteq \varphi(F)$.

Demonstrație. Conform lemei 1, avem $\alpha(E) \supseteq \alpha(F)$; aplicînd în continuare lema 2 obținem $\alpha^{-1}[\alpha(E)] \subseteq \alpha^{-1}[\alpha(F)]$. Dar $\alpha^{-1}[\alpha(E)] = \varphi(E)$ și $\alpha^{-1}[\alpha(F)] = \varphi(F)$ deci $\varphi(E) \subseteq \varphi(F)$ adică tocmai ceea ce trebuia arătat.

Observație. Reciproca propoziției 12 nu este adevărată.

Vom ilustra aceasta printr-un exemplu. Fie $V = \{a, b, c, d\}$, $L = \{bac, bcc, bbc, bdc, aad, abd\}$. Avem: $\alpha(a) = \{<b, c>, <a, d>, <0, ad>, <0, bd<\}$, $\alpha(b) = \{<0, ac>, <0, cc>, <b, c>, <0, bc>, <0, dc>, <a, d>\}$, $\alpha(c) = \{<ba, 0>, <b, c>, <bc, 0>, <bb, 0>, <bd, 0>\}$, $\alpha(d) = \{<b, c> <aa, 0> <ab, 0>\}$. Să luăm $E = \{a, b\}$, $F = \{c, d\}$. Avem $E \not\subseteq F$, însă $\varphi(E) = \{a, b\} \subset \{a, b, c, d\} = \varphi(F)$.

PROPOZIȚIA 13. *Fie* A *și* B *două mulțimi de cuvinte. Avem*

$$\varphi(A \cap B) \subseteq \varphi(A) \cap \varphi(B). \tag{8}$$

Demonstrație. Avem $A \cap B \subseteq A$ și $A \cap B \subseteq B$. Aplicînd propoziția 12, se obține $\varphi(A \cap B) \subseteq \varphi(A)$ și $\varphi(A \cap B) \subseteq \varphi(B)$, de unde rezultă incluziunea (8).

PROPOZIȚIA 14. *Există cazuri în care incluziunea (8) este strictă.*

Demonstrație. Fie pe vocabularul $V = \{a, b, c, d\}$ limbajul $L = \{aab, abb, abc, adb, bac, aba, cdc, bbc\}$. Fie $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$. Avem: $A \cap B = \{a\}$, $\alpha(a) = \{<a, b>, <0, ab>, <0, bb>, <0, bc>, <0, db>, <b, c>, <ab, 0>, <0, ba>\}$, $\alpha(b) = \{<aa, 0>, <a, b>, <ab, 0>, <a, c>, <ad, 0>, <0, ac>, <a, a>, <b, c>, <0, bc>\}$, $\alpha(c) = \{<ab, 0>, <ba, 0>, <cd, 0>, <0, dc>, <bb, 0>\}$, $\alpha(A) = \alpha(a) \cap \alpha(b) = \{<a, b>, <b, c>, <0, bc>, <ab, 0>\}$, $\alpha(B) = \alpha(a) \cap \alpha(c) = \{<ab, 0>\}$, $\varphi(A) = \{a, b\}$, $\varphi(B) = \{a, b, c\}$. Rezultă că $\varphi(A) \cap \varphi(B) = \{a, b\}$, $\alpha(A \cap B) = \alpha(a)$, $\varphi(A \cap B) = \{a\}$, deci $\varphi(A \cap B) \subset \varphi(A) \cap \varphi(B)$.

PROPOZIȚIA 15. *Dacă A și B sînt două mulțimi de cuvinte, atunci*

$$\varphi(A) \cup \varphi(B) \subseteq \varphi(A \cup B). \tag{9}$$

Demonstrație. Incluziunea (9) este o consecință imediată a propoziției 12 și a faptului că $A \subseteq A \cup B \supseteq B$.

PROPOZIȚIA 16. *Există cazuri în care* $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$.

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$, $L = \{aac, abc, adc, acc\}$. Avem $\alpha(A) = \alpha(a) \cap \alpha(b) = \{<a, c,>, <0, ac>, <0, bc>, <0, dc>, <0, cc>\} \cap \{<a, c>\} = \{<a, c>\}$, $\alpha(B) = \alpha(c) = \{<aa, 0>, <ab, 0>, <ad, 0>, <a, c>, <ac, 0>\}$, $\varphi(A) = \{a, b, c, d\}$, $\varphi(B) = \{c\}$, $A \cup B = \{a, b, c\}$, $\alpha(A \cup B) = \alpha(a) \cap \alpha(b) \cap \alpha(c) = \{<a, c>\}$, deci $\varphi(A \cup B) = \{a, b, c, d\} = \varphi(A) \cup \varphi(B)$.

PROPOZIȚIA 17. *Există cazuri în care* $\varphi(A) \cup \varphi(B) \subset \varphi(A \cup B)$.

Demonstrație. Să considerăm $V = \{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, h_1, i_1, a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, g_2, h_2\ i_2\}$. Fie $L = \{a_1a_2, a_1c_2, a_1d_2, a_1e_2, a_1f_2, a_1g_2, a_1i_2, c_1c_2, b_1d_2, c_1e_2, b_1f_2, d_1g_2, c_1i_2, d_1c_2, d_1d_2, b_1i_2, d_1i_2, b_1b_2, b_1h_2, d_1h_2\}$. $A = S(a_2) = \{a_2\}$ $B = S(b_2) = \{b_2\}$. Din propoziția 3 din [8] rezultă $\varphi[S(a_2)] = G[(S(a_2)]$. Avem: $\varphi(a_2) = \{a_2, c_2, d_2, e_2, f_2, g_2, i_2\}$, $\varphi(b_2) = \{b_2, h_2, f_2, d_2, i_2\}$, $\varphi(a_2) \cup \varphi(b_2) = \{a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, g_2, h_2, i_2\}$. Însă $\alpha(a_2, b_2) = \alpha(a_2) \cap \alpha(b_2) = \{<a_1, 0>\} \cap \{b_1, 0>\} = 0$, $\varphi\{a_2, b_2\} = \alpha^{-1}[\alpha(a_2, b_2)] = \alpha^{-1}(0) = V$. Deci $\varphi\{a_2, b_2\}$ conține, în plus față de $\varphi(a_2) \cup \varphi(b_2)$, toate cuvintele de indice 1.

Interpretare într-o limbă naturală (limba română). În demonstrarea propoziției 17 punînd: $a_1 =$ *om*, $b_1 =$ *femeie*, $c_1 =$ *oameni*, $d_1 =$ *femei*, $a_2 =$ *frumos*, $c_2 =$ *vechi*, $d_2 =$ *precoce*, $e_2 =$ *dibaci*, $h_2 =$ *greoaie*, $f_2 =$ *subțire*, $g_2 =$ *june*, $i_2 =$ *cumsecade*, obținem o colecție de fraze corecte ale limbii române.

PROPOZIȚIA 18. *Fiind date două mulțimi A și B de cuvinte, avem* $\varphi(A) = \varphi(B)$ *dacă și numai dacă* $\alpha(A) = \alpha(B)$.

Demonstrație. Deoarece din $\alpha(A) = \alpha(B)$ rezultă, evident, $\varphi(A) = \varphi(B)$; rămîne să arătăm că din $\varphi(A) = \varphi(B)$ rezultă egalitatea $\alpha(A) = \alpha(B)$.

Din $\varphi(A) = \varphi(B)$ rezultă $\alpha[\varphi(A)] = \alpha[\varphi(B)]$. Propoziția va fi deci demonstrată de îndată ce vom arăta că $\alpha(A) = \alpha[\varphi(A)]$ și $\alpha(B) = \alpha[\varphi(B)]$. Vom demonstra numai prima egalitate, cealaltă stabilindu-se în același fel.

În baza lemei 1 şi ţinînd seama că $A \subseteq \varphi(A)$, rezultă că $\alpha[\varphi(A)] \subseteq \alpha(A)$. Rămîne să stabilim incluziunea $\alpha(A) \subseteq \alpha[\varphi(A)]$. Fie $<u, v> \in \alpha(A)$. Rezultă că $<u, v>$ acceptă orice cuvînt din A. Însă $\varphi(A)$ este mulţimea cuvintelor x cu proprietatea că orice context din $\alpha(A)$ acceptă pe x. Rezultă că $<u, v>$ acceptă pe x, deci acceptă orice cuvînt din $\varphi(A)$. Aşadar, $<u, v> \in \alpha[\varphi(A)]$ şi propoziţia 18 este stabilită.

PROPOZIŢIA 19. *Fie A o mulţime de cuvinte. Are loc*

$$\complement[\varphi(A)] \subseteq \varphi(\complement A) \tag{10}$$

(unde prin $\complement(X)$ notăm complementara, în raport cu V, a mulţimii X).

Demonstraţie. Pentru orice $x \in \complement[\varphi(A)]$, avem $x \notin \varphi(A)$, deci, cu atît mai mult $x \notin A$. Rezultă că $x \in \complement A$. Dar $\complement A \subseteq \varphi(\complement A)$, de unde $x \in \varphi(\complement A)$ şi astfel incluziunea (10) este demonstrată.

PROPOZIŢIA 20. *Există cazuri în care incluziunea din propoziţia 19 este strictă.*

Demonstraţie. Fie $V = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, b\}$, $L = \{eaf, fag, ebf, fbg, edf, fdg, ecf\}$. Avem $\complement A = \{c, d\}$, $\alpha(A) = \alpha(a) \cap \alpha(b) = \{<e, f>, <f, g>\}$, $\varphi(A) = \{a, b, d\}$, $\alpha(\complement A) = \alpha(c) \cap \alpha(d) = \{<e, f>\}$, $\varphi(\complement A) = = \{a, b, c, d\} \supset \{c\} = \complement[\varphi(A)]$.

PROPOZIŢIA 21. *Dacă $A = 0$, incluziunea (10) devine o egalitate, de îndată ce admitem că nu există un cuvînt admis de orice context.*

Demonstraţie. Avem $\complement A = V$, $\varphi(V) \Rightarrow V$, $\varphi(0) = 0$ deci $\varphi(\complement A) = V$, $\complement[\varphi(0)] = V$ de unde $\varphi(\complement A) = \complement[\varphi(A)]$.

§ 5. O PARALELĂ ÎNTRE ÎNCHIDERILE SESTIER ŞI CATEGORIILE GRAMATICALE

PROPOZIŢIA 22. *Propoziţia 13 încetează de a fi adevărată dacă în loc de operatorul de închidere φ considerăm operatorul categoriei gramaticale G.*

Demonstraţie. Într-adevăr, fie A şi B două mulţimi echivalente, adică $G(A) = G(B)$. Conform teoremei 11 din [6], pag. 116, avem

$$G(A) \subseteq G(A \cap B). \tag{11}$$

Să presupunem prin absurd că incluziunea (8) rămîne adevărată pentru G; ar urma ca $G(A \cap B) \subseteq G(A) \cap G(B)$ şi, deoarece $G(A) = G(B)$, am avea $G(A) \cap G(B) = G(A)$, deci

$$G(A \cap B) \subseteq G(A). \tag{12}$$

Din (11) şi (12) rezultă $G(A \cap B) = G(A)$, ceea ce contrazice teorema 12 din [6], pag. 117.

PROPOZIŢIA 23. *Analogul propoziţiei 19 la categorii gramaticale este adevărat, adică $\complement[G(A)] \subseteq G[\complement(A)]$.*

Demonstraţie. $\complement[G(A)] = C(A \cup A_1) = \complement A \cap \complement(A_1)$. Dar $\complement(A) \cap \complement(A_1) \subseteq \subseteq \complement A \cup (\complement A)_1 = G[\complement(A)]$, deci $\complement[G(A)] \subseteq G[\complement(A)]$ şi propoziţia 23 este demonstrată.

PROPOZIŢIA 24. *Analogul propoziţiei 20 la categorii gramaticale este adevărat, adică există cazuri în care avem incluziunea strictă* $\complement[G(A)] \subset G[\complement(A)]$.

Demonstraţie. Fie $V = \{a, b, c\}$, $L = \{abc, acc, aac\}$. Avem $b \to c$. Fie $A = \{b\}$. Rezultă că $A_1 = \{b, c\}$, $\complement(A_1) = \{a\}$, $\complement(A) = \{a, c\}$, $(CA)_1 = 0$, $G(A) = A \cup A_1 = \{b, c\}$ $\complement(G(A)) = \{a\}$, $G[\complement(A)] = \{a, c\}$, deci incluziunea anunţată este strictă.

Primită la redacţie la 13 martie 1967

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. R. L. DOBRUŠIN, *Elementarnaja grammatiĉeskaja kategorija.* Bjulleten Obredinenija po problemam mašinnogo perevoda, *5*, 19–21 (1957).
2. R. L. DOBRUŠIN, *Matematičeskie metody v lingvistike. Prilozenie.* Matematičeskoe prosveščenie, **6**, 52–59 (1961).
3. S. MARCUS, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire*, I. Rev. math. pures et appl., **7**, *1*, 91–107 (1962).
4. S. MARCUS, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire.* II. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, **8**, *3–4*, 323–329 (1962).
5. S. MARCUS, *Ob odnoi logiĉeskoi modeli elementarnoĭ grammatiĉeskoi kategorii*, III. Rev. math. pures et appl., **7**, *4*, 683–691 (1962).
6. S. MARCUS, *Lingvistică matematică.* Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1966.
7. S. MARCUS, *Analyse contextuelle. Zeitschrift für Phonetik, Sprachwissenschaft und Kommunikationsforschung*, **18**, *3*, 301–313 (1965).
8. S. MARCUS, *Catégories de Dobrušin, fermetures de Sestier et voisinages de Sakai. Glossa*, **1**, *1* (1967).
9. A. SESTIER, *Contribution à une théorie ensembliste des classifications linguistiques. Actes du Premier Congrès de l'AFCAL*, 1960, Paris, 1961, p. 293–305.

ASUPRA UNOR PROBLEME COMBINATORII CARE INTERVIN ÎN TEORIA CLASIFICĂRII

DE

IOAN TOMESCU

Acest articol cuprinde algoritme care sînt utilizate pentru construcţia recursivă a două tipuri de arborescenţe care permit respectiv determinarea tuturor claselor maximale ale unui element dintr-o mulţime finită X în raport cu o relaţie simetrică şi reflexivă $R \subset X \times X$ precum şi determinarea unei partiţii a mulţimii X cu un număr minim de clase, corespunzătoare unei relaţii de echivalenţă $\overline{R} \subset R$, folosind un procedeu de optimizare pas cu pas.

Aceste probleme îşi găsesc aplicaţie în minimizarea numărului de stări ale automatelor finite secvenţiale, în teoria clasificării pe un nivel, în teoria grafurilor precum şi în problema descompunerii minimale în lanţuri a unei mulţimi finite parţial ordonate.

Să considerăm o mulţime finită de elemente $X = \{x_1, \ldots, x_p\}$ şi o relaţie binară $R \subset X \times X$ cu următoarele proprietăţi [1]:

1) $(x_i, x_i) \in R$;

2) dacă $(x_i, x_j) \in R$, atunci şi $(x_j, x_i) \in R$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Să se determine o partiţie a mulţimii X, adică $X = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$ $(k \leqslant p)$ şi $C_i \cap C_j = \varnothing$, astfel încît dacă $x_l, x_m \in C_q$ $(1 \leqslant q \leqslant k)$, atunci $(x_l, x_m) \in R$ şi partiţia să conţină un număr minim de clase.

Se observă că restricţia relaţiei R la fiecare din clasele C_q este o relaţie tranzitivă, căci dacă $R_q = R \cap C_q \times C_q = C_q \times C_q$ şi dacă $x_l, x_m, x_n \in C_q$, atunci $(x_l, x_m) \in R_q$, $(x_m, x_n) \in R_q$ şi $(x_l, x_n) \in R_q$.

Notînd $\overline{R} = \bigcup_{q=1}^{k} R \cap C_q \times C_q = R \cap \bigcup_{q=1}^{k} C_q \times C_q = \bigcup_{q=1}^{k} C_q \times C_q$, relaţia $\overline{R}$ este o relaţie reflexivă, simetrică şi tranzitivă, deci o relaţie de echivalenţă şi $\overline{R} \subset R$.

---

[1] Axioma 1) intervine în mod esenţial numai în demonstraţia teoremei 1.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 9, P. 1385–1393 BUCUREŞTI, 1967

Deci problema se poate pune astfel : fiind dată relația R reflexivă și simetrică, să se determine o relație de echivalență $\bar{R} \subset R$ astfel încît partiția corespunzătoare a mulțimii X să conțină un număr minim de clase.

Fiecărei relații reflexive și simetrice $R \subset X \times X$ îi putem asocia o matrice booleană $A_R = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ definită astfel : $a_{\alpha\beta} = 1$ dacă $(x_\alpha, x_\beta) \in R$ și $a_{\alpha\beta} = 0$ în caz contrar. Se observă că matricea A_R este simetrică și $a_{\alpha\alpha} = 1$ pentru orice $\alpha = 1, \ldots, p$.

Oricărei matrici booleene simetrice cu 1 pe diagonala principală îi putem asocia o relație simetrică și reflexivă $R \subset X \times X$ definind $(x_\alpha, x_\beta) \in R$ dacă și numai dacă $a_{\alpha\beta} = 1$.

TEOREMA 1. *Relația* $R \subset X \times X$ *este o relație de echivalență dacă și numai dacă* $A_R = A_R^2$ (*unde produsul este produsul boolean, adică* $A_R^2 = \{a_{\alpha\beta} \cup \bigcup_{\substack{\gamma=1,\ldots,p \\ \gamma \neq \alpha,\beta}} a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$).

Demonstrație. Deoarece matricea A_R este o matrice simetrică cu 1 pe diagonala principală, rezultă că R este o relație simetrică și reflexivă și reciproc.

Să demonstrăm că R este tranzitivă dacă și numai dacă $A_R = A_R^2$. În [14] se demonstrează că $A_R = A_R^2$ dacă și numai dacă $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \cup a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta}$ pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Dacă $A_R = A_R^2$, rezultă că dacă $(x_\alpha, x_\gamma) \in R$ și $(x_\gamma, x_\beta) \in R$, atunci $a_{\alpha\gamma} = a_{\gamma\beta} = 1$ și deci $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \cup 1 = 1$ și deci $(x_\alpha, x_\beta) \in R$.

Dacă relația R este tranzitivă, atunci $a_{\alpha\beta} \neq a_{\alpha\beta} \cup a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta}$ numai dacă $a_{\alpha\beta} = 0$ și $a_{\alpha\gamma} = a_{\gamma\beta} = 1$, adică $(x_\alpha, x_\gamma) \in R$; $(x_\gamma, x_\beta) \in R$ și $(x_\alpha, x_\beta) \notin R$ ceea ce este absurd, c.c.t.d.

Numim clasă maximală a unui element $x_q \in X$ o submulțime $C_q \subset X$ cu proprietățile :

i) $x_q \in C_q$;

ii) oricare ar fi $x_i, x_j \in C_q$, $(x_i, x_j) \in R$;

iii) oricare ar fi $x_k \in X \setminus C_q$, există $x_l \in C_q$ cu proprietatea că $(x_l, x_k) \notin R$.

Se demonstrează imediat că orice clasă de elemente din X care se găsesc două cîte două în relația R este sau maximală sau este inclusă într-o clasă maximală.

Notăm clasele maximale ale elementului x_q cu $C_q^{(1)}, C_q^{(2)}, \ldots, C_q^{(r(q))}$. Se observă că, oricum ar fi definită relația simetrică și reflexivă R, există cel puțin o clasă maximală a elementului x_q $(1 \leqslant q \leqslant p)$.

Dacă, de exemplu, oricare ar fi $x_\alpha \in X$, $\alpha \neq q$, avem $(x_\alpha, x_q) \notin R$, atunci $r(q) = 1$ și $C_q^{(1)} = \{x_q\}$.

Dacă sînt determinate toate clasele maximale ale elementelor $x_1, x_2, \ldots, x_p$, atunci aplicînd un algoritm de alegere analog algoritmului de alegere a unei acoperiri cu un număr mimim de implicanți primi sau cu un număr minim de litere a unei funcții booleene (algoritmul lui Petrick) sau programarea pseudobooleană, se poate determina o acoperire a mulțimii X cu un număr minim de clase. Eliminînd, într-un mod oarecare din aceste clase elementele comune, se obține o partiție a mulțimii X cu un număr minim de clase care satisfac condițiile problemei.

În termenii unei probleme de programare pseudobooleană, problema găsirii unei acoperiri minimale a mulţimii X se poate formula astfel:

Să se determine variabilele bivalente $z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^{r(1)}, z_2^1, \ldots, z_p^1, \ldots, z_p^{r(p)}$ aşa ca $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r(i)} z_i^j =$ minimum în condiţiile $\bigcup_{j=1}^{r(i)} z_i^j = 1$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant p$, adică în condiţiile $\prod_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{r(i)} z_i^j = 1$.

Dacă se obţine o soluţie a problemei cu $\tilde{z}_i^j = 0$, atunci clasa maximală C_i^j nu va intra în acoperirea minimală a mulţimii X, iar dacă $\tilde{z}_i^j = 1$, clasa C_i^j va fi luată în considerare în acoperirea minimală a mulţimii X.

Se obţine $X = \bigcup_{\{i,\, j\, \tilde{z}|_i^j = 1\}} C_i^j$ şi eliminînd într-un mod oarecare elementele comune claselor C_i^j se obţine o partiţie a mulţimii X care satisface condiţiile problemei.

Demonstraţia faptului că o partiţie astfel obţinută este o soluţie a problemei este imediată. Fiind dată o partiţie cu un număr minim de clase, egal cu n_0, ce satisface condiţiile puse, se completează fiecare clasă pînă la o clasă maximală şi astfel se obţine o acoperire a mulţimii X cu un număr de clase $n_0 \geqslant \min \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r(i)} z_i^j$ în condiţiile $z_i^j \in \{0,1\}$ şi $\prod_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{r(i)} z_i^j = 1$.

Cum inegalitatea inversă este evidentă (din orice acoperire cu un număr minim de clase putem obţine o partiţie), rezultă c.c.t.d.

Dacă introducem p variabile bivalente $z_1, \ldots, z_p \in \{0, 1\}$ şi dacă C_q este o clasă maximală a elementului x_q $(1 \leqslant q \leqslant p)$, atunci definind $\tilde{z}_i = 1$ dacă $x_i \in C_q$ şi $\tilde{z}_i = 0$ în caz contrar, sistemul de valori $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_{q-1}, \tilde{z}_{q+1}, \ldots, \tilde{z}_p)$ realizează un maxim local al funcţiei $\varphi_q(z_1, \ldots, z_{q-1}, z_{q+1}, \ldots, z_p) = \sum_{i \in \{j \mid j \neq q \& a_{qj} = 1\}} z_i$ cu restricţiile $\sum_{(i,j) \in \Omega_q} z_i z_j = 0$ şi reciproc, unde $A_R = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,p}$ este matricea booleană asociată relaţiei R iar $\Omega_q = \{(i, j) \mid i, j \neq q \,\&\, a_{qi} = a_{qj} = 1 \,\&\, a_{ij} = 0\}$.

Spunem că vectorul $(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{q-1}, \tilde{z}_{q+1}, \ldots, \tilde{z}_p)$ realizează un maxim local al funcţiei $\varphi_q(z_1, \ldots, z_{q-1}, z_{q+1}, \ldots, z_p)$ în condiţiile $\sum_{(i,j) \in \Omega_q} z_i z_j = 0$ dacă $\sum_{(i\, j) \in \Omega_q} \tilde{z}_i \tilde{z}_j = 0$ şi dacă oricare ar fi vectorul $(z_1', \ldots, z_{q-1}', z_{q+1}', \ldots, z_p')$ vecin cu vectorul $(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{q-1}, \tilde{z}_{q+1}, \ldots, \tilde{z}_p)$ (în sensul că distanţa lor Hamming este egală cu 1) care verifică condiţia $\sum_{(i,j) \in \Omega_q} z_i' z_j' = 0$, atunci $\varphi_q(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{q-1}, \tilde{z}_{q+1}, \ldots, \tilde{z}_p) \geqslant \varphi_q(z_1', \ldots, z_{q-1}', z_{q+1}', \ldots, z_p')$.

Dacă $(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{q-1}, \tilde{z}_{q+1}, \ldots, \tilde{z}_p)$ este un vector care realizează un maxim local al funcţiei $\varphi_q(z_1, \ldots, z_{q-1}, z_{q+1}, \ldots, z_p)$ în condiţiile $\sum_{(i,j) \in \Omega_q} z_i z_j = 0$, atunci clasa $C_q = \{x_q\} \cup \{x_i\}_{j \in I_q}$, unde $I_q = \{i \mid i \neq q \,\&\, \tilde{z}_i = 1\}$ este o clasă maximală a elementului x_q şi problema determinării claselor maximale ale elementului x_q poate fi redusă la problema determinării tuturor vectorilor care realizează toate maximele locale ale funcţiei $\varphi_q(z_1, \ldots, z_{q-1}, z_{q+1}, \ldots, z_p)$ în condiţiile date. Vectorii care realizează maximul global al funcţiei $\varphi_q(z_1, \ldots, z_{q-1}, z_{q+1}, \ldots, z_p)$ în condiţiile date corespund claselor maximale ale elementului x_q care conţin numărul maxim de elemente.

Pentru determinarea tuturor claselor maximale ale elementelor $x_1, x_2, \ldots, x_p$ se poate utiliza un algoritm care constă în următoarele:

Se construiesc p arborescenţe avînd ca noduri iniţiale (rădăcini) respectiv elementele $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Notăm grafurile corespunzătoare care vor fi construite prin procedeul recursiv indicat mai jos cu $G_1 = (Y_1, \Gamma_1)$; $G_2 = (Y_2, \Gamma_2)$; … …; $G_{p-1} = (Y_{p-1}, \Gamma_{p-1})$, $G_p = (Y_p, \Gamma_p)$.

Definim $\Gamma_1(x_1) = \{x_{1,l} \mid 2 \leqslant l \leqslant p \,\&\, (x_1, x_l) \in R\}$.

Dacă $x_{1,m} \in \Gamma_1(x_1)$, definim $\Gamma_1(x_{1,m}) = \{x_{1,m,l} \mid m + 1 \leqslant l \leqslant p \,\&\, (x_1, x_l) \in R \,\&\, (x_m, x_l) \in R\}$.

Dacă $(x_1, x_{1,k_1}, x_{1,k_1k_2}, \ldots, x_{1,k_1,k_2,\ldots,k_i})$ cu $1 < k_1 < k_2 < \ldots < k_i$ este un drum care uneşte nodul x_1 cu nodul $x_{1,k_1,k_2,\ldots,k_i}$ în arborescenţa G_1, atunci definim:

$\Gamma_1(x_{1,k_1,k_2,\ldots,k_i}) = \{x_{1,k_1,k_2,\ldots,k_i,l} \mid k_i + 1 \leqslant l \leqslant p \,\&\, (x_1, x_l) \in R \,\&\, (x_{k_1}, x_l) \in R \,\&\ldots\&\, (x_{k_i}, x_l) \in R\}$.

Dacă nu există nici un l cu proprietăţile cerute, atunci $\Gamma_1(x_{1,k_1,k_2,\ldots k_i}) = \emptyset$ şi spunem că nodul $x_{1,k_1,k_2,\ldots,k_i}$ este un nod final al grafului G_1.

Definim $\Gamma_q(x_q) = \{x_{q,l} \mid q + 1 \leqslant l \leqslant p \,\&\, (x_q, x_l) \in R\}$.

Dacă $(x_q, x_{q,m_1}, x_{q,m_1,m_2}, \ldots, x_{q,m_1,\ldots,m})$ cu $1 < m_1 < m_2 \ldots < m_i$ este un drum ce uneşte nodul x_q cu nodul $x_{q,m_1,\ldots,m_i}$ în arborescenţa G_q, atunci definim $\Gamma_q(x_{q,m_1,\ldots m_i}) = \{x_{q,m_1,\ldots,m_i,l} \mid m_i + 1 \leqslant l \leqslant p \,\&\, (x_q, x_l) \in R \,\&\, (x_{m_1}, x_l) \in R \,\&\ldots\&\, (x_{m_i}, x_l) \in R\}$. Dacă $\Gamma_q(x_{q,m_1,\ldots,m_i}) = \emptyset$ spunem că nodul $x_{q,m_1,\ldots,m_i}$ este un nod final al grafului G_q ş.a.m.d. Mai definim $Y_p = \{x_p\}$ şi $\Gamma_p x_p = \emptyset$.

Fiind construită arborescenţa G_q $(1 \leqslant q \leqslant p)$, la fiecare drum $(x_q, x_{q,l_1}, x_{q,l_1,l_2}, \ldots, x_{q,l_1,\ldots,l_j})$ cu $\Gamma(x_{q,l_1,\ldots,l_j}) = \emptyset$ îi punem în corespondenţă clasa de elemente $\{x_q, x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots, x_{l_j}\} \subset X$. Din modul de construcţie a arborescenţei G_q, rezultă că oricare două elemente din clasa $\{x_q, x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots, x_{l_j}\}$ sînt în relaţia R.

TEOREMA 2. *Mulţimea claselor de elemente din* X *asociate tuturor drumurilor care unesc în fiecare arborescenţă* G_q $(1 \leqslant q \leqslant p)$ *nodul iniţial (rădăcina)* x_q *cu toate nodurile finale ale arborescenţei conţine toate clasele maximale ale elementelor* $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Demonstraţie. Fie $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_r}$ cu $1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r \leqslant p$ o clasă maximală a elementului x_{α_j} $(1 \leqslant j \leqslant r)$.

Conform definiţiei grafului G_{α_1}, există un drum $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_1,\alpha_2}, x_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}, \ldots, x_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r})$ cu proprietatea că $\Gamma_{\alpha_1}(x_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}) = \emptyset$. Dacă presupunem că $\Gamma_{\alpha_1}(x_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}) \neq \emptyset$, ar rezulta că clasa $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_r}\}$ nu ar fi maximală.

Clasa asociată acestui drum este tocmai clasa maximală a elementului x_{α_j} considerată mai sus.

Rezultă că orice clasă maximală este o anumită clasă asociată unui drum ce uneşte nodul iniţial cu un nod final într-una din arborescenţele G_q $(1 \leqslant q \leqslant p)$, drum care poate fi obţinut aranjînd indicii elementelor din clasa maximală în ordine crescătoare, c.c.t.d.

Eliminînd din mulţimea tuturor claselor asociate drumurilor ce unesc nodurile iniţiale cu nodurile finale ale grafurilor $G_1, \ldots, G_p$ acele clase care sînt conţinute în alte clase din această mulţime (acele clase care nu sînt maximale), rezultă că se obţin toate clasele maximale ale elementelor din X.

Într-adevăr, conform unei observaţii anterioare, pentru orice clasă asociată unui drum ce uneşte un nod iniţial cu unul din nodurile finale, oricare două elemente din acea clasă sînt în relaţia R, deci clasa este sau maximală sau este conţinută într-o clasă maximală. Pentru determinarea tuturor claselor maximale ale elementelor din X se mai poate utiliza procedura de calcul boolean pentru determinarea mulţimilor intern stabile maximale ale unui graf din [15] care coincide în esenţă cu metoda booleană din [18].

În cele ce urmează vom considera un algoritm care permite găsirea unei partiţii cu un număr minim de clase a mulţimii X (partiţie corespunzătoare unei relaţii de echivalenţă $\bar{R} \subset R$).

Fie elementul $x_i \in X (1 \leqslant i \leqslant p)$ ale cărui clase maximale distincte le notăm $C_i^{(1)}, C_i^{(2)}, \ldots, C_i^{(r(i))}$.

Construim recursiv graful $G = (Y, \Gamma)$ definit astfel: graful G este o arborescenţă avînd ca nod iniţial (rădăcină) nodul x_i şi $\Gamma(x_i) = \{x_{i.k} \mid k = 1, 2, \ldots, r(i)-1, r(i)\}$.

Arcului $(x_i, x_{i.1})$ îi asociem clasa $C_i^{(1)}$, arcului $(x_i, x_{i.2})$ clasa $C_i^{(2)}$ ş.a.m.d., arcului $(x_i, x_{i.r(i)})$ îi asociem clasa $C_i^{(r(i))}$.

Considerăm mulţimea $X \setminus C_i^{(1)}$ şi relaţia $R_{i.1}$, indusă de relaţia R în mulţimea $X \setminus C_i^{(1)}$, adică $R_{i.1} = R \cap (X \setminus C_i^{(1)}) \times (X \setminus C_i^{(1)})$ care este o relaţie reflexivă şi simetrică.

Fie un element $y_{i.1} \in X \setminus C_i^{(1)}$ şi notăm cu $C_{y_{i.1}}^{(1)}, C_{y_{i.1}}^{(2)}, \ldots, C_{y_{i.1}}^{r_{i.1}(y_{i.1})}$ clasele maximale distincte ale elementului $y_{i.1}$ în mulţimea $X \setminus C_i^{(1)}$ în raport cu relaţia $R_{i.1}$. Definim $\Gamma(x_{i.1}) = \{x_{i.1.k} \mid k = 1, 2, \ldots, r_{i.1}(y_{i.1}) - 1, r_{i.1}(y_{i.1})\}$ şi asociem fiecărui arc $(x_{i.1}, x_{i.1.k})$ clasa $C_{y_{i.1}}^{(k)}$.

Pentru clasa $C_i^{(2)}$, vom considera relaţia $R_{i.2} = R \cap (X \setminus C_i^{(2)}) \times (X \setminus C_i^{(2)})$, şi un element oarecare $y_{i.2} \in X \setminus C_i^{(2)}$.

Notăm cu $C_{y_{i.2}}^{(1)}, C_{y_{i.2}}^{(2)}, \ldots, C_{y_{i.2}}^{(r_{i.2}(y_{i.2}))}$ clasele maximale distincte ale elementului $y_{i.2}$ în mulţimea $X \setminus C_i^{(2)}$ în raport cu relaţia $R_{i.2}$ şi definim $\Gamma(x_{i.2}) = \{x_{i.2.k} \mid k = 1, 2, \ldots, r_{i.2}(y_{i.2}) - 1, r_{i.2}(y_{i.2})\}$, asociind fiecărui arc $(x_{i.2}, x_{i.2.k})$ clasa $C_{y_{i.2}}^{(k)}$ ş.a.m.d.

Considerînd drumul $(x_i, x_{i,n_1}, x_{i,n_1,n_2}, \ldots, x_{i,n_1,n_2,\ldots,n_s})$ care uneşte nodul x_i cu nodul $x_{i,n_1,\ldots,n_s}$ al arborescenţei, dacă $X \setminus C_{i,n_1,\ldots,n_s} = \varnothing$, unde $C_{i,n_1,\ldots,n_s} = C_i^{(n_1)} \cup C_{y_{i,n_1}}^{(n_2)} \cup \ldots \cup C_{y_{i,n_1,\ldots,n_{s-1}}}^{(n_s)}$, adică $X = C_{i,n_1,\ldots,n_s}$, atunci definim $\Gamma(x_{i,n_1,\ldots,n_s}) = \varnothing$ şi numim nodul $x_{i,n_1,\ldots,n_s}$ nod final al arborescenţei.

Dacă $X \setminus C_{i,n_1,\ldots,n_s} \neq \varnothing$ vom considera un element $y_{i,n_1,\ldots,n_s} \in X \setminus C_{i,n_1,\ldots,n_s}$ şi clasele maximale distincte $C_{y_{i,n_1,\ldots,n_s}}^{(1)}, C_{y_{i,n_1,\ldots,n_s}}^{(2)}, \ldots, C_{y_{i,n_1,\ldots,n_s}}^{(r_{i,n_1,\ldots,n_s}(y_{i,n_1,\ldots,n_s}))}$ ale elementului $y_{i,n_1,\ldots,n_s}$ în mulţimea $X \setminus C_{i,n_1,n_2\ldots,n_s}$ în raport cu relaţia simetrică şi tranzitivă $R_{i,n_1,n_2,\ldots,n_s} = R \cap (X \setminus C_{i,n_1,\ldots,n_s}) \times (X \setminus C_{i,n_1,\ldots,n_s})$.

Definim $\Gamma(x_{i, n_1, \ldots, n_s}) = \{x_{i, n_1, \ldots, n_s, k} \mid k = 1, 2, \ldots, r_{i, n_1, \ldots, n_s}(y_{i, n_1, \ldots, n_s}) - 1, r_{i, n_1, \ldots, n_s}(y_{i, n_1, \ldots, n_s})\}$ şi asociem fiecărui arc $(x_{i, n_1, \ldots, n_s}, x_{i, n_1, \ldots, n_s, k})$ clasa $C^{(k)}_{y_{i, n_1, \ldots, n_s}}$.

Construcţia arborescenţei se încheie cînd obţinem toate nodurile finale şi deci, orice drum ce uneşte nodul iniţial x_i cu unul din nodurile finale conţine cel mult $p-1$ arce.

Se observă că dacă $x_{i, n_1, \ldots, n_s}$ este un nod final, atunci $n_s = 1$.

Fiecărui drum $(x_i, x_{i, n_1}, x_{i, n_1, n_2}, \ldots, x_{i, n_1, n_2, \ldots, n_s})$ de lungime s care uneşte rădăcina x_i cu un nod final $x_{i, n_1, n_2 \ldots, n_s}$ $(n_s = 1)$ îi punem în corespondenţă o partiţie a lui X realizată din s mulţimi : $C_i^{(n_1)}$, $C^{(n_2)}_{y_{i, n_1}}, \ldots$ $\ldots, C^{(n_s)}_{y_{i, n_1 \ldots, n_{s-1}}}$ asociate arcelor acestui drum.

Din modul de construcţie a arborescenţei G rezultă că aceste mulţimi sînt două cîte două disjuncte şi $X = C_i^{(n_1)} \cup C^{(n_2)}_{y_{i, n_1}} \cup \ldots$ $\ldots \cup C^{(n_s)}_{y_{i, n_1, \ldots, n_{s-1}}}$, deoarece nodul $x_{i, n_1 n_2, \ldots, n_s}$ este un nod final al arborescenţei.

TEOREMA 3. *Dacă se construiesc partiţiile lui X asociate tuturor drumurilor care unesc nodul iniţial cu nodurile finale ale arborescenţei G construite mai sus, atunci mulţimea acestor partiţii conţine cel puţin o partiţie minimală indusă în mulţimea X de o relaţie de echivalenţă $\overline{R} \subset R$.*

Rezultă că toate partiţiile asociate drumurilor de lungime minimă (care conţin un număr minim de arce) care unesc nodul iniţial (rădăcina) x_i cu nodurile finale ale arborescenţei G sînt soluţii ale problemei enunţate mai sus.

Demonstraţie. Fie o partiţie cu un număr minim de clase indusă în mulţimea X de o relaţie de echivalenţă $\overline{R} \subset R$, formată din r clase $I_1, I_2, \ldots, I_r$, deci $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_r = X$ şi $I_l \cap I_m = \varnothing$.

Elementul x_i se găseşte într-o clasă I_q $(1 \leqslant q \leqslant r)$.

Făcînd o schimbare de notaţie, putem presupune că $x_i \in I_1$.

Deoarece $C_i^{(1)}, C_i^{(2)}, \ldots, C_i^{(r(i))}$ sînt toate clasele maximale distincte ale elementului x_i în mulţimea X în raport cu relaţia R, rezultă că există $1 \leqslant m_1 \leqslant r(i)$ aşa ca $I_1 \subset C_i^{(m_1)}$. Dacă $I_1 \neq C_i^{(m_1)}$, completăm clasa I_1 pînă la $C_i^{(m_1)}$ extrăgînd din clasele rămase $I_2, I_3, \ldots, I_r$ toate elementele lui $C_i^{(m_1)}$ care nu aparţin lui I_1.

Se obţine astfel o nouă partiţie $C_i^{(m_1)}, I'_2, \ldots, I'_r$ a mulţimii X cu proprietatea că $I'_j \times I'_j \subset R$, $I'_j \subset I_j$ şi $I'_j \neq \varnothing$ pentru orice $j = 2, \ldots, r$, deci oricare două elemente dintr-o clasă sînt în relaţia R şi numărul claselor este egal cu r (dacă una din clasele $I'_2, \ldots, I'_r$ ar fi mulţimea vidă, atunci $I_1, I_2, \ldots, I_r$ n-ar mai fi o partiţie a mulţimii X cu un număr minim de clase).

Făcînd o schimbare de notaţie putem presupune că $y_{i, m_1} \in I'_2$ şi deci există un indice $1 \leqslant m_2 \leqslant r_{i, m_1}(y_{i, m_1})$ aşa încît $I'_2 \subset C^{(m_2)}_{y_{i, m_1}}$. Completînd clasa I'_2 pînă la $C^{(m_2)}_{y_{i, m_1}}$ se obţine o nouă partiţie a mulţimii X cu r clase : $C_i^{(m_1)}, C^{(m_2)}_{y_{i, m_1}}, I_3^{('')}, \ldots, I_r^{('')}$ cu proprietatea că oricare două elemente din fiecare clasă sînt în relaţia R iar fiecare din mulţimile $I_3^{('')}, \ldots$ $\ldots, I_r^{('')}$ conţine cel puţin un element.

În final, ajungem la o partiție $C_i^{(m_1)}$, $C_{y_{i,m_1}}^{(m_2)}$, $C_{y_{i,m_1,m_2}}^{(m_3)}$, ..., $C_{y_{i,m_1,\ldots,m_{r-2}}}^{(m_{r-1})}$, $I_r^{(r-1)}$ a mulțimii X cu r clase cu proprietatea că oricare două elemente din fiecare clasă sînt în relația R.

Oricare ar fi $y_{i,m_1,\ldots,m_{r-2},k} \in I_r^{(r-1)} \neq \emptyset$, clasa maximală a elementului $y_{i,m_1,\ldots,m_{r-2},k}$ în mulțimea $I_r^{(r-1)} \subset X$ în raport cu relația reflexivă și simetrică indusă de R în mulțimea $I_r^{(r-1)}$ coincide cu $I_r^{(r-1)}$, deoarece dacă $y_{i,m_1,\ldots,m_{r-2},k_1} \in I_r^{(r-1)}$ și $y_{i,m_1,\ldots,m_{r-2},k_2} \in I_r^{(r-1)}$, atunci $(y_{i,m_1,\ldots,m_{r-2},k_1}, y_{i,m_1,\ldots,m_{r-2},k_2}) \in R$, deci $r_{i,m_1\ldots,m_{r-1}}$ $(y_{i,m_1\ldots,m_{r-2},k}) = 1$, unde prin $y_{i,m_1,\ldots,m_{r-2},k}$ am notat un element oarecare din $I_r^{(r-1)}$ $(1 \leqslant k \leqslant \mathrm{Card}\,(I_r^{(r-1)}))$.

În particular, deoarece prin construcția arborescenței G $y_{i,m_1,\ldots,m_{r-2},m_{r-1}} \in X \setminus C_{i,m_1,\ldots,m_{r-1}} = I_r^{(r-1)}$, rezultă că $r_{i,m_1,\ldots,m_{r-1}}$ $(y_{i,m_1,\ldots,m_{r-1}}) = 1$. Mai rezultă că $\Gamma(x_{i,m_1,\ldots,m_{r-1}}) = x_{i,m_1,\ldots,m_{r-1},m_r}$, unde $m_r = 1$, $\Gamma(x_{i,m_1,\ldots,m_r}) = \emptyset$ și $I_r^{(r-1)} = C_{y_{i,m_1,\ldots,m_{r-1}}}^{(m_r)}$, deci de-a lungul drumului $(x_i, x_{i,m_1}, x_{i,m_1,m_2}, \ldots, x_{i,m_1,m_2,\ldots,m_r})$ din arborele $G = (Y, \Gamma)$ am obținut o partiție cu un număr minim (egal cu r) de clase care satisfac condițiile problemei : $C_i^{(m_1)}$, $C_{y_i,m_1}^{(m_2)}$, $C_{y_{i,m_1 m_2}}^{(m_3)}, \ldots, C_{y_{i,m_1,\ldots,m_{r-1}}}^{(m_r)}$, unde $m_r = 1$, c.c.t.d.

În particular, dacă în mulțimea X există un element x_i cu o singură clasă maximală C_i, dacă în mulțimea $X \setminus C_i$ există un element y_1 cu o singură clasă maximală C_{y_1}, în raport cu relația indusă de R în mulțimea $X \setminus C_i$ ș.a.m.d.; în mulțimea $C_{y_{q+1}} = X \setminus (C_i \cup \bigcup_{j=1}^{q} C_{y_j})$ oricare două elemente sînt în relația R, adică oricare element din $C_{y_{q+1}}$ are o singură clasă maximală în raport cu relația $R \cap C_{y_{q+1}} \times C_{y_{q+1}}$ care este $C_{y_{q+1}}$, atunci C_i, C_{y_1}, $C_{y_2}, \ldots, C_{y_q}$, $C_{y_{q+1}}$ constituie o partiție minimală a lui X care satisface condițiile problemei.

TEOREMA 4. *Fie* $x_q \in X$ *și* $C_q^{(1)}, C_q^{(2)}, \ldots, C_q^{(r(q))}$ *toate clasele maximale distincte ale elementului* x_q *în raport cu relația simetrică și reflexivă* $R \subset X \times X$. *Dacă* X_1 *este o submulțime proprie a lui* X *care conține pe* x_q, *atunci toate clasele maximale ale elementului* x_q *în mulțimea* X_1 *(în raport cu relația simetrică și reflexivă* $R_1 = R \cap X_1 \times X_1$*) sînt conținute în șirul de mulțimi :* $X_1 \cap C_q^{(1)}, X_1 \cap C_q^{(2)}, \ldots, X_1 \cap C_q^{(r(q))}$.

Eliminînd din acest șir mulțimile conținute în alte mulțimi din șir, rezultă că se obțin toate clasele maximale ale elementului x_q în raport cu relația R_1, deoarece orice mulțime din șir are elementele două cîte două în relația R_1, deci este sau maximală sau este conținută într-o clasă maximală.

Demonstrație. Fie $C_{1,q} \subset X_1$ o clasă maximală a elementului $x_q \in X_1$ în raport cu relația $R_1 = R \cap X_1 \times X_1 \subset R$. Deoarece $C_{1,q}$ este o clasă de elemente care se găsesc două cîte două în relația R_1, deci în relația R, rezultă că este sau maximală ($C_{1,q} = C_q^{(j)}$) sau poate fi completată pînă la o clasă maximală $C_q^{(j)}$ $(1 \leqslant j \leqslant r(q))$ în raport cu relația R.

Deci $C_{1,q} \subseteq C_q^{(j)}$ și $C_q^{(j)} \cap X_1 = C_{1,q}$ deoarece $C_{1,q}$ este o clasă maximală în raport cu relația R_1 în X_1, adică clasa $C_{1,q}$ se găsește în șirul scris mai sus, c.c.t.d.

Folosind acest rezultat, construcția arborescenței $G = (Y, \Gamma)$ se face plecînd de la clasele maximale ale elementelor $x_1, x_2, \ldots, x_p$ în raport cu relația R și apoi prin intersecții de mulțimi și comparații se determină clasele maximale în raport cu diferitele restricții ale relației R.

Clasele de elemente care se găsesc în relația R se pot reprezenta în calculatorul electronic ca niște numere întregi folosind o codificare convenabilă.

De exemplu, clasa $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_s}\} \subset X$ se poate reprezenta ca numărul întreg zecimal $\sum\limits_{i=1}^{s} 2^{p-\alpha_i}$, pozițiile ocupate cu 1 din reprezentarea sa binară indicînd elementele care intră în clasa respectivă ($p = \text{Card } X$).

Folosind această reprezentare, toate clasele în care intră elementul x_q se pot reprezenta sub forma mulțimii de numere :

$$\left\{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i 2^{p-i} \,\middle|\, \alpha_i \in \{0,1\} \,\&\, ((\alpha_i = 1) \Rightarrow (x_q, x_i) \in R)\right\} \setminus \bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{p-1} \left\{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i 2^{p-i} \,\middle|\, \alpha_i \in \{0,1\} \,\&\, ((\alpha_j = 1) \Rightarrow (\exists s)\,(s > j \,\&\, \alpha_s = 1 \,\&\, (x_s, x_j) \notin R))\right\}.$$

Comparînd toate aceste numere scrise în formă binară se pot determina toate clasele maximale ale elementului x_q.

În problema clasificării pe un nivel intervine relația R sub forma : $(x_i, x_j) \in R_d$ dacă distanța Hamming a vectorilor linie i și j din matricea distanțelor este mai mică decît un număr întreg și pozitiv d, adică $w(v_i, v_j) \leqslant d$.

Se pune problema clasificării pe un nivel a mulțimii finite X (în raport cu un număr finit de proprietăți) cu un număr minim de clase.

În problema sintezei automatelor finite secvențiale cu un număr minim de stări interne, $(X_i, X_j) \in R$ dacă X_i și X_j sînt stări interne care pot fi egale în urma analizei funcțiilor $f : K \times X \to X$ și $g : K \times X \to W$, unde K este mulțimea comenzilor, W mulțimea execuțiilor iar X mulțimea stărilor interne ale unui automat $\mathfrak{A}$ (K, X, W, f, g).

Cu excepția teoremei 1 rezultatele obținute rămîn valabile și dacă relația R nu este reflexivă.

Pentru un graf finit $G = (X, \Gamma)$ notăm cu U mulțimea arcelor grafului și definim $(x, y) \in R$ dacă $(x, y) \in U$ sau dacă $(y, x) \in U$ ca arce.

În acest caz relația R nu mai este reflexivă și problema realizării unei partiții a lui X induse de o relație simetrică și tranzitivă $\overline{R} \subset R$ cu un număr minim de clase devine problema determinării unui număr minim de subgrafuri complete ale grafului G care cuprind împreună toate vîrfurile grafului G.

Această problemă coincide cu problema determinării unui graf parțial (X, Δ) al grafului (X, Γ) ale cărui componente să fie subgrafuri complete ale grafului (X, Δ) și să determine o partiție a lui X cu un număr minim de clase. În cazul descompunerii minimale în lanțuri a unei mulțimi finite parțial ordonate se definește $(x, y) \in R$ dacă $x < y$ sau dacă $y < x$. Pentru un graf finit fără bucle $G = (X, \Gamma)$ dacă se definește relația simetrică și reflexivă $(x, y) \in R$ dacă $x \notin \Gamma y$ și $y \notin \Gamma x$, atunci problema realizării unei partiții a lui X cu un număr minim de clase devine problema colorării vîrfurilor grafului G cu un număr minim de culori astfel încît două vîrfuri unite printr-un arc să nu fie colorate cu aceeași culoare.

În încheiere țin să mulțumesc tov. conf. Paul Constantinescu pentru discuțiile utile avute în legătură cu unele probleme de optimizare în teoria matematică a clasificării.

Primită la redacție la 2 martie 1967

Facultatea de matematică și mecanică
a Universității din București
Str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod, Paris, 1963.
2. S. H. Caldwell, *Switching Circuits and Logical Design*, Wiley, New York, 1958.
3. M. Carvallo, *Principes et applications de l'analyse Booléenne*. Gauthier-Villars, Paris, 1965.
4. P. Constantinescu, *The classification of a set of elements with respect to a set of properties*. The Computer Journal, **8**, *4*, January, 1966.
5. P. Constantinescu, *On Cluster Analysis*, British Journal for Statistical Psychology (sub tipar).
6. P. Constantinescu, *Asupra clasificării unei mulțimi de elemente în raport cu o mulțime de proprietăți*. Studii și cercetări de calcul economic și cibernetică economică (sub tipar).
7. R. P. Dilworth, *A decomposition theorem for partially ordered sets*. Annales of Mathematics, **51** (1950).
8. R. Fortet, *Applications de l'algèbre de Boole en recherche opérationnelle*. Revue française de recherche opérationnelle, **4** (1960).
9. D. R. Fulkerson, *Note on Dilworth's theorem for partially ordered sets*, Proc. Amer. Math. Soc., **7**, *4* (1956).
10. D. A. Huffman, *The synthesis of sequential switching circuits*. J. Franklin Inst., **257**, *3* și *4* (1954).
11. P. L. Ivănescu, *On the minimal decomposition of finite partially ordered sets in chains*. Rev. roum. math. pures et appl., **9**, *10* (1964).
12. P. L. Ivănescu, I. Rosenberg, S. Rudeanu, *Asupra determinării minimelor funcțiilor pseudobooleene*. St. cerc. mat. **14**, *3*, (1963).
13. P. L. Ivănescu, I. Rosenberg, S. Rudeanu, *Применение дискретного линейного программирования к минимизации булевых функций*. Revue roum. math. pures et appl., **8**, *3*, (1963).
14. А. Г. Лунц, *Алгебраические методы анализа и синтеза контактных схем*. Изв. Акад. наук СССР, Сер. матем., **16**, 1952.
15. K. Maghout, *Applications de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques*. Cahiers du Centre d'études de rech. opérationnelle, Bruxelles, **5**, 1—2 (1963).
16. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate*. Ed. tehnică, București, 1959.
17. Gr. C. Moisil, *Funcționarea reală a schemelor cu contacte și relee*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1965.
18. J. Weissman, *Boolean algebra, map coloring and interconnections*, Am. Math.Monthly, **69**, (1962).

TEOREMA DE STRUCTURĂ PENTRU L. C. A.-GRUPURI COMPACT GENERATE[1]

DE

LASZLÓ ZSIDÓ

Se dă o demonstrație simplă, bazată pe teoria dualității a teoremei de structură pentru l.c.a.-grupuri compact generate. Se obține ca un corolar teorema principală de structură a l.c.a. grupurilor.

Vom demonstra :

TEOREMA S. *Orice l.c.a. grup compact generat G este topologic izomorf cu $H \oplus R^n \oplus Z^k$, unde H este un grup abelian compact, R este grupul aditiv al numerelor reale, Z este grupul aditiv al numerelor întregi iar n, k sînt numere întregi nenegative.*

Această teoremă a fost stabilită de Pontriaghin și van Kampen și a fost folosită de aceștia pentru demonstrarea teoremei de dualitate. Demonstrația inițială a teoremei S, ca și variantele ei actuale ([3], § 39; [1], 9.8), este foarte laborioasă și nu folosește teoria dualității. Pe de altă parte, teoria dualității se construiește în analiza armonică fără ajutorul teoremei S, dar teorema S este foarte utilă în multe probleme de analiză armonică. În cele ce urmează demonstrăm teorema S cu ajutorul teoriei dualității, referindu-ne la expunerea din [5]. Demonstrația noastră are aproximativ același grad de dificultate cu demonstrația teoremei principale de structură din [4], dar este mult mai simplă decît demonstrațiile amintite ale teoremei S.

1. LEMĂ. *Fie G un l.c.a. grup compact generat. Atunci există un număr natural m astfel încît G conține un subgrup Λ izomorf topologic cu Z^m și G/Λ este compact.*

Această lemă este o formă slăbită a teoremei 11.18 din [5].

2. *Spunem că un grup abelian G este divizibil dacă pentru orice $x \in G$ și $k \in Z$ există $y \in G$ cu $ky = x$.*

---

[1] Urmînd pe Rudin [4], prin l.c.a.-grup am prescurtat expresia „grup abelian local compact".

LEMĂ. *Fie G un grup abelian şi G_1 un subgrup divizibil al său. Atunci există un subgrup G_2 al lui G astfel încît $G = G_1 \oplus G_2$.*

Această lemă este bine cunoscută şi se găseşte de exemplu în [2], pag. 174. Noi dăm o demonstraţie scurtă, folosind propoziţia 9.41 (1) din [5]. Într-adevăr, conform acestei propoziţii, aplicaţia identică $G_1 \to G_1$ se prelungeşte pînă la un homomorfism $p : G \to G_1$. Deoarece $p^2 = p$ şi $p\,(G) = G_1$, p este un proiector al lui G pe G_1 deci G_1 este sumand direct.

Fie G_1, G_2 grupuri topologice abeliene. Spunem că G_1 şi G_2 sînt *local izomorfe* dacă există un homeomorfism φ al unei vecinătăţi U_1 a originii în G_1 pe o vecinătate U_2 a originii în G_2 astfel încît dacă $x, y,\ x + y \in U$, atunci

$$\varphi\,(x + y) = \varphi\,(x) + \varphi\,(y).$$

Evident, relaţia de izomorfism local este o relaţie de echivalenţă.

3. LEMĂ. *Dacă G este un grup topologic abelian şi D un subgrup discret al său, atunci G şi G/D sînt local izomorfe.*

4. LEMĂ. *Dacă G este un grup topologic abelian local izomorf cu R^m, atunci există un homomorfism continuu şi deschis $\varphi : R^m \to G$.*

Lemele 3 şi 4 se găsesc în [5] (propoziţiile 11.11 şi 11.12).

5. Următoarea lemă este de fapt teorema S în cazul grupurilor cît ale lui R prin subgrupuri închise :

LEMĂ. *Dacă F este un subgrup închis al lui R^m, atunci R^m/F este topologic izomorf cu $R^n \oplus K$, unde n este un număr natural, iar K un grup abelian compact.*

Demonstraţie. Considerînd pe R^m ca spaţiu vectorial real, fie k numărul maximal de elemente liniar independente din F şi $\{e_1, \ldots, e_m\}$ o bază a lui R^m astfel încît $\{e_1, \ldots, e_k\} \subset F$. Atunci $F \subset \sum\limits_{i=1}^{k} R\, e_i$, deci notînd

$$K = \sum_{i=1}^{k} R\, e_i/F,$$

avem $R^m/F = R^{m-k} \oplus K$. Pe de altă parte, cum $\sum\limits_{i=1}^{k} Z\, e_i \subset F$, K este imaginea canonică a mulţimii compacte $\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i\, e_i\,;\ \lambda_i \in R,\ |\lambda_i| \leqslant 1 \text{ pentru orice } i\right\}$, deci este compact. Prin urmare, punînd $n = m - k$, obţinem afirmaţia lemei.

Teorema S în cazul grupurilor cît ale lui Z, adică în cazul discret al grupurilor finit generate este un corolar al teoremei de structură a grupurilor abeliene finit generate (vezi de exemplu [2], pag. 155). Noi vom da o demonstraţie analoagă demonstraţiei lemei precedente.

LEMĂ. *Dacă F este un subgrup al lui Z^m, atunci Z^m/F este izomorf cu $Z^n \oplus K$, unde n este un număr natural $\leqslant m$ iar K un grup finit.*

Demonstraţie. Dacă $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ este o bază a Z-modulului Z^m, definim pe $k(B)$ ca fiind numărul acelor e_i pentru care există $n_i \in Z$ cu $n_i\, e_i \in F$. Deoarece $k\,(B) \leqslant m$, există o bază B astfel încît $k\,(B) = k$ este maximal. Putem presupune că pentru $i \leqslant k$ există $n_i \in Z$ cu $n_i e_i \in F$. Arătăm atunci că $F \subset \sum_{i=1}^{k} Z\, e_i$. Într-adevăr, în caz contrar există $x = \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i\, e_i \neq 0$ în F. Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m$ şi $\mu_i = \lambda_i/d$. Atunci punînd $y = \sum_{k+1}^{m} \mu_i\, e_i$, $x = \mathrm{d}y$, şi cum cel mai mare divizor comun al numerelor $\mu_{k+1}, \ldots, \mu_m$ este 1, există întregi η_i cu $\sum_{k+1}^{m} \mu_i\, \eta_i = 1$. Se verifică uşor că aplicaţia $\sum_{k+1}^{m} \mu_i n_i \rightarrow \left(\sum_{k+1}^{m} c_i\, n_i \right) y$ este un proiector al lui $\sum_{i=k+1}^{m} Z\; e_i$ pe Zy. Deoarece subgrupul suplimentar lui Zy, definit de acest proiector este liber (ca orice subgrup al unui grup liber) există o bază $\{f_{k+1}, \ldots, f_n\}$ a lui $\sum_{i=k+1}^{m} Z\, e_i$ astfel încît $f_{k+1} = y$, deci $df_{k+1} = x \in F$. Prin urmare pentru baza $B_1 = \{e_1, \ldots, e_k, f_{k+1}, \ldots, f_n\}$ a lui Z^m, $k\,(B_1) \geqslant k + 1$, ceea ce contrazice alegerea lui k. Astfel $F \subset \sum_{i+1}^{k} Z\, e_i$, deci notînd

$$K = \sum_{i=1}^{k} Z\, e_i/F,$$

avem $Z^m/F = Z^{m-k} \oplus K$. Pe de altă parte, K fiind imaginea canonică a mulţimii finite $\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, e_i\, ;\ \lambda_i \in Z,\ |\,\lambda_i\,| \leqslant |\,n_i\,| \text{ pentru orice } i \right\}$, este finit, deci punînd $n = m - k$, obţinem afirmaţia lemei.

Cu această pregătire putem trece la

Demonstraţia teoremei S. Conform lemei 1, G conţine un subgrup Λ topologic izomorf cu Z^m astfel încît G/Λ este compact. Notînd dualul lui G prin Γ şi anulatorul lui Λ în Γ prin $A\,(\Gamma, \Lambda)$, rezultă conform teoremei 9.6 din [5], că $A\,(\Gamma, \Lambda) = (G/\Lambda)^\wedge$ este discret şi $\Gamma/A\,(\Gamma, \Lambda) = \Lambda^\wedge$. Cum acesta este topologic izomorf cu $(Z^m)^\wedge = T^m = R^m/Z^m$, din lema 3 rezultă că Γ este local izomorf cu R^m, deci conform lemei 4 există un homomorfism continuu şi deschis $\varphi : R^m \rightarrow \Gamma$; $\varphi\,(R^m)$ este un subgrup deschis al lui Γ, izomorf topologic cu $R^m/\mathrm{Ker}\ \varphi$ deci, conform lemei 5, cu $R^n \oplus K$, unde K este compact. Pe de altă parte $\varphi\,(R^m)$ este divizibil, deci după lema 2 există un subgrup D al lui Γ astfel încît Γ este suma directă algebrică a lui $\varphi\,(R^m)$ şi D. Cum $\varphi\,(R^m)$ este deschis, D este discret şi suma directă este topologică. Astfel Γ este topologic izomorf cu $D \oplus R^n \oplus K$, unde D este discret, iar K compact, deci, conf. teoremelor 9.20 şi 5.1 din [5], G este topologic izomorf cu $K_0 \oplus R^n \oplus D_0$, unde $K_0 = D^\wedge$ este compact, iar $D_0 = K^\wedge$ discret. G fiind compact generat, D_0 este finit generat, deci, conf. lemei 6, este izomorf cu $Z^k \oplus K_1$, unde K_1 este finit. Astfel, punînd $H = K_0 \oplus K_1$, H este compact şi G este topologic izomorf cu $H \oplus R^n \oplus Z^k$, q. e. d.

Din teorema S rezultă imediat *teorema principală de structură* ([4], 2.4.1; [5], 11.19):

Orice l.c.a. - grup are un subgrup deschis, topologic izomorf cu $H \oplus R^n$, unde H este un grup compact, iar n un număr natural".

Într-adevăr, este suficient să observăm că în orice l.c.a. - grup, subgrupul generat de o vecinătate compactă este compact generat şi deschis.

Notă. În [1], pag. 106, se menţionează că o demonstraţie a teoremei S cu ajutorul teoriei dualităţii se află în [6], pag. 110. Noi nu am putut consulta această lucrare.

Primită la redacţie la 19 mai 1967

Facultatea de matematică
şi mecanică a Universităţii
din Bucureşti, str. Academiei nr. 14.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Hewitt, K. Ross, *Abstract harmonic analysis*, vol I, 1963.
2. A. Kuroş, *Teoria grupurilor*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
3. L. Pontriaghin, *Grupuri continue* (în limba rusă), 1954.
4. W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, 1962.
5. Ş. Strătilă, *Introducere în analiza armonică*. St. cerc. mat. **19**, *8*, (1967).
6. A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, 1938.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita epetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Exlicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1967 OKT 13

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, ARISTIDE DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funţională**, 1967, 594 p., 31 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aleatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

I. SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

M. STOKA, **Geometria integrală**, 1967, 239 p., 9,75 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 1966, 669 p., 38 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 9, P. 1249–1398, BUCUREŞTI, 1967

I. P. „Informaţia" – c. 5658

43831

Lei 12.—

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

10

TOMUL 19

1967

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, București

TOM. 19, Nr. 10
1967

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVT DOKUMENTÁCIÓS 1863

SUMAR

Pag.

MIRCEA CÎRNU, Asupra transformării Fourier a distribuțiilor și funcțiilor distribuționale 1401

HARRY COHN, Momente de oprire pentru șiruri de variabile aleatoare 1407

MARIANA CRIȘAN-ZVERCA, Pseudooperații la mașinile electronice cifrice cu virgulă mobilă 1413

HORIA I. ENE, Asupra unei probleme la limită care apare în mișcarea unui fluid perfect în prezența unui corp poros neomogen 1425

B. JANKÓ, M. BALÁZS, Despre metoda coardei pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare în spații normate 1433

IOAN POP, Asupra problemei lui Rayleigh cu sucțiune 1437

I. L. POPESCU, Asupra unor corecții de compresibilitate în dinamica gazelor 1443

ALEXANDRU RADU, Obiecte de prezentare finită în categoria prefasciculelor abeliene 1449

G. SÂMBOAN, Procese gaussiene generalizate 1455

ȘERBAN SĂNDULESCU, Stabilirea ecuației unei pînze de jet, care prelungește lateral o aripă așezată în curent incompresibil 1459

FELICIA STANCU, Asupra unor formule de interpolare și integrare numerică pentru două variabile 1467

ȘERBAN STRĂTILĂ, Elemente de analiză armonică (II) . . . 1473

G. THEILER, O condiție necesară și suficientă de ergodicitate mai finisată, pentru lanțurile Markov omogene cu un număr finit de stări, respectiv pentru „lanțurile constante" cu un număr arbitrar de stări 1513

C. TUDOR, Transformarea Laplace a distribuțiilor 1521

LÁSZLÓ ZSIDÓ, Un criteriu de conjugare 1537

INDEX ALFABETIC 1539

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 10, P. 1399-1544, BUCUREȘTI, 1967

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS 1883

ASUPRA TRANSFORMĂRII FOURIER A DISTRIBUȚIILOR ȘI FUNCȚIILOR DISTRIBUȚIONALE

DE

MIRCEA CÎRNU

În această Notă se arată că teoremele despre transformarea Fourier a convoluției distribuțiilor se pot obține, cu ajutorul teoriei funcțiilor distribuționale compozabile, din teorema despre transformarea Fourier a produsului funcțiilor distribuționale compozabile, stabilită anterior de autor.

Teorema clasică despre transformarea Fourier a convoluției funcțiilor a fost generalizată pentru distribuții temperate de către L. Schwartz (teorema XV, [1], vol. II) iar apoi pentru distribuții oarecari de către Ghelfand și Șilov (teoremele 1 și 2, [2], pag. 179, 180).

În [3] am generalizat această teoremă pentru funcții distribuționale compozabile (teorema 4, [3]) :

„Pentru orice $\bar{u}$, $\bar{v} \in \mathcal{F}\,\mathcal{C}\,(\mathcal{D}, \mathcal{D})$, avem

$$\mathcal{F}\,(\bar{u} \underset{11}{\circ} \bar{v}) = \mathcal{F}\,\bar{u} \underset{22}{\circ} \mathcal{F}\,\bar{v}\text{''}\,{}^{1)}.$$

În [3] am arătat că din această teoremă se obține teorema 2 din [4], pag. 180, dar am făcut acest lucru folosind partea esențială a demonstrației acesteia din urmă, deci nu am dat o nouă demonstrație acestei teoreme.

Scopul prezentei Note este de a arăta că teoremele 1 și 2 din [2] (pag. 179, 180) rezultă din teorema 4 din [3], numai pe baza unor propoziții din teoria funcțiilor distribuționale compozabile ([5], [6], [3] și prezenta Notă).

---

1) Pentru noțiunile și notațiile folosite în această notă a se vedea [6] și [3]. În [3] vom schimba semnul $\circ$ care apare aici și în [6].

ST. CERC. MAT., TOM. 19, Nr. 10, P. 1401–1405, BUCUREȘTI, 1967

Vom folosi în cele ce urmează, între altele, următoarea analogă a propoziției 2 din [6] la cazul compozabilității ($\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}$) [2]) și pe care o vom numi „propoziția 2, [6], pentru $\mathcal{Z}$" :

„Dacă $f(s)$ este o funcție complexă de variabilă reală, atunci funcția ultradistribuțională $\{\overline{f(s)} \cdot \delta^s_{\mathcal{Z}}\}_{s\in\mathcal{R}}$ este compozabilă ($\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}$) dacă și numai dacă $f(s)$ este multiplicator în $\mathcal{Z}$. În acest caz

$$\{\overline{f(s)} \cdot \delta^s_{\mathcal{Z}}\}_{s\in\mathcal{R}} \underset{22}{\circ} v = f \cdot v, \quad v \in \mathcal{Z}'".$$

De asemenea vom mai folosi următoarele formule simple, pe care le-am mai folosit și în [3] :

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}(\{e^{it\sigma}\}_{t\in\mathcal{R}} \underset{21}{\circ} \{e^{-i\sigma s}\}_{s\in\mathcal{R}}) = \{\delta^s(t)\}_{s\in\mathcal{R}},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}(\{e^{it\sigma}\}_{t\in\mathcal{R}} \underset{21}{\circ} \{e^{-itr}\}_{r\in\mathcal{R}}) = \{\delta^r_{\mathcal{Z}}(\sigma)\}_{r\in\mathcal{R}}.$$

Vom stabili mai întîi cîteva propoziții :

PROPOZIȚIA 1. *Dacă $u \in \mathcal{D}'$ este un convolutor, avem*

$$\{(u * \delta^r)(t)\}_{r\in\mathcal{R}} \underset{11}{\circ} \{e^{-irs}\}_{s\in\mathcal{R}} = \{e^{-itr}\}_{r\in\mathcal{R}} \underset{12}{\circ} \{\overline{(\mathcal{F}u)(s)} \cdot \delta^s_{\mathcal{Z}}(r)\}_{s\in\mathcal{R}}$$

Demonstrație. Deoarece u este un convolutor, deci (conform [7], teorema 5, sau [8]) o distribuție cu suport compact, rezultă din propoziția 5, pg. 219, [4] că $(\mathcal{F}u)(s)$ este o ultradistribuție de tip funcție, deci are sens funcția ultradistribuțională $\{\overline{(\mathcal{F}u)(s)} \cdot \delta^s_{\mathcal{Z}}(r)\}_{s\in\mathcal{R}}$.

Din propoziția 1, [5], rezultă că $\{(u * \delta^r)(t)\}_{r\in\mathcal{R}} \in \mathcal{F}\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$, iar din propoziția 2, [3], avem că $\{e^{-itr}\}_{r\in\mathcal{R}} \in \mathcal{F}\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathcal{Z})$, deci operațiile din formula din enunț au sens.

Pentru $\varphi \in \mathcal{D}$ avem, conform propoziției 1, [2],

$$(\{(u * \delta^r)(t)\}_{r\in\mathcal{R}} \underset{11}{\circ} e^{-isr}, \ \varphi(t)) = ((u * e^{-irs})(t), \varphi(t)) =$$

$$= (u(\tau), (e^{-irs}, \varphi(\tau + r))) = (u(\tau), (e^{-i(t-\tau)s}, \varphi(t))) =$$

$$= (u(\tau), e^{i\tau s}(e^{-its}, \varphi(t))) = (u(\tau), e^{i\tau s})(e^{-its}, \varphi(t)).$$

---

[2]) În această lucrare considerăm „cazul complex" : funcțiile și distribuțiile au valori complexe, dar vom considera că funcțiile din $\mathcal{Z}$ au variabilă reală. Elementele din $\mathcal{Z}'$ le numim ultradistribuții. Propoziția 2, [6], pentru $\mathcal{Z}$ se demonstrează analog cu propoziția 2, [6]. Ea rămîne valabilă și într-un cadru mai general. Notăm cu $\delta^s_{\mathcal{Z}}$ ultradistribuția lui Dirac pe $\mathcal{Z}$, definită de formula :

$$(\delta^s_{\mathcal{Z}}(\sigma), \psi(\sigma)) = \psi(s), \quad \forall \ \psi \in \mathcal{Z}.$$

Folosind propoziția 2, [3], obținem că

$$\{e^{-itr}\}_{r\in\mathcal{R}} \underset{12}{\circ} (\overline{(\mathcal{F}u)(s)}\cdot\delta^{s}_{\mathcal{Z}}(r)) = 2\pi\,\overline{(\mathcal{F}u)(s)}\cdot\mathcal{F}^{-1}(\delta^{s}_{\mathcal{Z}}(r)) =$$

$$= \overline{(\mathcal{F}u)(s)}\cdot e^{-its},$$

de unde, folosind propoziția 5, pag. 219, [4],

$$(\{e^{-itr}\}_{r\in\mathcal{R}} \underset{12}{\circ} (\overline{(\mathcal{F}u)(s)}\cdot\delta^{s}(r)),\ \varphi(t)) = (\overline{(\mathcal{F}u)(s)}\cdot e^{-its},\ \varphi(t)) =$$

$$= (\overline{(u(\tau),\ e^{i\overline{\tau s}})}\cdot e^{-its},\ \varphi(t)) = (u(\tau),\ e^{-i\tau s})\cdot(e^{-its},\ \varphi(t)).$$

Comparînd cele două rezultate, obținem formula din enunțul propoziției.

PROPOZIȚIA 2. *Dacă $v\in\mathcal{Z}'$ este multiplicator, avem*

$$\{\overline{v(s)}\cdot\delta^{s}_{\mathcal{Z}}(\sigma)\}_{s\in\mathcal{R}} \underset{22}{\circ} \{e^{irs}\}_{r\in\mathcal{R}} = \{e^{i\sigma s}\}_{s\in\mathcal{R}} \underset{21}{\circ} \{((\mathcal{F}^{-1}v)*\delta^{r})(s)\}_{r\in\mathcal{R}}.$$

Demonstrație. Deoarece v este multiplicator, $\{\overline{v(s)}\cdot\delta^{s}_{\mathcal{Z}}(\sigma)\}_{s\in\mathcal{R}}\in\mathcal{F}\mathcal{C}(\mathcal{Z},\mathcal{Z})$ (conform propoziției 2, [6] pentru $\mathcal{Z}$) și cum $\{e^{i\sigma s}\}_{s\in\mathcal{R}}\in\mathcal{F}\mathcal{C}(\mathcal{Z},\mathcal{D})$ (conform propoziției 2, [3]), rezultă că operațiile din formula din enunț au sens.

Pentru $\psi\in\mathcal{Z}$ avem, conform propoziției 2, [6], pentru $\mathcal{Z}$,

$$(\{\overline{v(s)}\cdot\delta^{s}_{\mathcal{Z}}(\sigma)\}_{s\in\mathcal{R}} \underset{22}{\circ} e^{irs},\ \psi(\sigma)) = (v(\sigma)\cdot e^{ir\sigma},\ \psi(\sigma)).$$

Pe de altă parte, conform propoziției 2, [3], avem

$$(\{e^{i\sigma s}\}_{s\in\mathcal{R}} \underset{21}{\circ} ((\mathcal{F}^{-1}v)*\delta^{r})(s),\ \psi(\sigma)) =$$

$$= (\mathcal{F}(((\mathcal{F}^{-1}v)*\delta^{r})(s)),\ \psi(\sigma)) = 2\pi\,((((\mathcal{F}^{-1}v)*\delta^{r})(s),\ (\mathcal{F}^{-1}\psi)(s)) =$$

$$= 2\pi\,((\mathcal{F}^{-1}v)(s),\ (\mathcal{F}^{-1}\psi)(s+r)) = (v(\sigma),\ e^{-ir\sigma}\psi(\sigma)) =$$

$$= (v(\sigma)\cdot e^{ir\sigma},\ \psi(\sigma)),$$

unde am folosit relația evidentă

$$\mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}\psi)(s+r)) = e^{-ir\sigma}\psi(\sigma).$$

Comparînd cele două rezultate, obținem formula din enunțul propoziției.

PROPOZIȚIA 3. *Dacă $u\in\mathcal{D}'$ este un convolutor în $\mathcal{D}$, atunci $\mathcal{F}u$ este multiplicator în $\mathcal{Z}$ și avem*

$$\mathcal{F}(\{(u*\delta^{r})(t)\}_{r\in\mathcal{R}}) = \{\overline{(\mathcal{F}u)(s)}\cdot\delta^{s}_{\mathcal{Z}}(\sigma)\}_{s\in\mathcal{R}}.$$

Demonstrație. În virtutea teoremei 3, [3], a propoziției 1 și a formulei (2), avem

$$\mathcal{F}(\{(u*\delta^r)(t)\}_{r\in\mathcal{R}}) = \frac{1}{2\pi}\{\mathrm{e}^{it\sigma}\}_{t\in\mathcal{R}} \underset{21}{\circ} (\{(u*\delta^r)(t)\}_{r\in\mathcal{R}} \underset{11}{\circ}$$

$$\underset{11}{\circ}\{\mathrm{e}^{-irs}\}_{s\in\mathcal{R}}) = \frac{1}{2\pi}\{\mathrm{e}^{it\sigma}\}_{t\in\mathcal{R}} \underset{21}{\circ} (\{\mathrm{e}^{-itr}\}_{r\in\mathcal{R}} \underset{12}{\circ}$$

$$\underset{12}{\circ}\{\overline{(\mathcal{F}u)(s)}\cdot\delta^s_{\mathcal{Z}}(r)\}_{s\in\mathcal{R}} = \frac{1}{2\pi}(\{\mathrm{e}^{it\sigma}\}_{t\in\mathcal{R}} \underset{21}{\circ} \{\mathrm{e}^{-itr}\}_{r\in\mathcal{R}}) \underset{22}{\circ}$$

$$\underset{22}{\circ}\{\overline{(\mathcal{F}u)(s)}\cdot\delta^s_{\mathcal{Z}}(r)\}_{s\in\mathcal{R}} = \{\delta^r_{\mathcal{Z}}(\sigma)\}_{r\in\mathcal{R}} \underset{22}{\circ} \{\overline{(\mathcal{F}u)(s)}\cdot\delta^s_{\mathcal{Z}}(r)\}_{s\in\mathcal{R}} =$$

$$= \{\overline{(\mathcal{F}u)(s)}\cdot\delta^s_{\mathcal{Z}}(r)\}_{s\in\mathcal{R}}.$$

Deoarece u este convolutor, $\{u*\delta^r\}_{r\in\mathcal{R}}\in\mathcal{F}\,\mathcal{C}(\mathcal{D},\mathcal{D})$, deci (vezi observația la definiția 3 din [3])

$$\mathcal{F}(\{u*\delta^r\}_{r\in\mathcal{R}}) = \{\overline{(\mathcal{F}u)(s)}\cdot\delta^s_{\mathcal{Z}}(\sigma)\}_{s\in\mathcal{R}}\in\mathcal{F}\,\mathcal{C}(\mathcal{Z},\mathcal{Z}).$$

Din propoziția 2, [6], pentru $\mathcal{Z}$, rezultă că $\mathcal{F}u$ este multiplicator în $\mathcal{Z}$.

În mod analog, folosind în locul propoziției 1, propoziția 2 și în locul formulei (2), formula (1), obținem următoarea :

PROPOZIȚIA 4. *Dacă* $v\in\mathcal{Z}'$ *este un multiplicator în* $\mathcal{Z}$, *atunci* $\mathcal{F}^{-1}v$ *este convolutor în* $\mathcal{D}$ *și avem*

$$\mathcal{F}^{-1}(\{\overline{v\ (s)}\cdot\delta^s_{\mathcal{Z}}\}_{s\in\mathcal{R}}) = \{(\mathcal{F}^{-1}v*\delta^r)(t)\}_{r\in\mathcal{R}}.$$

TEOREMĂ (teorema 4, [3]). *Pentru orice* $\bar{\mathrm{u}}, \bar{\mathrm{v}}\in\mathcal{F}\,\mathcal{C}(\mathcal{D},\mathcal{D})$, *avem*

$$\mathcal{F}(\bar{\mathrm{u}} \underset{11}{\circ} \bar{\mathrm{v}}) = \mathcal{F}\bar{\mathrm{u}} \underset{22}{\circ} \mathcal{F}\bar{\mathrm{v}}.$$

CONSECINȚA 1 (teorema 2, pag. 180, [2]). *Dacă* $u\in\mathcal{D}'$ *este un convolutor în* $\mathcal{D}$, *atunci* $\mathcal{F}u$ *este multiplicator în* $\mathcal{Z}$ *și are loc formula*

$$\mathcal{F}(u*x) = \mathcal{F}u\cdot\mathcal{F}x,\ \forall\, x\in\mathcal{D}'.$$

Demonstrație. Prima parte a afirmației a fost demonstrată în propoziția 3.

Folosind identificările din propoziția 4, [3], precum și teorema 4, [3], propozițiile 1, [5], 4, [3], 3 și 2, [6], pentru $\mathcal{Z}$, avem pentru $\varphi\in\mathcal{D}$ fixat și $\psi = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\varphi$,

$$\mathcal{F}(u*x) = \mathcal{F}(\{\varphi(t)\cdot(u*x)\}_{t\in\mathcal{R}}) =$$

$$= \mathcal{F}(\{u*\delta^r\}_{r\in\mathcal{R}} \underset{11}{\circ} \{\varphi(t)\cdot x\}_{t\in\mathcal{R}}) =$$

$$= \mathcal{F}(\{u * \delta^r\}_{r\in\mathcal{R}}) \underset{22}{\circ} \mathcal{F}(\{\varphi(t)\cdot x\}_{t\in\mathcal{R}}) =$$

$$= \{\overline{(\mathcal{F}u)(s)}\cdot \delta^s_{\mathcal{Z}}(\sigma)\}_{s\in\mathcal{R}} \underset{22}{\circ} \{\psi(p)\cdot \mathcal{F}x\}_{p\in\mathcal{R}} =$$

$$= \{\psi(p)\cdot(\mathcal{F}u\cdot\mathcal{F}x)\}_{p\in\mathcal{R}} = \mathcal{F}u\cdot\mathcal{F}x.$$

CONSECINȚA 2 (teorema 1, pag. 179, [4]). *Dacă* $v\in\mathcal{Z}'$ *este un multiplicator în* $\mathcal{Z}$, *atunci* $\mathcal{F}^{-1}v$ *este convolutor în* $\mathcal{D}$ *și are loc formula*

$$\mathcal{F}^{-1}(v\cdot y) = \mathcal{F}^{-1}v * \mathcal{F}^{-1}y, \ \forall y\in\mathcal{Z}'.$$

Demonstrația este analogă cu cea a consecinței 1, folosind propoziția 4 în locul propoziției 3.

Primită la redacție la 6 mai 1967

Institutul de matematică al
Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. L. SCHWARZ, *Théorie des distributions.* I, II, Hermann, Paris, 1950–1951.
2. И. М. ГЕЛЬФАНД, Г. Е. ШИЛОВ, *Обобщенные функции.* Том 2, Москва, 1958.
3. M. CÎRNU, *Sur la transformation des Fourier des fonctions distributionnelles composables.* Rev. Roumaine de math. pures et appl., **1** (1968).
4. Л. ШВАРЦ, *Математические методы для физических наук.* Москва, 1965.
5. R. CRISTESCU, *Familles composables des distributions et systèmes physiques linéaires.* Rev. Roumaine de math. pures et appl., **9**, 703–711 (1964).
6. M. CÎRNU, *Quelques propriétés des fonctions distributionnelles composables.* Rev. Roumaine de math. pures et appl., **15** (1967).
7. M. ȘABAC, *Sur la structure des opérations linéaires et continues sur quelques espaces localement convexes qui interviennent dans la théorie des distributions.* Revue Roumaine de math. pures et appl., **12**, (1967).
8. I. CIORĂNESCU, *Teoreme asupra suporturilor distribuțiilor.* St. cerc. mat., **19** (1967).

MOMENTE DE OPRIRE PENTRU ŞIRURI DE VARIABILE ALEATOARE

DE

HARRY COHN

Se dă un şir de variabile aleatoare $x_1(\omega), \ldots, x_n(\omega), \ldots$ pe un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ satisfăcînd condiţia $\bigcup \{x_i(\omega) > 0\} = \Omega$ aproape sigur. Se arată că în acest caz în alegerea momentelor de oprire putem să ne limităm la clasa acelor momente de oprire pentru care $x_t > 0$ aproape sigur. Apoi se stabileşte existenţa marginilor superioară şi inferioară pentru $\sup\limits_{t\in T} E\left(\frac{S_t}{t}\right)$, unde $S_n = x_1 + \ldots + x_n$, $\{x_n\}_{n \in N^*}$ fiind un şir de variabile aleatoare asimptotice independente cu $E(x_n^2) < M$ şi T clasa tuturor momentelor de oprire.

Să presupunem că avem un joc unipersonal în care putem opri aleator după o regulă dată şi că recompensa obţinută atunci cînd rezultatele experimentului sînt $x_1(\omega), \ldots, x_n(\omega)$ este $y_n(\omega)$ (variabile aleatoare definite pe cîmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$). Ne punem problema de a găsi proprietăţi privind comportarea lui $E(y_t)$ în anumite presupuneri asupra şirului $y_1(\omega), \ldots, y_n(\omega), \ldots$

DEFINIŢIE. Un moment de oprire $t(\omega)$ este o variabilă aleatoare cu valori întregi şi pozitive, care satisface următoarele proprietăţi:

1° $$\{\omega : t(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$$

$\mathcal{F}_n$ fiind σ-algebra generată de $y_1(\omega), \ldots, y_n(\omega)$.

2° $$P(\{\omega : t(\omega) < \infty\}) = 1.$$

Să notăm prin T familia tuturor momentelor de oprire.

TEOREMA 1. *Dacă* $y_1(\omega), \ldots, y_n(\omega), \ldots$ *este un şir de variabile aleatoare astfel ca* $\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} \{\omega : y_i(\omega) > 0\} = \Omega$, *aproape sigur pentru orice* $n \in N^*$, *atunci oricărui moment de oprire* $t(\omega)$ *i se poate ataşa un moment de oprire* $t'(\omega)$ *astfel ca* $y_{t'(\omega)}(\omega) > 0$ *aproape sigur şi* $t(\omega) = t'(\omega)$ *pentru* $\omega \in \{\omega : y_{t(\omega)}(\omega) > 0\}$.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, Nr. 10, P. 1407–1412, BUCUREŞTI, 1967

Demonstrație. Vom construi momentul de oprire $t(\omega)$ pe mulțimea acelor puncte ω în care $y_{t(\omega)}$ este negativă.

Să definim :

$$t'(\omega) = 1 \text{ pentru } \omega \in \{(t\,\omega) = 1\} \cap \{y_1(\omega) > 0\}$$

$$t'(\omega) = 2 \text{ pentru } \omega \in \{t(\omega) = 1\} \cap \{y_1(\omega) \leqq 0, y_2(\omega) > 0\}$$

. . . .

$$t'(\omega) = k \text{ pentru } \omega \in \{t(\omega) = 1\} \cap \{y_1(\omega) \leqq 0, \ldots, y_{k-1}(\omega) \leqq 0, y_k(\omega) > 0\}.$$

Dacă notăm

$$A_k^{(j)} = \{y_j(\omega) \leqq 0, \ldots, y_{j+k-1}(\omega) \leqq 0, y_{j+k}(\omega) > 0\}$$

atunci avem evident $y_{t'(\omega)}(\omega) > 0$ pentru $\omega \in \{t(\omega) = 1\} \cap A_n^{(1)} = \{t(\omega) = 1\} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y_n(\omega) > 0\} = \{t(\omega) = 1\}$.

Mai departe, pentru $t(\omega) = n$, vom lua :

$$'(\omega) = n \quad \text{pentru } \omega \in \{t(\omega) = n\} \cap \{y_n(\omega) > 0\}$$

$$'(\omega) = n+1 \text{ pentru } \omega \in \{t(\omega) = n\} \cap \{y_n(\omega) \leqq 0, y_{n+1}(\omega) > 0\}$$

. . . .

$$t'(\omega) = n+k \text{ pentru } \omega \in \{t(\omega) = n\} \cap \{y_n(\omega) \leqq 0, \ldots, y_{n+k-1}(\omega) \leqq 0, y_{n+k}(\omega) > 0\}$$

. . . .

Avem evident $y_{t'(\omega)}(\omega) > 0$ pentru $\omega \in \{t(\omega) = n\} \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n+k}^{(n)} = \{t(\omega) = n\} \cap \bigcup_{i=n}^{\infty} \{y_i(\omega) > 0\} = \{t(\omega) = n\}$

Să observăm acum că :

$$\{t'(\omega) = n\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{t(\omega) = n - k\} \cap \{y_1(\omega) \leqq 0, \ldots, y_{n-k-1}(\omega) \leqq 0, y_{n-k}(\omega) > 0\} \in \mathcal{F}_n$$

și prin urmare prima condiție din definiția momentului de oprire este verificată. Pe de altă parte, $\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} t'(\omega) = n\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t(\omega) = n\} = \Omega$ aproape sigur și deci și a doua condiție din definiția momentului de oprire este verificată.

COROLARUL 1. *Dacă* $y_1(\omega), \ldots, y(\omega), \ldots$ *este un șir de variabile aleatoare astfel ca* $\bigcup_{i=n}^{\infty} \{\omega : y_i(\omega) > 0\} = \Omega$ *aproape sigur pentru orice* $n \in N^*$, *atunci*

$$\sup_{t \in T} E(y_t) = \sup_{t \in T'} E(y_{t'}),$$

T' *fiind mulțimea momentelor de oprire pentru care* $y_{t(\omega)}(\omega) > 0$ *aproape sigur.*

Din acest corolar rezultă că în aflarea momentelor de oprire optimale, adică a acelor momente de oprire care realizează supremumul măririi $E(y_t)$, problema inițială relativă la șirul de variabile aleatoare $y_1(\omega), \ldots$ $\ldots, y_n(\omega), \ldots$ poate fi înlocuită cu problema echivalentă relativă la șirul de variabile aleatoare $y_1^+(\omega), \ldots, y_n^+(\omega), \ldots$

COROLARUL 2. *Dacă* $y_1(\omega), \ldots, y_n(\omega), \ldots$ *este un șir de variabile aleatoare astfel ca* $\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}\{\omega : y_i(\omega) > 0\} = \Omega$ *aproape sigur pentru orice* $n \in N^*$, *atunci*

$$\sup_{t\in T} E(y_t) > \sup_{n\in N^*} E(y_n^+).$$

Demonstrație. Dacă în teorema 1 vom lua în locul lui $t(\omega)$, momentul de oprire $t(\omega) = n$ aproape sigur, atunci $t'(\omega) = n$ pentru $\omega \in \{\omega : y_n(\omega) > 0\}$ și prin urmare :

$$E(y_{t'}) = \int\limits_{\{t'(\omega)=n\}} y_n \,\mathrm{d}P + \int\limits_{\{t'(\omega)>n\}} y_{t'(\omega)} \,\mathrm{d}P > E(y_n^+)$$

unde corolarul enunțat rezultă imediat.

În cele ce urmează ne vom concentra atenția asupra unei clase speciale de variabile aleatoare dependente $\{\xi_n(\omega)\}_{n\in N^*}$ care satisfac următoarei condiții :

(C) : Există un șir de numere reale și pozitive $(\varepsilon_n)_{n\in N^*}$ astfel încît pentru orice k și $n \in N^*$ să avem

$$|P(B|\mathcal{X}_1^k) - P(B)| < \varepsilon_n$$

aproape sigur pentru orice $B \in \mathcal{X}_{k+n}^{\infty}$, $\mathcal{X}_m^n$ fiind σ-algebra minimală în raport cu care sînt măsurabile variabilele aleatoare $\xi_m(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$.

Procesele m-dependente, anumite clase de lanțuri Markov omogene și neomogene [2], de procese staționare [5], de lanțuri cu legături complete și de lanțuri de ordin infinit [7] sînt cîteva exemple de procese stocastice ce satisfac condiția (C) cu $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Un exemplu de șir de variabile aleatoare care satisface condițiile teoremei 1 de mai sus este șirul de variabile aleatoare $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega), \ldots$ identic repartizate și satisfăcînd condiția (C) de mai sus cu $\varepsilon_n < \frac{1}{2}$ pentru $n > N$ și pentru care $P(\{\omega : \xi_1(\omega) > 0\}) > 0$. În adevăr, din teorema lui Borel-Cantelli a cărei reciprocă este valabilă în acest caz după cum s-a arătat în [2], rezultă că aproape sigur șirul $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega), \ldots$ depășește valoarea 0 de o infinitate de ori și deci condițiile teoremei 1 sînt satisfăcute.

De aici rezultă

$$\sup_{t\in T} E(\xi_t) > E(\xi_1^+).$$

În ceea ce priveşte cîştigul $\left\{\frac{\xi_n}{n}\right\}_{n\in N^*}$ întîlnit în literatura momentelor de oprire, se obţine marginea :

$$\sup_{t\in T} E\left(\frac{\xi_t}{t}\right) > E(\xi_1^+).$$

Este interesant de considerat cazul particular al variabilelor aleatoare independente. Dacă vom lua $t(\omega) = 1$ şi vom proceda ca în teorema 1, vom obţine

$$\sup_{t\in T} E\left(\frac{\xi_t}{t}\right) \geqq \sup_{N\in I} \int\limits_{\{\omega:\xi_1(\omega)>N\}} \xi_1 \mathrm{d}P + \frac{1}{2} \int\limits_{\{\omega:\xi_1(\omega)\leqq N,\, \xi_2(\omega)>N\}} \xi_2 \mathrm{d}P + \dots$$

$$+ \frac{1}{n} \int\limits_{\{\omega:\xi_1(\omega)\leqq N,\dots,\xi_{n-1}(\omega)\leqq N,\, \xi_n(\omega)>N\}} \xi_n \mathrm{d}P + \dots = \int\limits_{\{\xi_n>N\}} \xi_n \mathrm{d}\, P +$$

$$+ \frac{1}{} P(\{\omega:\, \xi_1(\omega)\leqq N\}) \int\limits_{\{\xi_n>N\}} \xi_n \mathrm{d}\, P + \dots + \frac{1}{n} P^{n-1}(\{\omega:\, \xi_1(\omega)\leqq 0\})$$

$$\int\limits_{\{\xi_n>N\}} \xi_n \mathrm{d}\, P = \sup_{N\in I} \int\limits_{\{\xi_1>N\}} (\xi_1)\, \mathrm{d}P\Big[1 + \frac{1}{2} P(\{\omega:\xi_1(\omega)\leqq N\}) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{n}} P^{n-1}(\{\omega:\xi_1(\omega)\leqq N\}) + \dots\Big] =$$

$$= \sup_{N\in I} \int\limits_{\{\xi_1>N\}} \xi_1 \mathrm{d}P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P^n(\{\omega:\xi_1(\omega)\leqq M\})}{n},$$

unde $I = (-\infty, \text{ess sup } \xi_1)$.

În cazul recompenselor $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ identic repartizate şi care satisfac condiţia (C) în care $\mathrm{M} = \text{ess sup } \xi_{1<\infty}$, aplicînd teorema lui Borel-Cantelli obţinem că şirul de variabile aleatoare $\xi_1 - (M - \varepsilon), \dots, \xi_n - (M - \varepsilon), \dots$ satisface condiţiile teoremei 1. Deci pentru orice $\varepsilon > 0$, $\sup\limits_{t\in T} \mathrm{E}\,(\xi_t) > \mathrm{M} - \varepsilon$ şi prin urmare $\sup\limits_{t\in T} E\,(\xi_t) = M$.

Vom considera în cele ce urmează recompensa de tipul $\frac{S_n}{n}$ unde $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots$, întîlnite în literatura de specialitate în mai multe articole [1], [4].

În cele ce urmează vom da o teoremă care ne va fi utilă în stabilirea existenţei marginii superioare pentru $E\left(\frac{S_t}{t}\right)$. În demonstrarea ei vom utiliza proprietăţile proceselor stocastice care satisfac condiţia (C) stabilite în [2], [3], precum şi o ideie sugerată de lucrarea [4]. Această teoremă poate prezenta în acelaşi timp şi un interes independent.

TEOREMA 2. *Dacă* $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega), \ldots$ *este un şir de variabile aleatoare cu dispersiile egal mărginite şi care satisfac condiţia* (C) *cu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2} < \infty$, *atunci*

$$E\left(\sup_{n=1,2,\ldots} \frac{S_n^+}{n}\right) < \infty.$$

Demonstraţie. Să notăm $s = \sup \frac{S_n^+}{n}\cdot$ Avem, evident,

$$(1) \quad P(s \geqq u) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} P\left(\max_{2^{i-1} \leqq n \leqq 2^i} \frac{S_n}{n} \geqq u\right) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} P\left(\max_{1 \leqq n \leqq 2^i} S_n \geqq 2^{i-1} u\right)\cdot$$

Conform inegalităţii lui Kolmogorov stabilită pentru clasa de variabile dependente considerată în [2], [3] avem :

$$P(\max_{1 \leqq m \leqq n} |S_m| \geqq \varepsilon) \leqq \frac{\frac{4}{\varepsilon^2}(1 + 4\gamma_n) \sum\limits_{mi=1}^{n} D(X_m)}{\delta - \frac{1}{\varepsilon^2}(1 + 4\gamma_n) \sum\limits_{ni=1}^{n} D(X_m)},$$

unde $\gamma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{1/2}$, $\delta = 1 - \varepsilon_1$ în ipoteza care nu micşorează generalitatea că $\varepsilon_1 < 1$. Aplicînd această inegalitate termenilor din dreapta expresiei (1) obţinem :

$$P(\max_{1 \leqslant n \leqslant 2^i} S_n \geqslant 2^{i-1} u) < \frac{\frac{4 \cdot 2^i}{2^{2(i-1)} u^2}(1 + 4\gamma_n) M}{\delta - \frac{4 \cdot 2^i}{2^{2(i-1)} u^2}(1 + 4\gamma_n) M},$$

unde M este o majorantă a dispersiilor şirului de variabile aleatoare $\{\xi_n\}_{n \in N^*}$. Deoarece $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2} < \infty$, rezultă că pentru orice α cu $\delta - \alpha > 0$ se poate găsi un număr u_α astfel ca

$$\delta - \frac{4}{u_\alpha^2}\left(1 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2}\right) M \geqq \alpha$$

De aici rezultă că pentru orice $i = 1, 2, \ldots$ avem inegalitatea :

$$P(\max_{1 \leqslant n \leqslant 2^i} S_n \geqslant 2^{i-1} u) < 2^{4-i}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2}\right) \frac{M^2}{\alpha} \frac{1}{u^2}$$

de unde obţinem imediat

$$P(s \geqq u) < 2\left[1 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2}\right] \frac{M^2}{\alpha} \frac{1}{u^2}\cdot$$

Pe de altă parte

$$E(s) = -\int_0^\infty u\,\mathrm{d}P(s \geqq u) = \int_0^\infty P(s \geqq u)\,\mathrm{d}u < \int_0^{u_\alpha} \mathrm{d}u +$$

$$+ 2\left(1 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2}\right)\frac{M}{u^2}\int_{u_\alpha}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = u_\alpha + 2\,\frac{M}{\alpha u_\alpha}\left(1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^{1/2}\right) < \infty$$

şi teorema este demonstrată.

Observînd că din legea logaritmului iterat stabilită de M. Iosifescu în [6] pentru tipul de variabile aleatoare considerate, rezultă că ipotezele teoremei 1 sînt îndeplinite pentru şirul de variabile aleatoare $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}_{n\in N^\star}$.
De aici şi din teorema de mai sus obţinem

TEOREMA 3. *Dacă* $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega), \ldots$ *este un şir de variabile aleatoare care satisfac condiţia* (C) *cu* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2} < \infty$ *şi au dispersiile uniform mărginite, atunci*

$$E(\xi_1^+) < \sup_{t\in T} E\left(\frac{S_t}{t}\right) < \infty$$

iar fiecărui moment de oprire $t(\omega)$ *i se poate ataşa un moment* $t'(\omega)$ *astfel ca* $\frac{S_{t'}}{t'} > 0$ *aproape sigur şi* $t'(\omega) = t(\omega)$ *pentru* $\frac{S_t}{t} > 0$.

Primită la redacţie la 9 mai 1967

Centrul de statistică matematică al
Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Y. S. CHOW, H. ROBBINS, *On optimal stopping rules for* S_n/n. Illinois J. Math., 444 – 454 (1965).
2. H. COHN, *Teoreme limită pentru procese stochastice*. St. cerc., mat., **18**, 7, p. 993 – 1027 (1966).
3. H. COHN, *On a class of dependent random variables*. Rev. Roum. de math. pures et appl., **x**, *10*, 1593 – 1606 (1965).
4. A. DVORETZKY, *Existence and properties of certain optimal stopping rules*.
5. И. А. ИБРАГИМОВ, *Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов*. Теория вероятностей, **VII**, *4*, 611–645 (1963).
6. M. IOSIFESCU, *La loi du logarithme itéré pour une classe de variables aléatoires dépendantes*.
7. O. ONICESCU, G. MIHOC, *Sur les chaînes statistiques*. C. R. Acad. Sci. Paris, **200**, 511 (1935).

PSEUDOOPERAŢII LA MAŞINILE ELECTRONICE CIFRICE CU VIRGULĂ MOBILĂ

DE

MARIANA CRIŞAN-ZVERCA

După cum se ştie, operaţiile aritmetice, pe care le efectuează orice maşină electronică de calcul, în general, sînt deosebite de operaţiile aritmetice obişnuite. De aceea, în cele ce urmează, am numit aceste operaţii aritmetice pe care le execută maşina de calcul, pseudooperaţii.

În lucrarea de faţă, după o parte introductivă, în care se trec pe scurt în revistă caracteristicile principale ale maşinilor cu virgulă mobilă, se studiază separat pseudoadunarea (scăderea), pseudoînmulţirea şi pseudoîmpărţirea. De fiecare dată, se evaluează erorile introduse de aceste pseudooperaţii şi se studiază proprietăţile lor.

1. *Introducere.* Într-o maşină de calcul cu virgulă mobilă (vezi [1]) un număr N este reprezentat sub forma unei perechi de numere (m, p) unde $|m| < 1$ şi p este un număr întreg, astfel că :

$$N = m \cdot b^{p}, \tag{1}$$

unde b este baza sistemului de numeraţie, în care lucrează maşina. Vom spune că m este *mantisa* numărului N iar p *ordinul de mărime* (*caracteristica*) al numărului N. O astfel de reprezentare nu este unică, deoarece :

$$N = m \cdot b^{p} = m \cdot b^{k} \cdot b^{p-k}.$$

Pentru unicitatea reprezentării (1) este necesar să impunem mantisei condiţii suplimentare. În cele ce urmează, vom presupune că :

$$\frac{1}{b} \leqslant |m| < 1. \tag{2}$$

Numerele a căror mantisă satisface la inegalităţile (2) se spune că sînt reprezentate sub *formă normalizată* sau, mai pe scurt, le vom numi *normalizate*. Presupunerea pe care am făcut-o coincide cu realitatea, deoa-

ST. CERC. MAT., TOM. 19, Nr. 10, P. 1413–1424, BUCUREŞTI, 1967

rece, în majoritatea mașinilor de calcul cu virgulă mobilă, numerele se reprezintă sub formă normalizată fiindcă, după cum se știe (vezi [2]), în acest caz, eroarea reprezentării lor în celulele memoriei este minimă. În aceeași ordine de idei, amintim că în mașinile de calcul cu virgulă mobilă, cînd se efectuează operații aritmetice, s-a prevăzut normalizarea automată (sau programată) a rezultatelor obținute.

Celulele memoriei mașinii sînt împărțite în două părți. Partea alcătuită din pozițiile inferioare este alocată păstrării ordinului de mărime, iar partea alcătuită din pozițiile superioare servește pentru înscrierea mantisei. Cifra semn a numărului determină semnul mantisei, iar una din pozițiile ordinului de mărime se folosește pentru reprezentarea semnului lui p. Pentru precizare, vom presupune, în cele ce urmează, că sîntem în cazul unei mașini care are α poziții pentru înregistrarea mantisei și β poziții pentru scrierea ordinului de mărime (atît într-un caz cît și în celălalt am exclus din socoteală pozițiile alocate păstrării semnelor).

Definiție. Extinzînd definiția numerelor ,,digitale'' dată de Neumann și Goldstine (vezi [3]), vom spune că numărul N reprezentat sub forma (1) este *digital* dacă este normalizat și dacă mantisa lui nu are mai mult de α cifre iar ordinul lui de mărime nu are mai mult de β cifre. Aceste condiții se pot exprima prin inegalitatea :

$$b^{-b^{\beta}} \leqslant |N| \leqslant (1 - b^{-\alpha})\, b^{b^{\beta}-1}. \tag{3}$$

Observația 1. Operația de scădere a două numere, la o mașină de calcul, se reduce la operația de adunare a descăzutului cu complementul scăzătorului. Prin urmare, în cele ce urmează, ne vom ocupa numai de modul în care o mașină de calcul, cu virgulă mobilă, efectuează operația de adunare.

2. *Pseudoadunarea.* Să considerăm două numere ,,digitale'' :

$$N_1 = m_1 \cdot b^{p_1} \tag{4}$$

$$N_2 = m_2 \cdot b^{p_2}. \tag{5}$$

Mașina de calcul execută operația de adunare a acestor numere în două etape :

Etapa I. În această etapă, se egalează ordinele de mărime ale termenilor, ceea ce corespunde la alinierea virgulelor. Sînt posibile două cazuri :

$$1^\circ.\ p_1 = p_2$$

$$2^\circ.\ p_1 \neq p_2 .$$

În cazul 1°, această etapă este sărită, trecîndu-se direct la etapa următoare. În cazul 2°, — presupunem pentru precizare că $p_1 > p_2$ (cazul $p_1 < p_2$ fiind complementar cazului în care ne situăm) — va trebui denormalizat acel termen al cărui ordin de mărime este mai mic (N_2) în așa fel încît, ordinul lui de mărime să devină egal cu ordinul de mărime al celui de-al doilea termen (N_1). Mai concret, mantisa lui N_2 va trebui deplasată la dreapta cu $p_1 - p_2$ poziții și, în același timp, la ordinul de mărime al lui N_2 se va aduna numărul $p_1 - p_2$. Prin urmare, N_2 se va reprezenta sub forma echivalentă :

$$N_2 = m_2 \cdot b^{-(p_1 - p_2)} \cdot b^{p_1}. \tag{6}$$

Noua mantisă a lui N_2 va avea în acest fel $\alpha + p_1 - p_2$ cifre iar, pe de altă parte, celulele au la dispoziție pentru memorarea cifrelor mantisei numai α poziții. De aceea, dacă mașina face aproximații prin rotunjire, la memorarea lui N_2 scris sub forma (6) în locul numărului $m_2 b^{-p_1+p_2}$, mașina va înregistra aproximata prin rotunjire la α cifre a acestui număr. Convenim să notăm cu m_2^* numărul $m_2 b^{-p_1+p_2}$ rotunjit la α cifre, și cu N_2^* numărul care are această mantisă și ca ordin de mărime pe p_1 :

$$N_2^* = m_2^* b^{p_1}. \tag{7}$$

Să evaluăm eroarea introdusă de această aproximație prin rotunjire. Pentru aceasta vom deosebi două cazuri posibile :

a) $p_1 - p_2 > \alpha$

b) $p_1 - p_2 \leqslant \alpha$.

În cazul a), N_2 prin denormalizare se transformă într-un ,,zero de mașină''

$$N_2^* = 0 \cdot b^{p_1} \tag{8}$$

Prin urmare, rezultatul operației de adunare, pe care o execută mașina, va fi tocmai N_1. Să evaluăm eroarea care apare dacă se consideră că suma a două numere este egală cu cel mai mare dintre ele

$$|(N_1 + N_2^*) - (N_1 + N_2)| = |N_2^* - N_2|\cdot$$

Se constată din egalitatea de mai sus că, pentru aceasta, trebuie să evaluăm $|N_2^* - N_2|$ adică eroarea pe care o face mașina dacă în locul numărului N_2 dat de relația (6) consideră numărul N_2^* dat de relația (8). Ne situăm în cazul cel mai defavorabil care, după cum se constată ușor, se obține pentru :

$$p_1 - p_2 = \alpha + 1. \tag{9}$$

Ținînd cont de (9), relația (6) se scrie sub forma :

$$N_2 = m_2 \cdot b^{-\alpha-1} \cdot b^{p_1}. \tag{6'}$$

Dacă considerăm că m_2 este de forma :

$$m_2 = 0, a_1 a_2 \ldots a_\alpha , \tag{10}$$

atunci

$$m_2 b^{-\alpha-1} = 0, \underbrace{0 \ldots 0}_{\alpha+1} a_1 a_2 \ldots a_\alpha \tag{11}$$

sau :

$$m_2 b^{-\alpha-1} = a_1 b^{-\alpha-2} + a_2 b^{-\alpha-3} + \ldots + a_{\alpha-1} b^{-2\alpha} + a_\alpha b^{-2\alpha-1} \tag{11'}$$

deci :

$$|N_2^* - N_2| \leqslant b^{p_1-\alpha-2} (b - 1) (1 + b^{-1} + \ldots + b^{-\alpha+2} + b^{-\alpha+1}) =$$

$$= b^{p_1-\alpha-1} (1 - b^{-\alpha}) \leqslant b^{p_1-\alpha-1}.$$

Prin urmare, eroarea sumei va fi în acest caz :

(12) $$|(N_1 + N_2^*) - (N_1 + N_2)| \leqslant b^{p_1-\alpha-1} = b^{p_2}.$$

Observaţia 2. În cele ce urmează vom exclude cazul de mai sus (adică $p_1 > p_2$ şi $p_1 - p_2 > \alpha$), considerîndu-l ca banal şi ne vom plasa numai în cazul cînd $p_1 - p_2 \leqslant \alpha$.

În situaţia b) conform rezultatului de la rotunjirea numerelor (vezi [4]) vom avea :

(13) $$|N_2^* - N_2| \leqslant \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1}.$$

În concluzie, în urma executării etapei I, fie că sîntem în cazul 1° fie că sîntem în cazul 2° se adoptă ca ordin de mărime *temporar* al sumei numărul p_1.

Etapa II. În această etapă — în unul din codurile modificate, pentru a putea sesiza depăşirea capacităţii reţelei de cifre a sumatorului (vezi [2]) — se adună mantisele numerelor N_1 şi N_2 dacă sîntem în cazul 1° de la etapa I, fie mantisele numerelor N_1 şi N_2^* dacă sîntem în cazul 2° de la etapa I. La executarea acestei operaţii trebuie luate în considerare mai multe posibilităţi. Dacă $p_1 = p_2$ atunci sînt posibile două cazuri :

1′) $|m_1 + m_2| < 1$ cu subcazurile $\begin{cases} 1'\text{a)}\ 1/b \leqslant |m_1 + m_2| < 1 \\ 1'\text{b)}\ |m_1 + m_2| < 1/b \end{cases}$

2′) $|m_1 + m_2| \geqslant 1.$

Iar dacă $p_1 > p_2$, atunci, de asemenea, sînt posibile două cazuri :

1″) $|m_1 + m_2^*| < 1$ cu subcazurile $\begin{cases} 1''\text{a)}\ 1/b \leqslant |m_1 + m_2^*| < 1 \\ 1''\text{b)}\ |m_1 + m_2^*| < 1/b \end{cases}$

2″) $|m_1 + m_2^*| \geqslant 1.$

2.1. Discutarea cazurilor posibile. Avem :

— În cazul 1′), subcazul 1′a), adunarea pe care o execută maşina coincide cu adunarea obişnuită. Vom numi acest caz „ideal" şi, în continuare, îl vom exclude din discuţia noastră.

— În cazul 1′), subcazul 1′b), rezultatul nu va fi normalizat sau, cu alte cuvinte, operaţia de adunare s-a făcut cu deranjarea normalizării spre dreapta (vezi [2]). Pentru corectarea acestei denormalizări, mantisa sumei va trebui deplasată spre stînga pînă cînd prima cifră semnificativă a ei va apare în prima poziţie a celulei dedicată păstrării cifrelor mantisei. Concomitent, din ordinul de mărime al sumei (p_1), se va scădea un număr egal cu numărul deplasărilor care au fost necesare pentru normalizarea rezultatului. Prin urmare, rezultatul se va scrie sub forma :

(14) $$N_1 + N_2 = (m_1 + m_2) \cdot b^k \cdot b^{p_1-k},$$

unde k reprezintă numărul deplasărilor. Şi în acestă situaţie, operaţia de adunare pe care o efectuează maşina dă acelaşi rezultat ca operaţia de adunare obişnuită.

Observaţia 3. În cazul 1′), subcazul 1′b), se poate întîmpla ca prin normalizare, care se face şi cu micşorarea ordinului de mărime al sumei, să apară un ordin de mărime care să aibă mai mult de β cifre. Cu alte cuvinte, k va fi în aşa fel încît :

$$|p_1 - k| > b^{\beta} - 1.$$

Vom spune că s-a produs o ,,depăşire'' iar maşina, în această situaţie, în funcţie de tipul ei, or se opreşte, or semnalează ,,depăşirea''.

— În cazul 2′), se produce depăşirea capacităţii reţelei de cifre a sumatorului sau, cum se mai spune, apare fenomenul de denormalizare spre stînga a rezultatului. Pentru corectarea acestei denormalizări, conţinutul acumulatorului se va deplasa cu o poziţie spre dreapta (vezi [5]) ; aceasta revine la deplasarea mantisei rezultatului cu o poziţie spre dreapta urmată de mărirea cu o unitate a ordinului de mărime temporar al sumei. Rezultatul va apare sub forma :

$$N_1 + N_2 = (m_1 + m_2)\cdot b^{-1}\cdot b^{p_1+1}. \tag{15}$$

Mantisa $(m_1 + m_2)\, b^{-1}$ are $\alpha + 1$ cifre şi pentru a putea fi înscrisă în celula de răspuns, va trebui rotunjită la α cifre. Notăm cu $((m_1 + m_2)\, b^{-1})^*$ rezultatul acestei rotunjiri şi cu $(N_1 + N_2)^*$ numărul care are această mantisă şi ca ordin de mărime pe $p_1 + 1$. Deci, rezultatul îl vom găsi sub forma :

$$(N_1 + N_2)^* = ((m_1 + m_2)\cdot b^{-1})^*\cdot b^{p_1+1} \tag{16}$$

Eroarea sumei, în conformitate cu rezultatul de la rotunjirea numerelor, va fi :

$$|(N_1 + N_2)^* - (N_1 + N_2)| \leqslant \frac{1}{2}\, b^{-\alpha+p_1+1}. \tag{17}$$

Eroarea relativă a sumei se poate evalua imediat

$$a_{(N_1+N_2)^*} = \frac{1}{2}\, b^{-\alpha+p_1+1}/b^{-b^{\beta}}. \tag{17′}$$

Se remarcă, şi în acest caz, posibilitatea ,,depăşirii''. Mai precis, aceasta are loc atunci cînd :

$$|p_1 + 1| > b^{\beta} - 1.$$

— În cazul 1″), subcazul 1″a), operaţia de adunare a numerelor digitale, pe care o execută maşina de calcul, va diferi de adunarea obişnuită prin faptul că, aşa cum am văzut, în loc să se adune numerele date, se adună numărul N_1 cu N_2^* dat de (7). Eroarea sumei va fi în acest caz :

$$|(N_1 + N_2^*) - (N_1 + N_2)| = |N_2^* - N_2| \leqslant \frac{1}{2}\, b^{-\alpha+p_1}. \tag{18}$$

Eroarea relativă va fi :

$$a_{N_1+N_2^*} = \frac{1}{2}\, b^{-\alpha+p_1}/b^{-b^{\beta}}. \tag{18′}$$

— În cazul 1''), subcazul 1''b), operaţia de adunare a numerelor are loc cu deranjarea normalizării spre dreapta (vezi subcazul 1'b) şi observaţia 3). Deoarece normalizarea nu este o sursă de erori, eroarea rezultatului va proveni tot din faptul că, în loc să se adune N_1 cu N_2, se adună N_1 cu N_2^*. Deci eroarea sumei va fi dată tot de formula (18), iar eroarea relativă de formula (18').

— Cazul 2'') (ca şi cazul 2')) duce la deranjarea normalizării spre stînga. Pentru corectarea acestei denormalizări (aşa cum s-a văzut deja în cazul 2')) rezultatul se pune sub forma echivalentă :

$$N_1 + N_2^* = (m_1 + m_2^*)\, b^{-1} b^{p_1+1}.$$

Notăm cu :

$$(N_1 + N_2^*)^* = ((m_1 + m_2^*)\, b^{-1})^*\, b^{p_1+1},$$

unde prin $((m_1 + m_2^*)\, b^{-1})^*$ am notat numărul $(m_1 + m_2^*)\cdot b^{-1}$ rotunjit la α cifre. Conform rezultatului de la rotunjirea numerelor vom avea :

$$|(N_1 + N_2^*)^* - (N_1 + N_2^*)| \leqslant \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1+1}$$

Eroarea sumei va fi în acest caz :

$$(19) \quad |(N_1 + N_2^*)^* - (N_1 + N_2)| \leqslant |(N_1 + N_2^*)^* - (N_1 + N_2^*)| + \\ + |(N_1 + N_2^*) - (N_1 + N_2)| \leqslant \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1+1} + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1}.$$

Eroarea relativă este :

$$(19') \qquad a_{(N_1+N_2^*)^*} = \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1} (b + 1)/b^{-b^{\beta}}.$$

Prin urmare, cazul 2'') este cel mai defavorabil, deoarece, după cum se observă, se fac două rotunjiri. Semnalăm că, şi în cazul 2''), se poate obţine un ordin de mărime al sumei care să ducă la ,,depăşire''.

Observaţia 4. Analizînd formulele (17), (18) şi (19) constatăm că eroarea sumei este influenţată numai de ordinul de mărime al celui mai mare număr.

Observaţia 5. Dacă maşina ar avea un sumator cu lungime cel mult dublă şi dacă operaţia de adunare se face cu denormalizarea unuia din termeni (deci cu rotunjirea lui) iar rezultatul este denormalizat spre dreapta, este bine să se facă întîi normalizarea rezultatului şi după aceea rotunjirea lui.

2.2. Concluzii. Vom nota cu $N_1 \dot{+} N_2$ numărul care apare în urma efectuării operaţiei de adunare de către maşină, spre a-l deosebi de $N_1 + N_2$ care este rezultatul unei operaţii de adunare corect executată, şi-l vom numi *pseudosumă* iar operaţia *pseudoadunare.*

$$(20) \qquad N_1 \dot{+} N_2 = \begin{cases} N_1 + N_2 & \text{dacă } p_1 = p_2 \text{ şi } |m_1 + m_2| < 1 \\ (N_1 + N_2)^* & \text{dacă } p_1 = p_2 \text{ şi } |m_1 + m_2| \geqslant 1 \\ N_1 + N_2^* & \text{dacă } p_1 > p_2 \text{ şi } |m_1 + m_2^*| < 1 \\ (N_1 + N_2^*)^* & \text{dacă } p_1 > p_2 \text{ şi } |m_1 + m_2^*| \geqslant 1. \end{cases}$$

2.3. Proprietăţile pseudoadunării. Pseudoadunarea are, în general, proprietăţi diferite faţă de proprietăţile operaţiei de adunare obişnuită. Observăm că pseudoadunarea este *comutativă* adică :

$$N_1 \dotplus N_2 = N_2 \dotplus N_1 . \tag{21}$$

Pseudoadunarea însă nu este, în general, asociativă. Pentru a arăta aceasta, ne vom plasa în cazul cel mai defavorabil posibil. O analiză a erorilor ce pot să apară atunci cînd avem de adunat trei numere digitale :

$$N_1 = m_1 b^{p_1}$$

$$N_2 = m_2 b^{p_2}$$

$$N_3 = m_3 b^{p_3}$$

ne duce la concluzia că cel mai defavorabil caz este acela în care :

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} p_i > 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \\ p_1 \gg p_2 \gg p_3 \end{cases}$$

unde semnul $\gg$ înseamnă cu mult mai mare. Mai concret, diferenţa dintre două ordine de mărime să fie mai mare ca 1. În ipoteza (γ), luînd în considerare şi (20) vom avea :

$$N_1 \dotplus (N_2 \dotplus N_3) = \{N_1 + [(N_2 + N_3^*)^*]^*\}^* \tag{22}$$

iar ordinul de mărime al acestei pseudosume va fi $p_1 + 1$. Tot din aceleaşi considerente vom avea :

$$(N_1 \dotplus N_2) \dotplus N_3 = (N_1 + N_2^*)^* + N_3^* \tag{23}$$

ordinul de mărime al acestei pseudosume fiind tot $p_1 + 1$;

$$\begin{aligned} (24)\quad & |[N_1 \dotplus (N_2 \dotplus N_3)] - [(N_1 \dotplus N_2) \dotplus N_3]| = |\{N_1 + [(N_2 + N_3^*)^*]^*\}^* - \\ & - [(N_1 + N_2^*)^* + N_3^*]| \leqslant \frac{3}{2} b^{-\alpha+p_1+1} + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_2+1} + b^{-\alpha+p_1} + \\ & + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_2} < 2b^{-\alpha+p_1+1} + \frac{3}{2} b^{-\alpha+p_1} . \end{aligned}$$

În relaţia (24), prima majorare am făcut-o pe baza formulelor (17), (18) şi (19), iar ultima majorare, pe baza ipotezei (γ) înlocuindu-l pe p_2 cu p_1.

Evaluarea precedentă se mai poate îmbunătăţi, ţinînd cont că numerele $(N_1 \dotplus N_2) \dotplus N_3$ şi $N_1 \dotplus (N_2 \dotplus N_3)$ sînt numere digitale avînd ordinul de mărime $p_1 + 1$; prin urmare :

$$|[N_1 \dotplus (N_2 \dotplus N_3)] - [(N_1 \dotplus N_2) \dotplus N_3]| = n\, b^{-\alpha+p_1+1} \tag{25}$$

unde n este un număr întreg pozitiv. Ţinînd cont de (25) în (24), obţinem în final evaluarea :

$$|[N_1 \dotplus (N_2 \dotplus N_3)] - [(N_1 \dotplus N_2) \dotplus N_3]| \leqslant 2b^{-\alpha+p_1+1} \tag{26}$$

ceea ce arată că, în general, pseudoadunarea nu este asociativă.

Vom da un exemplu din care să reiasă că în mod efectiv pseudoadunarea nu este asociativă. Fie pentru acesta de adunat trei numere binare :

$$N_1 = 0{,}110 \cdot 2^{100}$$

$$N_2 = 0{,}111 \cdot 2^{10}$$

$$N_3 = 0{,}101 \cdot 2^{1}.$$

Făcînd calculele obținem :

$$(N_1 \dot{+} N_2) \dot{+} N_3 = 0{,}100 \cdot 2^{101}$$

și

$$N_1 \dot{+} (N_2 \dot{+} N_3) = 0{,}101 \cdot 2^{101}$$

Observăm că, în ipoteza (γ) cea mai avantajoasă grupare, atunci cînd avem de adunat trei numere, este, evident, gruparea $(N_1 \dot{+} N_2) \dot{+} N_3$, deoarece nu comportă decît 3 rotunjiri în comparație cu gruparea $N_1 \dot{+} (N_2 \dot{+} N_3)$ care necesită 4 rotunjiri. Acest lucru se poate vedea direct

$$|[N_1 \dot{+} (N_2 + N_3)] - [N_1 + N_2 + N_3]| \leqslant \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1+1} + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_2+1} +$$

$$+ \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1} + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_2}$$

$$|[(N_1 \dot{+} N_2) \dot{+} N_3] - [N_1 + N_2 + N_3]| \leqslant b^{-\alpha+p_1+1} + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1}$$

3. *Pseudoînmulțire.* Considerăm numerele digitale N_1 și N_2 date de (4), respectiv (5). Mașina execută înmulțirea acestor numere după formula (vezi [6]) :

$$N_1 \cdot N_2 = m_1 \cdot m_2 \cdot b^{p_1+p_2}. \tag{27}$$

Succesiunea operațiilor, pe care le efectuează mașina pentru a obține produsul, este următoarea :

1°. Se face adunarea algebrică a ordinelor de mărime ale factorilor obținîndu-se astfel ordinul de mărime *temporar* al produsului. Observăm că, dacă $p_1 \cdot p_2 > 0$, se poate întîmpla ca :

$$|p_1 + p_2| > b^{\beta} - 1$$

adică, survine „depășirea" și, după cum am mai atras atenția, calculatorul, or se oprește, or indică „depășirea".

2°. Se înmulțesc mantisele celor două numere. Datorită faptului că numerele noastre sînt digitale, mantisele lor satisfac la condiția (2), or acesta atrage după sine $|m_1 \cdot m_2| < 1$. Prin urmare, la înmulțirea a două numere digitale nu poate să apară denormalizarea spre stînga, însă produsul $m_1 . m_2$ are, în general, 2 α cifre, care se pot obține toate, dacă mașina este înzestrată cu un registru de lungime dublă.

3°. Dacă se constată că sîntem în situaţia :

$$|m_1 \cdot m_2| > 1/b$$

produsul se normalizează prin deplasarea la stînga a acumulatorului cu un număr convenabil de poziţii, astfel încît prima cifră semnificativă a produsului să apară în prima poziţie pentru cifre a acumulatorului. Concomitent, din ordinul de mărime temporar al produsului, se va scade un număr egal cu numărul deplasărilor făcute. Remarcăm că această normalizare nu este sursă de erori, însă poate să ducă la ,,depăşire''.

4°. Cînd se trece la înscrierea produsului în celula de răspuns maşina rotunjeşte numărul $m_1 \cdot m_2$ la α cifre. Constatăm că înmulţirea mantiselor coincide cu operaţia de înmulţire, pe care o execută o maşină cu virgulă fixă, operaţie care a fost deja studiată în [3] şi [4]. Pe baza celor expuse în [3] şi [4], putem spune că, maşina cu virgulă mobilă execută în locul înmulţirii propriu-zise aşa numita *pseudoînmulţire* datorită faptului că, în loc să înmulţească mantisele, face pseudoînmulţirea lor în urma căreia se obţine numărul $m_1 \times m_2$. Notăm cu $N_1 \times N_2$ numărul care are ca mantisă $m_1 \times m_2$ şi ca ordin de mărime $p_1 + p_2$:

$$N_1 \times N_2 = m_1 \times m_2 \, b^{p_1+p_2} \tag{28}$$

şi-l vom numi *pseudoprodus*. Observăm că, în conformitate cu cele de la rotunjirea numerelor, eroarea introdusă de această pseudoînmulţire este :

$$|N_1 \times N_2 - N_1 \cdot N_2| \leqslant \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1+p_2}. \tag{29}$$

Eroarea relativă a pseudoprodusului :

$$a_{N_1 \times N_2} = \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1+p_2} / b^{-b^{\beta}}. \tag{29'}$$

3.1. Proprietăţile pseudoînmulţirii. Proprietăţile acestei operaţii sînt, în general, diferite de proprietăţile înmulţirii obişnuite. Acestea vor coincide cu proprietăţile operaţiei de pseudoînmulţire pe care o execută o maşină cu virgulă fixă şi care au fost deja studiate în [3] şi [4].

Ceea ce se impune, este studierea proprietăţii de distributivitate a pseudoînmulţirii faţă de pseudoadunare. Ne vom situa în cazul cel mai defavorabil care este, după cum se vede uşor, cazul (γ). Deci, pe baza relaţiei (20) şi ipotezei (γ) avem :

$$\begin{aligned} |N_1 \times (N_2 \dot{+} N_3) - (N_1 \times N_2 \dot{+} N_1 \times N_3)| &= |N_1 \times (N_2 + N_3^*)^* - \\ - [N_1 \times N_2 + (N_1 \times N_3)^*]^*| &\leqslant \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_2+1} + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_2} + \\ + b^{-\alpha+p_1+p_2+1} + b^{-\alpha+p_1+p_2} + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1+p_3} &< \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_2+1} + \\ + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_2} + b^{-\alpha+p_1+p_2+1} + \frac{3}{2} b^{-\alpha+p_1+p_2}. \end{aligned} \tag{30}$$

Prima majorare din relaţia (30) am făcut-o pe baza inegalităţilor (17), (18), (19) şi (29). A doua majorare am făcut-o pe baza ipotezei (γ) înlocuind p_3 cu p_2. Ţinînd cont că $N_1 \times (N_2 \dot{+} N_3)$ şi $(N_1 \times N_2) \dot{+} (N_1 \times N_3)$ sînt numere digitale avînd ca ordin de mărime numărul $p_1 + p_2 + 1$:

$$(31) \qquad |N_1 \times (N_2 \dot{+} N_3) - (N_1 \times N_2 \dot{+} N_1 \times N_3)| = nb^{-\alpha+p_1+p_2+1},$$

unde n este un întreg pozitiv. Considerînd (31) putem îmbunătăţi inegalitatea (30):

$$(32) \qquad |N_1 \times (N_2 \dot{+} N_3) - (N_1 \times N_2 \dot{+} N_1 \times N_3)| \leqslant 2b^{-\alpha+p_1+p_2+1},$$

ceea ce arată că, în general, peseudoînmulţirea nu este distributivă faţă de pseudoadunare. Această concluzie o vom întări cu un exemplu. Fie date trei numere binare:

$$N_1 = 0{,}111 \cdot 2^{100}$$

$$N_2 = 0{,}100 \cdot 2^{10}$$

$$N_3 = 0{,}100 \cdot 2^{1}$$

efectuînd calculele rezultă că:

$$N_1 \times (N_2 \dot{+} N_3) = 0{,}101 \cdot 2^{110}$$

şi

$$N_1 \times N_2 \dot{+} N_1 \times N_3 = 0{,}110 \cdot 2^{110}$$

Pe de altă parte, se observă că, cea mai de preferat, în ipoteza (γ), este succesiunea $N_1 \times (N_2 \dot{+} N_3)$, deoarece comportă cele mai puţine rotunjiri cu putinţă. De altfel, se poate constata efectiv:

$$|N_1 \times (N_2 \dot{+} N_3) - N_1 \cdot (N_2 + N_3)| \leqslant \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1+p_2+1} + \\ + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_2+1} + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_2}$$

$$|(N_1 \times N_2 \dot{+} N_1 \times N_3) - (N_1 \cdot N_2 + N_1 \cdot N_3)| \leqslant b^{-\alpha+p_1+p_2} + \\ + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1+p_3} + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1+p_2+1}.$$

4. *Pseudoînpărţire.* Fie date numerele digitale N_1 şi N_2 sub forma (4) respectiv (5). Maşina de calcul efectuează operaţia de împărţire a acestor numere după formula (vezi [6]):

$$(33) \qquad N_1/N_2 = m_1/m_2 \cdot b^{p_1-p_2}$$

Un indicator de greșeală este acționat dacă împărțitorul este zero. Mai precis, pentru a împărți două numere, într-o mașină cu virgulă mobilă au loc următoarele succesiuni de operații :

1°. Se scad algebric ordinele de mărime ale numerelor, găsindu-se ordinul de mărime *temporar* al cîtului. Dacă $p_1 \cdot p_2 < 0$, se poate întîmpla ca

$$|p_1 - p_2| > b^\beta - 1$$

adică, să apară „depășirea".

2°. Se împart mantisele numerelor în același mod cum se împart numerele în cazul mașinilor cu virgulă fixă. Cîtul mantiselor va fi un număr care, în general, are o infinitate de cifre.

2°a) Dacă cîtul este un număr nenormalizat, se va deplasa conținutul acumulatorului cu atîtea poziții spre stînga pînă cînd prima cifră semnificativă a cîtului va apare în prima poziție pentru cifre a acumulatorului. În același timp, din ordinul de mărime temporar al cîtului se vor scădea atîtea unități cîte deplasări s-au făcut. Operația de normalizare nu poate da naștere la erori, însă poate să ducă la „depășire".

2°b) Dacă $|m_1/m_2| > 1$, se spune că rezultatul este denormalizat la stînga ; pentru a se corecta această denormalizare, se deplasează conținutul acumulatorului la dreapta cu o poziție. Concomitent, la ordinul de mărime temporar al cîtului se adună o unitate. Această deplasare este sursă de erori și, în același timp, poate duce la „depășire" dacă $p_1 - p_2 > 0$, și astfel că :

$$p_1 - p_2 = b^\beta - 1.$$

2°c) Cînd se împart mantisele nu se produce nici denormalizarea la stînga nici la dreapta.

3°. Se trece rezultatul în celula de răspuns. Dacă, la etapa 2° ne-am aflat în situația 2°a) sau în situația 2°c), mașina face operația de *pseudoîmpărțire* dat fiind că face operația de pseudoîmpărțire a mantiselor (vezi [3]). Dacă notăm cu $N_1 : N_2$ *pseudocîtul* avem :

$$N_1 : N_2 = m_1 : m_2\, b^{p_1 - p_2} \text{ în cazul 2°c)}$$

$$N_1 : N_2 = (m_1 : m_2)\, b^k\, b^{p_1 - p_2 - k} \text{ în cazul 2°a).}$$

Eroarea care apare este, atît în cazul 2°a) cît și în cazul 2°c) :

$$(34) \qquad |N_1 : N_2 - N_1/N_2| \leqslant \frac{1}{2} b^{-\alpha + p_1 - p_2}$$

iar eroarea relativă :

$$(34') \qquad a_{N_1 : N_2} = \frac{1}{2} b^{-\alpha + p_1 - p_2 / b^{-b^\beta}}.$$

Dacă la etapa 2° am fost în situația 2°b), mașina execută pseudoîmpărțirea celor două numere, deci calculează de fapt pseudocîtul lor :

$$N_1 : N_2 = m_1 : m_2\, b^{p_1 - p_2}$$

după care, deoarece $|m_1 : m_2| > 1$ scrie rezultatul sub forma echivalentă :

$$N_1 : N_2 = m_1 : m_2\, b^{-1}\, b^{p_1 - p_2 + 1}$$

după care mai execută o rotunjire la α cifre a numărului $(m_1 : m_2)\, b^{-1}$.

Notăm rezultatul acestei rotunjiri cu $((m_1 : m_2)\, b^{-1})^*$ iar numărul care are această mantisă şi ca ordin de mărime $p_1 - p_2 + 1$, îl notăm cu $(N_1 : N_2)^*$. În acest caz, eroarea pseudocîtului va fi :

$$|(N_1 : N_2)^* - N_1/N_2| \leqslant \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1-p_2} + \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1-p_2+1} \tag{35}$$

iar eroarea relativă :

$$a_{(N_1 : N_2)^*} = \frac{1}{2} b^{-\alpha+p_1-p_2} (b+1)/b^{-b^{\beta}}. \tag{35'}$$

Observaţia 6. Atît la înmulţirea a două numere digitale cît şi la împărţirea lor cu ajutorul unei maşini de calcul, este bine ca maşina să fie astfel construită încît, în acumulator, operaţia de normalizare spre dreapta a mantisei rezultatului să preceadă operaţia de rotunjire. Este uşor de văzut că în această situaţie eroarea rezultatului va fi cea mai mică cu putinţă.

Observaţia 7. Pentru proprietăţile operaţiei de pseudoîmpărţire la o maşină cu virgulă mobilă, se pot aplica rezultatele date în [4] şi [3] relativ la proprietăţile operaţiei de pseudoîmpărţire la maşinile cu virgulă fixă.

Primită la redacţie la 7 iunie 1967

Facultatea de matematică şi mecanică a Universităţii din Bucureşti str. Academiei nr. 14.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Khabaza, *Numerical analysis*. Pergamon Press, London, 1965.
2. A. I. Kitov, N. A. Kriniţki, *Maşini electronice cifrice şi programare*. Editura tehnică, Bucureşti, 1963.
3. A. S. Householder, *Principles of numerical analysis*. New York—Toronto—London, 1953.
4. И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений*. Физматгиз, Москва, 1962.
5. Donald I. Cutler, *Iniţiere în programarea calculatoarelor*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1967.
6. Stein Marvin, William Munro, *Computer programming*. Academic Press, New York-London, 1965.

ASUPRA UNEI PROBLEME LA LIMITĂ CARE APARE ÎN MIȘCAREA UNUI FLUID PERFECT ÎN PREZENȚA UNUI CORP POROS NEOMOGEN

DE

HORIA I. ENE

Se studiază mișcarea rotațională a unui fluid perfect în prezența unui corp poros omogen pe porțiuni. Aceasta conduce la o nouă problemă la limită pentru funcții armonice. Se rezolvă această problemă cu ajutorul coordonatelor bipolare și a dezvoltărilor sub formă de integrale Fourier.

1. Șt. I. Gheorghiță [1] studiind mișcările irotaționale ale unui fluid perfect în prezența unui corp poros, omogen sau neomogen, este condus la o serie de noi probleme la limită pentru ecuația lui Laplace.

Considerînd problema mișcărilor rotaționale în prezența unui corp poros omogen sau neomogen, noi am fost conduși [2], [3] la rezolvarea unora dintre aceste probleme la limită. În [3] am studiat mișcarea în prezența unui corp poros neomogen de tipul II, adică un corp omogen pe porțiuni, corp care însă era limitat spre exterior de un singur mediu, toate celelalte medii fiind incluse unul în celălalt. Concret a fost rezolvată problema pentru mișcarea cu vîrtej constant și mișcarea cu o distribuție parabolică a vitezelor la infinit în prezența unui corp poros de forma:

$$k(r) = \begin{cases} k_2 \text{ pentru } R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \\ k_3 \text{ pentru } r \leqslant R_1. \end{cases}$$

Cazul unui corp poros neomogen tot de tipul II, dar în care domeniile D_2 și D_3 ocupate de mediul poros au forma din figură conduce la o altă problemă la limită de care ne vom ocupa în cele ce urmează.

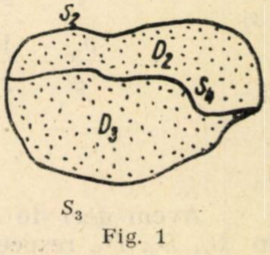


Fig. 1

2. Vom considera deci problema mișcării unui fluid perfect incompresibil animat la mari distanțe de o viteză de forma:

$$u = V_0 + f(y)$$
$$v = 0. \tag{1}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, Nr. 10, P. 1425-1431, BUCUREȘTI, 1967

Notăm cu D_1 domeniul exterior corpului $D = D_2 \cup D_3$, cu S_2 şi S_3 frontiera corpului D, iar cu S_4 frontiera de separaţie dintre domeniile D_2 şi D_3 (figura 1). Domeniul D_2 este caracterizat de un coeficient de filtraţie k_2, iar D_3 de k_3.

Analog cu consideraţiile din [2] şi [3], prezenţa obstacolului în calea fluidului va fi pusă în evidenţă prin introducerea unui potenţial perturbator $\varphi_1(x, y)$, care este o funcţie armonică în D_1. Considerînd că mişcarea în mediul poros este supusă legii lui Darcy, ea va fi caracterizată de un potenţial al vitezelor $\varphi_j (j = 2,3)$ care este tot o funcţie armonică.

Condiţiile la limită vor fi cele de continuitate a vitezelor normale şi a presiunii pe frontiera de separare dintre două medii.

Condiţiile de continuitate a vitezelor normale se vor scrie :

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad \text{pe } S_2, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \quad \text{pe } S_3, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \quad \text{pe } S_4. \end{aligned}$$

Ştiind că presiunea în D_1 are expresia [2], [3] :

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 + f'(y)\,\Psi(x,y),$$

unde

$$\Psi(x,y) = V_0 y + \int_0^y f(y)\,\mathrm{d}y + \psi_1(x,y),$$

şi unde $\psi_1(x, y)$ este funcţia armonic conjugată cu $\varphi_1(x,y)$ (pentru a putea considera pe $\psi_1(x, y)$ funcţie armonică este necesar a presupune că perturbaţia produsă de prezenţa obstacolului este mică), iar în D_j $(j = 2,3)$ presiunea are expresia :

$$p_j = -\frac{\rho g}{k_j} \varphi_j \qquad (j = 2,3),$$

condiţiile de continuitate a presiunilor se vor scrie :

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{p_\infty}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 + f'(y)\,\Psi(x, y) &= -\frac{g}{k_2} \varphi_2 \text{ pe } S_2, \\ \frac{p_\infty}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 + f'(y)\,\Psi(x, y) &= -\frac{g}{k_3} \varphi_3 \text{ pe } S_3, \\ \frac{\varphi_2}{k_2} &= \frac{\varphi_3}{k_3} \quad \text{pe } S_4. \end{aligned}$$

Avem deci de determinat trei funcţii armonice φ_1, φ_2, φ_3 definite în D_1, D_2, D_3, respectiv, şi care îndeplinesc condiţiile la limită (2) şi (3).

3. Pentru rezolvarea problemei vom considera ca şi în [2], [3] nişte dezvoltări în serii ale potenţialelor după puterile coeficienţilor de filtraţie k_2 şi k_3:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi_{10} + k_2\,\varphi_{11.2} + k_3\,\varphi_{11.3} + k_2^2\,\varphi_{12.2} + k_3^2\,\varphi_{12.3} + k_2k_3\,\varphi_{12.23} + \dots \\
\varphi_2 &= k_2(\varphi_{20} + k_2\varphi_{21.2} + k_3\,\varphi_{21.3} + k_2^2\,\varphi_{22.2} + k_3^2\varphi_{22.3} + k_2k_3\,\varphi_{22.23} + \dots) \\
\varphi_3 &= k_3(\varphi_{30} + k_2\varphi_{31.2} + k_3\varphi_{31.3} + k_2^2\varphi_{32.2} + k_3^2\,\varphi_{32.3} + k_2k_3\varphi_{32.23} + \dots)
\end{aligned} \tag{4}$$

Cu aceste dezvoltări (4), condiţiile (2) se scriu:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_{11.2}}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_{20}}{\partial n}; \quad \frac{\partial\varphi_{11.3}}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial\varphi_{12.2}}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_{21.2}}{\partial n}; \\
&\frac{\partial\varphi_{12.3}}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial\varphi_{12.23}}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_{21.3}}{\partial n}; \dots\dots \quad \text{pe } S_2,
\end{aligned} \tag{2'}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_{11.2}}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial\varphi_{11.3}}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_{30}}{\partial n}; \frac{\partial\varphi_{12.2}}{\partial n} = 0; \\
&\frac{\partial\varphi_{12.3}}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_{31.3}}{\partial n}; \quad \frac{\partial\varphi_{12.23}}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_{31.2}}{\partial n}; \dots\dots \quad \text{pe } S_3,
\end{aligned} \tag{2''}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_{20}}{\partial n} = K\frac{\partial\varphi_{30}}{\partial n}; \frac{\partial\varphi_{21.2}}{\partial n} = K^2\frac{\partial\varphi_{31.3}}{\partial n}; \quad \frac{\partial\varphi_{21.3}}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_{31.2}}{\partial n}; \\
&\frac{\partial\varphi_{22.2}}{\partial n} = K^3\frac{\partial\varphi_{32\,3}}{\partial n}; \quad \frac{\partial\varphi_{22.3}}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_{32.23}}{\partial n}; \dots\dots \quad \text{pe } S_4,
\end{aligned} \tag{2'''}$$

unde s-a notat $K = k_3/k_2$.

Ţinînd seamă de expresia:

$$V^2 = [V_0 + f(y)]^2 + 2\,[V_0 + f(y)]\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + (\text{grad } \varphi_1)^2,$$

şi de dezvoltările (4), condiţiile (3) se scriu:

$$\begin{gathered}
\frac{p_\infty}{\rho} - \frac{1}{2}[V_0 + f(y)]^2 + f'(y)\,[V_0y + \int_0^y f(y)\,\mathrm{d}y] + f'(y)\,\psi_{10}(x,\,y) - \\
- [V_0 + f(y)]\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial x} - \frac{1}{2}(\text{grad } \varphi_{10})^2 = -\,g\,\varphi_{20} \\
[V_0 + f(y)]\,\frac{\partial\varphi_{11.2}}{\partial x} + \text{grad } \varphi_{10}\,\text{grad } \varphi_{11.2} = g\,\varphi_{21.2} \\
[V_0 + f(y)]\frac{\partial\varphi_{11.3}}{\partial x} + \text{grad } \varphi_{10} \text{ grad } \varphi_{11.3} = g\varphi_{21.3} \\
[V_0 + f(y)]\,\frac{\partial\varphi_{12.2}}{\partial x} + \text{grad } \varphi_{10}\,\text{grad}\,\varphi_{12.2} + \frac{1}{2}(\text{grad } \varphi_{11.2})^2 = g\,\varphi_{22.2}
\end{gathered} \tag{3'}$$

$$[V_0 + f(y)] \frac{\partial \varphi_{12.3}}{\partial x} + \text{grad } \varphi_{10} \text{ grad } \varphi_{12.3} + \frac{1}{2} (\text{grad } \varphi_{11.3})^2 = g\varphi_{22.3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ pe } S_2,$$

$$\frac{p_\infty}{\rho} - \frac{1}{2} [V_0 + f(y)]^2 + f'(y)[V_0 y + \int_0^y f(y)\,\mathrm{d}y] + f'(y)\,\psi_{10}(x,y) -$$

$$- [V_0 + f(y)] \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial x} - \frac{1}{2} (\text{grad } \varphi_{10})^2 = - g\,\varphi_{30}$$

$$(3'') \qquad \begin{aligned} &[V_0 + f(y)] \frac{\partial \varphi_{11.2}}{\partial x} + \text{grad } \varphi_{10} \text{ grad } \varphi_{11.2} = g\varphi_{31.2} \\ &[V_0 + f(y)] \frac{\partial \varphi_{11.3}}{\partial x} + \text{grad } \varphi_{10} \text{ grad } \varphi_{11.3} = g\,\varphi_{31.3} \end{aligned}$$

$$[V_0 + f(y)] \frac{\partial \varphi_{12.2}}{\partial x} + \text{grad } \varphi_{10} \text{ grad } \varphi_{12.3} + \frac{1}{2} \text{grad } \varphi_{11.2})^2 = g\,\varphi_{32.2}$$

$$[V_0 + f(y)] \frac{\partial \varphi_{12.3}}{\partial x} + \text{grad } \varphi_{10} \text{ grad } \varphi_{12.2} + \frac{1}{2} (\text{grad } \varphi_{11.3})^2 = g\varphi_{32.3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ pe } S_3,$$

$$(3''') \qquad \begin{aligned} &\varphi_{20} = \varphi_{30}\,; \quad \varphi_{21.2} = \varphi_{31.2}\,; \quad \varphi_{21.3} = \varphi_{31.3}\,; \\ &\varphi_{22.2} = \varphi_{32.2}\,; \quad \varphi_{22.3} = \varphi_{32.3}\,; \;\ldots \text{ pe } S_4. \end{aligned}$$

Cum funcțiile φ_{10}, respectiv ψ_{10}, sînt cunoscute ca fiind soluția din cazul corpului impermeabil, rezultă că pentru determinarea celorlalte funcții sîntem conduși la următoarele probleme la limită :

— Prima condiție (3′), prima condiție (3″), prima condiție (3‴) și prima condiție (2‴) ne dau pe φ_{20} și φ_{30} ca soluția unei probleme de tip *B* cum a fost denumită în [1].

— Cunoscînd φ_{20} și φ_{30}, primele două condiții (2′) și primele două condiții (2″) ne dau pe $\varphi_{11.2}$ și $\varphi_{11.3}$.

— Problema pentru determinarea funcțiilor $\varphi_{31.2}$, $\varphi_{31{,}3}$ $\varphi_{21.2}$ și $\varphi_{21.3}$ se va enunța : să se găsească patru funcții armonice, două definite în D_2 și două în D_3, care îndeplinesc condițiile la limită :

$$\begin{aligned} &\varphi_{21.2} = h_1(x, y)\,; && \varphi_{21.3} = h_2(x, y) && \text{pe } S_2, \\ &\varphi_{31.2} = h_1(x, y)\,; && \varphi_{31.3} = h_2(x, y) && \text{pe } S_3, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{21.2} = \varphi_{31.2}\,; && \varphi_{21.3} = \varphi_{31.3} \\ &\frac{\partial \varphi_{21.2}}{\partial n} = K_2 \frac{\partial \varphi_{31.3}}{\partial n}\,; && \frac{\partial \varphi_{21.3}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{31.2}}{\partial n} \end{aligned}\right\} \text{ pe } S_4,$$

unde $h_1(x, y)$ și $h_2(x,y)$ sînt funcții cunoscute și au expresiile din condițiile (3′) și (3″).

Procedeul de aproximații succesive se continuă astfel, avînd întotdeauna de îndeplinit $2n$ condiții pentru determinarea a n funcții armonice în D_2 și D_3.

4. Ne vom ocupa mai pe larg de prima problemă la limită care apare, în legătură cu determinarea funcţiilor φ_{20} şi φ_{30}, adică problema de tip B [1]. Şt. I. Gheorghiţă [1] a propus o metodă de rezolvare a acestei probleme, cu ajutorul coordonatelor bipolare, pentru domenii $D = D_2 \cup D_3$ care au frontierele arce de cerc cu aceleaşi extremităţi. Un astfel de domeniu, cu ajutorul transformării :

$$\zeta = \ln \frac{z+a}{z-a},$$

se reprezintă pe două benzi, în planul $\zeta = \alpha + i\,\beta$, cuprinse între $\beta_2 \leqslant \beta \leqslant \beta_4$ şi $\beta_4 \leqslant \beta \leqslant \beta_3$. În felul acesta funcţiile armonice căutate se pot reprezenta sub formă de integrale Fourier [4].

Avem deci de rezolvat în planul (ζ) următoarea problemă la limită : să se determine două funcţii armonice φ_{20} şi φ_{30} definite în banda $\beta_2 \leqslant \beta \leqslant \beta_4$, respectiv $\beta_4 \leqslant \beta \leqslant \beta_3$, care îndeplinesc condiţiile la limită :

$$\varphi_{j0} = h_j \quad \text{pentru } \beta = \beta_j \ (j = 2{,}3),$$

$$(5) \qquad \left.\begin{aligned} &\varphi_{20} = \varphi_{30} \\ &\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial n} = K \frac{\partial \varphi_{30}}{\partial n} \end{aligned}\right\} \quad \text{pentru } \beta = \beta_4,$$

unde h_j este o funcţie cunoscută pe care presupunem că o putem reprezenta sub forma :

$$(6) \qquad h_j = \int_0^\infty (P_j \cos m\,\alpha + Q_j \sin m\,\alpha)\, \mathrm{d}m \quad (j = 2{,}3).$$

Funcţiile φ_{j0} $(j = 2{,}3)$ le vom căuta sub forma [4] :

$$(7) \qquad \varphi_{j0} = \int_0^\infty \{[A_j(m)\, \mathrm{c}\lambda\, m\beta + B_j(m)\, \mathrm{sh}\, m\beta] \cos m\,\alpha + [C_j(m)\, \mathrm{ch}\, m\beta + D_j(m)\, \mathrm{sh}\, m\,\beta] \sin m\alpha\}\, \mathrm{d}\alpha.$$

Cu (6) şi (7) condiţiile (5) conduc la un sistem de 8 ecuaţii pentru cele opt necunoscute A_2, B_2, A_3, B_3, C_2, D_2, C_3, D_3. Rezolvarea acestui sistem dă soluţiile :

$$(8) \qquad \begin{aligned}
A_2 &= \frac{P_2 [K \mathrm{sh}\, m\, \beta_4 \mathrm{ch}\, m\, (\beta_3 - \beta_4) + \mathrm{ch} m\, \beta_4 \mathrm{sh}\, m\, (\beta_3 - \beta_4)] - P_3 K \mathrm{sh}\, m\, \beta_2}{\Delta}, \\
B_2 &= \frac{-P_2 [K \mathrm{ch}\, m\, \beta_4\, \mathrm{ch} m\, (\beta_3 - \beta_4) + \mathrm{sh} m\, \beta_4\, \mathrm{sh} m\, (\beta_3 - \beta_4)] + P_3 K \mathrm{ch} m\, \beta_2}{\Delta}, \\
A_3 &= \frac{P_2\, \mathrm{sh} m\, \beta_3 - P_3 [\mathrm{sh} m\, \beta_4\, \mathrm{ch} m\, (\beta_2 - \beta_4) + K \mathrm{ch} m\, \beta_4\, \mathrm{sh} m\, (\beta_2 - \beta_4)]}{\Delta}, \\
B_3 &= \frac{-P_2\, \mathrm{ch} m\, \beta_3 + P_3 [\mathrm{ch} m\, \beta_4\, \mathrm{ch} m\, (\beta_2 - \beta_4) + K\, \mathrm{sh} m\, \beta_4\, \mathrm{sh} m\, (\beta_2 - \beta_4)]}{\Delta},
\end{aligned}$$

unde s-a notat :

$$\Delta = \mathrm{sh} m\, (\beta_3 - \beta_4)\, \mathrm{ch} m\, (\beta_2 - \beta_4) - K \mathrm{ch} m\, (\beta_3 - \beta_4)\, \mathrm{sh} m\, (\beta_2 - \beta_4).$$

Coeficienţii C_2, D_2, C_3, D_3 se obţin din expresiile lui A_2, B_2, A_3, B_3, unde se înlocuieşte P_2 şi P_3 cu Q_2 şi Q_3, respectiv.

a) O primă observaţie asupra soluţiei acestei probleme este aceea că făcînd $K = 1$, ceea ce revine la a considera domeniul D ca fiind un corp poros omogen, coeficienţii devin egali, adică $A_2 = A_3$, $B_2 = B_3$, $C_2 = C_3$, $D_2 = D_3$, în expresiile lor ne mai intervenind β_4, adică de fapt obţinem $\varphi_{20} = \varphi_{30}$, ceea ce era de aşteptat.

b) Dacă în formulele (8) vom face $\beta_4 = 0$, ceea ce revine la a considera că cele două medii sînt separate de o frontieră rectilinie, obţinem $A_2 = A_3$, $B_2 = KB_3$, respectiv $C_2 = C_3$ şi $D_2 = KD_3$. Deci în acest caz deosebirea dintre funcţiile φ_{20} şi φ_{30} apare numai la coeficienţii B, respectiv D.

c) În fine, dacă ne vom menţine în cazul $\beta_4 = 0$ şi vom lua $\beta_3 = -\beta_2$, adică cele două domenii D_2 şi D_3 sînt simetrice faţă de axa orizontală, vom obţine pentru coeficienţi expresiile :

$$A_2 = A_3 = \frac{P_2 + KP_3}{(1 + K)\,\mathrm{ch} m\, \beta_2},$$

$$B_2 = \frac{K(P_2 - P_3)}{(1 + K)\,\mathrm{sh} m\, \beta_2}, \quad B_3 = \frac{P_2 - P_3}{(1+K)\,\mathrm{sh} m\, \beta_2}.$$

În acest caz funcţiile căutate se vor putea scrie sub formă explicită ; de exemplu pentru φ_{20} vom avea :

$$\varphi_{20} = \frac{\pi}{(1+K)\,\beta_2} \frac{\cos\frac{\pi\beta}{2\beta_2}}{\mathrm{ch}\frac{\pi\alpha}{\beta_2} + \cos\frac{\pi\beta}{\beta_2}} \left[(P_2 + KP_3)\,\mathrm{ch}\frac{\pi\alpha}{2\beta_2} + \right.$$

$$\left. + K(P_2 - P_3)\sin\frac{\pi\beta}{2\beta_2}\right] + \frac{Q_2}{1+K}\left[M + KN + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi(1 + K)}{2\beta_2} \frac{\mathrm{sh}\frac{\pi\alpha}{\beta_2}}{\mathrm{ch}\frac{\pi\alpha}{\beta_2} + \cos\frac{\pi\beta}{\beta_2}}\right] + \frac{KQ_3}{1+K}(M - N),$$

unde s-a notat :

$$M = \frac{i}{4\,\beta_2}\left[\psi\left(\frac{3\beta_2 + \beta + i\alpha}{4\beta_2}\right) - \psi\left(\frac{3\beta_2 + \beta - i\alpha}{4\beta_2}\right) + \psi\left(\frac{3\,\beta_2 - \beta + i\alpha}{4\,\beta_2}\right) - \right.$$

$$\left. \psi\left(\frac{3\beta_2 - \beta - i\alpha}{4\beta_2}\right)\right],$$

$$N = \frac{i}{2\beta_2}\left[\psi\left(\frac{\beta_2 + \beta + i\alpha}{2\beta_2}\right) - \psi\left(\frac{\beta_2 + \beta - i\alpha}{2\beta^2}\right)\right],$$

ψ fiind funcţia lui Euler definită de $\psi(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \Gamma(x)$, unde $\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$. O expresie analoagă se obţine şi pentru funcţia φ_{30}. Explicitarea formulelor în acest caz a fost posibilă deoarece convergenţa integralelor este asigurată de condiţia $|\beta| \leqslant \beta_2$ care la noi este îndeplinită.

d) În aceste ultime formule dacă vom face $\beta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ vom obţine cazul unui mediu poros format din semicercul superior de coeficient de filtraţie k_2 şi semicercul inferior de coeficient k_3.

Primită la redacţie la 13 iunie 1967

Institutul de matematică al
Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, St. cerc. matem., *3–4*, 273–356 (1955).
2. H. I. ENE, Rev. Roum. math. pures et appl., **XI**, *3*, 335 – 340 (1966).
3. — Rev. Roum. math. pures et appl., **XII**, *7* (1967).
4. Я. С. УФЛЯНД, *Биполярные координаты в теории упругости*. Москва, 1950.

DESPRE METODA COARDEI PENTRU REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINIARE ÎN SPAȚII NORMATE

DE

B. JANKÓ și M. BALÁZS

(Cluj)

În lucrarea de față sînt prezentate teoreme de existență și de unicitate ale ecuației operaționale neliniare $P(x) = \theta$ cu metoda coardei [1], în cazul cînd $\Gamma_0 = D^{-1}[x_0, x_0'; P(x)]$ există, fără să fie mărginit. Se mai studiază cazul cînd $\Gamma(u, v) = D^{-1}[u, v; P(x)]$ există pentru orice u și v dintr-o sferă dată.

Metoda coardei este una dintre metodele iterative care servește la rezolvarea ecuațiilor reale. Această metodă a fost generalizată de mai mulți autori pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare definite în spații Banach. A. S. Sergheev [1] a stabilit două teoreme, dintre care prima se referă la existența, iar cealaltă la unicitatea soluției ecuațiilor operaționale neliniare în spații Banach.

În cadrul lucrării de față stabilim cîteva teoreme referitoare la existența, respectiv la unicitatea soluției ecuațiilor operaționale, îmbunătățind astfel condițiile date de A. S. Sergheev. Considerăm pentru aceasta ecuația

$$(1) \qquad P(x) = \theta,$$

unde $P(x)$ este o operație neliniară continuă, definită în sfera completă $S(x_0, 2\eta_0')$ din spațiul liniar normat X și cu valori în spațiul Y de același tip. Considerăm în continuare diferențele divizate de ordinul întîi respectiv de ordinul al doilea introduse de A. S. Sergheev [1], pe care le vom nota în cele ce urmează astfel $D[u, v; P(x)]$ respectiv $D[w, u, v; P(x)]$.

TEOREMA 1. *Dacă sînt satisfăcute condițiile:*

1°. *Există două puncte* $x_0, x_0' \in S \subset X$ *pentru care operația liniară* $D[x_0, x_0'; P(x)]$ *admite inversul* $\Gamma_0 = D^{-1}[x_0, x_0'; P(x)]$;

2°. *Sînt cunoscute delimitările*

$$\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0, \; \|\Gamma_0 P(x_0')\| \leqslant \eta_0', \; (\eta_0 \leqslant \eta_0');$$

3°. $\|\Gamma_0 D[w, u, v; P(x)]\| \leqslant \widetilde{K}$
pentru orice $u, v, w \in S$, *iar* $\widetilde{K}$ *este o constantă:*

4°. *Are loc inegalitatea*

$$\tilde{h}_0 = (\eta_0 + \eta_0')\widetilde{K} < \frac{1}{4};$$

Atunci ecuația (1) *are o soluție* x^* *către care converge șirul* $\{x_n\}$ *dat de algoritmul*

$$x_{n+1} = x_n - D^{-1}[x_n, x_{n-1}; P(x)]\, P(x_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

și rapiditatea convergenței este caracterizată de

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{1}{2^{s_n - 1}}\, q^{s_n - 1} (4\tilde{h}_0)^{s_n} \eta_0,$$

unde $0 < q < 1$ *și* $\{s_n\}$ *este șirul sumelor parțiale al seriei lui Fibonacci.*

Demonstrație. Arătăm că din condițiile teoremei enunțate rezultă condițiile teoremei 1 din lucrarea [1] pentru ecuația de forma $\widetilde{P}(x) = \theta$, unde $\widetilde{P}(x) = \Gamma_0 P(x)$. Observăm mai înainte că ecuația $\widetilde{P}(x) = \theta$ este echivalentă cu ecuația $P(x) = \theta$, deoarece în baza condiției 1° inversa Γ_0 există. În continuare arătăm că plecînd de la condițiile 1° — 4° ale teoremei noastre regăsim pe rînd condițiile 1) —4) ale teoremei citate relativ la operația $\Gamma_0 P(x)$. Astfel obținem:

1) $\widetilde{\Gamma}_0 = D^{-1}[x_0, x_0'; \Gamma_0 P(x)] = \{\Gamma_0 D[x_0, x_0'; P(x)]\}^{-1} = I$,

astfel $\widetilde{\Gamma}_0$ există și $\|\widetilde{\Gamma}_0\| = 1 = B_0$;

2) $\|\widetilde{\Gamma}_0 \widetilde{P}(x_0)\| \leqslant \|\widetilde{\Gamma}_0\| \, \|\widetilde{P}(x_0)\| = \|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0$ și

$\|\widetilde{\Gamma}_0 \widetilde{P}(x_0')\| \leqslant \|\widetilde{\Gamma}_0\| \, \|\widetilde{P}(x_0')\| = \|\Gamma_0 P(x_0')\| \leqslant \eta_0'$;

3) rezultă în mod evident;

4) avînd în vedere că $B_0 = 1$, avem

$$\tilde{h}_0 = (\eta_0 + \eta_0')\widetilde{K} < \frac{1}{4}.$$

În consecință în baza teoremei 1 din lucrarea citată ecuația $\widetilde{P}(x) = \theta$ admite o soluție x^* și au loc afirmațiile făcute în enunțul teoremei noastre. Din relația $\widetilde{P}(x^*) = \Gamma_0 P(x^*) = \theta$ rezultă $P(x^*) = \theta$, adică tocmai ceea ce am avut de demonstrat.

Observații. A) Trecînd de la operația $P(x)$ la $\Gamma_0 P(x)$ algoritmul de calcul (2) rămîne neschimbat.

B) Teorema dată de noi constituie o îmbunătățire a condițiilor 1) și 4) în raport cu operația $P(x)$ din teorema citată. Astfel în lucrarea de față *nu se presupune mărginirea lui* Γ_0. *De asemenea* $\tilde{h}_0 \leqslant h_0$, *unde* $h_0 = B_0(\eta_0 + \eta_0') K$ *este produsul folosit în lucrarea* [1]. *Inegalitatea rezultă din următoarea proprietate a diferenței divizate de ordinul doi :*

$$D[w, u, v ; \Gamma_0 P(x)] = \Gamma_0 D[w, u, v ; P(x)]$$

și din acest motiv $\widetilde{K} \leqslant B_0 K$.

TEOREMA 2. *Dacă sînt satisfăcute condițiile* 1°—4° *ale teoremei 1, atunci soluția ecuației (1) este unică.*

Demonstrarea acestei teoreme este analoagă cu demonstrarea teoremei 1, reducînd-o la teorema de unicitate corespunzătoare [1].

În cazul particular în care inversa $D^{-1}[u, v ; P(x)]$ există pentru orice $u \neq v$ într-o sferă, atunci condiția 4° poate fi îmbunătățită. Astfel enunțăm

TEOREMA 3. *Dacă sînt satisfăcute următoarele condiții :*

1°. $\Gamma(u, v)$ *există pentru orice două puncte* $u, v \in S$, *unde* S *este sfera completă din* X *definită de inegalitatea* $\|x - x_0\| \leqslant L\eta$ *și* $L = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h^{s_{n-1}+1}$, *iar* $\{s_n\}$ *șirul sumelor parțiale al seriei lui Fibonacci, luînd* $u_1 = 1$ *și* $u_2 = 2$;

2°. *avem delimitările*

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant \eta < +\infty \text{ și } \|x_1 - x_0'\| \leqslant \eta' < +\infty, \ (\eta \leqslant \eta') ;$$

$$3°. \ \|\Gamma(u', v') D[w, u, v ; P(x)]\| \leqslant \widetilde{K}$$

pentru orice $u', v', w \in S$;

$$4° \ \tilde{h} = \widetilde{K}(\eta + \eta^1) < 1 ;$$

atunci ecuația operațională $P(x) = \theta$ *admite o soluție* $x^* \in S$ *la care tinde șirul* $\{x_n\}$ *construit prin formula* (2) *și rapiditatea convergenței se caracterizează prin evaluarea*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant L \eta \tilde{h}^{s_{n-1}+1}$$

Demonstrație. Folosind formula lui Newton

$$P(x_1) - P(x_0) = D[x_0', x_0 ; P(x)] (x_1 - x_0) +$$
$$+ D[x_1 x_0', x_0 ; P(x)] (x_1 - x_0) (x_1 - x_0')$$

din formula (2) pentru $n = 1$ obținem

$$\|x_2 - x_1\| = \|\Gamma_1 P(x_1)\| \leqslant \widetilde{K} \|x_1 - x_0\| \, \|x_1 - x_0'\| \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{K} \eta\eta' \leqslant \widetilde{K}(\eta + \eta') \eta = \tilde{h} \eta .$$

În mod analog avem

$$\|x_3 - x_2\| \leqslant \widetilde{K} \|x_2 - x_1\| \, \|x_2 - x_0\| \leqslant \widetilde{K}(\eta + \eta') \tilde{h}\eta = \tilde{h}^2 \eta .$$

Prin inducţie completă se stabileşte

$$(3)\ \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \widetilde{K}\,\|x_n - x_{n-1}\|\,\|x_n - x_{n-2}\| \leqslant \widetilde{h}^{u_{n+1}-1}\,\eta = \widetilde{h}^{s_{n-1}+1}\,\eta\ (s_0 = 0).$$

Cu ajutorul inegalităţilor

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \ldots + \|x_{n-1} - x_n\| \leqslant$$

$$\leqslant \eta + \tilde{h}\eta + \tilde{h}^2\eta + \ldots + \tilde{h}^{s_{n-2}+1}\,\eta < \eta\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}^{s_{n-1}+1}\right) = \eta L$$

se arată faptul că $x_n \in S$ pentru orice n.

Folosind formula (3) din inegalitatea

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+2} - x_{n+1}\| + \ldots + \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\|$$

obţinem

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \eta \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{h}^{s_{n+i-1}+1} < \eta\, \tilde{h}^{s_{n-1}+1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}^{s_{n-1}+1}\right) \leqslant \eta L \tilde{h}^{s_{n-1}+1}.$$

Deoarece S este complet, există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^\star$ şi în mod evident $x^\star \in S$.

Astfel pentru $p \to \infty$ avem

$$\|x^\star - x_n\| \leqslant L\,\eta\,\tilde{h}^{s_{n-1}+1}.$$

Faptul că $P(x^\star) = \theta$ se demonstrează analog ca în cazul teoremei 1 din [1].

TEOREMA 4. *Dacă condiţiile 1° — 3° ale teoremei 3 sînt satisfăcute, iar condiţia 4° se înlocuieşte cu condiţia mai tare* $\tilde{h} < \alpha$, *unde* α *este rădăcina ecuaţiei*

$$(4)\qquad \frac{1}{z} = L(z),$$

atunci soluţia x^* *a ecuaţiei (1) este unică în sfera* S.

Valoarea aproximativă a numărului α *este 0,62.*

Demonstraţie. În adevăr, fie $\tau \neq x^\star$ o soluţie a ecuaţiei (1) care se află în sfera S. Din formula lui Newton obţinem

$$0 = \|D^{-1}[x_0, x^\star;\ P(x)]\,[P(\tau) - P(x^\star)]\| \geqslant |1 - \widetilde{K}\,\|\tau - x_0\||\,\|\tau - x^\star\|,$$

de unde dacă $1 > \widetilde{K}\,\|\tau - x_0\|$, avem $\tau = x^\star$, deci că soluţia ecuaţiei (1) este unică.

Însă $1 - \widetilde{K}\,\|\tau - x_0\| \geqslant 1 - \widetilde{K}\,\eta\,L = 1 - \tilde{h}\,L$, şi deci $1 - \tilde{h}\,L > 0$, dacă $\tilde{h}$ este mai mic decît rădăcina ecuaţiei (4), ceea ce era de demonstrat.

Primită la redacţie la 6 mai 1967

Institutul Pedagogic Baia-Mare
Institutul Pedagogic Cluj.

BIBLIOGRAFIE

1. А. С. СЕРГЕЕВ, *О методе хорд.* Сибирский математический журнал, **II**, *2*, 282–289 (1961).

ASUPRA PROBLEMEI LUI RAYLEIGH CU SUCȚIUNE

DE

IOAN POP

(Cluj)

Se extinde problema lui Rayleigh pentru fluide incompresibile, considerată în [1], la cazul cînd există sucțiune sau injecție.

1. INTRODUCERE

În anul 1962, Șt. I. Gheorghiță [1] a generalizat problema lui Rayleigh pentru fluide incompresibile, în sensul că pentru viteza plăcii se folosește o funcție de timp, astfel că dacă $t \to 0$ această viteză tinde la zero iar după un anumit timp, practic coincide cu viteza constantă V_0.

Plecînd de la ideea lucrării [1], ne propunem să studiem problema lui Rayleigh pentru fluide incompresibile cînd există sucțiune sau injecție. În acest fel, se studiază efectul sucțiunii și injecției asupra vitezei din stratul limită nestaționar și asupra forței de frecare de suprafață. Rezultatele obținute se reprezintă grafic pentru diferite valori ale parametrului ce caracterizează sucțiunea sau injecția.

Efectul sucțiunii și injecției asupra creșterii stratului limită, a fost de asemenea analizat de către H. Hasimoto [2], E. Becker [3] etc.

2. ECUAȚIILE STRATULUI LIMITĂ

Să considerăm un sistem de coordonate Oxy cu axa Ox de-a lungul plăcii plane.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 10, P. 1437–1442, BUCUREȘTI, 1967

Ecuațiile care descriu mișcarea nestaționară cu sucțiune a unui lichid vîscos incompresibil, au forma [2]:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{3}$$

unde u și v sînt componentele vitezei în direcțiile axelor de coordonate; t — timpul; ρ — densitatea; p — presiunea iar ν — coeficientul de vîscozitate cinematică.

Condițiile inițiale și la limită ale sistemului (1) — (3) sînt:

$$\begin{cases} \text{pentru } t < 0, & \\ & u = v = 0 \qquad\qquad \text{pentru } y \geqslant 0; \\ \text{pentru } t \geqslant 0, & \\ & u = U_p(t),\ v = -V_p(t) \qquad \text{pentru } y = 0, \\ & u = 0 \qquad\qquad \text{pentru } y \to \infty. \end{cases} \tag{4}$$

Integrînd ecuația (1), se obține

$$v = -V_p(t), \tag{5}$$

unde $V_p(t) > 0$ reprezintă viteza de sucțiune iar $V_p(t) < 0$ viteza de injecție.

Ținînd seamă de rezultatul stabilit în [2], că mișcarea nestaționară cu sucțiune admite soluții asemenea în cazul cînd viteza u este proporțională cu t^{α} $(\alpha \geqslant 0)$ iar V_p este proporțională cu $t^{-1/3}$, să considerăm soluția ecuației (2) sub forma:

$$u = U_p(t)\,F(\eta),\ v = -V_p(t) = -v_0\,t^{-1/2},\ \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}, \tag{6}$$

$v_0 =$ constant.

Înlocuind (6) în (2), se obține ecuația:

$$U_p\,\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\eta^2} + 2\,U_p(\eta + \eta_0)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta} - 4\,t\,\frac{\mathrm{d}U_p}{\mathrm{d}t}F = 0, \tag{7}$$

unde $\eta_0 = \frac{v_0}{\sqrt{\nu}}$ este parametrul ce caracterizează sucțiunea $(\eta_0 > 0)$ respectiv injecția $(\eta_0 < 0)$.

Ecuația (7) va trebui integrată cu condițiile la limită :

$$F(0) = 1,\ F(\infty) = 0. \tag{8}$$

3. REZOLVAREA PROBLEMEI

Să presupunem că

$$U_p(t) = V_0 t^m, \tag{9}$$

unde m este un număr constant nenegativ iar V_0 o constantă.

Cu (9), ecuația (7) devine, notînd cu accente derivatele lui F față de η :

$$F'' + 2(\eta + \eta_0) F' - 4 m F = 0. \tag{10}$$

Dacă luăm $2m = n$, atunci din (10) rezultă ecuația

$$F'' + 2 (\eta + \eta_0) F' - 2 n F = 0. \tag{11}$$

Soluția ecuației (11), cu condițiile la limită (8), pentru $2n$ întreg, este

$$F(\eta) = \frac{f(\eta + \eta_0)}{f(\eta_0)} = \frac{i^n \operatorname{erfc}(\eta + \eta_0)}{i^n \operatorname{erfc} \eta_0}, \tag{12}$$

unde [4], [5]

$$i^n \operatorname{erfc} x = \int_x^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc} \gamma \, d\gamma, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\gamma^2} d\gamma,$$

$$2ni^n \operatorname{erfc} x = i^{n-2} \operatorname{erfc} x - 2xi^{n-1} \operatorname{erfc} x.$$

În acest fel am obținut pentru viteza u formula :

$$u(y, t) = V_0 t^{n/2} \frac{i^n \operatorname{erfc}\left(\eta_0 + \dfrac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)}{i^n \operatorname{erfc} \eta_0}. \tag{13}$$

În lipsa sucțiunii ($\eta_0 = 0$), din (13) regăsim rezultatul stabilit în [1]. Totodată pentru $n = 0$, din (13), rezultă soluția problemei lui Rayleigh cu sucțiune sau injecție.

Pentru calculul forței de frecare de suprafață, ținem seamă de formula

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} i^n \operatorname{erfc} x = (-1)^l i^{n-l} \operatorname{erfc} x, \quad (l \leqslant n). \tag{14}$$

Dacă :

a) $n = 1$, atunci, din (13) și (14), rezultă

$$\begin{aligned} u(\eta, t) &= V_0 t^{1/2} \frac{i \operatorname{erfc}(\eta + \eta_0)}{i \operatorname{erfc} \eta_0} = \\ &= V_0 t^{1/2} \frac{\exp[-(\eta + \eta_0)^2] - (\eta + \eta_0)\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\eta + \eta_0)}{\exp(-\eta_0^2) - \eta_0 \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \eta_0}, \end{aligned} \tag{15}$$

și

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\rho V_0 \sqrt{\nu}}{2} \frac{i^0 \operatorname{erfc} \eta_0}{i \operatorname{erfc} \eta_0}. \tag{16}$$

b) $n = 2$, expresia lui u este

$$\begin{aligned} u(\eta, t) &= \\ &= V_0 t \frac{2(\eta + \eta_0)\exp[-(\eta + \eta_0)^2] - \sqrt{\pi}[1 + 2(\eta + \eta_0)^2] \operatorname{erfc}(\eta + \eta_0)}{2\eta_0 \exp(-\eta_0^2) - \sqrt{\pi}(1 + 2\eta_0^2) \operatorname{erfc} \eta_0}, \end{aligned} \tag{17}$$

și

$$\tau_0 = -\frac{\rho V_0 \sqrt{\nu t}}{2} \frac{i \operatorname{erfc} \eta_0}{i^2 \operatorname{erfc} \eta_0}. \tag{18}$$

Folosind tabelele [6], [7] pentru calculul lui $i^n \operatorname{erfc} x$, în figurile 1, 2 și 3 se arată distribuția vitezei adimensionale $F(\eta)$, pentru diferite valori ale parametrului η_0. Din figuri se observă că efectul sucțiunii este de a apropia viteza paralelă cu placa, spre placă, în timp ce efectul injecției este de a o îndepărta. În același timp, se observă că viteza particulelor fluide în stratul limită descrește pe măsură ce n crește.

Figura 4 reprezintă gradientul vitezei adimensionale pe placă, pentru diferite valori ale lui n. Observăm că forța de frecare crește o dată cu creșterea lui n.

În figura 5 s-a reprezentat raportul dintre viteza fluidului, la distanța egală cu unitatea de la placă, pentru $\nu = 1$, și viteza plăcii la sfîrșitul primei secunde.

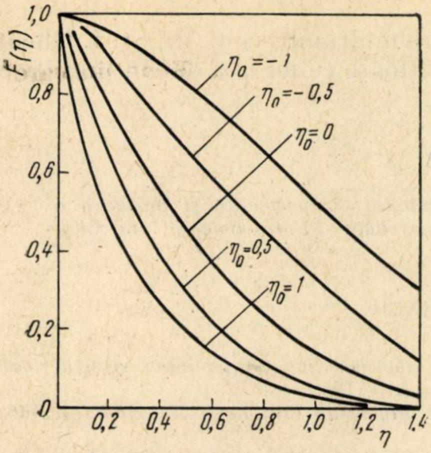


Fig. 1. Profilul vitezei adimensionale pentru $n = 0$.

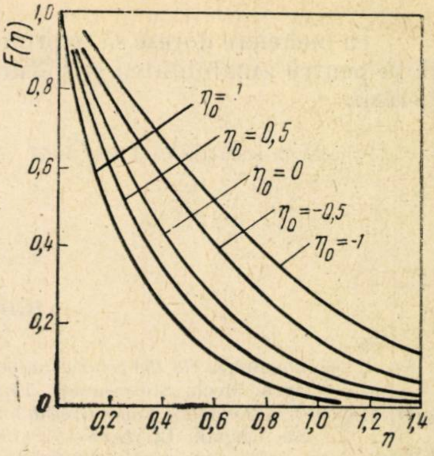


Fig. 2. Profilul vitezei adimensionale pentru $n = 1$.

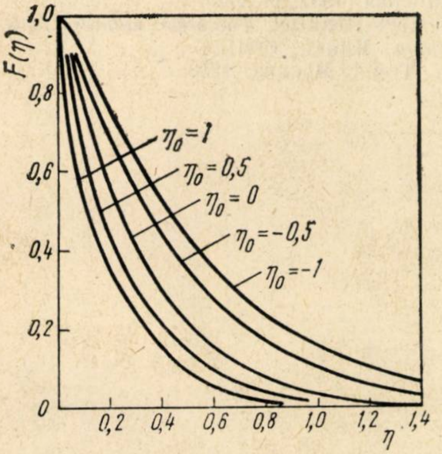


Fig. 3. Profilul vitezei adimensionale pentru $n = 2$.

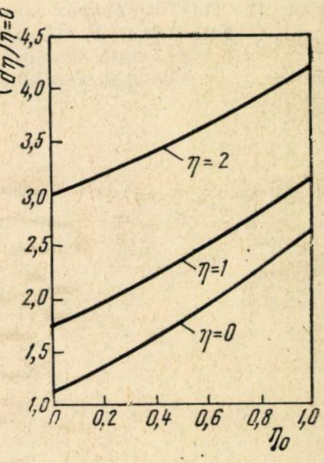


Fig. 4. Gradientul vitezei de placă

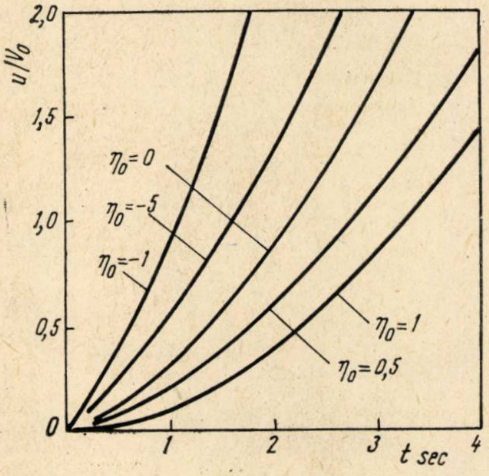


Fig. 5. Profilul vitezei pentru $n = 2$.

În încheiere doresc să exprim sincere mulţumiri conf. dr. Şt. I. Gheorghiţă pentru amabilitatea şi sfaturile preţioase ce mi le-a dat în pregătirea lucrării.

Primită la redacţie la 3 mai 1967

Facultatea de matematică şi mecanică a
Universităţii „Babeş-Bolyai" din Cluj.

BIBLIOGRAFIE

1. Şт. I. Gheorghiţă, *On the generalization of the Rayleigh's problem for incompressible fluids*. Arch. Mech. Stosowanej, **14**, *2*, 201–210 (1962).
2. H. Hasimoto, *Boundary Layer Growth on a Flat Plate with Suction or Injection*. J. Phys. Soc. Japan, **12**, *1*, 68–72 (1957).
3. E. Becker, *Eine einfache Verallgemeinerung der Rayleigh-Grenzschicht*. ZAMP, **11**, *2*, 146–152 (1960).
4. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, 1948, p. 51.
5. А. В. Лыков, *Теория теплопроводности*. Москва, 1952, p. 372.
6. О. С. Берлянд, Р. И. Гаврилова, А. П. Прудников, *Таблицы интегральных функций ошибок и полиномов эрмита*. Минск, 1961.
7. — *Таблицы вероятностных функций*. Том I, Москва, 1958.

ASUPRA UNOR CORECȚII DE COMPRESIBILITATE ÎN DINAMICA GAZELOR

DE

I. L. POPESCU

Se studiază problema determinării aproximative a coeficientului de presiune pentru mișcarea subsonică a unui fluid compresibil, ținîndu-se seama de unghiul de atac. Rezultatele obținute sînt în bună concordanță cu experiența, pentru valori ale numărului Mach mai mici sau egale cu 0,6.

1. Într-o lucrare anterioară [1] am demonstrat că între coeficientul de portanță C_y, corespunzător mișcării subsonice a unei rețele de profile într-un fluid compresibil și același coeficient C_{y_0}, corespunzător mișcării în fluid incompresibil, are loc următoarea relație

$$C_y = \frac{\beta_\infty \operatorname{th}\theta}{\theta(1 - M_\infty^2 \cos^2\alpha)\operatorname{th}\eta}\, C_{y_0}, \tag{1}$$

unde

$$\beta_\infty = 1 - M_\infty^2, \quad \theta = \frac{1}{\beta_\infty}\sqrt{1 - M_\infty^2 \sin^2\alpha}, \quad \eta = \frac{2\pi a}{\tau}, \tag{2}$$

M_∞ fiind numărul lui Mach la infinit, $2a$ lungimea coardei unui profil, τ pasul rețelei, α unghiul de atac.

Prin trecerea la limită, pentru $\tau \to \infty$ (deci $\eta \to 0$), din (1) se obține [2]

$$C_y = \frac{\beta_\infty C_{y_0}}{1 - M_\infty^2 \cos^2\alpha}, \tag{3}$$

care, pentru $\alpha = 0$, se reduce la formula clasică a lui Glauert [3] și Prandtl [4].

ST. CERC. MAT., TOM., 19, Nr. 10, P. 1443–1447, BUCUREȘTI, 1967

Dacă se pune în evidență coeficientul de presiune, notat prin C_p și C_{p_0} în fluidul compresibil și incompresibil respectiv, din teoria de liniarizare a lui Prandtl-Glauert rezultă și formula

$$C_p = \frac{C_{p_0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \tag{4}$$

Plecînd de la (4) și bazîndu-se pe rezultate experimentale [5], E. V. Laitone a obținut o formulă [6] apropiată ca structură de formulele care derivă din aplicarea metodei hidografice a lui S. A. Ciaplîghin în dinamica gazelor [7], [8], [9], [10], deși legătura între mișcarea compresibilă și cea incompresibilă este cu totul alta.

E. V. Laitone presupune că în formula (4) numărul lui Mach M_∞ în curentul neperturbat se poate înlocui prin numărul lui Mach local M, variabil de la punct la punct. Relația obținută pe baza acestei ipoteze, și care conține și raportul γ al căldurilor specifice, concordă mai bine cu experiența decît relația corespunzătoare din lucrările [8], [9].[1]

În cele ce urmează vom studia problema analogă, cînd se ține seama și de unghiul de atac, în sensul precizat în lucrările [1] și [2], și vom face comparație cu rezultatele obținute prin alte metode de aproximare.

2. Considerăm mișcarea izentropică, permanentă și irotațională a unui fluid compresibil de viteză V_∞, în care este plasată o aripă subțire, puțin curbată și cu unghi de atac α oarecare.

Relația cunoscută

?

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \tag{5}$$

împreună cu formula de definiție a coeficientului de presiune

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right) \tag{6}$$

ne permit să exprimăm pe M prin relația

$$M^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right)\left(1 + \frac{\gamma C_p}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{1}{\gamma} - 1} - 1\right]. \tag{7}$$

Pentru

$$\left|\frac{\gamma}{2} C_p M_\infty^2\right| < 1, \tag{8}$$

avem dezvoltarea în seria următoare

$$M^2 = (1 - C_p) M_\infty^2 - \frac{C_p}{2}\left[\gamma - 1 - \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) C_p\right] M_\infty^4 + \ldots, \tag{9}$$

---

[1] Autorul pare să nu aibă cunoștință de lucrarea [10] în care formula care dă coeficientul de presiune conține de asemenea și pe γ.

în care, pe lîngă puterile lui M_∞, intervin și puterile lui C_p. Vom neglija, cu Laitone, termenii care conțin puteri superioare puterii întîi a lui C_p; luăm deci

$$M^2 = (1 - C_{p_0}) M_\infty^2 - \frac{C_{p_0}}{2}(\gamma - 1) M_\infty^4, \tag{10}$$

unde C_p a fost înlocuit prin C_{p_0}.

Dacă în formula (3) se pune în evidență coeficientul de presiune, avem și relația

$$C_p = \frac{\sqrt{1 - M^2}}{1 - M^2 \cos^2 \alpha} C_{p_0}; \tag{11}$$

unde s-au folosit notațiile introduse mai sus.

Expresia (10) a lui M^2, introdusă în (11), conduce la următoarea formulă

$$C_p = \frac{\sqrt{1 - (1 - C_{p_0}) M_\infty^2 + \frac{\gamma - 1}{2} C_{p_0} M_\infty^4}}{1 - \left[\left(1 - C_{p_0}\right) M_\infty^2 + \frac{\gamma - 1}{2} C_{p_0} M_\infty^4\right] \cos^2 \alpha} C_{p_0}, \tag{12}$$

a cărei structură diferă de cele amintite mai sus și, în plus, în ea intervine unghiul de atac α.

Observații. 1°. Dacă în dezvoltarea (9) se fixează atenția asupra lui M_∞, atunci trebuie luați în (10) toți termenii care conțin puterile lui M_∞, pînă la puterea a patra, inclusiv.

2°. În cazul cînd $C_{p_0} < 0$, trebuie ca M_∞ să nu depășească o anumită limită, pentru ca expresia lui C_p să aibă sens. Condiția care se deduce din (12) este

$$- C_{p_0} \leqslant \frac{1 - M_\infty^2}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right) M_\infty^2}.$$

Exemplu numeric. Pentru $C_{p_0} = -0{,}6$ și $\gamma = 1{,}4$, trebuie să avem $M_\infty \leqslant 0{,}772$.

3°. În [6] nu se ține seama de aceasta și de aceea dezvoltările în serie în care intervine expresia $\frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right) C_{p_0}$ nu sînt valabile decît între anumite limite.

4°. Dacă în locul lui (10) se ia

$$M^2 = (1 - C_p) M_\infty^2 - \frac{\gamma - 1}{2} C_p M_\infty^2,$$

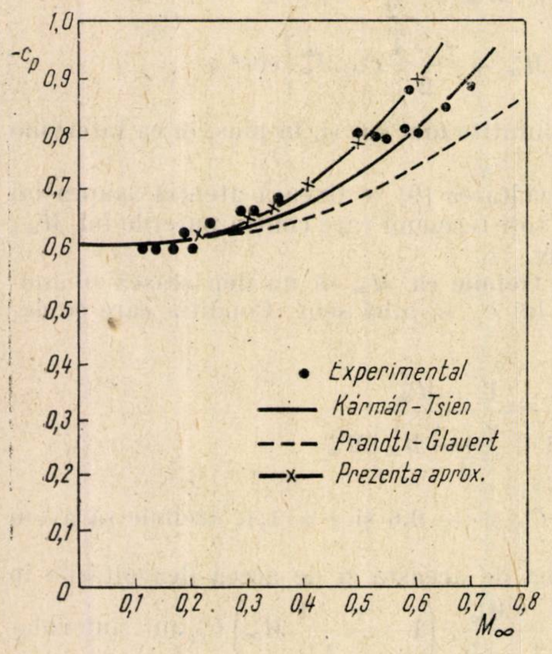
deci dacă C_p nu se aproximează prin C_{p_0}, atunci, după înlocuirea în (11), se obține o ecuație de gradul al IV-lea în C_p a cărei rezolvare conduce la calcule complicate.

3. Din compararea cu graficile existente în unele lucrări de specialitate, care conţin şi curbe cu rezultate experimentale am obţinut o bună concordanţă cu experienţa.

Pentru ilustrare, am alcătuit următorul tablou, în care se determină diferite valori ale lui C_p în funcţie de M_∞, pentru $\alpha = -2°$ şi $C_{p_0} = -0,6$.

M_∞	C_p
0	$-0,60$
0,2	$-0,62$
0,3	$-0,65$
0,35	$-0,67$
0,4	$-0,69$
0,5	$-0,78$
0,6	$-0,93$
0,7	$-1,25$

De asemenea am trasat graficul alăturat.



Figură. Coeficientul de presiune C_p este calculat în punctul situat la distanţa 30 % din coardă, considerată de la vîrf, pentru unghiul de atac $\alpha = -2°$ şi pentru diferite valori ale lui M_∞ pe extradosul profilului NACA 4412 (Apud L. G. Loiţianski, *Mehanika jidcosti i gaza*, ed. II, GITTL, Moscova, 1957, p. 351).

Pe acest grafic, se observă că formula (12) dă rezultate în bună concordanţă cu experienţa, pentru $M_\infty \leqslant 0,6$.

Primită la redacţie
la 7 iunie 1967

Facultatea de matematică şi mecanică a Universităţii din Bucureşti, Str. Academiei nr. 14.

BIBLIOGRAFIE

1. I. L. Popescu, *Sur l'écoulement subsonique d'un fluide compressible à travers une grille de profils*. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. Bucarest, **4** (**52**), 2, 87 (1960).
2. **М.** И. Гуревич, М. Д. Хаскинд, *Замечание о линеаризации уравнений газовой динамики*. Прикл. мат. и мех., **XXL**, *3*, 437 (1957).
3. H. Glauert, *The effect of compressibility on the lift on airfoil*. (Proc. Roy. Soc. A, **118**, 113 (1928).
4. L. Prandtl, *Über Strömungen deren Geschwindigkeiten mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar sind*. Journ. Aeronaut. Research Institute, Tokyo Imp. Univ. *65*, 14 (1930).
5. E. V. Laitone, *An experimental investigation of transonic and accelerated supersonic flow by the hydraulic analogy*. University of California, Institute of Engineering Research, Berkeley Series, *3*, Issue no. 315, July 3 (1950).
6. E. V. Laitone, *New compressibility correction for two-dimensional subsonic flow*. J. Aeronaut. Sc., **18**, *5*, 350 (1951).
7. С. А. Чаплыгин, *О газовых струях*. Уч. зап. **М**оск. унив., Отд. физ-мат. наук, *21* (1904).
8. H. S. Tsien, *Two-dimensional subsonic flow of compressible fluids*. J. Aeronaut. Sc., **6**, 399 (1939).
9. Th. von Kármán, *Compressibility effects in aerodynamics*. J. Aeronaut. Sc., **8**, 337 (1941)
10. C. Jacob, *Remarques sur la méthode approchée de Tchapliguine*. C. R., Paris, **223**, 714 (1946). (dezvoltarea calculelor este făcută în tratatul: *Introducere matematică în mecanica fluidelor*. Editura Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952, p. 731).

OBIECTE DE PREZENTARE FINITĂ ÎN CATEGORIA PREFASCICULELOR ABELIENE

DE

ALEXANDRU RADU

În cele ce urmează vom caracteriza obiectele de tip finit din categoria $\overline{\mathcal{C}}$ şi vom lărgi noţiunea de obiect de prezentare finită [2] în această categorie atunci cînd $\mathcal{C}$ este dotată cu o topologie Grothendieck.

1°. Fie $\mathfrak{U}$ un univers fixat, $\mathcal{C}$ o U-categorie aditivă element al lui $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$-Ab categoria grupurilor abeliene a căror mulţime subiacentă este element din $\mathfrak{U}$.

Notăm prin $\overline{\mathcal{C}}$ categoria prefasciculelor definite pe $\mathcal{C}$ cu valori în $\mathfrak{U}$-Ab. $\overline{\mathcal{C}}$ este o U-categorie abeliană cu $\mathfrak{U}$-limite proiective şi $\mathfrak{U}$-limite inductive exacte.

Fie $h : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ functorul canonic. h este aditiv, deplin fidel şi comută cu $\mathfrak{U}$ — limitele proiective reprezentabile. Din teorema lui Yoneda-Grothendieck rezultă că $\mathcal{G} = (h\,(X))_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ formează o $\mathfrak{U}$-familie de generatori proiectivi finit transferabili în $\overline{\mathcal{C}}$.

Mai mult chiar, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,C$, functorul $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}\,(h\,(X), -) : \overline{\mathcal{C}} \to \mathfrak{U}$-Ens comută cu $\mathfrak{U}$-limitele inductive.

PROPOZIŢIA 1. *Pentru orice* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $h\,(X)$ *este un obiect de tip finit în* $\overline{\mathcal{C}}$.

Într-adevăr, fie $(A_i)_{i \in I \in \mathfrak{U}}$ o familie filtrată crescător de subobiecte din $h\,(X)$ astfel încît $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = h\,(X)$.

Există atunci un epimorfism canonic.

$$p : \bigoplus_{i \in I} A_i \to h\,(X)$$

Deoarece $h\,(X)$ este proiectiv, p este secţionabil, adică există un invers al său la dreapta s $(p\,.\,s = 1_{h(X)}$.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, Nr. 10, P. 1449–1453, BUCUREŞTI, 1967

Cum $h(X)$ este finit transferabil, există o submulţime finită J a lui I aşa încît să fie comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus\limits_{j\in J} A_j \arrow[dr, "\rho"] & \\ A \arrow[ur, "q"] \arrow[rr, "s"'] & & \bigoplus\limits_{i\in I} A_i \end{tikzcd}$$

Din $1_{h(X)} = ps = p\,(\rho q) = (p\rho)\,q$ rezultă epimorfismul

$$p\rho : \bigoplus_{j\in J} A_j \to A$$

şi deci $A = \bigcup\limits_{j\in J} A_j$.

Deoarece această reuniune este finită iar mulţimea I filtrantă crescător, există un $l \in I$ astfel ca $A = A_l$.

Propoziţia 2. *Orice obiect cît al unui obiect de tip finit din $\bar{\mathcal{C}}$ este încă un obiect de tip finit.*

Fie $F \xrightarrow{p} F' \to 0$ un epimorfism în $\bar{\mathcal{C}}$, unde F este de tip finit. Dacă $F' = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, unde $(A_i)_{i\in I\in\mathfrak{U}}$ este o familie filtrantă crescător de subobiecte ale lui F', atunci, deoarece $\bar{\mathcal{C}}$ este cu U-limite inductive exacte, $F = p^{-1}(F') = \underset{i\in I}{U} p^{-1}(A_i)$ de unde, conform ipotezei, există $i \in I$ astfel ca $F = p^{-1}(A_i)$ şi deci $F' = A_i$ c.c.t.d.

Observaţie. Deoarece h comută cu $\mathfrak{U}$-limitele proiective reprezentabile, rezultă că orice obiect din $\bar{\mathcal{C}}$ finit generat în raport cu familia de generatori $\mathcal{G}$ este un cît al unui obiect reprezentabil din $\bar{\mathcal{C}}$.

Din propoziţiile precedente rezultă că orice obiect din $\bar{\mathcal{C}}$ finit generat în raport cu $\mathcal{G}$ este de tip finit.

Propoziţia 3. *Orice obiect din $\bar{\mathcal{C}}$ de tip finit este finit generat în raport cu $\mathcal{G}$.*

Fie F un obiect de tip finit din $\bar{\mathcal{C}}$. Deoarece $\mathcal{G}$ este o familie de generatori în $\bar{\mathcal{C}}$, există un epimorfism în $\bar{\mathcal{C}}$

$$(*) \qquad \bigoplus_{J} h(X) \xrightarrow{p} F \to 0$$

unde $I = \prod\limits_{X\in \operatorname{Ob}\mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(h(X), F)$ şi unde pentru orice $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, $h(X)$ intră în suma directă din $(*)$ de atîtea ori cîte elemente are mulţimea $\operatorname{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(h(X), F)$.

Însă $\bigoplus\limits_{I} h(X) = \bigcup\limits_{\mathfrak{F}} (\bigoplus\limits_{J} h(X))$, unde $J \in \mathfrak{F}$ iar $\mathfrak{F}$ este mulţimea submulţimilor finite ale lui I.

Cum $F = p\,(\bigoplus\limits_{I} h(X)) = \bigcup\limits_{\mathfrak{F}}(p\,(\bigoplus\limits_{J}(h(X))$ este de tip finit rezultă $F = p\,(\bigoplus\limits_{J} h(X))$ pentru un $J \in \mathfrak{F}$, adică F este finit generat în raport cu $\mathcal{G}$ şi propoziţia este dovedită.

Am demonstrat așadar următoarea:

TEOREMĂ. *În $\overline{\mathcal{C}}$ mulțimea obiectelor de tip finit se acoperă cu mulțimea obiectelor finit generate în raport cu familia de generatori $\mathcal{G}$.*

PROPOZIȚIA 4. *În $\overline{\mathcal{C}}$ orice obiect de tip finit (deci și finit generat în raport cu $\mathcal{G}$) este finit transferabil.*

Fie F un obiect din $\overline{\mathcal{C}}$ finit generat în raport cu $\mathcal{G}$ și $u : F \to \bigoplus_{i \in I} F_i$ un morfism din $\overline{\mathcal{C}}$ cu $F_i \in \text{Ob}\,\overline{\mathcal{C}}$ pentru orice $i \in I \in \mathfrak{U}$.

Deoarece F este finit generat, există $X \in \text{Ob}\,\mathcal{C}$ și un epimorfism $p : h(X) \to F$ în $\overline{\mathcal{C}}$.

Cum $h(X)$ este finit transferabil, există o submulțime finită J a lui J și diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{j \in J} F_j \arrow[dr, "\rho"] & \\
h(X) \arrow[r, "p"] \arrow[ur, "q"] & F \arrow[r, "u"] & \bigoplus_{i \in I} F_i
\end{tikzcd} \qquad (up = \rho q)$$

Însă p este epimorfism și deci $\text{Im}\,(up) = \text{Im}\,(u)$.

Cum $\text{Im}\,(up) \subseteq \bigoplus_{j \in J} F_j$, rezultă $\text{Im}\,(u) \subset \bigoplus_{j \in J} F_j$ adică u se factorizează prin ρ și propoziția este dovedită.

PROPOZIȚIA 5. *Dacă $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ este un șir exact în $\overline{\mathcal{C}}$ și dacă F', F'' sînt de tip finit, atunci și F este la fel.*

Propoziția este imediată aplicînd lema celor cinci morfisme diagramei comutative

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & h(X) \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & h(X \oplus Y) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & h(Y) \arrow[r] \arrow[d, "u''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r] & F \arrow[r] & F'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu liniile exacte și u', u'' epimorfisme.

COROLARUL 1. *O sumă directă finită de obiecte de tip finit din $\overline{\mathcal{C}}$ este un obiect de tip finit.*

COROLARUL 2. *Dacă $(F_i)_{i \in I}$ este o familie finită de subobiecte de tip finit ale unui obiect F din $\overline{\mathcal{C}}$, atunci $\bigcup_{i \in I} F_i$ este un subobiect de tip finit al lui F.*

2°. Presupunem în cele ce urmează că $\mathcal{C}$ este dotată cu o topologie τ.

Fie $\mathcal{C}^{\sim}$ subcategoria plină a lui $\overline{\mathcal{C}}$ ale cărei obiecte sînt fascicule în topologia τ, $i : \mathcal{C}^{\sim} \to \overline{\mathcal{C}}$ functorul de incluziune, $a : \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}^{\sim}$ functorul fascicul asociat, adjunct la stînga pentru i și exact.

Amintim următoarele fapte din [1]:

Un morfism $u : F \to G$ din $\overline{\mathcal{C}}$ se numește acoperitor în topologia τ dacă $a(u) : aF \to aG$ este un epimorfism în $C^{\sim}$. Deoarece a este exact, orice epimorfism din $\overline{\mathcal{C}}$ este acoperitor în topologia τ și evident compunerea a două morfisme acoperitoare este un morfism acoperitor.

DEFINIȚIE. Obiectul F din $\overline{\mathcal{C}}$ se numește de prezentare finită dacă este de tip finit și dacă, pentru orice morfism $u : F' \to F$ din $\overline{\mathcal{C}}$ acoperitor în topologia τ, unde F' este de tip finit, rezultă și $\text{Ker}\,(u)$ de tip finit.

PROPOZIȚIA 6. *Fie* $0 \to F' \xrightarrow{j} F \xrightarrow{p} F'' \to 0$ *un șir exact în* $\overline{\mathcal{C}}$. *Sînt adevărate următoarele afirmații :*

a) *dacă F este de prezentare finită și F' este de tip finit, atunci F'' este de prezentare finită :*

b) *dacă F' și F'' sînt de prezentare finită, așa este și F.*

Demonstrație. a) Din propoziția 2 rezultă F'' de tip finit.

Fie $G \xrightarrow{u} F''$ un morfism acoperitor în topologia τ cu G de tip finit. Să considerăm diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \operatorname{Ker} u' \arrow[r, phantom, "\approx"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} u \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} p' \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \times_{F''} G \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & G \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r, "j"] & F \arrow[r, "p"] & F'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Cu liniile și coloanele exacte. Cum F' și G sînt de prezentare finită rezultă si $F \times_{F''} G$ de tip finit. Însă u' este acoperitor și deci $\operatorname{Ker} u'$ este de tip finit căci F este de prezentare finită.

b) Din propoziția 5 rezultă F de tip finit.

Fie $u : G \to F$ un morfism acoperitor cu G de tip finit și diagrama comutativă canonic constantă

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dd] & 0 \arrow[ddd] & \\
 & \operatorname{Ker} pu \arrow[ddr] & & & \\
 & & \operatorname{Ker} u \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & F' \times_F G \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "u'"'] & G \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "u"] & \operatorname{Coker} j \arrow[r] \arrow[d, "u''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r, "j"] & F \arrow[r, "p"] & F'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu liniile exacte, u'' monomorfism și u' acoperitor. Cum orice epimorfism este acoperitor, rezultă pu acoperitor și deci $\operatorname{Ker} pu$ este de tip finit căci F'' este de prezentare finită. Însă $\operatorname{Ker} p' = \operatorname{Ker} pu$ căci u'' este monomorfism. Deci $F' \times_F G = \operatorname{Ker} p'$ este de tip finit. Deoarece F' este de prezentare finită, $\operatorname{Ker} u'$ ($\approx \operatorname{Ker} u$) este de tip finit și afirmația este dovedită.

COROLARUL 1. *O sumă directă finită în $\overline{\mathcal{C}}$ de obiecte de prezentare finită este un obiect de prezentare finită și reciproc, dacă o sumă directă finită este un obiect de prezentare finită la fel sînt și sumanzii săi direcți.*

COROLARUL 2. *Dacă $(F_i)_{i \in I}$ este o familie finită de subobiecte de prezentare finită ale unui obiect F din $\overline{\mathcal{C}}$, atunci $\bigcup_{i \in I} F_i$ este un subobiect de prezentare finită al lui F dacă și numai dacă $\bigcap_{i \in I} F_i$ este de tip finit*

Observație. Deoarece orice epimorfism din $\overline{\mathcal{C}}$ este acoperitor în topologia τ, rezultă că orice obiect F din $\overline{\mathcal{C}}$ de prezentare finită admite o prezentare reprezentativă, adică există un șir exact

$$h(X) \xrightarrow{u} h(Y) \xrightarrow{p} F \to 0 \text{ cu } X,\ Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}.$$

PROPOZIȚIA 7. *Dacă F este un obiect de prezentare finită în $\overline{\mathcal{C}}$, atunci functorul $\operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F, -)$ comută cu limitele inductive.*

Într-adevăr, dacă $(F_i)_{i \in I \in \mathcal{U}}$ este un sistem inductiv de obiecte din $\overline{\mathcal{C}}$, avem diagrama cumutativă

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F, \varinjlim_{I} F_i) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h(Y), \varinjlim_{I} F_i) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h(X), \varinjlim_{I} F_i) \\
0 \arrow[r] & \varinjlim_{I} \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(F, F_i) \arrow[r] \arrow[u, "\theta"] & \varinjlim_{I} \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h(Y), F_i) \arrow[r] \arrow[u, "\theta_1"] & \varinjlim_{I} \operatorname{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(h(X), F_i) \arrow[u, "\theta_2"]
\end{tikzcd}$$

cu liniile exacte și θ_1, θ_2 izomorfisme. Afirmația rezultă aplicînd lema celor cinci morfisme.

PROPOZIȚIA 8. *Dacă $0 \to F' \xrightarrow{j} F \xrightarrow{p} F'' \to 0$ este un șir exact în $\overline{\mathcal{C}}$ și dacă F'' este de prezentare finită iar F de tip finit, atunci și F' este de tip finit.*

Fie $h(X) \xrightarrow{u} h(Y) \xrightarrow{v} F'' \to 0$ o prezentare reprezentabilă a lui F''. Deoarece $h(Y)$ este proiectiv, există un morfism $t \colon h(Y) \to F$ astfel ca $pt = v$.

Din $vu = 0$ rezultă $p(tu) = 0$ și prin urmare există un morfism unic $s : h(X) \to F'$ astfel ca $js = tu$.

Avem în definitiv diagrama comutativă.

$$\begin{tikzcd}
 & h(X) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "s"] & h(Y) \arrow[r, "v"] \arrow[d, "t"] & F'' \arrow[r] \arrow[d, equal, "1_{F''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r, "j"] & F \arrow[r, "p"] & F'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu liniile exacte. Aplicînd lema serpentinei avem șirul exact.

$$0 = \operatorname{Ker} 1_{F''} \to \operatorname{Coker} s \to \operatorname{Coker} t \to \operatorname{Coker} 1_{F''} \to 0$$

adică $\operatorname{Coker} s \approx \operatorname{Coker} t$ și deci $\operatorname{Coker} s$ este de tip finit.

Din șirul exact

$$0 \to \operatorname{Im}(s) \to F' \to \operatorname{Coker} s \to 0$$

rezultă F' de tip finit.

Primită la redacție
la 23 mai 1967

*Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
str. M. Eminescu nr. 47, București*

BIBLIOGRAFIE

1. N. POPESCU, St. cerc. mat. **18**, 7 (1966).
2. L. GRUSON, Bull. Sc. Mat., **90** (1966).
3. R. OUZILOU, *Théorie des faisceaux.* Faculté de Sciences de Lyon.

PROCESE GAUSSIENE GENERALIZATE

DE

G. SÂMBOAN

În această Notă vom da un procedeu de construcţie a proceselor generalizate şi apoi vom analiza procesele gaussiene generalizate.

Fie K spaţiul funcţiilor nedefinit derivabile cu suport compact şi K' spaţiul funcţiilor generalizate în sensul lui L. Schwartz.

Pentru $a > 0$ fie $K(a)$ spaţiul funcţiilor nedefinit derivabile care se anulează în afara segmentului $|x| \leqslant a$. Dualul topologic al lui $K(a)$ fie $K'(a)$. Spaţiul $K(a)$ este numărabil hilbertian şi nuclear. Dacă $(a_n)_{n \in N}$ este un şir ascendent de numere reale pozitive care tinde spre $+\infty$, atunci $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K(a_n)$ şi $K' = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K'(a_n)$.

1. *Definiţia triburilor boreliene pe $K'(a)$ şi K'*. Fie în spaţiul $K(a)$, Ψ o parte finită formată cu vectorii liniar independenţi $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ şi $K_{\Psi}(a)$ subspaţiul vectorial generat în $K(a)$ de Ψ.

În spaţiul $K'(a)$ fie Ψ° subspaţiul ortogonal cu Ψ, $(\Psi, \Psi^{\circ}) = 0$; atunci relaţia $F \sim G \leftrightarrow F - G \in \Psi^{\circ}$ este relaţie de echivalenţă în $K'(a)$ şi avem izomorfismele $K'_{\Psi}(a) \xrightarrow{i} K'(a)/\Psi^{\circ} \xrightarrow{t_{\Psi}} R^{(n)}$.

Să notăm cu c_{Ψ} aplicaţia canonică a lui $K'(a)$ pe $K'(a)/\Psi^{\circ}$ cu t_{Ψ} aplicaţia lui $K'(a)/\Psi^{\circ}$ pe $R^{(n)}$ prin care $\widetilde{F} \to ((\widetilde{F}, \varphi_1), \ldots, (\widetilde{F}, \varphi_n))$ şi $\tau_{\Psi} = t_{\Psi} \circ c_{\Psi}$ şi $\mathcal{B}^{(n)}$ tribul mulţimilor boreliene din $R^{(n)}$.

Definiţia 1. În spaţiul $K'(a)$ numim mulţime cilindrică de bază B mulţimea $Z_{\Psi}(B) = \tau_{\psi}^{-1}(B)$, unde $B \in \mathcal{B}^{(n)}$.

Dacă $Z_{\Psi}(B)$ este mulţime cilindrică, atunci $Z_{\Psi}(B) = c_{\Psi}^{-1}(t_{\Psi}^{-1}(B)) = c_{\Psi}^{-1}(\widetilde{F} : ((\widetilde{F}, \varphi_1), \ldots, (\widetilde{F}, \varphi_n)) \in B)$ sau $Z_{\Psi}(B) = \{F ; ((F, \varphi_1), \ldots, (F, \varphi_n)) \in B, \bmod \Psi^{\circ}\}$.

Dacă notăm cu $\mathcal{B}_{(\Psi, a)}$ tribul borelian generat de mulţimile cilindrice, atunci spaţiul $\{K'(a), \mathcal{B}_{(\Psi, a)}\}$ este spaţiu măsurabil. Tribul borelian generat de mulţimile cilindrice cînd Ψ parcurge mulţimea părţilor finite din $K(a)$ îl notăm prin $\mathcal{B}_a$ iar spaţiul măsurabil dedus din $K'(a)$ prin $\{K'(a), \mathcal{B}_a\}$.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 10, P. 1455–1458, BUCUREŞTI, 1967

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate dat şi ξ o aplicaţie măsurabilă a spaţiului $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ în $(K'(a), \mathcal{B}_a)$.

Oricare ar fi $\omega \in \Omega$, fix, vom nota cu ξ_ω valoarea aplicaţiei ξ în punctul ω; $\xi_\omega \in K'(a)$ iar aplicaţia $\omega \to (\xi_\omega, \varphi)$, φ- fix, este $\mathcal{K}$-măsurabilă. Sîntem în prezenţa unui proces aleator în care spaţiul parametrilor este $K'(a)$.

Să notăm cu F_Ψ funcţia de repartiţie a vectorului aleator $((\xi_\omega, \varphi_1), \ldots, (\xi_\omega, \varphi_n); \bmod \Psi^\circ)$; cum spaţiile $K'_\Psi(a)$ şi $R^{(n)}$ sînt izomorfe prin aplicaţia $\tilde{t}_\Psi = t_\Psi \circ i$, atunci pe $\mathcal{B}_{(\Psi, a)}$ putem defini măsura $\mu_{(\Psi, a)}$, prin

$$\mu_{(\Psi, a)}(A) = \int_{\tilde{t}_{\Psi}(A)} \mathrm{d}F_\Psi.$$

PROPOZIŢIA 1. *Dacă aplicaţia* $\xi : (\Omega, \mathcal{K}, P) \to (K'(a), \mathcal{B}_a)$ *este măsurabilă, atunci există o măsură* μ_a *indusă pe* $\mathcal{B}_a$ *care prelungeşte măsurile* $\mu_{(\Psi, a)}$.

Pe fiecare $\mathcal{B}_{(\Psi, a)}$ măsurile $\mu_{(\Psi, a)}$ sînt numărabil aditive. Dacă $\mathcal{B}_{(\Psi_1, a)}$ şi $\mathcal{B}_{(\Psi_2, a)}$ sînt două triburi care corespund spaţiilor generate de părţile Ψ_1, Ψ_2, atunci pe $\mathcal{B}_{(\Psi_1, a)} \cap \mathcal{B}_{(\Psi_2, a)}$ măsurile $\mu_{(\Psi_1, a)}$ şi $\mu_{(\Psi_2, a)}$ coincid. Cum spaţiul $K'(a)$ este nuclear, măsura μ_a este numărabil aditivă pe $\mathcal{B}_a$.

Notăm cu $\mathcal{B}_{K'}$, tribul borelian generat de triburile $\{\mathcal{B}_{a_n}, n \in N\}$ dacă $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(a_n)$.

DEFINIŢIA 2. Aplicaţia măsurabilă $\xi : (\Omega, \mathcal{K}, P) \to (K', \mathcal{B}_{K'})$ se numeşte proces aleator generalizat.

Dacă ξ este proces aleator generalizat, atunci pentru orice $\omega \in \Omega$-fix, $\xi_\omega \in K'$; pentru fiecare $\varphi \in K$ fix, aplicaţia $\omega \to (\xi_\omega, \varphi)$ este măsurabilă. Procesul aleator ξ este un proces aleator în care domeniul parametrilor este K.

PROPOZIŢIA 2. *Dacă* $\xi : (\Omega, \mathcal{K}, P) \to (K', \mathcal{B}_{K'})$ *este un proces aleator generalizat, atunci există o măsură* μ_ξ *pe* $B_{K'}$, *care prelungeşte măsurile* μ_a.

Să considerăm spaţiul produs $\left(\prod_{n=1}^{\infty} K'(a_n), \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{a_n}\right)$ şi să notăm cu μ măsura produs determinată de măsurile $(\mu_{a_n})_n$. În spaţiul produs să considerăm subspaţiul $K' = \bigcap_{n=1}^{\infty} K'(a_n)$ şi tribul $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{a_n} \cap K'$ izomorf cu $\mathcal{B}_{K'}$. Restricţia măsurii μ la $\mathcal{B}_{K'}$ o notăm cu μ_ξ. Măsura μ_ξ prelungeşte măsurile μ_a şi cum măsurile μ_a sînt numărabil aditive, rezultă că μ_ξ este numărabil aditivă.

DEFINIŢIA 3. Procesul aleator generalizat $\xi : (\Omega, \mathcal{K}, P) \to (K', \mathcal{B}_{K'})$ se numeşte gaussian dacă oricare ar fi Ψ şi a, măsurile $\mu_{(\Psi, a)}$ sînt măsuri gaussiene.

Pentru procesul gaussian ξ să notăm $\lambda_{ij} = M(\xi_\omega, \varphi_i)(\xi_\omega, \varphi_j) = B_{(\Psi, a)} = (\varphi_i, \varphi_j)$, $\Lambda_{(\Psi, a)} = \|\lambda_{ij}\|$, $(\Lambda_{(\Psi, a)} x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j$, atunci

$$\mu_{(\Psi, a)}(A) = \frac{\sqrt{\det \Lambda_{(\Psi, a)}}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\tilde{t}_{\Psi}(A)} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\Lambda_{(\Psi, a)} x, x)} \mathrm{d}x$$

Spațiile $K_\Psi(a)$ fiind numărabil hilbertiene și nucleare, funcționalele $B_{(\Psi,a)}$ se pot prelungi la spațiul $K(a)$ într-o funcțională biliniară B_a care determină o măsură gaussiană μ_a.

TEOREMĂ. *Dacă ξ și η sînt două procese generalizate gaussiene, atunci măsurile μ_ξ și μ_η sînt sau echivalente sau singulare.*

Pentru procesul gaussian η să notăm $\nu_{(\Psi,a)}$ măsura determinată de el; avem

$$p_{(\Psi,a)} = \frac{\mathrm{d}\mu_{(\Psi,a)}}{\mathrm{d}\nu_{(\Psi,a)}} = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sqrt{\det\,\Lambda_{(\Psi,a)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\Lambda_{(\Psi,a)}x,\,x)}}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sqrt{\det\,\Theta_{(\Psi,a)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\Theta_{(\Psi,a)}x,\,x)}}$$

și

$$\ln p_{(\Psi,a)} = \frac{1}{2}\ln\frac{\det\Lambda_{(\Psi,a)}}{\det\Theta_{(\Psi,a)}} + \frac{1}{2}((\Theta_{(\Psi,a)} - \Lambda_{(\Psi,a)})\,x,x)$$

Dacă F_Ψ și G_Ψ sînt funcțiile de repartiție ale vectorilor aleatori asociați proceselor ξ și η punem

$$J_{(\Psi,a)} = \int \ln p_{(\Psi,a)}\,(\mathrm{d}F_\Psi - \mathrm{d}G_\Psi) =$$

$$= \frac{1}{2}\int((\Theta_{(\Psi,a)} - \Lambda_{(\Psi,a)})\,x,\,x)\,(\mathrm{d}F_{\tilde{\Psi}} - \mathrm{d}G_\Psi).$$

Produsul scalar $((\Theta_{(\Psi,a)} - \Lambda_{(\Psi,a)})\,x,\,x)$ se poate scrie $x'\,(\Theta_{(\Psi,a)} - \Lambda_{(\Psi,a)}\,x$. Matricile $\Lambda_{(\Psi,a)}$ și $\Theta_{(\tilde{\Psi},a)}$ sînt pozitiv definite; atunci există matricea $C_{(\Psi,a)}$ astfel încît

$$C'_{(\Psi,a)}\,\Theta_{(\Psi,a)}\,C_{(\Psi,a)} = \left\|\begin{matrix}\lambda_1 & 0 & .. & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots}\\ 0 & 0 & .. & \lambda_n\end{matrix}\right\| = A_{(\Psi,a)}$$

$$C'_{(\Psi,a)}\,\Lambda^{-1}_{(\Psi,a)}\,C_{(\Psi,a)} = I,$$

unde λ_i sînt valorile proprii ale ecuației

$$\lambda\,\Lambda^{-1}_{(\Psi,a)} = \Theta^{-1}_{(\Psi,a)}$$

Dacă notăm $x = C'_{(\Psi,a)}\,y$, atunci

$$J_{(\Psi,a)} = \frac{1}{2}\int y'\,(A'_{(\Psi,a)} - I)\,y\,(\mathrm{d}F_\Psi - \mathrm{d}G_\Psi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\lambda_i - 1)^2}{\lambda_i}$$

și dacă $\lim\limits_{n\to\infty} J_{(\Psi,a)} < +\infty$ măsurile μ_a și ν_a sînt echivalente iar dacă $\lim\limits_{n\to\infty} J_{(\Psi,a)} = +\infty$ măsurile μ_a și ν_a sînt singulare.

Limita $\lim\limits_{n\to\infty} J_{(\Psi,a)}$ este finită dacă $\lambda_i > 0$ și $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\lambda_i - 1)^2 < +\infty$

Rezultă că oricare ar fi a cele două măsuri μ_a și ν_a sînt sau singulare sau echivalente.

Măsurile μ_ξ şi μ_η fiind măsurile corespunzătoare proceselor gaussiene ξ şi η, atunci dacă restricţiile lor μ_a şi ν_a sînt echivalente şi ele sînt echivalente, dacă restricţiile lor sînt singulare şi ele sînt singulare.

Primită la redacţie la 14 aprilie 1967

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Jack Capon-Radon, *Nikodym derivatives of Gaussion Meosures.* Am. of Math. Statisties, **35**, *2* (1964).
2. Jacob Feldmann, *Equivalence and perp of. Gaussion processes.* Pacific Journal of Mathematics, **8**, (1958).
3. S. Kakutoni, *On equivalence of infinite product meosures.* Amn of Math. Statisties, 1948.
4. Hajek J., *On a property of normal distribution of any stochastic process.* Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability, *1*, 245—252.
5. И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функуии*, Вып. 4, Москва, 1964.

STABILIREA ECUAȚIEI UNEI PÎNZE DE JET, CARE PRELUNGEȘTE LATERAL O ARIPĂ AȘEZATĂ ÎN CURENT INCOMPRESIBIL

DE

ȘERBAN SĂNDULESCU

Se consideră o aripă așezată într-un curent incompresibil, prelungită cu pînze de jet laterale. Se stabilește ecuația pînzei de jet deformate, sub acțiunea forțelor aerodinamice care acționează asupra ei.

Cunoscînd forma pînzei de jet deformate, rezultă legea de variație a incidenței și anvergura aripei, elemente necesare pentru cercetarea teoretică a efectului de hipersustentație obținut prin jeturi laterale.

1. Problema hipersustentației prin jeturi longitudinale cunoscută sub numele „jet flap" a făcut obiectul unor cercetări aprofundate, care au pus în evidență efectul unor astfel de jeturi asupra aripilor de alungire finită și infinită.

Ideea folosirii pentru hipersustentație, a unor jeturi de aer laterale, a fost formulată în lucrarea lui N. N. Patraulea [1].

Într-o altă lucrare, E. Carafoli a făcut un studiu teoretic calitativ pe baza unui model simplificat al acestui fenomen, care are la bază ipoteza că fiecare tub de jet se deformează după un arc de cerc [2].

Efectul unor jeturi laterale asupra parametrilor ventilatoarelor cu elici întubate, a fost cercetat de W. Mörchen în teza sa de doctorat [3].

Într-o notă recentă [4] am abordat problema hipersustentației aripilor de avion prin jeturi de aer laterale, pornind de la un alt model al fenomenului, care are la bază ideea că problema fundamentală este stabilirea ecuației pînzei de jet deformate.

O dată cunoscută aceasta, rezultă imediat atît modul de variație al incidenței în anvergură cît și anvergura aripei, ceea ce reduce calculul portanței la aplicarea teoriei clasice a aripei cu incidență variabilă [4].

2. Vom considera un sistem de coordonate rectilinii și ortogonale $Oxyz$, și o aripă de formă în plan oarecare, așezată într-un curent uniform la infinit, incompresibil şi irotaţional, de viteză V_0 dirijată în lungul axei Ox, presiune p_0 şi densitate ρ_0.

Prin extremităţile sale ies pînze de jet, lamelare şi uniforme, de grosime h, lăţime c_0, densitate ρ_j şi viteza V_j dirijată în sensul anvergurei. Vom presupune de asemenea că jetul lamelar lateral este lipsit de unde de şoc şi că între fluidele curentului general şi al jetului lateral nu are loc nici un amestec mutual.

3. Să considerăm o porţiune dintr-un tub de jet, de volum τ şi suprafaţă σ, aparţinînd pînzei de jet definită mai sus, căruia îi aplicăm teorema impulsului,

$$\iiint_\tau \frac{\partial(\rho_j \overline{V}_j)}{\partial t} \mathrm{d}\tau = \iint_\sigma \rho_j \overline{V}_j (\overline{n}\ \overline{V}_j) \mathrm{d}\sigma + \iiint_\tau \overline{f} \rho_j \mathrm{d}\tau + \iint_\sigma p\overline{n}\, \mathrm{d}\sigma. \tag{1}$$

Această relaţie se simplifică în ipoteza că fenomenul este staţionar, forţele masice sînt neglijabile, iar într-o primă aproximaţie impulsul este constant în lungul tubului de jet.

În această situaţie, condiţiile de echilibru pentru un tub elementar de jet de lungime $\mathrm{d}l$ şi lăţime $\mathrm{d}x$ sînt automat satisfăcute pe direcţia tangentei la tubul de jet, iar cele de pe normala la tubul de jet conduc la ecuaţia,

$$2\rho_j h V_j^2 \mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{2} = \frac{\rho_0}{2} V_0^2 C_n R \mathrm{d}x. \mathrm{d}\omega, \tag{2}$$

unde C_n este coeficientul local al forţei aerodinamice normale, $\mathrm{d}\omega$ unghiul elementar cu care se roteşte elementul de tub de jet, iar R este raza de curbură, pe care înlocuind-o cu expresia corespunzătoare se obţine,

$$\frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{z''} = 2h \frac{\rho_j}{\rho_0} \left(\frac{V_j}{V_0}\right)^2 \frac{1}{C_n} \tag{3}$$

Pe porţiunea portantă a pînzei de jet, coeficientul de rezistenţă la înaintare C_x este în general mic comparativ cu C_z, deci

$$C_n = \sqrt{C_z^2 + C_x^2} \cong C_z, \tag{4}$$

situaţie în care relaţia (3) este identică cu cea stabilită în [2] şi folosită de noi în [4].

Coeficientul C_n, respectiv C_z, variază în profunzime cît şi în anvergură, fapt care complică sensibil integrarea ecuaţiei (3).

În lucrarea [2] s-a admis pentru C_z o variaţie liniară în profunzime, ceea ce este în concordanţă bună cu unele indicaţii experimentale.

S-a presupus că C_z este constant în anvergură, ipoteză care vine imediat în contradicţie cu concluzia care rezultă din (3) în baza căreia tubul de jet se deformează în acest caz după un arc de cerc. În această situaţie este evident că incidenţa creşte în anvergură (întrucît tubul de jet de la bordul de fugă nu se deformează) şi este puţin probabil ca unghiul indus să crească în aceeaşi proporţie, astfel ca incidenţa efectivă să rămînă constantă în lungul anvergurii, ceea ce ar justifica ipoteza lui $C_z = $ct.

Avînd în vedere tocmai aceste consideraţii, noi am pornit de la un alt punct de vedere [4], pe care îl vom dezvolta în continuare şi care conduce la concluzii calitativ noi.

4. Se poate admite pentru coeficientul de portanţă o relaţie de forma,

$$C_z = C_{zy} \cdot f(x) \tag{5}$$

în care C_{zy} reprezintă valoarea medie a coeficientului de portanţă într-o secţiune longitudinală, care este însă variabilă în anvergură, iar $f(x)$ este funcţia care dă variaţia lui C_z în lungul corzii şi care are aceeaşi alură pe toată anvergura pînzei de jet.

Coeficientul mediu de portanţă C_{zy} vom admite că este funcţie liniară de incidenţa efectivă din secţiunea respectivă, ceea ce ne permite să scriem [5], [6],

$$C_{zy} = \frac{2k}{1 + \frac{2k(1+\tau)}{\pi\lambda}} \arcsin\frac{z}{c}, \quad \left(\lambda = \frac{b^2}{S}\right) \tag{6}$$

în care am notat

$$\tau = \frac{1}{\mu}\left[\beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu + \beta_0} - \frac{\pi}{4}\frac{c_0 b}{S}\right], \tag{7}$$

şi unde

$$\mu = \frac{k}{2}\frac{c_0 b}{S}\frac{1}{\lambda} \tag{8}$$

iar $\beta_0, \beta_2, \beta_4$ sînt coeficienţi ai polinomului trigonometric care reprezintă forma în plan a aripii.

Sub acţiunea forţelor aerodinamice, coarda pînzei de jet va prezenta o uşoară evazare, la stabilirea căreia am presupus că forţele aerodinamice într-o secţiune pot fi considerate normale la $\overline{V}_0$ deci,

$$c = \sqrt{c_0^2 + z^2 - z_0^2} \cong c_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{z^2 - z_0^2}{c_0^2}\right); \quad \frac{z^2 - z_0^2}{c_0^2} \in (-1, 1), \tag{9}$$

în care c_0 şi z_0 sînt respectiv coarda şi cota bordului de atac la extremitatea aripei solide de anvergură b_0.

Această evazare influenţează în mod direct asupra legii de variaţie a incidenţei cu anvergura, respectiv a coeficientului de portanţă C_z, după cum se vede din (6).

Înlocuind în (6) pe c cu expresia dată de (9), considerînd numai termenii principali din dezvoltarea în serie a lui $\arcsin\frac{z}{c}$ pentru $\frac{z}{c} \in [-1,1]$, şi ţinînd seama de relaţiile (4) şi (5), ecuaţia (3) devine

$$\frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{z''} \cong \frac{K_1}{\frac{1}{m}\frac{z}{c_0} - \frac{n}{2}\left(\frac{z}{c_0}\right)^3}, \tag{10}$$

unde

$$K_1 = \frac{b_0\, C_j \left[1 + \dfrac{2k(1+\tau)}{\pi\lambda}\right]}{4k\, f(x)}, \tag{11 a}$$

$$m = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2}\sin^2 \alpha_0}, \tag{11 b}$$

$$n = 1 - \frac{1}{3m^3}. \tag{11 c}$$

Precizăm că am notat prin α_0 incidenţa aripii solide, prin $2k = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha}$ panta curbei $C_z = C_z(\alpha)$ şi prin C_j coeficientul de jet definit de relaţia

$$C_j = 4\frac{h}{b_0}\,\frac{\rho_j}{\rho_0}\left(\frac{V_j}{V_0}\right)^2. \tag{12}$$

5. În aceste condiţii integrarea ecuaţiei (10), care nu conţine explicit variabila independentă, nu prezintă dificultăţi.

Cele două condiţii la limită pentru ecuaţia (10), sînt determinate pe baza condiţiilor de scurgere date :

$$\text{pentru } z = (z)_{y_1}, \quad z' = 0, \tag{13 a}$$

$$\text{pentru } z = (z)_{y_1}, \quad y_1 = g(x). \tag{13 b}$$

Relaţiile (13) ţin seama că pînza de jet este tangentă la planul aripei solide pe curba de racordare $y_1 = g(x)$, care va depinde evident de forma în plan a aripei solide.

Semianvergura aripei prelungită cu pînza de jet laterală este delimitată de un plan paralel cu planul Oxz care trece prin punctul în care ia naştere vîrtejul marginal, şi care l-am determinat din condiţia

$$\text{pentru } z' \to \infty, \quad \frac{n\, c_0}{8}\left(\frac{z}{c_0}\right)^4 - \frac{c_0}{2m}\left(\frac{z}{c_0}\right)^2 + M_1 \to 0, \tag{14 a}$$

în care M_1 a fost dedus pe baza relaţiei (13 a),

$$M_1 = K_1 + \frac{c_0}{2m}\sin^2 \alpha_0 - \frac{nc_0}{8}\sin^4 \alpha_0. \tag{14 b}$$

În punctul în care $z' \to \infty$ pînza de jet începe să se înfăşoare şi perturbă apoi scurgerea în jurul întregei pînze de jet, în avalul său.

Apariţia vîrtejului marginal are loc pentru acea valoare a lui x căreia îi corespunde $K_{1\min}$ (11 a).

Evident, fenomenul fizic este foarte complex iar în modelarea lui matematică noi am idealizat și schematizat desfășurarea lui reală.

După prima integrare a ecuației (10) se obține

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{\sqrt{K_1^2 - \left[M_1 - \frac{c_0}{2m}\left(\frac{z}{c_0}\right)^2 + \frac{nc_0}{8}\left(\frac{z}{c_0}\right)^4\right]^2}}{\left|M_1 - \frac{c_0}{2m}\left(\frac{z}{c_0}\right)^2 + \frac{nc_0}{8}\left(\frac{z}{c_0}\right)^4\right|}. \tag{15}$$

Pentru rezolvarea ecuației (13 b) și integrarea relației (15) este mai comod să facem schimbarea de variabilă $\frac{z^2}{c_0^2} = t$.

Cotei punctului în care apare vîrtejul marginal, îi corespunde un $t_{\max}$, soluție a ecuației din (14 a), cu condițiile restrictive :

$$t_{\max} \in (t_3,\ t_4) \tag{16 a}$$

$$t_{\max} < 1 + \sin^2 \alpha_0\,, \tag{16 b}$$

unde $t_1 - t_4$ sînt rădăcini ale ecuației obținute prin anularea numărătorului din (15), scrise în ordine descrescătoare.

6. În baza considerațiilor de mai sus, rezultă

$$y \cong \frac{16}{n}\sqrt{\frac{t_1 t_2}{t_3}}\left\{\frac{n\,c_0}{8}\int_{t_4}^{t}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-(t-t_3)(t-t_4)\,t}} + \sum_{i=1}^{2} A_i \int_{t_4}^{t}\frac{\mathrm{d}t}{(t-2t_i)\sqrt{-(t-t_3)(t-t_4)\,t}}\right\} + g(x) \tag{17}$$

în care

$$t_3 > t_4 > 0\,, \tag{18 a}$$

$$t \in (t_3,\ t_4)\,, \tag{18 b}$$

$$t_3 \ll t_1,\ t_3 \ll t_2. \tag{18 c}$$

După efectuarea calculelor respective, se obține ecuația căutată a pînzei de jet deformate,

$$y \cong \frac{16}{n}\sqrt{\frac{t_1 t_2}{t_3}}\left\{\left(\frac{n\,c_0}{4} - \sum_{i=1}^{2}\frac{A_i}{t_i}\right)F(\varphi, K) + \sum_{i=1}^{2}\frac{A_i t_4}{t_i(t_4-2t_i)}\,\Pi\left(\varphi, \frac{2t_i K^2}{t_4 - 2t_i}, K\right)\right\} + g(x)\,, \tag{19}$$

unde $F(\varphi, k)$ și $\Pi\left(\varphi, \frac{2t_i K^2}{t_4 - 2t_i}, K\right)$ sînt respectiv integralele eliptice de prima speță și speța a 3-a de modul K și argumentul φ,

$$K^2 = \frac{t_3 - t_4}{t_3}\,, \tag{20 a}$$

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{t - t_4}{K^2 t}}. \tag{20 b}$$

Constantele care apar în relaţiile (19), (20), sînt date de

$$(21\ \mathrm{a})\qquad t_i = \frac{2}{mn}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{2nm^2\,[M_1 + (-1)^i K_1]}{c_0}}\,\right],\ (i = 1{,}2),$$

$$(21\ \mathrm{b})\qquad t_i = \frac{2}{mn}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2nm^2\,[M_1 - (-1)^i K_1]}{c_0}}\,\right],\ (i = 3{,}4),$$

$$(21\ \mathrm{c})\qquad A_i = (-1)^{i+1}\,\frac{2\left[\dfrac{nc_0\,(t_1 + t_2)}{4} - \dfrac{c_0}{2m}\right]t_i + M_1 - \dfrac{nc_0 t_1 t_2}{2}}{2\,(t_1 - t_2)},\ (\mathrm{i} = 1{,}2).$$

7. Semianvergura aripii prelungite cu jeturi laterale se obţine pentru $\varphi = \varphi_{\max}$.

Valoarea lui $\varphi_{\max}$ rezultă înlocuind în (20 b) pe t cu valoarea sa maximă dată de :

$$(22)\qquad t_{\max} = \frac{2}{mn}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2nm^2 M_1}{c_0}}\,\right].$$

Se poate admite că coeficientul de presiune, respectiv coeficientul de portanţă, are o variaţie liniară în lungul corzii [2],

$$(23)\qquad f\,(x) = 2\left(1 - \frac{x}{c_0}\right).$$

În acest caz punctele în care apar vîrtejurile marginale şi prin care trec planele care delimitează anvergura aripii cu jeturi laterale sînt : $B\ (0, y_{\max}, z_{\max})$ şi $B'\ (0, -y_{\max}, z_{\max})$.

Variaţia incidenţii în lungul pînzei de jet este definită de expresia

$$(24)\qquad \alpha = \arcsin \frac{z}{c}.$$

8. În general este foarte dificil să se ţină seama de forma în plan a aripei cu jeturi laterale, care este necunoscută *apriori*.

Această influenţă se manifestă în formulele stabilite prin variaţia în anvergură a corzii (9), şi prin coeficientul τ care apare în (6).

Variaţia lui c intervine direct la stabilirea unghiului de incidenţă, şi a fost luată în consideraţie.

Valoarea lui τ, (7), este mai greu de introdus în calcule şi conduce la iteraţii laborioase. Pentru simplificarea calculelor numerice, ne putem opri la prima aproximaţie, care este suficient de bună şi care corespunde la $\tau = 0$, ceea ce presupune o formă eliptică, în plan pentru aripă [4].

Desigur utilizarea pentru calcule numerice a unei maşini electronice ar permite luarea în considerare a lui τ.

Primită la redacţie la 7 iunie 1967

Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. PATRAULEA, *Studii de aerodinamica hipersustentației*. Ed. Academiei, București, 1962.
2. E. CARAFOLI, *Considerații teoretice asupra jeturilor fluide laterale*. St. cerc. mec apl., *5* (1962).
3. W. MÖRCHEN, *Über die Spaltverluste zwischen Flügeln und Endscheiben ohne und mit Auslassung in Spannweitenrichtung*. Darmstadt, 1965.
4. S. SĂNDULESCU, *Sur la déformation d'une nappe de jet qui borde latéralement une aile placée dans un écoulement incompressible*. C. R. Paris, *3* (1967).
5. C. JACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Ed. Academiei — Gauthiers-Villars, Bucarest-Paris, 1959.
6. FUCHS, HOPF, SELWALD, *Aerodynamik*, Julius Springer, Berlin, 1935.

ASUPRA UNOR FORMULE DE INTERPOLARE ȘI INTEGRARE NUMERICĂ PENTRU DOUĂ VARIABILE

DE

FELICIA STANCU

(Cluj)

Prin aplicarea repetată a unei formule de interpolare cu două noduri multiple și prin integrarea rezultatului obținut, se deduce o formulă de cubatură ce generalizează formula de cuadratură a lui Hermite.

1. Fie $f(x)$ o funcție care pe punctele distincte a și b ale axei reale admite derivate succesive pînă la ordinul m, respectiv n.

În lucrarea [4] s-a demonstrat că polinomul de interpolare $H(f;x)$, de grad minim, care verifică condițiile

$$H^{(i)}(f;a) = f^{(i)}(a) \qquad (i = 0,1,\ldots,m)$$

$$H^{(j)}(f;b) = f^{(j)}(b) \qquad (j = 0,1,\ldots,n)$$

are gradul $m+n+1$ și e dat de formula

$$H(f;x) = \sum_{i=0}^{m} A_i(x) f^{(i)}(a) + \sum_{j=0}^{n} B_j(x) f^{(j)}(b)\,, \tag{1}$$

unde

$$A_i(x) = \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{n+1} \frac{(x-a)^i}{i!} \sum_{\nu=0}^{m-i} \binom{n+\nu}{\nu} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\nu}$$

și

$$B_j(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{m+1} \frac{(x-b)^j}{j!} \sum_{\mu=0}^{n-j} \binom{m+\mu}{\mu} \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\mu}.$$

La (1) avem expresia explicită a polinomului de interpolare al lui Hermite cu două noduri multiple.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 10, P. 1467–1471, BUCUREȘTI, 1967

În această lucrare vom da o extindere a acestei formule la două variabile, pe care apoi o vom folosi la construirea unei formule de integrare numerică (cubatură) pentru un domeniu dreptunghiular.

2. După cum se știe, formula de interpolare a lui $f(x)$ corespunzătoare polinomului de interpolare $H(f; x)$ este de forma

$$f(x) = H(f; x) + R(f; x), \tag{2}$$

unde

$$R(f; x) = (x-a)^{m+1}(x-b)^{n+1}\left[{x \atop 1}, {a \atop m+1}, {b \atop n+1}; f(t)\right]$$

este restul acestei formule de interpolare. Simbolul

$$\left[{x \atop 1}, {a \atop m+1}, {b \atop n+1}; f(t)\right]$$

reprezintă diferența divizată a funcției $f(t)$ pe nodurile x, a și b, multiple respectiv de ordinele 1, $m+1$ și $n+1$.

Avînd o funcție de două variabile $f(x, y)$ care admite toate derivatele parțiale de care avem nevoie, atunci pe baza formulei de interpolare (2), aplicată relativ la variabila x, putem scrie

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & \sum_{i=0}^{m} A_i(x) f^{(i)}_{x^i}(a, y) + \sum_{j=0}^{n} B_j(x) f^{(j)}_{x^j}(b, y) + \\ & + (x-a)^{m+1}(x-b)^{n+1}\left[{x \atop 1}, {a \atop m+1}, {b \atop n+1}; f(t, y)\right]_t . \end{aligned} \tag{3}$$

Dacă funcțiile $f^{(i)}_{x^i}(a, y)$, $f^{(j)}_{x^j}(b, y)$ le dezvoltăm, relativ la variabila y, pe baza aceleași formule (2) (folosind nodurile $y = c$ și $y = d$, multiple respectiv de ordinele $p+1$ și $q+1$) primim

$$\begin{aligned} f^{(i)}_{x^i}(a, y) = {} & \sum_{k=0}^{p} C_k(y) f^{(i+k)}_{x^i y^k}(a, c) + \sum_{l=0}^{q} D_l(y) f^{(i+l)}_{x^i y^l}(a, d) + \\ & + (y-c)^{p+1}(y-d)^{q+1}\left[{y \atop 1}, {c \atop p+1}, {d \atop q+1}; f^{(i)}_{x^i}(a, \tau)\right]_\tau , \\ f^{(j)}_{x^j}(b, y) = {} & \sum_{k=0}^{p} C_k(y) f^{(j+k)}_{x^j y^k}(b, c) + \sum_{l=0}^{q} D_l(y) f^{(j+l)}_{x^j y^l}(b, d) + \\ & + (y-c)^{p+1}(y-d)^{q+1}\left[{y \atop 1}, {c \atop p+1}, {d \atop q+1}; f^{(j)}_{x^j}(b, \tau)\right]_\tau . \end{aligned}$$

Înlocuind în (3) obținem o formulă de interpolare de forma

$$f(x,y) = H(f; x,y) + R(f; x,y), \tag{4}$$

unde

$$\begin{aligned} H(f; x,y) = {} & \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{p} A_i(x)\, C_k(y) f^{(i+k)}_{x^i y^K}(a, c) + \\ & + \sum_{i=0}^{m}\sum_{l=0}^{q} A_i(x)\, D_l(y) f^{(i+l)}_{x^i y^l}(a, d) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} B_j(x)\, C_k(y) f^{(j+k)}_{x^j y^K}(b, c) + \\ & + \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{q} B_j(x)\, D_l(y) f^{(j+l)}_{x^j y^l}(b, d) , \end{aligned} \tag{5}$$

iar

$$R(f;x,y)=(x-a)^{m+1}(x-b)^{n+1}\left[{x \atop 1}, {a \atop m+1}, {b \atop n+1}; f(t,y)\right]+$$
$$+\sum_{i=0}^{m} A_i(x)(y-c)^{p+1}(y-d)^{q+1}\left[{y \atop 1}, {c \atop p+1}, {d \atop q+1}; f^{(i)}_{x^i}(a,\tau)\right._{\tau}+$$
$$+\sum_{j=0}^{n} B_j(x)(y-c)^{p+1}(y-d)^{q+1}\left[{y \atop 1}, {c \atop p+1}, {d \atop q+1}; f^{(j)}_{x^i}(b,\tau)\right]_{\tau}$$

sau, pe baza proprietăţiilor de liniaritate ale diferenţelor divizate,

$$R(f;x,y)=(x-a)^{m+1}(x-b)^{n+1}\left[{x \atop 1}, {a \atop m+1}, {b \atop n+1}; f(t,y)\right]+$$
$$+(y-c)^{p+1}(y-d)^{q+1}\left[{y \atop 1}, {c \atop p+1}, {d \atop q+1}; \sum_{i=0}^{m} A_i(x)\, f^{(i)}_{x^i}(a,\tau)+\sum_{j=0}^{n} B_j(x) f^{(j)}_{x^j}(b,\tau)\right]_{\tau}\cdot$$

Ţinînd seama de (3) obţinem în continuare

$$R(f;x,y)=(x-a)^{m+1}(x-b)^{n+1}\left[{x \atop 1}, {a \atop m+1}, {b \atop n+1}; f(t,y)\right]_t+$$
$$+(y-c)^{p+1}(y-d)^{q+1}\left[{y \atop 1}, {c \atop p+1}, {d \atop q+1}; f(x,\tau)\right. -$$
$$-(x-a)^{m+1}(x-b)^{n+1}\left[{x \atop 1}, {a \atop m+1}, {b \atop n+1}; f(t,\tau)_t\right]_{\tau}.$$

În consecinţă restul $R(f;x,y)$ al formulei de interpolare (4) se poate exprima prin formula

$$R(f;x,y)=(x-a)^{m+1}(x-b)^{n+1}\left[{x \atop 1}, {a \atop m+1}, {b \atop n+1}; f(t,y)\right]_t+$$
$$+(y-c)^{p+1}(y-d)^{q+1}\left[{y \atop 1}, {c \atop p+1}, {d \atop q+1}; f(x,\tau)\right]_{\tau}-$$
$$-(x-a)^{m+1}(x-b)^{n+1}(y-c)^{p+1}(y-d)^{q+1}\left[{x \atop 1}, {a \atop m+1}, {b \atop n+1}; {y \atop 1}, {c \atop p+1}, {d \atop q+1}; f(t,\tau)\right]_{t,\tau}$$

prin intermediul a două diferenţe divizate de ordinele $(m+n+2,0)$, respectiv $(0, p+q+2)$ şi a unei diferenţe divizate de ordinul $(m+n+2, p+q+2)$.

3. Se poate arăta, fără greutate, că dacă $f(x, y)$ admite pe dreptunghiul D de vîrfuri

$$(6)\qquad M_1(a,c),\ M_2(b,c),\ M_3(a,d),\ M_4(b,d)\ ,$$

derivate parţiale continue pînă la inclusiv ordinul $(m+n+2,\ p+q+2)$, atunci restul, pe baza formulelor de medie ale diferenţelor divizate, se poate exprima astfel

$$R(f;x,y)=\frac{(x-a)^{m+1}(x-b)^{n+1}}{(m+n+2)!}\, f^{(m+n+2)}_{x^{m+n+2}}(\xi,y)+$$
$$+\frac{(y-c)^{p+1}(y-d)^{q+1}}{(p+q+2)!}\, f^{(p+q+2)}_{y^{p+q+2}}(x,\eta)-$$
$$-\frac{(x-a)^{m+1}(x-b)^{n+1}(y-c)^{p+1}(y-d)^{q+1}}{(m+n+2)!\,(p+q+2)!}\, f^{(m+n+p+q+4)}_{x^{m+n+2}y^{p+q+2}}(\xi,\eta)\cdot$$

Este uşor de văzut că polinomul de la (5) este de gradul $(m + n + 1, p + q + 1)$ și verifică condițiile

$$\left.\frac{\partial^{i+k} H}{\partial x^i \, \partial y^k}\right|_{\substack{x=a\\ y=c}} = f^{(i+k)}_{x^i y^k}(a, c), \quad \left.\frac{\partial^{i+l} H}{\partial x^i \, \partial y^l}\right|_{\substack{x=a\\ y=d}} = f^{(i+l)}_{x^i y^l}(a, d),$$

$$\left.\frac{\partial^{j+k} H}{\partial x^j \, \partial y^k}\right|_{\substack{x=b\\ x=c}} = f^{(j+k)}_{x^i y^k}(b, c), \quad \left.\frac{\partial^{j+l} H}{\partial x^j \, \partial y^l}\right|_{\substack{x=b\\ y=d}} = f^{(j+l)}_{x^j y^l}(b, d)$$

pentru $i = 0,1 \ldots, m$; $j = 0,1 \ldots, n$; $k = 0,1, \ldots, p$; $l = 0,1, \ldots, q$.

4. În lucrarea [4] s-a arătat că prin integrarea de la a la b a formulei de interpolare (2) se obține formula de cuadratură a lui Hermite [1] cu două noduri multiple

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m} \frac{(b-a)^{i+1}}{(i+1)!} \cdot \frac{\binom{m+1}{i+1}}{\binom{m+n+2}{i+1}} f^{(i)}(a) - \\ - \sum_{j=0}^{n} \frac{(a-b)^{j+1}}{(j+1)!} \cdot \frac{\binom{n+1}{j+1}}{\binom{m+n+2}{j+1}} f^{(j)}(b) + \rho(f) \quad ,\end{aligned} \tag{7}$$

unde

$$\rho(f) = \frac{(-1)^{n+1}(b-a)^{m+n+3}}{(m+n+3)!\binom{m+n+2}{n+1}} f^{(m+n+2)}(\xi), \; a < \xi < b .$$

Această formulă a fost regăsită, pe alte căi, de către L. Tschakaloff [5], N. Obreschkoff [3] și D. V. Ionescu [2].

5. Să ne ocupăm în continuare de extinderea la două variabile a formulei de cuadratură (7).

Ținînd seama de faptul că

$$a_i = \int_a^b A_i(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^{i+1}}{(i+1)!} \frac{\binom{m+1}{i+1}}{\binom{m+n+2}{i+1}}, \quad b_j = \int_a^b B_j(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{(a-b)^{j+1}}{(j+1)!} \frac{\binom{n+1}{j+1}}{\binom{m+n+2}{j+1}}, \quad c_k = \int_c^d C_k(y)\,\mathrm{d}y = \frac{(d-c)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{\binom{p+1}{k+1}}{\binom{p+q+2}{k+1}},$$

$$\mathrm{d}_l = \int_c^d D_l(y)\,\mathrm{d}y = -\frac{(c-d)^{l+1}}{(l+1)!} \frac{\binom{q+1}{l+1}}{\binom{p+q+2}{l+1}},$$

prin calculul integralei duble, extinse la dreptunghiul D considerat mai sus, a funcției $f(x,y)$ se obține formula de cubatură

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{p} a_i c_k f^{(i+k)}_{x^i y^k}(a, c) + \sum_{i=0}^{m} \sum_{l=0}^{q} a_i d_l f^{(i+l)}_{x^i y^l}(a, d) + \\ + \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} b_j c_k f^{(j+k)}_{x^j y^k}(b, c) + \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{q} b_j d_l f^{(j+l)}_{x^j y^l}(b, d) + \rho(f) ,\end{aligned} \tag{8}$$

unde

$$\rho(f) = (-1)^{n+1} \frac{(b-a)^{m+n+3}(d-c)}{(m+n+3)!\binom{m+n+2}{n+1}} f^{(m+n+2)}_{x^{m+n+2}}(\xi, \eta_1) +$$

$$+(-1)^{q+1} \frac{(b-a)(d-c)^{p+q+3}}{(p+q+3)!\binom{p+q+2}{q+1}} f^{(p+q+2)}_{y^{p+q+2}}(\xi_1, \eta) +$$

$$+(-1)^{n+q+1} \frac{(b-a)^{m+n+3}(d-c)^{p+q+3}}{(m+n+3)!(p+q+3)!\binom{m+n+2}{n+1}\binom{p+q+2}{q+1}} f^{(m+n+p+q+4)}_{y^{m+n+2}\,y^{p+q+2}}(\xi, \eta),$$

iar $a < \xi,\ \xi_1 < b,\ c < \eta,\ \eta_1 < d$.

La (8) avem o extindere la două variabile a formulei de cuadratură a lui Hermite (7).

6. Avînd în vedere că restul formulei de cuadratură a lui Hermite (7) se poate exprima sub formă integrală astfel (vezi [1])

$$\rho(f) = \frac{(-1)^{n+1}}{(m+n+2)!} \int_a^b (t-a)^{n+1}(b-t)^{m+1} f^{(m+n+2)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

prin aplicarea repetată a formulei (7), cu restul sub forma de aici, se deduce cu uşurinţă că restul formulei de cubatură (8) se poate reprezenta cu integrale definite astfel

$$\rho(f) = \frac{(-1)^{n+1}}{(m+n+2)!} \int_a^b (t-a)^{n+1}(b-t)^{m+1} f^{(m+n+2)}_{t^{m+n+2}}(t, y)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \frac{(-1)^{q+1}}{(p+q+2)!} \int_c^d (z-c)^{q+1}(d-z)^{p+1} f^{(p+q+2)}_{z^{p+q+2}}(x, z)\,\mathrm{d}z +$$

$$+ \frac{(-1)^{n+q+1}}{(m+n+2)!(p+q+2)!} \int_a^b \int_c^d (t-a)^{n+1}(b-t)^{m+1}(z-c)^{q+1}(d-z)^{p+1} \cdot$$

$$\cdot f^{(m+n+p+q+4)}_{t^{m+n+2}\,z^{p+q+2}}(t, z)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z.$$

Primită la redacţie la 2 februarie 1967. *Institutul Pedagogic Cluj.*

BIBLIOGRAFIE

1. C. Hermite, *Sur la formule d'interpolation de Lagrange.* J. Reine Angew. Math., **84**, 70–79 (1878).
2. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1957.
3. N. Obreschkoff, *Neue Quadraturformeln.* Abh. Preuss. Akad. Wiss., **4**, 1–20 (1940).
4. D. D. Stancu, *Asupra formulei de interpolare a lui Hermite şi a unor aplicaţii ale acesteia.* St. cerc. mat. Filiala Cluj, **8**, 339–355 (1957).
5. L. Tschakaloff, *Eine Integraldarstellung des Newtonschen Differenzenquotienten und ihre Anwendungen.* Jahrb. Univ. Sofia, Phys.-Math. Fak., **34**, 353–405 (1937/1938).

ELEMENTE DE ANALIZĂ ARMONICĂ (II)

DE

ŞERBAN STRĂTILĂ

Lucrarea de faţă reprezintă o continuare a unei lucrări anterior publicată *), la care ne referim în tot cursul expunerii.

În § 12 se prezintă caracterizarea măsurilor idempotente, obţinută de Cohen [2].

În § 13 se prezintă caracterizarea homomorfismelor de algebre grupale, obţinută de Cohen [3].

În § 14 se dau cîteva rezultate complementare şi unele aplicaţii.

CAPITOLUL II

MĂSURI IDEMPOTENTE ŞI HOMOMORFISME DE ALGEBRE GRUPALE

§ 12. CARACTERIZAREA MĂSURILOR INDEMPOTENTE

12.1. DEFINIŢIE. O măsură $\mu \in \mathcal{M}(G)$ se numeşte *măsură idempotentă* (pe scurt — *idempotent* — dacă) $\mu * \mu = \mu$; mulţimea măsurilor idempotente va fi notată prin $\mathcal{J}(G)$.

12.2. NOTĂ. Dacă $\mu \in \mathcal{J}(G)$, atunci $\hat{\mu}^2 = \hat{\mu}$ şi deci este o funcţie caracteristică. Să notăm

$$S(\mu) = \{\gamma \in \Gamma : \ \hat{\mu}(\gamma) = 1\}; \quad (\mu \in \mathcal{J}(G)).$$

Este deci evident că problema caracterizării idempotentelor $\mu \in \mathcal{J}(G)$ se reduce la caracterizarea mulţimiilor din Γ de tipul $S(\mu)$, adică a acelor mulţimi $E \subset \Gamma$ pentru care $\chi_E \in \mathcal{B}(\Gamma)$.

12.3. Intuirea rezultatului. Fie Λ un subgrup deschis în Γ şi fie $H = A(G, \Lambda)$; cum Γ/Λ este discret, H este compact şi deci măsura Haar m_H poate fi normată aşa ca $m_H(H) = 1$; vom nota tot prin m_H imaginea măsurii Haar m_H prin injecţia canonică $H \to G$; atunci

---

*) Studii şi cercetări matematice, **19**, 8 (1967).

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 10, P. 1473–1511, BUCUREŞTI, 1967

$m_H \in \mathcal{M}(G)$ și avem, pentru $\gamma \in \Gamma$:

$$\hat{m_H}(\gamma) = \int_G (-x, \gamma)\, \mathrm{d}m_H(x) =$$

$$= \int_H (-x, \gamma)\, \mathrm{d}m_H(x) =$$

$$= \int_H (-x, \dot{\gamma})\, \mathrm{d}m_H(x) = \begin{matrix} 1 \text{ dacă } \dot{\gamma} = 0 \; (\gamma \in \Lambda) \\ 0 \text{ dacă } \dot{\gamma} \neq 0 \; (\gamma \notin \Lambda) \end{matrix}$$

Așadar $m_H \in \mathcal{J}(G)$ și $\Lambda = S(m_H)$.

Dacă $E = \Lambda + \gamma_0$, atunci $E = S(\mu)$, unde $\mathrm{d}\mu(x) =$
$= (x, \gamma_0)\, \mathrm{d}m_H(x)$.

Pentru comoditate vom face următoarele convenții și notații: mulțimea părților lui Γ de tipul $S(\mu)$ va fi notată prin Ω; prin clasă deschisă în Γ vom înțelege o clasă conjugată cu un subgrup deschis din Γ.

Din cele precedente a rezultat că orice clasă deschisă aparține lui Ω.

Pe de altă parte, se verifică imediat că dacă $\mu, \lambda \in \mathcal{J}(G)$, atunci:

$$\mu * \lambda \in \mathcal{J}(G);$$

$$\mu \vee \lambda \in \mathcal{J}(G); \quad (\mu \vee \lambda = \mu + \lambda - \mu * \lambda);$$

$$\delta_0 - \mu \in \mathcal{J}(G); \quad (\delta_0 \text{ este unitatea în } \mathcal{M}(G))$$

și:

$$S(\mu * \lambda) = S(\mu) \cap S(\lambda);$$

$$S(\mu \vee \lambda) = S(\mu) \cup S(\lambda);$$

$$S(\delta_0 - \mu) = S'(\mu); \quad (\text{complementara}).$$

Așadar Ω este un clan (de fapt chiar o algebră).

Să numim *clanul claselor*, și să notăm prin $\mathfrak{K}(\Gamma)$ clanul generat de clasele deschise din Γ; din cele precedente tezultă că Ω conține clanul claselor.

Soluția problemei de care ne ocupăm este că Ω = clanul claselor. Adică:

12.4. TEOREMĂ. *O parte* $E \subset \Gamma$ *este de tipul* $S(\mu)$ *pentru* $\mu \in \mathcal{J}(G)$ *dacă și numai dacă* E *aparține clanului claselor lui* Γ.

12.5. NOTĂ. Rezultatul poate fi exprimat și direct, fără ajutorul transformatelor Fourier. O măsură $\mu \in \mathcal{M}(G)$ se va numi idempotent elementar dacă $\mathrm{d}\mu(x) = (x_1, \gamma_0)\, \mathrm{d}m_H(x)$, unde m_H este măsura Haar normată a unui subgrup compact H din G. Atunci *o măsură* $\mu \in \mathcal{M}(G)$ *este un idempotent dacă și numai dacă se obține din idempotente elementare numai cu ajutorul operațiilor* „$*$", „$\vee$" și „δ_0 —"

12.6. NOTĂ. Deoarece $\mu^\wedge$ este continuă, $S(\mu)$ este deschisă și închisă pentru orice $\mu \in \mathcal{J}(G)$, prin urmare, *dacă* Γ *este conex, există numai* *două posibilități pentru* $S(\mu)$: $S(\mu) = \Gamma$ *sau* $S(\mu) =$; $\emptyset$ așadar $\mathcal{J}(G) = \{0, \delta_0\}$. Acesta este de exemplu cazul $G = R$ sau $G = Z$.

12.7. NOTĂ. În general *orice mulțime compactă și deschisă din* Γ *aparține clanului claselor lui* Γ; afirmația este trivială conf. **11.7.** Demn de remarcat este însă faptul că această afirmație admite o puternică generalizare, așa-numita *teoremă de descompunere a lui* Șilov.

,,*Fie* $\mathfrak{A}$ *o algebră comutativă și cu unitate. Se presupune că spațiul idealelor maximale* D *este reuniunea a două mulțimi compacte și disjuncte* D_0 *și* D_1. *Atunci există un idempotent* $e \in \mathfrak{A}$ *așa ca* $e^\wedge = 0$ pe D_0 și $e^\wedge = 1$ pe D_1''.

12.8. LEMĂ. *Fie* $\mu \in \mathcal{J}(G), \mu \neq 0, \mu \geqslant 0$; *atunci* $S(\mu)$ *este un subgrup deschis din* Γ.

Într-adevăr, atunci $\mu^\wedge$ este pozitiv definită, iar $\mu^\wedge(0) = \mu(G) = 1$, căci $\mu^\wedge$ este o funcție caracteristică iar $\mu^\wedge \neq 0$; așadar $0 \in S(\mu)$. Apoi, deoarece $\mu \geqslant 0$ rezultă că $\mu^\wedge(-\gamma) = \mu^\wedge(\gamma)$, deci $\gamma \in S(\mu) <=> -\gamma \in S(\mu)$. În sfîrșit, dacă $\gamma, \gamma' \in S(\mu)$, avem conf. **3.2** (iii), relația :

$$|\mu^\wedge(\gamma - \gamma') - \mu^\wedge(\gamma)| \leqslant 2\,\mu^\wedge(0) \ \mathrm{Re}\ [\mu^\wedge(0) - \mu^\wedge(-\gamma')] = 0$$

deci $\gamma - \gamma' \in S(\mu)$, q.e.d.

12.9. Dacă $\mu \in \mathcal{J}(G)$, atunci evident $\|\mu\| = \|\mu * \mu\| \leqslant \|\mu\|^2$ deci, dacă $\mu \neq 0$, rezultă $\|\mu\| \geqslant 1$.

LEMĂ. *Fie* $\mu \in \mathcal{J}(G)$ *cu* $\|\mu\| = 1$; *atunci* $S(\mu)$ *este o clasă deschisă în* Γ; *reciproc, dacă* $S(\mu)$ *este o clasă deschisă, atunci* $\|\mu\| = 1$.

Într-adevăr, fie $\sigma \in \mathcal{J}(G)$, definit prin $d\sigma(x) = (x, \gamma)\, d\mu(x)$, așa ca $\sigma^\wedge(0) = 1$ (acest fapt este posibil deoarece $\sigma^\wedge(0) = \mu^\wedge(\gamma)$ iar $\mu \in \mathcal{J}(G)$ și $\mu \neq 0$). Atunci :

$$1 = \sigma^\wedge(0) = \sigma(G) \leqslant \|\sigma\| = 1$$

deci $\sigma(G) = \|\sigma\| = |\sigma|(G)$, deci $\sigma \geqslant 0$ și se aplică **12.8**, așa încît afirmația devine evidentă. Reciproca este imediată.

12.10. În cele ce urmează ne propunem să demonstrăm teorema **12.4**. Pentru aceasta vom mai introduce unele notații. Vom nota prin $\mathcal{F}(G)$ *mulțimea măsurilor* $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ *cu proprietatea că* $\mu^\wedge$ *este o funcție cu valori întregi*. Evident, $\mathcal{J}(G) \subset \mathcal{F}(G)$. O măsură $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ se va numi *măsură canonică* dacă $d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i\,(x, \gamma_i)\, dm_H(x)$, unde k_i sînt întregi, $\gamma_i \in \Gamma$ iar m_H este măsura Haar normată a unui subgrup compact H din G. Noi nu vom da o demonstrație directă a teoremei **12.4**, ci vom demonstra următoarea teoremă mai generală.

12.11. TEOREMĂ. *Fiecare* $\mu \in \mathcal{F}(G)$ *este suma unui număr finit de măsuri canonice mutual singulare.*

12.12. Teorema 12.4 rezultă din teorema 12.11. Într-adevăr fie $\mu \in \mathcal{J}(G) \subset \mathcal{F}(G)$; atunci $\mu = \sum_{p=1}^{m} \mu_p$, unde μ_p sînt măsuri canonice mutual singulare. Fie :

$$\mathrm{d}\mu_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^p (x, \gamma_i^p)\right) \mathrm{d}m_{H_p}(x)\,; \quad (1 \leqslant p \leqslant m).$$

Atunci $\mu^\wedge = \sum_{p,i} k_i^p\, \chi(\Lambda_p + \gamma_i^p)$, deci $\mu^\wedge$ este măsurabilă în raport cu clanul claselor, aşa încît $S(\mu)$ aparţine clanului claselor, q.e.d.

12.13. Pentru $\mu \in \mathcal{M}(G)$ vom numi *grupul suport* al lui μ cel mai mic subgrup închis pe care este concentrată μ.

LEMĂ. *Dacă $\mu \in \mathscr{F}(G)$, atunci grupul suport al lui μ este compact.*

Într-adevăr, fie H grupul suport al lui μ ; se poate considera că $\mu \in \mathscr{F}(H)$; de aceea vom presupune de la început că $H = G$; adică μ nu este concentrată pe nici un subgrup propriu închis al lui G. Să notăm

$$\mathrm{d}\mu_\gamma(x) = (x, \gamma)\, \mathrm{d}\mu(x)\,; \quad (\gamma \in \Gamma).$$

Atunci, evident, $(\mu_\gamma)^\wedge = (\mu^\wedge)_\gamma$ şi pentru orice $\gamma \neq 0$ $\mu_\gamma \neq \mu$; într-adevăr, dacă $\mu^\wedge = \hat{\mu_\gamma}$ pentru un $\gamma \neq 0$, atunci $\mu^\wedge = \hat{\mu}_{n\gamma}$ pentru orice n şi cum $\mu^\wedge$ este continuă, rezultă că $\mu^\wedge$ este constantă pe clasele subgrupului închis Λ generat de γ, ceea ce revine la faptul că μ ar fi concentrată pe $H = A(G, \Lambda)$, conf. **10.1** ; absurd ; deci $\mu^\wedge \neq \hat{\mu_\gamma}$ şi prin urmare $\mu \neq \mu_\gamma$.

Cum $\hat{\mu_\gamma} - \mu^\wedge$ este o funcţie cu valori întregi, rezultă atunci că $\| \mu_\gamma - \mu \| \geqslant \| \hat{\mu_\gamma} - \mu^\wedge \|_\infty \geqslant 1$.

Pe de altă parte, există $C \subset G$, compact, aşa ca $|\mu|(C') < 1/4$; fie $V = \{\gamma \in \Gamma : |1 - (x, \gamma)| < (3\|\mu\|)^{-1}$ or $x \in C\}$; atunci V este o vecinătate deschisă a lui 0 în Γ şi pentru $\gamma \in V$ avem :

$$\| \mu - \mu_\gamma \| \leqslant \int_G |1 - (x, \gamma)|\, \mathrm{d}|\mu|(x) = \int_C + \int_{C'} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{2} < 1.$$

Cum, pentru $\gamma \neq 0$, cele două relaţii obţinute sînt contradictorii, rezultă că $V = \{0\}$, deci Γ este discret, deci G este compact, q.e.d.

Datorită acestei leme este suficient să demonstrăm teorema **12.11** numai pentru cazul în care G este compact.

Într-adevăr, să presupunem că am demonstrat **12.11** pentru cazul G compact şi fie G un l.c.a.-grup oarecare, $\mu \in \mathscr{F}(G)$ şi H grupul suport al lui μ ; conf. lemei, H este compact iar $\mu \in \mathscr{F}(H)$; atunci μ este o sumă de măsuri canonice pe H mutual singulare ; însă, deoarece fiecare caracter pe H se poate prelungi la un caracter pe G, rezultă că μ este o sumă de măsuri canonice mutual singulare pe G, q.e.d.

Pentru demonstraţia lui **12.11** în cazul compact ne sînt necesare cîteva leme ; în cele ce urmează G este un grup abelian compact.

12.14. LEMA TRANSLAŢIILOR. *Fie $\mu \in \mathcal{M}(G)$ şi $\{\gamma_n\}$ un şir generalizat de elemente distincte din Γ. Definim $\lambda_n \in \mathcal{M}(G)$ prin :*

$$\mathrm{d}\lambda_n(x) = (x, \gamma_n)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Dacă $\{\lambda_n\}$ *converge către* $\sigma \in \mathcal{M}(G)$ *în topologia slabă a lui* $\mathcal{M}(G)$ *atunci* σ *este o măsură singulară în raport cu măsura Haar pe* G.

Într-adevăr, fie $\mu = \mu_a + \mu_s$ descompunerea Lebesgue a lui μ în raport cu măsura Haar a lui G; cum $\mu_a \in \mathcal{L}^1(\mathrm{G})$, rezultă că $\hat{\mu}_a \in \mathcal{A}(\Gamma) \subset \mathcal{C}_0(\Gamma)$ deci $\hat{\mu}_a(\gamma_n) \to 0$. Aceeași afirmație este valabilă pentru orice alt șir de caractere distincte. Dacă $f(x) = (x, \gamma_0)$ cu $\gamma_0 \in \Gamma$, atunci

$$\int_G f(x)(x, \gamma_n)\, d\mu_a(x) = \hat{\mu}_a(-\gamma_0 - \gamma_n)$$

deci

$$\lim_n \int_G f(x)(x, \gamma_n)\, d\mu_a(x) = 0. \tag{1}$$

Evident, relația (1) are încă loc pentru f polinom trigonometric. Dacă $f \in \mathcal{C}(G)$, atunci $f = \lim\limits_{k \to \infty} f_k$, unde f_k sînt polinoame trigonometrice, iar limita este uniformă. Atunci, avînd în vedere teorema limitei duble și trecerea limitei uniforme în interiorul integralei, avem:

$$\lim_n \int_G f(x)(x, \gamma_n)\, d\mu_a(x) = \lim_n \lim_{k \to \infty} \int_G f_k(x)(x, \gamma_n)\, d\mu_a(x) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \lim_n \int_G f_k(x)(x, \gamma_n)\, d\mu_a(x) = \lim_{k \to \infty} 0 = 0;$$

deci (1) este valabilă pentru orice $f \in \mathcal{C}(G)$.

Așadar limita slabă a măsurilor $(x, \gamma_n)\, d\mu_a(x)$ este 0, deci σ este limita slabă a măsurilor $(x, \gamma_n)\, d\mu_s(x)$.

Fie V o mulțime deschisă din G; atunci

$$\sigma|(V) = \sup\left(\left|\int_G f\, d\sigma\right|;\quad f \in \mathcal{C}(G),\ \|f\|_\infty = 1,\ f = 0 \text{ pe } V'\right);$$

însă, pentru $f \in \mathcal{C}(G)$, $\|f\|_\infty = 1$, $f = 0$ pe V' avem:

$$\left|\int_G f\, d\sigma\right| = \lim_n \left|\int_G f(x)(x, \gamma_n)\, d\mu_s(x)\right| \leqslant |\mu_s|(V)$$

și deci $|\sigma|(V) \leqslant |\mu_s|(V)$; prin regularitate această relație se extinde la toate mulțimile boreliene:

$$|\sigma|(E) \leqslant |\mu_s|(E), \quad \text{q.e.d.} \tag{2}$$

Vom reține și această ultimă relație.

12.15. LEMĂ. *Fie* $\mathcal{A}$ *o mulțime de măsuri de forma* $(x, \gamma)\, d\mu(x)$, *unde* $\mu \in \mathcal{M}(G)$ *este fixat, iar* γ *parcurge o mulțime arbitrară din* Γ. *Dacă* ν *este un punct de acumulare al lui* $\mathcal{A}$ *în topologia slabă a lui* $\mathcal{M}(G)$, *atunci:*

(i) *pentru orice subgrup compact* G_0 *al lui* G, *restricția* ν_0 *a lui* ν *la* G_0 *sau coincide cu restricția la* G_0 *a unei măsuri din* $\mathcal{A}$ *sau este singulară în raport cu măsura Haar, a lui* G_0.

(ii) $\|\nu\| \leqslant \|\mu\|$, dacă în plus $\mu \in \mathcal{F}(G)$, $\mu \neq 0$.

Cum $\mathcal{A}$ este evident inclusă în omotetica $\mathcal{S}_{\|\mu\|} = \|\mu\| \mathcal{S}_1$ a sferei unitate $\mathcal{S}_1$ din $\mathfrak{M}(G)$, şi cum ν este un punct de acumulare al lui $\mathcal{A}$ în topologia slabă, rezultă că $\nu \in \mathcal{S}_{\|\mu\|}$ şi că există un şir generalizat γ_n de caractere aşa ca măsurile $(x, \gamma_n)\, \mathrm{d}\mu(x)$ să aparţină lui $\mathcal{A}$, iar şirul generalizat de măsuri $\{(x, \gamma_n)\, \mathrm{d}\mu(x)\}$ să conveargă slab către măsura ν, adică

$$(1) \qquad \int_G f(x)\,(x, \gamma_n)\, \mathrm{d}\mu(x) \to \int_G f(x)\, \mathrm{d}\nu(x), \; (f \in \mathcal{C}(G)).$$

Evident, relaţia (1) se menţine pentru orice funcţie $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \cap \mathcal{L}^1(\nu)$. Fie acum o funcţie $f_0 \in \mathcal{C}(G_0)$ şi f funcţia pe G definită prin

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{pentru } x \in G_0 \\ 0 & \text{pentru } x \notin G_0. \end{cases}$$

Atunci $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \cap \mathcal{L}^1(\nu)$ şi deci, conf. (1), rezultă că restricţiile măsurilor $(x, \gamma_n)\, \mathrm{d}\mu(x)$ la G_0 converg slab către ν_0. Dacă ν_0 nu coincide cu restricţia la G_0 a nici unei măsuri din $\mathcal{A}$, rezultă, conf. lemei translaţiilor (**12**.14) că ν_0 este singulară în raport cu măsura Haar a lui G_0. Astfel (i) a fost demonstrat.

Fie acum $0 < k < \|\nu\| / \|\mu\|$; atunci $\|\nu\| > k \|\mu\|$. Cum $\|\nu\| = \sup \left(\left| \int_G f\, \mathrm{d}\nu \right| ; \; f \in \mathcal{C}(G), \; \|f\|_\infty \leqslant 1 \right)$, rezultă că există $g \in \mathcal{C}(G)$ cu $\|g\|_\infty \leqslant 1$ aşa ca $\left| \int_G g\, \mathrm{d}\nu \right| > k \|\mu\|$; dacă notăm $\theta = \arg \left(\int_G g\, \mathrm{d}\nu \right)$ şi $f = \mathrm{e}^{-i\theta} g$, *rezultă* că $f \in \mathcal{C}(G)$, $\|f\|_\infty \leqslant 1$ şi :

$$(2) \qquad \int_G f\, \mathrm{d}\nu > k \|\mu\|.$$

Mulţimea $\left\{ \sigma \in \mathfrak{M}(G) : \operatorname{Re} \int_G f\, \mathrm{d}\sigma > k \|\mu\| \right\}$ este deschisă în $\mathfrak{M}(G)$, deoarece funcţionala $\sigma \to \operatorname{Re} \int_G f\, \mathrm{d}\sigma$ este continuă. Această mulţime conţine pe ν, conf. (2), şi cum ν este un punct de acumulare al mulţimii $\mathcal{A}$, rezultă că există $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ aşa ca (măsurile de tipul $(x, \gamma)\, \mathrm{d}\mu(x)$ vor fi notate simplu $\gamma \cdot \mu$) :

a) $\gamma_1 \cdot \mu, \; \gamma_2 \cdot \mu \in \mathcal{A}$

b) $\gamma_1 \cdot \mu \neq \gamma_2 \cdot \mu$

c) $\operatorname{Re} \int_G f \gamma_j\, \mathrm{d}\mu > k \|\mu\|, \quad (j = 1, 2).$

Conform teoremei Radon-Nikodym există o funcţie integrabilă ψ aşa ca $\mu = \psi . |\mu|$ şi $|\psi| \equiv 1$. Vom scrie :

$$\varphi_j = f \gamma_j \psi = g_j + i k_j, \quad (j = 1, 2).$$

Atunci $\|\varphi_j\|_\infty \leqslant 1$ $(j = 1, 2)$ și conf. celor de mai sus:

$$\int_G g_j \,\mathrm{d}\,|\mu| > k\,\|\mu\|, \quad (j = 1, 2).$$

Pentru calculele care urmează folosim o cale propusă de Cohen [3], (p. 206); avem succesiv:

$$\left|\int_G (g_j + i\,|h_j|)\,\mathrm{d}\,|\mu|\right| \leqslant \int_G |g_j + i\,|h_j||\,\mathrm{d}\,|\mu| =$$

$$= \int_G |\varphi_j|\,\mathrm{d}\,|\mu| \leqslant \|\mu\|.$$

Deci $\|\mu\| \geqslant \left|\int_G (g_j + i\,|h_j|)\,\mathrm{d}\,|\mu|\right| \geqslant \left|k\,\|\mu\| + i\int_G |h_j|\,\mathrm{d}\,|\mu|\right|$, sau

$\|\mu\|^2 \geqslant k^2\,\|\mu\|^2 + \left(\int_G |h_j|\,\mathrm{d}\,|\mu|\right)^2$, sau, în sfîrșit,

$$\int_G |h_j|\,\mathrm{d}\,|\mu| \leqslant \sqrt{1-k^2}\,\|\mu\|, \quad (j = 1, 2). \tag{3}$$

Prin urmare, vom avea:

$$\int_G |1 - f\gamma_j\,\psi|\,\mathrm{d}\,|\mu| \leqslant \int_G (1 - g_j)\,\mathrm{d}\,|\mu| + \int_G h_j\,\mathrm{d}\,|\mu| \leqslant (1 - k + \sqrt{1-k^2})\,\|\mu\|$$

și deci:

$$\int_G |\gamma_j - f\gamma_1\gamma_2\,\psi|\,\mathrm{d}\,|\mu| \leqslant (1 - k + \sqrt{1-k^2})\,\|\mu\|, \quad (j = 1, 2).$$

În definitiv obținem:

$$\|\gamma_1\cdot\mu - \gamma_2\cdot\mu\| = \int_G |\gamma_1 - \gamma_2|\,\mathrm{d}\,|\mu| \leqslant 2\,(1 - k + \sqrt{1-k^2})\,\|\mu\|. \tag{4}$$

Cum însă, evident, $\gamma_1\cdot\mu - \gamma_2\cdot\mu \in \mathscr{F}(G)$ și

$\|\gamma_1\cdot\mu - \gamma_2\cdot\mu\| \geqslant 1$, rezultă că $2[(1-k) + \sqrt{1-k^2}]\,\|\mu\| \geqslant 1$.

Din (3) rezultă $k \leqslant 1$, dar $k = 1$ contrazice ultima relație obținută, așa încît $k < 1$. Este însă necesară o evaluare mai precisă; avem $k^2 < k < 1$, deci $1 - k^2 > 1 - k$, deci $\sqrt{1-k^2} > \sqrt{1-k} > 1 - k$ și prin urmare $(4\sqrt{1-k^2})\,.\,\|\mu\| > 1$, de unde $1 - k^2 > 1/16\,\|\mu\|^2$ sau $k^2 < 1 - \dfrac{1}{16\,\|\mu\|^2}$ etc.

Astfel lema este complet demonstrată.

12.16. Demonstraţia teoremei 12.11 pentru G compact. Fie $\mu \in \mathcal{F}(G)$ iar $\mathcal{A} = \left\{\gamma \cdot \mu ; \int_G \gamma \, d\mu \neq 0\right\}$; atunci, după cum am văzut, închiderea *slabă* $\overline{\mathcal{A}}$ a lui $\mathcal{A}$ este inclusă în $\mathcal{S}_{\|\mu\|}$ şi deci este slab compactă. Să observăm mai întîi că $0 \notin \overline{\mathcal{A}}$; într-adevăr, în caz contrar, ar exista un şir generalizat de caractere $\{\gamma_n\}$ aşa ca $\gamma_n \cdot \mu \in \mathcal{A}$ şi $\gamma_n \cdot \mu \xrightarrow{\text{slab}} 0$, adică pentru orice $f \in \mathcal{C}(G)$ să avem : $\int_G f(x)(x, \gamma_n) \, d\mu(x) \to 0$; în particular, pentru $f \equiv 1$: $\mu^\wedge(-\gamma_n) \to 0$; cum însă $\mu \in \mathcal{F}(G)$, rezultă că există un rang n_0 aşa ca pentru $n \geqslant n_0$, $\mu^\wedge(-\gamma_n) = 0$, ceea ce contrazice definiţia lui $\mathcal{A}$.

Se ştie că norma într-un dual de spaţiu Banach este o funcţie slab inferior semicontinuă; cum $\mathcal{A}$ este slab compactă, rezultă că normele elementelor din $\mathcal{A}$ îşi ating valoarea minimă într-un punct $\nu \in \overline{\mathcal{A}}$; deci $\nu \neq 0$.

Vom arăta acum că dacă $\int_G (x, \gamma) \, d\nu \neq 0$, atunci $\gamma \cdot \nu$ se află în $\overline{\mathcal{A}}$.

Într-adevăr, dacă $\nu \in \mathcal{A}$, atunci $\nu = \gamma_0 \cdot \mu$ şi dacă $\int_G \gamma \, d\nu = \int_G \gamma \cdot \gamma_0 \, d\mu \neq 0$, atunci, conf. definiţiei lui $\mathcal{A}$ rezultă că

$$\gamma \cdot \nu = \gamma \cdot (\gamma_0 \cdot \mu) = (\gamma \cdot \gamma_0) \cdot \mu \in \mathcal{A}.$$

Dacă ν este punct de acumulare al lui $\mathcal{A}$, atunci există un şir generalizat $\gamma_n \in \Gamma$ aşa ca $\gamma_n \cdot \mu \in \mathcal{A}$ şi $\gamma_n \cdot \mu \xrightarrow{\text{slab}} \nu$; în particular $\int_G \gamma \cdot \gamma_n \, d\mu \to$ $\to \int_G \gamma \, d\nu \neq 0$, sau, echivalent :

$$\mu^\wedge(-\gamma - \gamma_n) \to \nu^\wedge(-\gamma) \neq 0 .$$

Cum $\mu \in \mathcal{F}(G)$ rezultă că există un rang n_0 aşa ca, pentru $n \geqslant n_0$, să avem $\mu^\wedge(-\gamma - \gamma_n) = \nu^\wedge(-\gamma) \neq 0$, adică $\gamma \cdot (\gamma_n \cdot \mu) = (\gamma \cdot \gamma_n) \cdot \mu \in$ $\in \mathcal{A}$ $(n \geqslant n_0)$. Apoi, este evident că $(\gamma \cdot \gamma_n) \cdot \mu \xrightarrow{\text{slab}} \gamma \cdot \mu$ şi deci $\gamma \cdot \nu \in \overline{\mathcal{A}}$, ce trebuia.

Mulţimea $\mathcal{B} = \left\{\gamma \cdot \nu : \int_G \gamma \, d\nu \neq 0\right\}$ nu poate avea nici un punct de acumulare, căci $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{A}}$ şi un astfel de punct ar avea, conf. **12.15** (ii), norma mai mică decît $\|\nu\|$, ceea ce este absurd.

Prin urmare, deoarece $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}_{\|\nu\|}$ şi $\mathcal{S}_{\|\nu\|}$ este slab compactă, rezultă că $\mathcal{B}$ este finită.

Fie G_0 grupul suport al lui ν ; rezultă uşor că ν este o măsură absolut continuă în raport cu m_0 — măsura Haar a lui G_0 — densitatea lui ν în raport cu m_0 fiind polinom trigonometric. Observînd că $\nu \in \mathcal{F}(G)$, deoarece $\mathcal{F}(G)$ este slab închisă, rezultă că ν este o măsură canonică.

Dacă $\nu \in \mathcal{A}$, atunci ν coincide cu $\gamma \cdot \mu \in \mathcal{A}$ cu γ convenabil ales, deci şi μ este canonică.

Dacă $\nu \in \operatorname{Fr} \mathcal{A}$, atunci, fiind un punct de acumulare, are loc alternativa din lema **12.15.** (i) ; cum însă ν este absolut continuă în raport cu m_0 şi nenulă, ea nu poate fi singulară ; deci $\nu_0 = (\gamma \,.\, \mu)_0$, unde $\gamma \,.\, \mu \in \mathfrak{A}$. Rezultă că $(\gamma \,.\, \mu)_0$ este canonică, deci şi μ_0 este canonică.

Avînd însă în vedere că

$$\mu = \mu_0 + (\mu - \mu_0)$$

şi că măsurile μ_0 şi $\mu - \mu_0$ sînt mutuale singulare, rezultă că

$$\|\mu\| = \|\mu_0\| + \|\mu - \mu_0\|$$

deci norma lui $\|\mu - \mu_0\|$ este mai mică cu cel puţin 1 decît $\|\mu\|$ (μ_0 fiind canonică avem $\|\hat{\mu_0}\|_\infty \geqslant 1$).

Se repetă argumentul de mai sus cu $\mu - \mu_0$ şi, prin inducţie, se obţine rezultatul dorit.

Teorema este demonstrată, odată cu ea sînt demonstrate şi toate afirmaţiile făcute pînă acum.

12.17. Avînd în vedere că subgrupurile lui Z sînt $\{0\}$ sau nZ, din teorema **12.4** rezultă, ca un corolar, următoarea :

TEOREMĂ. *Un şir* $\{a_n\}_{n \in Z}$ *de* 0 *şi* 1 *este şirul coeficienţilor Fourier — Stieltjes ai unei măsuri pe* T *dacă şi numai dacă* a_n *diferă de un şir periodic în cel mult un număr finit de locuri.*

12.18. Am văzut că dacă $\mu \in \mathfrak{I}(G)$, atunci $\|\mu\| \geqslant 1$; vom preciza acest fapt în secţiunea următoare. Ne va fi necesară următoarea :

LEMĂ. *O mulţime* $E \subset \Gamma$ *este clasă în* Γ *dacă şi numai dacă* $E + E - E \subset E$.

Dacă E este o clasă a unui subgrup Λ, atunci $E - E = \Lambda$ şi deci $E = E + \Lambda = E + E - E$.

Invers, dacă $E + E - E \subset E$ să punem $\Lambda = E - E$ şi să fixăm $\gamma_0 \in E$; dacă $\gamma \in E$, atunci $\gamma - \gamma_0 \in \Lambda$ şi astfel $E = \gamma_0 + \Lambda$ deoarece :

$$E \subset \gamma_0 + \Lambda = \gamma_0 + E - E \subset E + E - E \subset E.$$

Prin urmare, $\Lambda - \Lambda = (E - \gamma_0) - (E - \gamma_0) = E - E = \Lambda$ aşa încît Λ este un subgrup.

Să mai observăm un fapt elementar de trigonometrie ; anume că

$$a\,|\cos \alpha| + b\,|\sin \alpha| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \alpha \in (0{,}2\,\pi). \tag{1}$$

12.19. TEOREMĂ. *Dacă* $\mu \in \mathfrak{I}(G)$ *şi* $\|\mu\| > 1$, *atunci* $\|\mu\| \geqslant \sqrt{5}/2$.

După cum am văzut — **12.9** — o măsură idempotentă are norma $1 \Leftrightarrow S(\mu)$ este o clasă deschisă ; deci, deoarece $\|\mu\| > 1$, $S(\mu)$ nu este o clasă deschisă. Atunci, conf. lemei **12.18**, există $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in S(\mu)$ aşa ca $\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 \notin S(\mu)$. Fie :

$$f(x) = 2(-x, \gamma_1)\,[1 + (x, \gamma_1 - \gamma_2)] + (-x, \gamma_2)\,[1 - (x, \gamma_3 - \gamma_1)] =$$
$$= 2(-x, \gamma_1) + 2(-x, \gamma_3) + (-x, \gamma_2) - (-x, \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3).$$

Cea de a doua expresie pentru f arată că

$$\int_G f\,\mathrm{d}\mu = 5.$$

Să notăm $(x, \gamma_1 - \gamma_3) = e^{2i\alpha}$; folosind prima expresie pentru f deducem :

$$|f(x)| \leqslant 2|1 + e^{2i\alpha}| + |1 - e^{-2i\alpha}| = 4|\cos \alpha| +$$
$$+ 2|\sin \alpha| \leqslant 2\sqrt{5}\text{ ; conf. } \mathbf{12.18}. \text{ (1).}$$

Deci :

$$5 = \int_G f\,d\mu \leqslant \|f\|_\infty \|\mu\| \leqslant 2\sqrt{5}\,\|\mu\|,$$

de unde rezultatul dorit.

12.20. În încheierea paragrafului ne ocupăm de caracterizarea operatorilor $T : \mathcal{L}^1(G) \to \mathcal{L}^1(G)$ care comută cu operatorii de translație. Primul pas în acest sens îl constituie teorema care urmează și care are și o importanță în sine.

TEOREMĂ. *Fie* φ *o funcție definită pe* Γ *așa încît* $\varphi f^{\wedge} \in \mathcal{B}(\Gamma)$ *pentru fiecare* $f^{\wedge} \in \mathcal{A}(\Gamma)$. *Atunci* $\varphi \in \mathcal{B}(\Gamma)$.

Vom arăta mai întîi că operația liniară T care asociază lui $f^{\wedge}$ pe $\varphi f^{\wedge}$ este o aplicație continuă a lui $\mathcal{A}(\Gamma)$ în $\mathcal{B}(\Gamma)$. Să presupunem că $f_n^{\wedge} \to f^{\wedge}$ în norma lui $\mathcal{A}(\Gamma)$ și că $\varphi f_n^{\wedge} \to \mu^{\wedge}$ în norma lui $\mathcal{B}(\Gamma)$. Pentru orice $\gamma \in \Gamma$ avem :

$$\mu^{\wedge}(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\gamma) f_n^{\wedge}(\gamma) = \varphi(\gamma) f^{\wedge}(\gamma) = (Tf^{\wedge})(\gamma).$$

Astfel $Tf^{\wedge} = \mu^{\wedge}$ și continuitatea lui T rezultă din teorema graficului închis. Prin urmare există o constantă K așa încît

$$\text{(1)} \qquad \|\varphi f^{\wedge}\| \leqslant K \|f^{\wedge}\|, \quad f^{\wedge} \in \mathcal{A}(\Gamma).$$

Fie date $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ și $\varepsilon > 0$; conf. **8.7** rezultă că există $f^{\wedge} \in \mathcal{A}(\Gamma)$ cu $\|f^{\wedge}\| < 1 + \varepsilon$ așa încît $f^{\wedge}(\gamma_i) = 1$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$. Dacă $c_1, \ldots, c_n$ sînt numere complexe și dacă $\mu^{\wedge} = \varphi f^{\wedge}$ atunci :

$$|\sum_i c_i\, \varphi(\gamma_i)| = |\sum_i c_i\, \mu^{\wedge}(\gamma_i)| \leqslant \|\mu\| \sup_{x\in G} |\sum_i c_i\,(x, \gamma_i)| \leqslant$$
$$\leqslant K(1+\varepsilon) \sup_{x\in G} |\sum_i c_i\,(x, \gamma_i)|$$

Luînd $f^{\wedge}$ constantă pe o mulțime deschisă V, rezultă că φ este continuă pe V; deci φ este continuă. Prin urmare teorema **7.7** este aplicabilă și ne arată că $\varphi \in \mathcal{B}(\Gamma)$, cu $\|\varphi\| \leqslant K$.

12.21 COROLAR. Dacă $\mu \in \mathfrak{M}(G)$, atunci transformarea $f \to f * \mu$ a lui $\mathcal{L}^1(G)$ în $\mathcal{L}^1(G)$ are norma $\|\mu\|$.

Evident, $\|f * \mu\| \leqslant \|\mu\|\,\|f\|$; dacă $\|f * \mu\| \leqslant K\|f\|$ avem, în notațiile toremei precedente,

$$\|\mu^{\wedge} f^{\wedge}\| \leqslant K\|f^{\wedge}\|;$$

dar de aici a rezultat că $\|\mu^{\wedge}\| \leqslant K$ adică $\|\mu\| \leqslant K$, *q.e.d.*

12.22. Pentru $a \in G$ fie *operatorul de translație* τ_a definit prin $\tau_a f = f_a$, unde $f_a(x) = f(x - a)$.

PROPOZIȚIE. *Fie* $\psi : \mathcal{L}^1(G) \to \mathcal{L}^1(G)$ *un operator liniar și mărginit cu proprietatea că* $\psi \circ \tau_a = \tau_a \circ \psi$ *pentru orice* $a \in G$. *Atunci există o funcție* φ *pe* Γ *așa încît*

$$\psi^\wedge f^\wedge(\gamma) = \varphi(\gamma) f^\wedge(\gamma); \; f \in \mathcal{L}^1(G), \; \gamma \in \Gamma. \tag{1}$$

(am notat $\psi^\wedge f^\wedge = (\psi f)^\wedge$). *Reciproc, dacă* ψ *satisface* (1), *atunci* $\psi \circ \tau_a = \tau_a \circ \psi$ *pentru orice* $a \in G$.

Să fixăm $b \in \mathcal{L}^\infty(G)$; operația $f \to \int (\psi f)\, b$ este o funcțională liniară și mărginită pe $L^1(G)$; deci există $\beta \in \mathcal{L}^\infty(G)$ așa ca

$$\int_G (\psi f)(x)\, b(x)\, \mathrm{d}x = \int_G f(x)\, \beta(x)\, \mathrm{d}x; \quad f \in \mathcal{L}^1(G) \tag{2}$$

Dacă acum $f, g \in \mathcal{L}^1(G)$ obținem:

$$\begin{aligned}
&\int_G ((\psi f) \ast g)(x)\; b(x)\, \mathrm{d}x = \\
&= \int_G \int_G (\tau_y\, \psi f)(x)\, g(y)\, b(x)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \\
&= \int_G g(y)\, \mathrm{d}y \int_G (\psi\; \tau_y f)\; (x)\, b(x)\, \mathrm{d}x = \\
&= \int_G g(y)\, \mathrm{d}y \int_G (\tau_y f)(x)\, \beta(x)\, \mathrm{d}x = \\
&= \int_G (f \ast g)(x)\, \beta(x)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Cum ultima expresie nu se schimbă dacă schimbăm pe f cu g și cum $b \in \mathcal{L}^\infty(G)$ a fost arbitrar, rezultă:

$$(\psi f) \ast g = f \ast (\psi g); \quad f, g \in \mathcal{L}^1(G) \tag{3}$$

Deci $(\psi^\wedge f^\wedge) \,.\, g^\wedge = f^\wedge \,.\, (\psi^\wedge g^\wedge)$ şi aceasta implică existența lui φ pentru care (1) are loc.

Reciproca este trivială căci $f_a^\wedge(\gamma) = (-a, \gamma)\, f^\wedge(\gamma)$.

12.23 TEOREMĂ. *Operatorii liniari și mărginiți* $\psi : \mathcal{L}^1(G) \to \mathcal{L}^1(G)$ *care comută cu toate translațiile sînt exact operatorii de forma*

$$\psi f = f \ast \mu; \quad \mu \in \mathfrak{M}(G).$$

Mai mult, $\|\psi\| = \|\mu\|$ *și, dacă* ψ *este o proiecție* (adică $\psi^2 = \psi$), *atunci* $\mu \ast \mu = \mu$.

Teorema rezultă imediat din **12.22** și **12.20**. Rămîne de arătat că $\psi^2 = \psi \Rightarrow \mu \ast \mu = \mu$; și, într-adevăr, $\psi^2 = \psi \Rightarrow f \ast \mu \ast \mu = f \ast \mu$ pentru orice $f \in \mathcal{L}^1(G)$, adică, pentru orice $f^\wedge \in \mathcal{A}(\Gamma)$:

$$f^\wedge(\gamma)\, \mu^\wedge(\gamma)\, \mu^\wedge(\gamma) = f^\wedge(\gamma)\, \mu^\wedge(\gamma).$$

Fie $\gamma \in \Gamma$ fixat; există $f^\wedge \in \mathcal{A}(\Gamma)$ cu $f^\wedge(\gamma) = 1$, deci

$$\mu^\wedge(\gamma)\,\mu^\wedge(\gamma) = \mu^\wedge(\gamma); \quad \gamma \in \Gamma$$

adică (conf. teoremei de unicitate):

$$\mu * \mu = \mu, \qquad \text{q.e.d.}$$

12.24. Note bibliografice. Teorema **12.4** a fost demonstrată direct de Cohen [2]; mai înainte fuseseră făcute încercări în această direcţie de către Rudin [13] care nu a dat însă decît rezultate parţiale. O variantă simplificată a demonstraţiei lui Cohen se află în cartea lui Rudin ([21], pp. 61 – 72). O simplificare esenţială se datoreşte japonezilor Ito şi Amemiya [15] care au demonstrat teorema **12.11**; lema **12.13** se datoreşte lui Rudin, [21], 3.3.2; a se vedea şi [14]; lema translaţiilor **12.14** se datoreşte lui Helson [[12], [13]). Lema **12.15** şi demonstraţia **12.16** se datoresc lui Ito şi Amemiya (*loc. cit.*). Cazul particular de la **12.17** a fost găsit de Helson ([11], [13)]). În legătură cu normele măsurilor idempotente — în special teorema **12.19** — o problemă este deschisă: care este cea mai mare constantă k cu proprietatea că $\mu \in I(G)$, $\|\mu\| \geqslant 1 => \|\mu \geqslant \|k$? Rudin ([21], p. 73) arată că $k \leqslant (1 + \sqrt{2})/2$. Pentru alte probleme legate de normele măsurilor idempotente trimitem la Cohen, [2] şi Davenport, [4].

Teorema **12.20** se datoreşte lui Helson [10] şi Edwards [5]. Pentru generalizări ale teoremei **12.23** se pot consulta articolele [8], [19], [20], [26]. Menţionăm că aceste articole conţin şi generalizările altor fapte de analiză armonică la cadrul general al algebrelor Banach.

§ 13. HOMOMORFISME DE ALGEBRE GRUPALE

(Problema şi rezultatul principal)

13.1. Problemă. Să considerăm două l.c.a.-grupuri G_1, G_2 şi dualele lor Γ_1, Γ_2 şi fie ψ un homomorfism al lui $\mathcal{L}^1(G_1)$ în $\mathcal{M}(G_2)$; atunci ψ este o transformare liniară a lui $\mathcal{L}^1(G_1)$ în $\mathcal{M}(G_2)$, care este multiplicativă în raport cu convoluţia:

$$\psi(f * g) = (\psi f) * (\psi g). \tag{1}$$

În plus ψ este continuu şi dacă presupunem că ψ nu este identic nul, $\|\psi\| \geqslant 1$. (conf. cu o teoremă generală care afirmă că un homomorfism de la o algebră Banach comutativă la o algebră Banach comutativă semisimplă este continuu, iar dacă orice homomorfism complex nenul pe prima are norma 1 şi homomorfismul nu este identic nul, norma sa este $\geqslant 1$).

Asociem acum lui ψ un homomorfism $\psi^\wedge : \mathcal{A}(\Gamma_1) \to \mathcal{B}(\Gamma_2)$ prin condiţia de comutativitate a diagramei

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^1(G_1) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{M}(G_2) \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathcal{A}(\Gamma_1) \arrow[r] & \mathcal{B}(\Gamma_2).
\end{tikzcd}$$

Atunci $\psi^\wedge f^\wedge = (\psi f)^\wedge$.

Acum, pentru orice $\gamma \in \Gamma_2$ aplicația $\theta_\gamma : f \to (\psi^\wedge f^\wedge)(\gamma)$ este un homomorfism complex al lui $\mathcal{L}^1(G_1)$; fie

$$Y = \{\gamma \in \Gamma_2 ;\ \ \theta_\gamma \not\equiv 0\}.$$

Conform propoziției **2.3.** pentru fiecare $\gamma \in Y$ există $\alpha(\gamma) \in \Gamma_1$ așa ca

$$(\psi^\wedge f^\wedge)(\gamma) = f^\wedge(\alpha(\gamma)),\quad f \in \mathcal{L}^1(G_1).$$

Astfel, fiecărui homomorfism $\psi : \mathcal{L}^1(G_1) \to \mathfrak{M}(G_2)$ i se asociază o parte Y a lui Γ_2 și o aplicație $\alpha : Y \to \Gamma_1$ așa încît

$$(\psi^\wedge f^\wedge)(\gamma) = \begin{cases} f^\wedge(\alpha(\gamma)) & \text{dacă } \gamma \in Y \\ 0 & \text{dacă } \gamma \notin Y. \end{cases} \tag{2}$$

Vom prescurta relația (2) prin notația

$$\psi^\wedge f^\wedge = f^\wedge \circ \alpha. \tag{3}$$

Problema pe care ne-o punem este de *a caracteriza toate homomorfismele lui* $\mathcal{L}^1(G_1)$ în $\mathfrak{M}(G_2)$. Considerațiile anterioare ne arată că această problemă *este echivalentă cu problema caracterizării tuturor cuplurilor* (Y, α) cu proprietatea că $f^\wedge \to f^\wedge \circ \alpha$ duce pe $\mathcal{A}(\Gamma_1)$ în $\mathcal{B}(\Gamma_2)$.

13.2. DEFINIȚIE. Dacă E este o clasă deschisă din Γ_2 și dacă $\alpha : E \to \Gamma_1$ este o aplicație continuă care satisface identitatea

$$\alpha(\gamma + \gamma' - \gamma'') = \alpha(\gamma) + \alpha(\gamma') - \alpha(\gamma'') ;\ \ \gamma, \gamma', \gamma'' \in E,$$

atunci α se numește *aplicație afină* ; pentru justificarea definiției ne referim le lema **12.18.**

13.3. DEFINIȚIE. Dacă $Y \subset \Gamma_2$ și $\alpha : Y \to \Gamma_1$ este o aplicație astfel încît există $S_1, \ldots, S_n \subset \Gamma_2$ cu proprietățile :

(a) S_i sînt două cîte două disjuncte și aparțin clanului claselor deschise ale lui Γ_2 ;

(b) $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$;

(c) fiecare S_i este conținută într-o clasă deschisă K_i din Γ_2 și există $\alpha_i : K_i \to \Gamma_1$ afină cu $\alpha \mid S_i = \alpha_i \mid S_i$, atunci α se numește *afină pe porțiuni.*

13.4. Cu aceste pregătiri putem enunța rezultatul principal în terminologia adoptată al **13.1.**

TEOREMĂ. (Cohen P.) *Dacă* ψ *este un homomorfism al lui* $\mathcal{L}^1(G_1)$ *în* $\mathfrak{M}(G_2)$, *atunci* $\psi^\wedge f^\wedge = f^\wedge \circ \alpha$, *unde* α *este o aplicație afină pe porțiuni a unei mulțimi* Y *din clanul claselor deschise ale lui* Γ_2 *în* Γ_1.

Reciproc, dacă Y *aparține clanului claselor deschise ale lui* Γ_2 și $\alpha : Y \to \Gamma_1$ *este afină pe porțiuni, atunci* $\mu^\wedge \circ \alpha \in \mathcal{B}(\Gamma_2)$ *pentru orice* $\mu \in \mathfrak{M}(G_1)$.

13.5. Cîteva considerații relativ la demonstrația acestei teoreme : partea a doua a teoremei **13.4** va fi tocmai teorema **13.8** ; prima parte va fi demonstrată în trei etape ; demonstrăm întîi să graficul lui α aparține clanului generat de clasele boreliene ale lui $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$; apoi că, dacă definim aplicația afină pe porțiuni înlocuind în **13.2** și **13.3** expresia „clasă deschisă" cu expresia ,,clasă boreliană", α este afină pe porţiuni; şi, în sfîrşit, rezultă afirmaţia primei părţi a teoremei **13.4**.

13.6. LEMĂ. *Fie* Λ *un subgrup deschis din* Γ_2, α *un homomorfism continuu al lui* Λ *în* Γ_1, $\mu \in \mathcal{M}(G_1)$ *şi* $\varphi = \mu^{\wedge} \circ \alpha$. *Atunci* $\varphi \in \mathfrak{B}(\Gamma_2)$ *şi* $\|\varphi\| \leqslant \|\mu\|$.

Într-adevăr, anulatorul H al lui Λ este un subgrup compact al lui G_2. Fie acum $P(y) = \sum\limits_1^n c_i (y, \gamma_i)$ un polinom trigonometric pe G_2 şi $Q = P \ast m_H$. Atunci

$$Q(y) = \int_{G_2} P(y - x)\, \mathrm{d}m_H(x), \quad y \in G_2,$$

deci $\|Q\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty \|m_H\| = \|P\|_\infty$; mai mult:

$$Q(y) = \int_{G_2} \left(\sum_1^n c_i (y - x, \gamma_i) \right) \mathrm{d}m_H(x) =$$

$$= \sum_1^n c_i (y, \gamma_i) \int_{G_2} (-x, \gamma_i)\, \mathrm{d}m_H(x) =$$

$$= \sum_1^n c_i (y, \gamma_i)\, \chi(\gamma_i), \quad y \in G_2,$$

unde χ este funcţia caracteristică a lui Λ.

Deoarece α este un homomorfism continuu, aplicaţia $\gamma \to (x, \alpha(\gamma))$ este un caracter pe Λ pentru fiecare $x \in G_1$, deci α induce un homomorfism continuu β al lui G_1 în G_2/H (morfismul dual — conf. § 9) pentru care:

$$(x, \alpha(\gamma)) = (\beta(x), \gamma), \quad x \in G_1, \quad \gamma \in \Lambda. \tag{1}$$

Atunci

$$\sum_{\gamma_i \in \Lambda} c_i (x, \alpha(\gamma_i)) = Q(\beta(x)), \quad x \in G_1. \tag{2}$$

Este necesară o precizare: în expresiile anterioare ale lui Q argumentul y aparţine lui G_2, pe cînd în (2) avem $\beta(x) \in G/H$; nu este însă nici o contradicţie deoarece Q este constantă pe clasele lui H, iar aparenta neconcordanţă se datoreşte dublului rol al unui element $\gamma \in \Lambda$: caracter pe G_2 ca element din Γ_2 şi caracter pe G_2/H.

Astfel avem

$$\left| \sum_1^n c_i\, \varphi(\gamma_i) \right| = \left| \sum_{\gamma_i \in \Lambda} c_i\, \mu^{\wedge}(\alpha(\gamma_i)) \right| =$$

$$= \left| \int_{G_1} \left(\sum_{\gamma_i \in \Lambda} c_i (-x, \alpha(\gamma_i)) \right) \mathrm{d}\mu(x) \right| =$$

$$= \left| \int_{G_1} Q(\beta(-x))\, \mathrm{d}\mu(x) \right| \leqslant \|\mu\| \|Q\|_\infty \leqslant \|\mu\| \|P\|_\infty$$

Acum conf. teoremei **7.7** rezultă că $\varphi \in \mathfrak{B}(\Gamma_2)$ şi $\|\varphi\| \leqslant \|\mu\|$.

13.7. LEMĂ. *Concluziile lemei* **13.6** *rămîn valabile dacă* Λ *este o clasă deschisă în* Γ_2 *iar* α *o aplicație afină a lui* Λ *în* Γ_1.

Să fixăm $\gamma_0 \in \Lambda$ și să definim $\alpha_1(\gamma) = \alpha(\gamma + \gamma_0) - \alpha(\gamma_0)$ pentru $\gamma \in \Lambda - \gamma_0$. Atunci α_1 este un homomorfism continuu al subgrupului deschis $\Lambda - \gamma_0$ în Γ_1. Într-adevăr, dacă $\gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda - \gamma_0$, adică $\gamma_1 + \gamma_0$, $\gamma_2 + \gamma_0 \in \Lambda$,

$$\alpha(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_0) = \alpha((\gamma_1 + \gamma_0) + \gamma_2 + \gamma_0) - \gamma_0) =$$
$$= \alpha(\gamma_1 + \gamma_0) + \alpha(\gamma_2 + \gamma_0) - \alpha(\gamma_0),$$

deci

$$\alpha_1(\gamma_1 + \gamma_2) = \alpha(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_0) - \alpha(\gamma_0) =$$
$$= \alpha(\gamma_1 + \gamma_0) - \alpha(\gamma_0) + \alpha(\gamma_2 + \gamma_0) - \alpha(\gamma_0) =$$
$$= \alpha_1(\gamma_1) + \alpha_1(\gamma_2)$$

Se verifică ușor că $\varphi = \mu^{\wedge} \circ \alpha = (\mu^{\wedge}_{-\alpha(\gamma_0)} \circ \alpha_1)_{\gamma_0}$, și deoarece $\mathcal{B}(\Gamma_1)$ și $\mathcal{B}(\Gamma_2)$ sînt invariante la translații, iar translațiile invariază normele, lema rezultă din lema **13.6**.

13.8. TEOREMĂ. *Dacă* Y *aparține clanului claselor lui* Γ_2, $\alpha : Y \to \Gamma_1$ *este afină pe porțiuni,* $\mu \in \mathfrak{M}(G_1)$ *și* $\varphi = \mu^{\wedge} \circ \alpha$, *atunci* $\varphi \in \mathcal{B}(\Gamma_2)$.

Vom folosi simbolurile din definiția **13.3**; dacă $\varphi_i = \mu^{\wedge} \circ \alpha_i$ și dacă χ_i este funcția caracteristică a lui S_i, atunci $\varphi = \sum \varphi_i \chi_i$. Deoarece S_i se află în clanul claselor deschise ale lui Γ_2, rezultă $\chi_i \in \mathcal{B}(\Gamma_2)$ (conf. **12.4**); cum α_i este afină pe clasa deschisă K_i, rezultă $\varphi_i \in \mathcal{B}(\Gamma_2)$ (conf. **13.7**). Cum $B(\Gamma_2)$ este o algebră, rezultă $\varphi \in B(\Gamma_2)$.

Începem acum pregătirile pentru demonstrația primei părți a teoremei **13.4**.

13.9. LEMĂ. *Fie* X *un spațiu compact,* Y *un spațiu local compact, inclus continuu în* X *și dens în acesta,* $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}(X)$ *și* $\varepsilon > 0$. *Atunci pentru orice* $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ *există* $\nu \in \mathfrak{M}(Y)$ *concentrată pe o mulțime finită, cu proprietățile:*

(i) $\|\nu\| \leqslant \|\mu\|$;

(ii) $\left| \int_X f_i \,\mathrm{d}\mu - \int_Y f_i|_Y \,\mathrm{d}\nu \right| < \varepsilon, \qquad i = 1, \ldots, n.$

Fie $\varepsilon' = \varepsilon/\|\mu\|$. Deoarece spațiul X este compact, există o partiție finită a lui X în mulțimi boreliene cu interior nevid astfel încît oscilația lui f_i pe fiecare mulțime a partiției să fie mai mică decît ε_i', $i = 1, \ldots, n$. Adică:

a) $X = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, B_j boreliene, disjuncte, int $B_j \neq \emptyset$

b) pentru orice $i = 1, \ldots, n$ și $b_j^k \in B_j$, $k = 1, 2$, $j = 1, \ldots, m$

$$|f_i(b_j^1) - f_i(b_j^2)| < \varepsilon'.$$

Alegem $b_j \in B_j \cap Y$ și definim

$$\nu = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)\, \delta_{b_j},$$

unde δ_{b_j} este măsura cu masa unitate concentrată în b_j. Atunci, evident, $\nu \in \mathcal{M}(Y)$ şi $\|\nu\| \leqslant \|\mu\|$. Apoi:

$$\left|\int_X f_i \,\mathrm{d}\mu - \int_Y f_i|_Y \,\mathrm{d}\nu\right| = \left|\sum_{j=1}^{m}\left(\int_{B_j} f_i \,\mathrm{d}\mu - \int_{B_j} f_i|_Y \,\mathrm{d}\nu\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{m}\left(\int_{B_j} (f_i(b) - f_i(b_j))\,\mathrm{d}\mu(b)\right)\right| \leqslant \varepsilon' \sum_{j=1}^{m} |\mu|(B_j) = \varepsilon,$$

q.e.d.

COROLAR. *Fie G un l.c.a.-grup, $\overline{G}$ compactificatul Bohr al lui G, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$* şi $\varepsilon > 0$. *Atunci pentru orice $\mu \in \mathcal{M}(\overline{G})$ există $\mu_1 \in \mathcal{M}(G)$ cu proprietăţile:*

(i) $\|\mu_1\| \leqslant \|\mu\|$;

(ii) $|\hat{\mu}(\gamma_i) - \hat{\mu}_1(\gamma_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n.$

13.10 Lemă. *Fie ψ un homomorfism al lui $\mathcal{L}^1(G_1)$* în $\mathcal{M}(G_2)$, α *aplicaţia indusă de acesta ca în* **13.1**, iar $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$ *compactificările Bohr ale lui G_1, G_2. Atunci, pentru orice $\mu \in \mathcal{M}(\overline{G}_1)$, $\hat{\mu} \circ \alpha \in \mathcal{B}(\Gamma_{2d})$, deci α este indusă şi de un homomorfism al lui $\mathcal{M}(\overline{G}_1)$* în $\mathcal{M}(\overline{G}_2)$.

Fie $\mu \in \mathcal{M}(\overline{G}_1)$, $\varepsilon > 0$ şi $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma_2$. Conform corolarului de la **13.9** există $\mu_1 \in \mathcal{M}(G_1)$ aşa ca

(i) $\|\mu_1\| \leqslant \|\mu\|$;

(ii) $|(\hat{\mu}_1 \circ \alpha)(\gamma_i) - (\hat{\mu} \circ \alpha)(\gamma_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n.$

Conform **8.7** putem alege $k \in \mathcal{L}^1(G_1)$ cu proprietăţile

(a) $\hat{k}$ are suport compact;

(b) $\hat{k}(\alpha(\gamma_i)) = 1, \quad \gamma_i \in Y$;

(c) $\|k\|_1 \leqslant 1 + \varepsilon$.

Fie atunci $f = k * \mu_1$; rezultă $f \in \mathcal{L}^1(G_1)$, $\|f\|_1 \leqslant (1+\varepsilon)\|\mu\|$ şi

$$|(\hat{f} \circ \alpha)(\gamma_i) - (\hat{\mu} \circ \alpha)(\gamma_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

Punînd $\varphi = \hat{f} \circ \alpha$, rezultă conform ipotezei teoremei că $\varphi \in \mathcal{B}(\Gamma_2)$ şi $\|\varphi\| = \|\psi f\| \leqslant \|\psi\| \, \|f\|_1 \leqslant (1+\varepsilon)\|\mu\| \, \|\psi\|$; în plus din (1) deducem

$$|\varphi(\gamma_i) - (\hat{\mu} \circ \alpha)(\gamma_i)| < \varepsilon, \quad \mathrm{i} = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Fie acum $P(x) = \sum_{1}^{n} c_i(x, \gamma_i)$ un polinom trigonometric pe G_2; deoarece $\varphi \in \mathcal{B}(\Gamma_2)$ şi $\|\varphi\| \leqslant (1+\varepsilon)\|\mu\| \, \|\psi\|$, conf. implicaţiei (i) $\Rightarrow$ (ii) din **7.7** avem:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i \, \varphi(\gamma_i)\right| \leqslant A\,\|P\|_\infty, \quad A = (1+\varepsilon)\|\mu\| \, \|\psi\|. \tag{3}$$

Prin urmare

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i (\mu^\wedge \circ \alpha)(\gamma_i)\right| \leqslant \tag{4}$$

$$\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi(\gamma_i)\right| + \sum_{i=1}^{n} |c_i| \cdot |\varphi(\gamma_i) - (\mu^\wedge \circ \alpha)(\gamma_i)| \leqslant$$

$$\leqslant A\, \|P\|_\infty + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |c_i|.$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, din (4) rezultă

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i (\mu^\wedge \circ \alpha)(\gamma_i)\right| \leqslant \|\mu\|\, \|\psi\|\, \|P\|_\infty. \tag{5}$$

Considerînd pe P ca polinom trigonometric pe $\bar{G}_2$, $\|P\|_\infty$ se mărește, deci (5) rămîne valabilă și, conf. implicației (ii) $\Rightarrow$ (i) din **7.7**, $\mu^\wedge \circ \alpha \in \mathscr{B}(\Gamma_{2d})$ și $\|\mu^\wedge \circ \alpha\| \leqslant \|\psi\|\, \|\mu\|$.

Remarcăm că dacă G_1, G_2 sînt l.c.a.-grupuri, *nu orice homomorfism al lui* $\mathscr{M}(G_1)$ *în* $\mathscr{M}(G_2)$ *induce o aplicație a unei părți a lui* Γ_2 *în* Γ_1.

13.11. DEFINIȚIE. Fie Γ_1 și Γ_2 grupuri abeliene și $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$; o mulțime $E \subset \Gamma$ se numește *grafic* dacă pentru orice $\gamma_2 \in \Gamma_2$ există cel mult un $\gamma_1 \in \Gamma_1$ astfel încît $\gamma_1 + \gamma_2 \in E$. Evident, dacă $Y \subset \Gamma_2$ și $\alpha : Y \to \Gamma_1$, atunci *graficul* $E = \{\alpha(\gamma_2) + \gamma_2 \in \Gamma;\ \gamma_2 \in Y\}$ *al lui* α *este un grafic în sensul definiției precedente.*

13.12. LEMĂ. *Fie* G_1, G_2 *grupuri abeliene compacte,* ψ *un homomorfism al lui* $\mathscr{M}(G_1)$ *în* $\mathscr{M}(G_2)$ *care induce prin relația* $(\psi\, \mu)^\wedge = \mu^\wedge \circ \alpha$ *o aplicație* α *a unei părți* Y *a lui* Γ_2 *în* Γ_1, *și* E *graficul lui* α *în* $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$. *Atunci* E *aparține clanului claselor lui* $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$.

Înaintea demonstrației propriu-zise să facem o *observație*. Dacă δ_x este măsura de masă 1 concentrată în $x \in G_1$, punem $\mu_x = \psi\, \delta_x$. Atunci $\mu_x \in \mathscr{M}(G_2)$, $\|\mu_x\| \leqslant \|\psi\|$ și

$$\mu_x^\wedge(\gamma) = (\psi^\wedge\, \delta_x^\wedge)(\gamma) = (\delta_x^\wedge \circ \alpha)(\gamma) =$$

$$= \begin{cases} \delta_x^\wedge(\alpha(\gamma)) & \text{dacă } \gamma \in Y \\ 0 & \text{dacă } \gamma \notin Y. \end{cases}$$

Dar

$$\delta_x^\wedge(\gamma_1) = \int_{G_1} (-y, \gamma_1)\, \mathrm{d}\delta_x(y) = (-x, \gamma_1), \quad \gamma_1 \in \Gamma_1,$$

deci

$$\mu_x^\wedge(\gamma) = \begin{cases} (-x,\ \alpha(\gamma)) & \text{dacă } \gamma \in Y \\ 0 & \text{dacă } \gamma \notin Y. \end{cases}$$

Aplicația $x \to \mu_x$ a lui G_1 în $\mathscr{M}(G_2)$ este un homomorfism de semigrupuri, deoarece $\mu_{x+y} = \mu_x * \mu_y$ și este mărginit căci $\|\mu_x\| \leqslant \|\psi\|$

Fie $G = G_1 \oplus G_2$ și $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$. Conform **12.4** trebuie arătat că funcția caracteristică χ a lui E aparține lui $\mathscr{B}(\Gamma)$.

Vom nota prin $x, y, z, \gamma', \gamma'', \gamma$ puncte din $G_1, G_2, G, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ respectiv. Fie k un polinom trigonometric pe G_2 :

$$k(y) = \sum_{\Gamma_2} a(\gamma'')(y, \gamma''),\ y \in G_2, \tag{1}$$

unde a este o funcţie complexă cu suport finit pe Γ_2 ; evident, $k^\wedge(\gamma'') = a(\gamma'')$. Vom considera pe $k^\wedge$ ca funcţie pe Γ, luînd prin definiţie

$$k^\wedge(\gamma) = k^\wedge(\gamma' + \gamma'') = a(\gamma''),\ \gamma \in \Gamma.$$

Desigur, $k^\wedge$ nu mai este neapărat o transformată Fourier pe Γ. Însă punînd

$$\varphi(z) = \varphi(x + y) = \sum_{\gamma'' \in Y} a(\gamma'')\,(x, \alpha(\gamma''))\,(y, \gamma''),$$

φ este un polinom trigonometric pe G (vezi § 3) şi se verifică uşor, ţinînd seama de relaţiile de ortogonalitate că transformata Fourier a funcţiei φ este $\chi k^\wedge$.

Pe de altă parte, după observaţia de la început,

$$\varphi(x + y) = \sum_{\gamma'' \in \Gamma_2} a(\gamma'')(y, \gamma'')\mu^\wedge_{-x}(\gamma'') =$$

$$= \sum_{\gamma'' \in \Gamma_2} a(\gamma'')\,(y, \gamma'') \int_{G_2} (-t, \gamma'')\,\mathrm{d}\mu_{-x}(t) =$$

$$= \int_{G_2} \Big(\sum_{\gamma'' \in \Gamma_2} a(\gamma'')\,(y - t, \gamma'')\Big)\,\mathrm{d}\mu_{-x}(t) = \int_{G_2} k(y - t)\,\mathrm{d}\mu_{-x}(t).$$

Prin urmare

$$\int_{G_2} |\varphi(x+y)|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{G_2} \left(\int_{G_2} |k(y - t)|\,\mathrm{d}\,|\mu_{-x}(t)\right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{G_2} \left(\int_{G_2} |k(y - t)|\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\,|\mu_{-x}|\,(t) = \|k\|_1 \cdot \|\mu_{-x}\| \leqslant \|k\|_1 \|\psi\|.$$

Integrînd după x obţinem

$$\|\varphi_1\| \leqslant \|k\|_1 \|\psi\|. \tag{2}$$

Fie acum $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, $c_1, \ldots, c_n$ numere complexe şi $\varepsilon > 0$. Conform **8.7** există k de forma (1) astfel încît $\|k\|_1 \leqslant 1 + \varepsilon$ şi $k^\wedge(\gamma_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Punînd $P(x) = \sum_1^n c_i(x, \gamma_i)$, avem :

$\left| \sum_1^n c_i\,\chi(\gamma_i) \right| = \left| \sum_1^n c_i\,\chi(\gamma_i) k^\wedge(\gamma_i) \right| = \left| \sum_1^n c_i \varphi^\wedge(\gamma_i) \right| \leqslant$ (după implicaţia (i) $\Rightarrow$ (ii) din **7.7.**) $\leqslant \|\varphi\|_1 \cdot \|P\|_\infty \leqslant$ (după (2)) $\leqslant (1 + \varepsilon)\,\|\psi\|\,\|P\|_\infty$; $\varepsilon > 0$ fiind arbitrar,

$$\left| \sum_1^n c_i\,\chi(\gamma_i) \right| \leqslant \|\psi\| \cdot \|P\|_\infty,$$

deci, conform implicaţiei (ii) = (i) din **7.7**, $\chi \in \mathscr{B}(\Gamma)$ şi $\|\chi\| \leqslant \|\psi\|$.

13.13. Definiție. Fie G un grup abelian, H_1, H_2 subgrupuri ale lui G şi E_1, E_2 clase, respectiv ale lui H_1, H_2. Vom numi *indicele* lui E_1 în E_2 numărul elementelor lui $H_2/H_1 \cap H_2$ şi îl notăm $[E_2 : E_1]$.

13.14. Lemă. *Un grup abelian nu este o reuniune finită de clase de indice infinit.*

Fie $E_1, \ldots, E_n$ clase de indice infinit într-un grup abelian discret G şi Γ dualul compact al lui G. Conform **12.3** funcția caracteristică a lui E_i este transformata Fourier — Stieltjes a unei măsuri μ_i pe Γ, care este produsul măsurii Haar a unui subgrup compact infinit al lui Γ cu un caracter pe Γ; este evident că o astfel de măsură este continuă. Deoarece funcția caracteristică a lui $E = \bigcup\limits_{1}^{n} E_i$ este transformata Fourier—Stieltjes a măsurii $\mu = \mu_1 \vee \ldots \vee \mu_n$, iar μ este continuă, dacă am avea $E = G$, $\mu = \delta_0$ ar trebui să fie continuă, absurd. Prin urmare $E \neq \Gamma$.

13.15. Lemă. Fie *G un grup abelian, $\mathcal{C}$ un clan de părți ale lui G, invariant la translații, și E o parte a lui G, aparținînd atît lui $\mathcal{C}$ cît și clanului claselor din G. Atunci E aparține clanului generat de clasele din $\mathcal{C}$.*

Vom demonstra lema sub următoarea formă echivalentă :

Dacă K_i sînt subgrupuri ale lui G, K_{ij} clase ale lui K_i şi f o funcție $\mathcal{C}$-măsurabilă pe G de forma

$$f = \sum_{i,j} c_{ij}\, \chi_{K_{ij}} \text{(sumă finită !)}, \tag{1}$$

atunci f are o reprezentare de forma (1) cu $K_i \in \mathcal{C}$.

Evident, putem presupune că K_i sînt distincte şi că pentru orice i_1, i_2, $[K_{i_2} : K_{i_1}]$ este 1 sau ∞. Vom demonstra prin inducție după numărul subgrupurilor K_i că fiecare

$$f_i = \sum_j c_{ij}\chi_{K_{ij}}$$

are o reprezentare de forma

$$f_i = \sum_k c_k \chi_{H_k} \quad \text{(sumă finită !)} \tag{2}$$

unde H_k sînt clase ale unui subgrup $H \in \mathcal{C}$ al lui G care conține pe K_i .

Pentru a demonstra afirmația noastră în cazul unui singur subgrup K_i, este suficient să considerăm numai cazul cînd $f = \sum\limits_{i=1}^{s} \chi_{a_i+K}$ şi clasele $a_i + K$ sînt distincte. Mărind eventual pe K, putem să presupunem că

$$K = \{y\,;\ y \in G,\ f(x+y) = f(x) \text{ pentru orice } x \in G\}.$$

Punînd $a = a_1 - a_2$, rezultă $a \notin K$, deci $f(x-a) - f(x) \not\equiv 0$. Pe de altă parte

$$f(x-a) - f(x) = \sum_{i=1}^{s} \chi_{a+a_i+K}(x) - \sum_{i=1}^{s} \chi_{a_i+K}(x) =$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant S \\ i \neq 2}} \chi_{a+a_i+K}(x) - \sum_{i=2}^{S} \chi_{a_i+K}(x),$$

deci există $I \subset [1, s]$ (segment în mulţimea numerelor întregi), $I \neq \emptyset$, $1 \notin I$ astfel încît

$$\mathscr{C} \ni \{x ; f \cdot (x - a) - f(x) = -1\} = \bigcup_{i \in I} (a_i + K).$$

Prin urmare $\sum_{i \in I} \chi_{a_i + K}$, deci şi $\sum_{i \in [1, s] \setminus I} \chi_{a_i + K}$ sînt $\mathscr{C}$-măsurabile, şi prin inducţie după s deducem valabilitatea afirmaţiei noastre.

Presupunem acum că am demonstrat lema în cazul a $n - 1$ subgrupuri K_i şi în expresia lui f apar clase a n subgrupuri. Ţinînd cont de precizarea de la început relativ la indici, putem presupune că $[K_1 : K_2] = \infty$. După lema 13.14, K_1 nu e inclus într-o reuniune finită de clase ale lui K_2, deci există $a_1, a_2 \in K_1$, astfel încît $a_1 \notin \bigcup_{j,k} (K_{2j} - K_{2k})$ şi $a_2 \notin \bigcup_{j,k} (K_{2j} - K_{2k}) \bigcup_{k,l} [(a_1 + K_{2k}) - K_{2l}]$. Astfel putem considera pe K_{2j}, $a_1 + K_{2k}$, $a_2 + K_{2l}$ două cîte două disjuncte. În expresiile funcţiilor $f(x - a_1) - f(x)$ şi $f(x - a_2) - f(x)$ nu apar clase ale lui K_1, deci după ipoteza de inducţie, $f_2(x - a_1) - f_2(x)$ şi $f_2(x - a_2) - f_2(x)$ sînt de forma (2) în care apar clase respectiv ale subgrupurilor $H_1, H_2 \in \mathscr{C}$ care conţin pe K_2. Atunci $H = H_1 \cap H_2 \in \mathscr{C}$, conţine pe K_2 şi se vede uşor că $\{x ; f_2(x) \neq 0\}$ este o reuniune finită de clase ale lui H. Deoarece pe o clasă din această reuniune $f_2(x - a_1) - f_2(x) = -f_2(x)$ şi translaţiile cu $y \in H$ lasă invariantă pe $f_2(x - a_1) - f_2(x)$, rezultă că şi f_2 este invariantă la translaţiile cu elemente din H, adică este constantă pe clasele lui H. Prin urmare

$$f_2 = \sum_k c_k \chi_{H_k},$$

unde H_k sînt clase ale lui H. Aplicînd acum ipoteza de inducţie lui $f - f_2$, deducem că lema este adevărată şi pentru f.

COROLAR. *Fie G un grup topologic şi $E \subset G$ o mulţime boreliană din clanul claselor (algebrice). Atunci E aparţine clanului claselor boreliene*

13.16. Demonstraţia primei părţi a teoremei 13.4 (prima etapă). Arătăm întîi că Y este deschisă şi α continuă. Fie $\gamma_0 \in Y$ şi V o vecinătate a lui $\alpha(\gamma_0)$. Conform **8.2** există $f^\wedge \in A(\Gamma_1)$ astfel încît $f^\wedge(\alpha(\gamma_0)) \neq 0$ şi supp $f^\wedge \subset V$. Deoarece $f^\wedge \circ \alpha = \psi^\wedge f^\wedge \in \mathscr{B}(\Gamma_2)$ este continuă, mulţimea $U = \{\gamma \in \Gamma_2 ; (f^\wedge \circ \alpha)(\gamma) \neq 0\}$ este deschisă. Cum $\gamma_0 \in U$ şi după definiţia lui Y, $U \subset Y$, rezultă că Y este deschisă. Pe de altă parte $\alpha(U) \subset V$, deci α este continuă.

Astfel graficul E al lui α este închis în $\Gamma_1 + Y$, şi cum $\Gamma_1 + Y$ este deschisă în $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, rezultă că E este intersecţia unei mulţimi deschise şi a uneia închisă din $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, deci este boreliană. Pe de altă parte, după lemele **13.10** şi **13.12**, E aparţine clanului claselor (algebrice) din $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, deci după corolarul din **13.15** *E aparţine clanului claselor boreliene din $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$.*

13.17. LEMĂ. *Fie Γ_1, Γ_2, l.c.a.-grupuri, $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, $Y \subset \Gamma_2$, $\alpha : Y \to \Gamma_1$ o aplicaţie continuă şi E graficul lui α în Γ. Dacă E aparţine clanului claselor boreliene ale lui Γ, atunci Y aparţine clanului cla-*

selor boreliene ale lui Γ_2 și, înlocuind în definițiile **13.2** *și* **13.3** *expresia „clasă deschisă" cu expresia „clasă boreliană", α este afină pe porțiuni.*

Deoarece E aparține clanului claselor boreliene ale lui Γ, ea este o reuniune finită de mulțimi două cîte două disjuncte de forma

$$(1)\qquad E_i = L_i \cap \bigcap_j M'_{ij} \text{ (intersecție finită!)},$$

unde L_i, M_{ij} sînt clase boreliene. Se vede ușor că putem presupune că pentru orice j, $M_{ij} \subset L_i$ și $[L_i : M_{ij}] = \infty$.

Arătăm că fiecare L_i este grafic. Într-adevăr, deoarece E este grafic, E_i sînt grafice. Putem presupune fără a restrînge generalitatea că L_i este un subgrup. Dacă subgrupul L_i nu ar fi grafic, ar exista $\gamma_0 \neq 0$ în Γ_1 astfel încît $\gamma_0 \in L_i$; fie atunci $\gamma_1 + \gamma_2 \in L_i$ $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$ oarecare; sînt două posibilități:

$$\text{(i)}\qquad \gamma_1 + \gamma_2 \notin E_i$$

$$\text{(ii)}\qquad \gamma_1 + \gamma_2 \in E_i\,.$$

În cazul (i) rezultă $\gamma_1 + \gamma_2 \in \bigcup\limits_j M_{ij}$; în cazul (ii), deoarece E_i este grafic, rezultă $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \notin E_i$, deci $\gamma_1 + \gamma_2 \in \bigcup\limits_j (M_{ij} - \gamma_0)$. În ambele cazuri $\gamma_1 + \gamma_2 \in \bigcup\limits_j M_{ij} \cup \bigcup\limits_k (M_{ik} - \gamma_0)$, deci

$$L_i \subset \bigcup_j M_{ij} \cup \bigcup_k (M_{ik} - \gamma_0),$$

ceea ce contrazice lema **13.14**. Astfel L_i este grafic.

Fie Π_2 homomorfismul $\gamma_1 + \gamma_2 \to \gamma_2$ al lui Γ pe Γ_2; Π_2 este injectiv pe orice grafic și evident $Y = \Pi_2(E)$.

Punem $K_i = \Pi_2(L_i)$, $N_{ij} = \Pi_2(M_{ij})$, $S_i = \Pi_2(E_i)$, și notînd prin Π_1 homomorfismul $\gamma_1 + \gamma_2 \to \gamma_1$ al lui Γ în Γ_1, definim $\alpha_i = \Pi_1 \circ (\Pi_{2/L_i})^{-1}$; K_i, N_{ij} sînt clase (algebrice) în Γ_2, pentru orice j rezultă $N_{ij} \subset K_i$, $[K_i : N_{ij}] = \infty$ și

$$(2)\qquad S_i = K_i \cap \bigcap_j N'_{ij}\cdot;$$

S_i sînt două cîte două disjuncte, $Y = \bigcup\limits_i S_i$, α_i sînt alegebric afine pe K_i și $\alpha|_{S_i} = \alpha_i|_{S_i}$. Astfel rămîne să arătăm că α_i sînt continue și K_i, N_{ij} sînt clase boreliene.

Fixăm un i și notăm prin N_j subgrupul corespunzător clasei N_{ij}. Dacă numărul claselor N_{ij} este r, considerăm $r+1$ elemente $a_1, \ldots, a_{r+1}$ din S_i astfel încît dacă $m \neq n$, a_m și a_n aparțin unor clase distincte modulo N_j, oricare ar fi j. Acest lucru este posibil, deoarece în caz contrar $S_i = K_i \setminus \bigcup\limits_j N_{ij}$ ar fi inclusă într-o reuniune finită de clase ale lui N_j, $j = 1, \ldots, r$, deci K_i ar fi inclusă în reuniunea acestei reuniuni cu $\bigcup\limits_j N_{ij}$, ceea ce contrazice lema **13.14**. Fie $x, y \in K_i$. Dacă $a_n + x - y \notin S_i = K_i \setminus \bigcup\limits_j N_{ij}$, cum $a_n + x - y \in K_i$, avem $a_n + x - y \in \bigcup\limits_j N_{ij}$, $a_n \in \bigcup\limits_j (y - x + N_{ij})$.

Astfel dacă pentru orice n am avea $a_n + x - y \notin S_i$, atunci toate elementele a_n ar fi incluse în $\bigcup_j (y - x + N_{ij})$, deci ar exista $m \neq n$ şi j pentru care a_m şi a_n ar aparţine unei aceleiaşi clase modulo N_j, ceea ce contrazice definiţia elementelor a_n. Prin urmare pentru orice $x, y \in K_i$ există $n(x, y)$, $1 \leqslant n(x,y) \leqslant r + 1$, astfel încît $a_{n(x,y)} + x - y \in S_i$. Fie acum V o vecinătate a originii în Γ_1. Deoarece α este continuă, există o vecinătate U a originii în Γ_2 astfel încît pentru orice $n = 1, \ldots, r + 1$,

$$a \in S_i,\ a - a_n \in U \Rightarrow \alpha(a) - \alpha(a_n) \in V.$$

Prin urmare

$$\begin{gathered} x, y \in K_i,\ \ x - y \in U \Rightarrow \\ \Rightarrow a_{n(x,y)} + x - y \in S_i,\ (a_{n(x,y)} + x - y) - a_{n(x,y)} \in U \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha(a_{n(x,y)} + x - y) - \alpha(a_{n(x,y)}) = \\ = \alpha_i(a_{n(x,y)} + x - y) - \alpha_i(a_{n(x,y)}) = \alpha_i(x) - \alpha_i(y) \in V, \end{gathered}$$

deci α_i este uniform continuă.

α_i fiind uniform continuă, o putem prelungi prin continuitate pînă la o aplicaţie continuă $\overline{\alpha}_i : \overline{K}_i \to \Gamma_1$ (vezi **13.20**). Din continuitatea lui $\overline{\alpha}_i$ rezultă că, notînd graficul său prin F_i, $\Pi_2 | F_i$ este un homeomorfism al lui F_i pe $\overline{K}_i$. Astfel dacă $B \subset F_i$ este boreliană în $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, ea este boreliană în F_i, deci $\Pi_2(B)$ este boreliană în $\overline{K}_i$; cum $\overline{K}_i$ este închisă, $\Pi_2(B)$ este boreliană în Γ_2. În particular, L_i, M_{ij} fiind închise în F_i, $K_i = \Pi_2(L_i)$, $N_{ij} = \Pi_2(M_{ij})$ sînt boreliene în Γ_2.

13.18. Demonstraţia primei părţi a teoremei 13.4 (a doua etapă). Din rezultatele de la **13.16** şi din lema **13.17** rezultă că: Y este deschisă şi aparţine clanului claselor boreliene ale lui Γ_2; în plus, înlocuind în definiţiile **13.2** şi **13.3** expresia „clasă deschisă" cu expresia „clasă boreliană", α este afină pe porţiuni.

13.19. Lemă. *Fie G un* l.c.a.- *grup. Dacă $Y \subset G$ este deschisă şi închisă şi este reuniunea unui număr finit de mulţimi S_i din clanul claselor boreliene ale lui G, atunci Y este reuniunea acelor $\overline{S}_i$ care aparţin clanului claselor deschise ale lui G.*

Fără a restrînge generalitatea, putem să presupunem că $S_i = K_i \cap \bigcap_{j=1}^{r} N'_{ij}$, unde K_i, N_{ij} sînt clase boreliene. Fie n numărul mulţimilor S_i. Presupunem că pentru $i = 1, \ldots, m$, K_i sînt deschise, iar pentru $i = m + 1, \ldots, n$, nu. Dacă am avea $Y \neq \bigcup_{i=1}^{m} \overline{S}_i$, atunci, deoarece Y este închisă, ar rezulta $\bigcup_{i=1}^{m} \overline{S}_i \subset Y$ şi $Y \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \overline{S}_i$ ar fi o mulţime deschisă nevidă.

Deoarece

$$Y \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \overline{S}_i = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \overline{S}_i \subset \bigcup_{i=m+1}^{n} S_i \subset \bigcup_{i=m+1}^{n} K_i,$$

o clasă K_i, $m + 1 \leqslant i \leqslant n$, ar conține o mulțime de măsură Haar > 0, ceea ce contrazice lema **1.5**. Astfel $Y = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{S}_i$.

Fixăm acum un i, $1 \leqslant i \leqslant m$, și presupunem că pentru $j = 1, \ldots, s$, N_{ij} sînt deschise, iar pentru $j = s + 1, \ldots, r$, nu. Dacă $\overline{S}_i$ nu ar coincide cu $K_i \cap \bigcap_{j=1}^{s} N_{ij} = K_i \setminus \bigcup_{j=1}^{s} N_{ij}$, cum aceasta este deschisă, $\left(K_i \setminus \bigcup_{j=1}^{s} N_{ij}\right) \setminus \overline{S}_i$ ar fi o mulțime deschisă nevidă. Însă această mulțime este inclusă în

$$\left(K_i \setminus \bigcup_{j=1}^{s} N_{ij}\right) \setminus S_i = \left(K_i \setminus \bigcup_{j=1}^{s} N_{ij}\right) \setminus \left(K_i \setminus \bigcup_{j=1}^{r} N_{ij}\right) \subset \bigcup_{i=s+1}^{r} N_{ij}$$

deci o clasă N_{ij}, $s + 1 \leqslant j \leqslant r$, ar conține o mulțime de măsură Haar > 0, ceea ce contrazice lema **1.5**. Prin urmare $\overline{S}_i = K_i \cap \bigcap_{j=1}^{S} N'_{ij}$ aparține clanului claselor deschise ale lui G.

13.20 LEMĂ. *Fie Γ_1 și Γ_2 două l.c.a-grupuri. Dacă E este o clasă în Γ_2 iar α este o aplicație afină a lui E în Γ_1, atunci α poate fi extinsă la o aplicație afină a închiderii $\overline{E}$ a lui E.*

Se verifică ușor că α este uniform continuă. Vom arăta acum că α duce mulțimile $A \subset E$ relativ compacte în mulțimi relativ compacte din Γ_1; pentru aceasta fie W o vecinătate compactă a originii în Γ_1; deoarece α este uniform continuă, există V vecinătate deschisă a originii în Γ_2 așa ca

$$\alpha((\gamma + V) \cap E) \subset \alpha(\gamma) + W \quad \text{pentru orice } \gamma \in E.$$

Cum $\overline{A} \subset A + V$ și cum $\overline{A}$ este compactă există $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in A$ așa ca

$$\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\gamma_i + V)$$

și deci

$$\alpha(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha(\gamma_i) + W)$$

Prin urmare $\overline{\alpha(A)}$ este compactă.

Fie $\mathcal{N}$ sistemul fundamental al vecinătăților compacte ale originii în Γ_2.

Cu aceste pregătiri să trecem la construcția extensiei. Fie $\gamma_0 \in \overline{E}$ și fie $F_N = \overline{\alpha(E \cap N)}$ pentru $N \in \gamma_0 + \mathcal{N}$. Conform celor de mai sus mulțimile F_N sînt compacte; în plus $\bigcap F_N \neq \Phi$; deoarece, în caz contrar, rezultă $\bigcup F'_N = \Gamma_1$ și cum $\Gamma_1 = F_{N_0} \cup F'_{N_0}$ cu N_0 fixat, rezultă $\bigcup_{N \neq N_0} F'_N \supset F_{N_0}$; cum F_{N_0} este compact, rezultă că o reuniune finită de F'_N acoperă pe F_{N_0}, deci o reuniune finită de F'_N acoperă pe Γ_1, deci o intersecție finită de F_N este vidă ceea ce este contradictoriu. Mai mult, vom arăta acum că $\bigcap F_N$ se reduce la un singur punct; într-adevăr, fie $x_1, x_2 \in \bigcap F_N$, W o vecinătate arbitrară a originii în Γ_1 iar U o vecinătate a originii în Γ_1 așa ca $U - U + U \subset W$; cum $x_1, x_2 \in \alpha\overline{(E \cap N)}$ rezultă că există

$y_N^1, y_N^2 \in \alpha(E \cap N)$ așa ca $x_1 - y_N^1, x_2 - y_N^2 \in U$ și deci există $z_N^1, z_N^2 \in E \cap N$ așa ca $x_1 - \alpha(z_N^1), x_2 - \alpha(z_N^2) \in U$; cum α este uniform continuă, lui U îi corespunde o vecinătate a originii V în Γ_2 cu proprietatea că dacă $u_1, u_2 \in E$ și $u_1 - u_2 \in V$, atunci $\alpha(u_1) - \alpha(u_2) \in U$; apoi găsim un N_0 așa ca $N_0 - N_0 \subset V$ și obținem că $\alpha(z_{N_0}^1) - \alpha(z_{N_0}^2) \in U$; ca urmare rezultă că $x_1 - x_2 \in U - U + U \subset W$ și cum W a fost arbitrară, obținem $x_1 = x_2$.

Așadar, pentru $\gamma_0 \in \overline{E}$ este corect să definim $\overline{\alpha}(\gamma_0) = \bigcap\limits_{N \in \gamma_0 + \mathcal{N}} F_N$. Evident, pentru $\gamma \in E$ avem $\overline{\alpha}(\gamma) = \alpha(\gamma)$. Vom mai arăta că $\overline{\alpha}$ este uniform continuă de unde rezultă implicit că $\overline{\alpha}$ este afină datorită continuității operațiilor grupale.

Fie W o vecinătate a originii în Γ_1, U vecinătate a originii în Γ_1 așa ca $U - U + U \subset W$, V vecinătate a originii în Γ_2 corespunzătoare lui U prin uniform continuitatea lui α pe E și N vecinătate compactă a originii în Γ_2 așa ca $N - N + N \subset V$. Afirmăm că dacă $\gamma', \gamma'' \in \overline{E}$ și $\gamma' - \gamma'' \in N$, atunci $\overline{\alpha}(\gamma') - \overline{\alpha}(\gamma'') \in W$. Într-adevăr, prin definiție :

$$\overline{\alpha}(\gamma') - \overline{\alpha}(\gamma'') \in \overline{\alpha(E \cap (\gamma' + N))} - \alpha(E \cap (\gamma'' + N)) ;$$

prin urmare există $b' \in \overline{\alpha(E \cap (\gamma' + N))}$ și $b'' \in \overline{\alpha(E \cap (\gamma'' + N))}$ așa ca :

$$\overline{\alpha}(\gamma') - \overline{\alpha}(\gamma'') = b' - b''$$

apoi există $n', n'' \in N$ așa ca $\gamma' + n', \gamma'' + n'' \in E$ și să avem :

$$b' - \alpha(\gamma' + n') \in U \Rightarrow b' = \alpha(\gamma' + n') + u' ; \quad u' \in U$$

$$b'' - \alpha(\gamma'' + n'') \in U \Rightarrow b'' = \alpha(\gamma'' + n'') + u'' ; u'' \in U ;$$

prin urmare

$$\overline{\alpha}(\gamma') - \overline{\alpha}(\gamma'') = u' - u'' + (\alpha(\gamma' + n') - \alpha(\gamma'' + n'')) ;$$

deoarece

$$(\gamma' + n') - (\gamma'' + n'') = (\gamma' - \gamma'') - n'' + n' \in N - N + N \subset V$$

rezultă

$$\alpha(\gamma' + n') - \alpha(\gamma'' + n'') \in U ;$$

așadar

$$\overline{\alpha}(\gamma') - \overline{\alpha}(\gamma'') \in U - U + U \subset W \quad \text{q.e.d.}$$

13.21. Demonstrația primei părți a teoremei 13.4. (Ultima etapă) Conform **13.18.**, $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$, unde mulțimile S_i sînt disjuncte și de forma $S_i = K_i \cap \bigcap\limits_{j=1} N'_{ij}$, K_i și N_{ij} fiind clase boreliene, iar α coincide pe fiecare K_i cu o aplicaţie afină α_i. Conform **13.20** putem considera că α_i sînt extinse la $\overline{K}_i$.

Arătăm că *Y este închis*. Fie $\gamma_0 \in \overline{Y}$; atunci $\gamma_0 \in \bar{S}_i$ şi $\alpha_i(\gamma_0) \in \Gamma_1$; alegem $f \in \mathcal{L}^1(G_1)$ cu $f^\wedge(\alpha_i(\gamma_0)) \neq 0$; cum pe S_i, $(f^\wedge \circ \alpha)(\gamma) = f^\wedge(\alpha_i(\gamma))$ şi atît $f^\wedge \circ \alpha$ cît şi α_i sînt continue, rezultă, la limită, că $(f^\wedge \circ \alpha)(\gamma_0) = f^\wedge(\alpha_i(\gamma_0)) \neq 0$, deci $\gamma_0 \in \Gamma$.

Acum, aplicînd lema **13.19** şi aplicînd o ,,disjunctare'', binecunoscută din teoria măsurii, mulţimilor S_i, obţinem că *Y aparţine clanului claselor deschise ale lui* Γ_2 *şi* α *este afină pe porţiuni*. Cu aceasta şi prima parte a teoremei **13.4** este complet demonstrată.

§ 14. HOMOMORFISME DE ALGEBRE GRUPALE (COMPLEMENTE ŞI CAZURI SPECIALE)*)

14.1. În acest paragraf vom dezvolta consecinţele teoremei **13.4**. Vom considera problema existenţei şi unicităţii extensiei unui homomorfism $\mathcal{L}^1(G_1) \to \mathcal{M}(G_2)$ la un homomorfism $\mathcal{M}(G_1) \to \mathcal{M}(G_2)$. Ne vom ocupa de condiţiile în care un homomorfism $\mathcal{L}^1(G_1) \to \mathcal{M}(G_2)$ aplică pe $\mathcal{L}^1(G_1)$ în $\mathcal{L}^1(G_2)$. Apoi, din evaluările normelor măsurilor idempotente (**12.19**), vom deduce evaluări pentru normele homomorfismelor. În continuare vom studia cazul izomorfismelor, obţinînd o teoremă de prelungire, o teoremă de tip Banach — Stone şi arătînd că pentru Γ infinit, $\mathcal{A}(\Gamma) \neq \mathcal{C}_0(\Gamma)$. După un important exemplu de homomorfism urmează studiul homomorfismelor pozitive şi caracterizarea izomorfismelor pozitive. Vom mai studia aplicaţiile de tipul $f^\wedge \to f^\wedge \circ \alpha$ în norma $\mathcal{L}^\infty$. Paragraful se încheie cu cîteva exemple de aplicaţii afine pe porţiuni şi cu discuţia completă a cazurilor $G_1 = G_2 = T$, $G_1 = G_2 = Z$.

Aplicaţia α şi mulţimea Y vor fi asociate unui homomorfism Ψ : $\mathcal{L}^1(G_1)\, \mathcal{M}(G_2)$ ca la **13.1**.

14.2. TEOREMĂ. *Fie* $\Psi : \mathcal{L}^1(G_1) \to \mathcal{M}(G_2)$ *un homomorfism.*

(a) Ψ *se extinde cu păstrarea normei pînă la un homomorfism* $\mathcal{M}(G_1) \to \mathcal{M}(G_2)$.

(b) *Presupunînd că* G_1 *nu este discret,* Ψ *se extinde unic pînă la un homomorfism* $\mathcal{M}(G_1) \to \mathcal{M}(G_2)$ *dacă şi numai dacă* $Y = \Gamma_2$.

Demonstraţia lui (a) este analogă demonstraţiei lemei **13.10**. Fie $\mu \in \mathcal{M}(G_1)$ şi $\varphi = \mu^\wedge \circ \alpha$. Arătăm că $\varphi \in \mathcal{B}(\Gamma_2)$ şi $\|\varphi\| \leqslant \|\Psi\|\,\|\mu\|$. Deoarece Y este deschisă şi închisă, iar α continuă, φ este continuă. Fie $P(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(y, \gamma_i)$ un polinom trigonometric pe G_2 şi $\varepsilon > 0$. Conform **8.7** există $k \in \mathcal{L}^1(G_1)$ astfel încît $\|k\|_1 \leqslant 1 + \varepsilon$ şi $k^\wedge(\alpha(\gamma_i)) = 1$ pentru $\gamma_i \in Y$. Punînd $f = k_* \mu$, $\Psi^\wedge f^\wedge = (k^\wedge \circ \alpha) \cdot \varphi$, deci

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(\gamma_i) = \sum_{\gamma_i \in Y} c_i k^\wedge(\alpha(\gamma_i)) \varphi(\gamma_i) = \sum_{\gamma_i \in Y} c_i (\Psi^\wedge f^\wedge)(\gamma_i).$$

---

*) În acest paragraf homomorfismele vor fi notate prin Ψ în loc de ψ

După implicaţia (i) ⇒ (ii) din **7.7**

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i\,\varphi(\gamma_i)\right| \leqslant \|\Psi f\|\;\|P\|_\infty \leqslant \|\Psi\|\;\|f\|_1\;\|P\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\,\|\Psi\|\;\|\mu\|\;\|P\|_\infty$$

şi cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i\,\varphi(\gamma_i)\right| \leqslant \|\Psi\|\;\|\mu\|\;\|P\|_\infty$$

Acum , aplicînd implicaţia (ii) ⇒ (i) din **7.7**, rezultă că $\varphi\in\mathcal{B}(\Gamma_2)$ şi $\|\varphi\|\leqslant\|\Psi\|\cdot\|\mu\|$, deci (a) este demonstrat.

Pentru a demonstra pe (*b*), presupunem că Ψ este extins pe $\mathfrak{M}(G_1)$ şi considerăm un $f\in\mathcal{L}^1(G_1)$ şi un $\mu\in\mathfrak{M}(G_1)$. Avem

$$(f^\wedge\circ\alpha)\,(\Psi^\wedge\mu^\wedge) = (\Psi^\wedge f^\wedge)\,(\Psi^\wedge\mu^\wedge) = \Psi^\wedge(f^\wedge\,\mu^\wedge) = (\text{deoarece}$$

$$f^\wedge\,\mu^\wedge\in\mathcal{A}(\Gamma_1)) = (f^\wedge\mu^\wedge)\circ\alpha = (f^\wedge\circ\alpha)\,(\mu^\wedge\circ\alpha),$$

deci conform **8.2**, pentru $\gamma\in Y$, $(\Psi^\wedge\mu^\wedge)\,(\gamma) = \mu^\wedge(\alpha(\gamma))$. Astfel dacă $Y=\Gamma_2$, extensia este unic definită prin formula $(\Psi^\wedge\,\mu^\wedge)\,(\gamma) = \mu^\wedge\,(\alpha(\gamma))$. Presupunem acum că $Y\neq\Gamma_2$. Dacă h este un homomorfism complex al lui $\mathfrak{M}(G_1)$ care se anulează pe $\mathcal{L}^1(G_1)$, relaţia

$$(\Psi^\wedge\mu^\wedge)(\gamma) = \begin{cases} \mu^\wedge(\alpha(\gamma)) & \text{dacă } \gamma\in Y \\ h(\mu) & \text{dacă } \gamma\notin Y \end{cases}$$

defineşte o extensie a lui Ψ pe $\mathfrak{M}(G_1)$. Dacă G_1 nu este discret, $\mathcal{L}^1(G_1)$ este un ideal închis propriu al lui $\mathfrak{M}(G_1)$, deci există $h\not\equiv 0$ care se anulează pe $\mathcal{L}^1(G_1)$. Atunci acest h şi homomorfismul $\equiv 0$ definesc extensii distincte ale lui Ψ.

14.3. TEOREMĂ. *Homomorfismul* Ψ *al lui* $\mathcal{L}^1(G_1)$ *în* $\mathfrak{M}(G_2)$ *aplică pe* $\mathcal{L}^1(G_1)$ *în* $\mathcal{L}^1(G_2)$ *dacă şi numai dacă* $\alpha^{-1}(C)$ *este compact pentru fiecare mulţime compactă* $C\subset\Gamma_1$.

Dacă există $C\subset\Gamma_1$ compact astfel încît $\alpha^{-1}(C)$ să nu fie compact, atunci fie $f\in\mathcal{L}^1(G_1)$ aşa ca $f^\wedge=1$ pe C (conf. **8.2**). Atunci $\alpha^{-1}\,(C)\subset\subset\{\gamma\in Y\,;\ f^\wedge\,(\alpha\,(\gamma))=1\}$; într-adevăr, dacă $\gamma\in\alpha^{-1}\,(C)$, atunci $\alpha\,(\gamma)\in\in C$ şi deci $f^\wedge(\alpha\,(\gamma))=1$, iar $\alpha^{-1}(C)\subset Y$ deoarece α este definit numai pe Y. Prin urmare mulţimea $\{\gamma\in Y\,;\ f^\wedge\,(\alpha\,(\gamma))=1\}$ nu este compactă deoarece conţine mulţimea închisă şi necompactă $\alpha^{-1}\,(C)$; aşadar mulţimea $\{\gamma\in\Gamma_2\,;\ (\Psi f)^\wedge\ (\gamma)=1\}$. este necompactă ceea ce implică $\Psi f\notin\notin\mathcal{L}^1(G_2)$. Ultima afirmaţie rezultă din următoarea :

LEMĂ. *Dacă* $g^\wedge\in\mathcal{A}(\Gamma)$, *atunci mulţimea* $\{\gamma\in\Gamma\,;\ g^\wedge\,(\gamma)=1\}$ *este compactă.*

Demonstraţia ei este imediată, căci $\mathcal{A}(\Gamma)\subset\mathcal{C}_0\,(\Gamma)$.

Să demonstrăm acum că dacă $\alpha^{-1}(C)$ este compact pentru orice compact $C\subset\Gamma_1$, atunci pentru orice $f\in\mathcal{L}^1(G_1)$ avem $\Psi f\in\mathcal{L}^1(G_2)$. Întradevăr, conf. **8.5.**, există $f_n\in\mathcal{L}^1(G_1)$ aşa ca $f_n^\wedge$ să aibă suport compact şi ca $f_n\to f$ în $\mathcal{L}^1(G_1)$. Din ipoteză rezultă atunci că fiecare $f_n^\wedge\circ\alpha$ are suport compact, deci, conf. **5.9**, $\Psi\ f_n\in\mathcal{L}^1(G_2)$ pentru fiecare n. Deoarece Ψ

este continuu, rezulă că $\Psi f_n \to \Psi f$ în $\mathfrak{M}(G_2)$ și cum $\mathcal{L}^1(G_2)$ este închis în $\mathfrak{M}(G_2)$, rezultă $\Psi f \in \mathcal{L}^1(G_2)$, q.e.d.

14.4. NOTĂ. Să considerăm două l.c.a. - grupuri G_1 și G_2 cu dualele lor Γ_1 și Γ_2 și un homomorfism de algebre :

$$\Psi : \mathcal{L}^1(G_1) \longrightarrow \mathfrak{M}(G_2).$$

Acest homomorfism induce un homomorfism

$$\overline{\Psi} : \mathfrak{M}(\overline{G}_1) \longrightarrow \mathfrak{M}(\overline{G}_2).$$

Într-adevăr, dacă α și Y sînt asociate lui Ψ, atunci pentru $\mu \in \mathfrak{M}(\overline{G}_1)$ definim $\Psi\,\mu$ așa ca $(\Psi\,\mu)^\wedge = \mu^\wedge \circ \alpha$ (v. **13.10**).

Tot de la **13.10** reținem și evaluarea pentru norme :

$$\|\overline{\Psi}\| \leqslant \|\Psi\|.$$

În fapt avem chiar $\|\Psi\| = \|\Psi\|$, inegalitatea inversă fiind imediată.

14.5. Normele homomorfismelor

(1) Dacă $\|\Psi\| < 1$, atunci $\Psi = 0$ conf. **13.1.**

(2) Dacă $\|\Psi\| = 1$, atunci $\|\overline{\Psi}\| = 1$ deci, conf. **13.12**, $\|\chi\| = 1$, unde χ este funcția caracteristică a graficului lui α în $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$; de aici, conf. **12.9**, deducem că graficul lui α este o clasă deschisă în $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ deci Y este o clasă deschisă în Γ_2 iar α este afină pe Y. Reciproc, să presupunem că Y este o clasă deschisă iar α este afină; atunci, conf. **13.7**, $\|\mu^\wedge \circ \alpha\| \leqslant \|\mu\|$ pentru orice $\mu \in \mathfrak{M}(G_1)$ deci $\|\Psi\| = 1$.

(3) Dacă $\|\Psi\| > 1$, atunci $\|\overline{\Psi}\| > 1$ și, conf. **13.12**, $1 \leqslant \|\chi\| \leqslant \|\overline{\Psi}\|$ și $\|\chi\| > 1$ deci, conf. **12.19**, $\|\chi\| \geqslant \sqrt{5}/2$; prin urmare $\|\Psi\| \geqslant \sqrt{5}/2$.

14.6. În următoarele trei secțiuni ne ocupăm de *studiul izomorfismelor*. În această secțiune dăm cîteva rezultate pregătitoare care au și o importanță în sine.

(1) LEMĂ. *Dacă* Ψ *este un izomorfism al lui* $\mathfrak{M}(G_1)$ *pe* $\mathfrak{M}(G_2)$, *atunci* :

(i) α *este injectivă*;

(ii) $Y = \Gamma_2$;

(iii) $\overline{\alpha(\Gamma_2)} = \Gamma_1$.

După cum am văzut la **14.2**, dacă $\mu \in \mathfrak{M}(G_1)$ și $\sigma = \Psi\,\mu$, atunci :

(a) $\sigma^\wedge(\gamma) = \mu^\wedge(\alpha(\gamma))$ pentru $\gamma \in Y$. Să luăm acum $\gamma_1, \gamma_2 \in Y$ cu $\alpha(\gamma_1) = \alpha(\gamma_2)$; fie $\sigma \in \mathfrak{M}(G_2)$ și fie $\mu \in \mathfrak{M}(G_1)$ cu $\Psi\,\mu = \sigma$; deoarece relația (a) are loc și pentru γ_1 și pentru γ_2, rezultă $\sigma^\wedge(\gamma_1) = \sigma^\wedge(\gamma_2)$; cum σ a fost arbitrar, rezultă $\gamma_1 = \gamma_2$ deci α este injectivă. Dacă $\overline{\alpha(Y)} \neq \Gamma_1$, atunci, conf. **8.2**, există $f \in \mathcal{L}^1(G_1)$, $f \neq 0$, așa ca $f^\wedge = 0$ pe $\alpha(Y)$, dar atunci rezultă că $f^\wedge \circ \alpha = 0$ deci $\Psi f = 0$ ceea ce este contradictoriu căci Ψ este izomorfism. În sfîrșit, dacă $Y \neq \Gamma_2$, atunci, deoarece Y este închis (**13.21**) și conf. **8.2**, există $\sigma \in \mathfrak{M}(G_2)$, $\sigma \neq 0$ așa încît $\sigma^\wedge = 0$ pe Y; există $\mu \in \mathfrak{M}(G_1)$ așa ca $\sigma = \Psi\,\mu$; atunci, conf. (a), $\mu^\wedge = 0$ pe $\alpha(Y)$

şi deci $\mu^\wedge$ este identic nulă pe Γ_1 căci $\mu^\wedge$ este continuă iar $\overline{\alpha(Y)} = \Gamma_1$; de aici rezultă $\mu = 0$ ceea ce este contradictoriu.

(2) LEMĂ. *Dacă Ψ este un izomorfism al lui $\mathcal{L}^1(G_1)$ pe $\mathcal{L}^1(G_2)$, atunci*

(i) α *este injectivă*;

(ii) $Y = \Gamma_2$;

(iii) $\overline{\alpha(\Gamma_2)} = \Gamma_1$.

Demonstraţia se face la fel ca la (1).

(3). LEMĂ. *Dacă Ψ este un izomorfism al lui $\mathcal{L}^1(G_1)$ pe $\mathcal{L}^1(G_2)$, atunci α este un homomorfism afin pe porţiuni al lui Γ_2 pe Γ_1.*

Aşadar, $\Psi : \mathcal{L}^1(G_1) \longrightarrow \mathcal{L}^1(G_2)$ este un izomorfism „pe"; lui i se asociază o aplicaţie afină pe porţiuni α şi, conf. (2), avem:

$$\alpha : \Gamma_2 \to \Gamma_1$$

iar conf. **13.16** α este continuă. În plus:

(a) $$(\Psi^\wedge f^\wedge)(\gamma_2) = f^\wedge(\alpha(\gamma_2))\,;\ f \in \mathcal{L}^1(G_1),\ \gamma_2 \in \Gamma_2.$$

Considerăm acum izomorfismul invers $\Phi : \mathcal{L}^1(G_2) \longrightarrow \mathcal{L}^1(G_1)$; şi lui i se asociază o aplicaţie afină pe porţiuni şi continuă

$$\beta : \Gamma_2 \to \Gamma_1$$

aşa încît

(b) $$(\Phi^\wedge g^\wedge)(\gamma_1) = g^\wedge(\beta(\gamma_1))\,;\ g \in \mathcal{L}^1(G_2),\ \gamma_1 \in \Gamma_1.$$

Fie $f \in \mathcal{L}^1(G_1)$ arbitrar; cum $\Phi(\Psi f) = f$ şi cum:

$$(\Phi^\wedge(\Psi^\wedge f^\wedge))(\gamma_1) = f^\wedge(\alpha(\beta(\gamma_1))),\ \gamma_1 \in \Gamma_1,$$

rezultă

$$f^\wedge(\alpha(\beta(\gamma_1))) = f^\wedge(\gamma_1),\ \gamma_1 \in \Gamma_1.$$

Cum f a fost arbitrar, rezultă:

(c) $$\alpha(\beta(\gamma_1)) = \gamma_1,\ \gamma_1 \in \Gamma_1.$$

Analog obţinem:

(d) $$\beta(\alpha(\gamma_2)) = \gamma_2,\ \gamma_2 \in \Gamma_2.$$

Din cele de mai sus, lema rezultă în mod evident.

Reţinem *notaţiile* din această demonstraţie.

(4) LEMĂ. *Dacă Ψ este un izomorfism al lui $\mathcal{M}(G_1)$* pe *$\mathcal{M}(G_2)$, atunci α este un homeomorfism afin pe porţiuni al lui Γ_2 pe Γ_1.*

Evident, în enunţul lemei, α este aplicaţia asociată restricţiei lui Ψ la $\mathcal{L}^1(G_1)$. Demonstraţia este aceeaşi ca la lema (3) cu condiţia să arătăm că relaţiile (a) şi (b) au loc şi pentru măsuri. Şi, într-adevăr, deoarece $Y = \Gamma_2$, conf. (1), restricţia lui Ψ la $\mathcal{L}^1(G_1)$ are o extensie unică la $\mathcal{M}(G_1)$ (conf. **14.2**) şi deci Ψ coincide pe $\mathcal{M}(G_1)$ cu extensia canonică **14.2** a restricţiei sale la $\mathcal{L}^1(G_1)$, iar această extensie canonică satisface relaţiile (a) şi (b) de la (3).

(5). LEMĂ. *Inversul unui homeomorfism afin pe porțiuni între două l.c.a. grupuri este un homeomorfism afin pe porțiuni.*

Demonstrația acestui fapt este elementară.

14.7. TEOREMĂ. *Condiția necesară și suficientă ca* $\mathfrak{L}^1(G_1)$ *și* $\mathfrak{L}^1(G_2)$ *să fie izomorfe este existența unui homomorfism afin pe porțiuni al lui* Γ_2 *pe* Γ_1.

Necesitatea a fost demonstrată la **14.5(3)**. Suficiența rezultă din **13.8** și **14.5** (5); omitem detaliile.

COROLAR. *Următoarele afirmații sînt echivalente:*

(i) *există un izomorfism* $\Psi : \mathfrak{L}^1(G_1) \rightarrow \mathfrak{L}^1(G_2)$ *cu* $\|\Psi\| = 1$;

(ii) G_1 *și* G_2 *sînt izomorfe și homeomorfe.*

Implicația (i) $\Rightarrow$ (ii) rezultă din teorema de mai sus, din **14.4** și din **14.5** (1). Implicația (ii) $\rightarrow$ (i) este trivială.

14.8. TEOREMĂ. *Dacă* Ψ *este un izomorfism al lui* $\mathfrak{M}(G_1)$ *pe* $\mathfrak{M}(G_2)$, *atunci* Ψ *aplică* $\mathfrak{L}^1(G_1)$ *pe* $\mathfrak{L}^1(G_2)$. *Reciproc, orice izomorfism* $\mathfrak{L}^1(G_1)$ *pe* $\mathfrak{L}^1(G_2)$ *admite o extensie unică la un izomorfism al lui* $\mathfrak{M}(G_1)$ *pe* $\mathfrak{M}(G_2)$.

Conform **14.6** (4) rezultă că α este un homeomorfism afin pe porțiuni. Atunci **14.3** ne arată că Ψ aplică pe $\mathfrak{L}^1(G_1)$ în $\mathfrak{L}^1(G_2)$ iar **14.7** ne precizează că Ψ aplică pe $\mathfrak{L}^1(G_1)$ pe $\mathfrak{L}^1(G_2)$. Reciproc, deoarece $Y = \Gamma_2$, există o extensie unică a lui Ψ la un homomorfism al lui $\mathfrak{M}(G_1)$ în $\mathfrak{M}(G_2)$. Folosindu-ne de notațiile de la **14.5** (3) să arătăm că acest homomorfism este injectiv și surjectiv.

Dacă $\Psi\mu_1 = \Psi\mu_2$, atunci $\mu_1^\wedge \circ \alpha = \mu_2^\wedge \circ \alpha$ și cum α este surjectivă, rezultă $\mu_1^\wedge = \mu_2^\wedge$, deci $\mu_1 = \mu_2$.

Fie acum $\sigma \in M(G_2)$; atunci $\sigma^\wedge \circ \beta \in \mathfrak{B}(\Gamma_1)$ deci există $\mu \in \mathfrak{M}(G_1)$ așa ca $\mu^\wedge = \sigma^\wedge \circ \beta$; cum este evident că $\mu^\wedge \circ \alpha = \sigma^\wedge$, rezultă $\Psi \cdot \mu = \sigma$.

COROLAR. *Dacă* Ψ *este un automorfism al lui* $\mathfrak{M}(G)$, *atunci* $\Psi(\mathfrak{L}^1(G)) = \mathfrak{L}^1(G)$.

14.9. LEMĂ. *Dacă* Γ *este un l.c.a-grup infinit, există un l.c.a.-grup* Λ *și o aplicație continuă proprie* $\alpha : \Gamma \rightarrow \Lambda$ *care nu este afină pe porțiuni.*

După teorema principală de structură a l.c.a. - grupurilor Γ conține un subgrup deschis $\Gamma_0 \oplus R^n$, unde Γ_0 este compact. Dacă $n \neq 0$, lema rezultă imediat. Dacă $n = 0$, or Γ_0 este infinit — deci problema se reduce la cazul compact — or Γ_0 este finit, deci discret, de unde rezultă că Γ este discret. În primul caz se construiește o aplicație α continuă, iar în al doilea una biunivocă. Vom face construcția numai în primul caz, ea fiind în al doilea caz analoagă.

Fie $\mathfrak{p} = \{S_i\}$ o partiție finită a lui Γ în mulțimi din clanul claselor. Γ fiind compact și infinit, deci nediscret, un S_i conține elemente a_1, a_2, a_3 distincte astfel încît $a_1 + a_2 - a_3 \in S_i$. Există caractere $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$ pe Γ astfel încît $\gamma_{pq}(a_p) \neq \gamma_{pq}(a_q)$. Atunci $g = \gamma_{12} \times \gamma_{23} \times \gamma_{31}$ este homomorfism continuu $\Gamma \rightarrow T^3$ și $g(a_1)$, $g(a_2)$, $g(a_3)$ sînt distincte. Compunînd pe g cu o aplicație continuă convenabilă $T^3 \rightarrow T^3$, obținem o aplicație continuă $\alpha_{\mathfrak{p}} : \Gamma \rightarrow T^3$ pentru care $\alpha_{\mathfrak{P}}(a_1) + \alpha_{\mathfrak{P}}(a_2) - \alpha_{\mathfrak{P}}(a_3) \neq$ $\neq \alpha_{\mathfrak{p}}(a_1 + a_2 - a_3)$, deci punînd $\alpha = \underset{\mathfrak{P}}{\times} \alpha_{\mathfrak{P}}$, α este continuă și nu e afină pe porțiuni: în caz contrar ar exista o partiție $\mathfrak{P}_0 = \{S_i\}$ ca mai sus, astfel ca, în particular,

$$a_1,\ a_2,a_3,a_1+a_2-a_3\in S_i\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\alpha(a_1)+\alpha(a_2)-\alpha(a_3)=\alpha(a_1+a_2-a_3)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\alpha_{\mathfrak{Q}}(a_1)+\alpha_{\mathfrak{Q}}(a_2)-\alpha_{\mathfrak{Q}}(a_3)=\alpha_{\mathfrak{Q}}(a_1+a_2-a_3)$$

pentru orice $\mathfrak{Q}$, ceea ce pentru $\mathfrak{Q}=\mathfrak{Q}_0$ nu are loc totdeauna.

14.9. bis. TEOREMĂ. *Dacă* Γ *este un l.c.a.-grup infinit, atunci* $\mathcal{A}(\Gamma)\neq\mathcal{C}_0(\Gamma)$.

Fie Λ, α ca în lema **14.9.** Cum α nu e afină pe porţiuni, există $f^{\wedge}\in\mathcal{A}(\Lambda)$ astfel încît $f^{\wedge}\circ\alpha\notin\mathcal{B}(\Gamma)$, deci cu atît mai mult $f^{\wedge}\circ\alpha\notin\mathcal{A}(\Gamma)$. Pe de altă parte, α fiind continuă şi proprie, $f^{\wedge}\circ\alpha\in\mathcal{C}_0(\Gamma)$, deci $\mathcal{C}_0(\Gamma)\setminus\setminus\mathcal{A}(\Gamma)\neq\varnothing$.

14.10. Un exemplu. Să construim *izomorfismul* lui $\mathcal{L}^1(G_1)$ pe $L^1(G_2)$ *obţinut dintr-un homeomorfism afin* α al lui Γ_2 pe Γ_1; pentru aceasta observăm mai întîi că există un punct $\gamma_0\in\Gamma_2$ şi un izomorfism şi homeomorfism τ al lui Γ_2 pe Γ_1 aşa ca $\alpha(\gamma)=\tau(\gamma-\gamma_0)$; considerăm apoi morfismul dual (conf. § 9) β al lui τ; atunci $\beta: G_1\to G_2$, β este izomorfism şi homeomorfism şi

$$(x,\ \tau(\gamma)=(\beta(x),\gamma);\quad x\in G_1,\quad \gamma\in\Gamma_2. \tag{1}$$

Aplicaţia

$$L: f\to\int_{G_2} f(\beta^{-1}(y))\,\mathrm{d}y\,. \tag{2}$$

este o funcţională liniară şi pozitivă pe $\mathcal{C}_{00}(G_1)$; ea este şi invariantă la translaţii; într-adevăr, pentru $x\in G_1$ şi $z=\beta(x)$ avem:

$$Lf_x=\int_{G_2} f_x(\beta^{-1}(y))\,\mathrm{d}y=\int_{G_2} f(\beta^{-1}(y)-x)\,\mathrm{d}y=$$
$$=\int_{G_2} f(\beta^{-1}(y)-\beta^{-1}(z))\,\mathrm{d}y=$$
$$=\int_{G_2} f(\beta^{-1}(y-z)\,\mathrm{d}y=$$
$$=\int_{G_2} f(\beta^{-1}(y))\,\mathrm{d}y=Lf.$$

Prin urmare există o constantă $k=k(\beta)>0$ aşa încît:

$$k\int_{G_2} f(\beta^{-1}(y))\,\mathrm{d}y=\int_{G_1} f(x)\,\mathrm{d}x;\quad f\in L^1(G_1). \tag{3}$$

Pentru $f\in\mathcal{L}^1(G_1)$ transformata Fourier a funcţiei

4) $$k\cdot(y,\gamma_0)\cdot f(\beta^{-1}(y))$$

este :

$$(5)\qquad k\int_{G_2}(y,\gamma_0)\,f(\beta^{-1}(y))\,(-y,\gamma)\,\mathrm{d}y=\int_{G_1}f(x)\,(\beta(x),\gamma_0-\gamma)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{G_1}f(x)\,(x,\tau(\gamma_0-\gamma))\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{G_1}f(x)\,(-x,\alpha(\gamma))\,\mathrm{d}x=$$

$$=f^{\wedge}(\alpha,(\gamma)).$$

Prin urmare :

$$(6)\qquad (\Psi f)(y)=k\cdot(y,\gamma_0)\cdot f(\beta^{-1}(y))\,;\quad f\in\mathcal{L}^1(G_1)\; y\in G_2.$$

Mai notăm că acest Ψ este o izometrie :

$$(7)\qquad \|\Psi f\|_1=k\int_{G_2}|f(\beta^{-1}(y))|\,\mathrm{d}y=\int_{G_1}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\|f\|_1.$$

14.11. Din considerațiile de la **14.8.** și din demonstrația corolarului **14.6.** rezultă imediat :

TEOREMĂ. *Dacă* Ψ *este un izomorfism al lui* $\mathcal{L}^1(G_1)$ *pe* $\mathcal{L}^1(G_2)$ *cu* $\|\Psi\|=1$, *atunci*

(i) Ψ *este o izometrie* ;

(ii) *există o constantă* $k>0$, *un caracter* $\gamma_0\in\Gamma_2$ *și un izomorfism topologic* $\beta : G_1\to G_2$ *așa încît pentru orice* $f\in\mathcal{L}^1(G_1)$:

$$(\Psi f)(y)=k(y,\gamma_0)\cdot f(\beta^{-1}(y))\,;\quad y\in G_2.$$

14.12. TEOREMĂ. *Dacă* Ψ *este un izomorfism al lui* $\mathcal{L}^1(G_1)$ *pe* $\mathcal{L}^1(G_2)$ *iar* Γ_2 *este conex, atunci* :

(i) Ψ *este o izometrie* ;

(ii) *există o constantă* $k>0$, *un caracter* $\gamma_0\in\Gamma_2$ *și un izomorfism topologic* $\beta : G_1\to G_2$ *așa încît pentru orice* $f\in\mathcal{L}^1(G_1)$:

$$(\Psi f)(y)=k(y,\gamma_0)\cdot f(\beta^{-1}(y))\,;\quad y\in G_2.$$

Demonstrația rezultă imediat din **12.6, 13.4** și **14.10.**

14.13. DEFINIȚIE. Vom spune că un *homomorfism* :

$$\Psi : \mathcal{L}^1(G_1)\to\mathcal{M}(G_2)$$

este *pozitiv*, dacă $f\geqslant 0\Rightarrow\Psi f\geqslant 0$.

Vom spune că un *homomorfism* :

$$\Psi : \mathcal{M}(G_1)\to\mathcal{M}(G_2)$$

este *pozitiv*, dacă $\mu\geqslant 0\Rightarrow\Psi\mu\geqslant 0$; o condiție echivalentă este ca $\Psi^{\wedge}$ să transporte funcțiile pozitiv definite pe Γ_1 în funcții pozitiv definite pe Γ_2 (conf. 3).

14.14. TEOREMĂ. *Un homomorfism* $\Psi : \mathcal{L}^1(G_1)\to\mathcal{M}(G_2)$ *este pozitiv dacă și numai dacă* Y *este un subgrup deschis iar* α *este un homomorfism continuu al lui* Y în Γ_1.

Suficienţa condiţiei rezultă din definiţia funcţiilor pozitiv definite.

Să presupunem acum că Ψ este pozitiv. Din definiţia funcţiilor pozitiv definite şi din demonstraţia lemei **13.9** rezultă că α defineşte un homomorfism pozitiv al lui $\mathfrak{M}(\overline{G}_1)$ în $\mathfrak{M}(\overline{G}_2)$. Astfel, putem să ne situăm în cazul cînd G_1, G_2 sînt compacte iar α defineşte un homomorfism pozitiv al lui $\mathfrak{M}(G_1)$ în $\mathfrak{M}(G_2)$. Măsurile $\mu_x \in \mathfrak{M}_1(G_2)$ din demonstraţia lemei **13.10** sînt pozitive, deci $\mu_x^{\wedge}$ sînt pozitiv definite. Deoarece $x \to \mu_x^{\wedge}$ este un homomorfism al lui G_1 în $\mathfrak{B}(\Gamma_2)$ dacă $\Psi \neq 0$, deci $Y \neq 0$, atunci $\mu_x^{\wedge} \not\equiv 0$ pentru orice $x \in G_1$. Cum $\mu_x^{\wedge}$ sînt pozitiv definite şi $|\mu_x^{\wedge}(\gamma)| = 0$ sau 1, rezultă că $\mu_x^{\wedge}(0) = 1$ pentru orice $x \in G_1$. Prin urmare $0 \in Y$, $\alpha(0) = 0$ şi $\|\mu_x\| = 1$. Astfel, în demonstraţia lemei **13.10**, $\|\chi\| = 1$, deci graficul lui α este o clasă, deci Y este o clasă iar α este afină. Cum $Y \ni 0$, Y este subgrup şi cum $\alpha(0) = 0$, α este homomorfism.

14.15. COROLAR. *Dacă* $\Psi : \mathfrak{L}^1(G_1) \to \mathfrak{M}(G_2)$ *este un homomorfism pozitiv, atunci extensia sa canonică* la $\mathfrak{M}(G_1)$ conf. (**14.2** (a)), *este de asemenea un homomorfism pozitiv.*

14.16. Din teorema de mai sus şi **14.10** rezultă şi următorul

COROLAR. *Dacă* Ψ *este un izomorfism pozitiv al lui* $\mathfrak{L}^1(G_1)$ *pe* $\mathfrak{L}^1(G_2)$, *atunci el este de forma* :

$$(\Psi f)(y) = kf(\beta^{-1}(y)), \quad f \in \mathfrak{L}^1(G_1), \quad y \in G_2,$$

unde k *este o constantă* > 0 *şi* β *un izomorfism topologic între* G_1 *şi* G_2.

14.17. TEOREMĂ. *Fie* G_1 *şi* G_2 *grupuri abeliene compacte,* $Y \subset \Gamma_2$ *şi* $\alpha : Y \to \Gamma_1$. *Următoarele două condiţii sînt echivalente* :

(i) Y *aparţine clanului claselor lui* Γ_2, α *este afină pe porţiuni iar* $\alpha^{-1}(\gamma_1)$ *este o mulţime finită pentru orice* $\gamma_1 \in \Gamma_1$;

(ii) *pentru orice* $f \in \mathcal{C}(G_1)$ *există* $g \in \mathfrak{L}^{\infty}(G_2)$ *aşa încît* $g^{\wedge} = f^{\wedge} \circ \alpha$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Să presupunem mai întîi că α este un homomorfism al lui Γ_2 pe Γ_1 cu nucleul Λ. Atunci $\Gamma_1 = \Gamma_2/\Lambda$ şi deci G_1 este dualul lui Γ_2/Λ aşa încît G_1 poate fi scufundat în G_2 ca anulatorul lui Λ (conf. § 9); dar Λ este prin definiţie finit, deci G_1 este deschis în G_2; iar pe de altă parte Λ este trivial deschis deci G_1 este compact în G_2. Deoarece grupurile Γ_1 şi Γ_2 sînt discrete, egalitatea $\Gamma_1 = \Gamma_2/\Lambda$ este şi topologică deci G_1 se scufundă topologic în G_2. Apoi, deoarece $\Lambda^{\wedge} \equiv G_2/G_1$ şi Λ are, să zicem, n elemente, rezultă că G_1 are indicele n în G_2.

Fie acum $f \in \mathcal{C}(G_1)$ şi să definim :

$$g(y) = \begin{cases} nf(y) & \text{pentru } y \in G_1 \\ 0 & \text{pentru } y \notin G_1 \end{cases}; \quad y \in G_2$$

Atunci, evident, $g \in \mathcal{C}(G_2)$ şi pentru orice $\gamma \in \Gamma_2$ avem :

$$g^{\wedge}(\gamma) = \int_{G_2} g(y)(-y, \gamma)\,\mathrm{d}y = \int_{G_1} g(y)(-y, \gamma)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{G_1} g(x)(-x, \alpha(\gamma)) \cdot \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{G_1} nf(x)\,(-x, \alpha(\gamma)) \cdot \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{G_1} f(x)\,(-x, \quad \alpha(\gamma))\,\mathrm{d}x = f^\wedge(\alpha(\gamma)) =$$

$$= (f^\wedge \circ \alpha)(\gamma).$$

În calculele de mai sus am ținut cont că G_1 fiind deschis în G_2, măsura Haar $\mathrm{d}y$ pe G_2 induce o măsură Haar pe G_1 care, deoarece indicele lui G_1 în G_2 este n, este de n ori mai mică decît măsura Haar normată de $\mathrm{d}x$ a lui G_1 (căci G_1 este compact).

Din acest caz special studiat pînă acum, rezultă, argumentînd ca la **13.6–13.8**, că α duce pe $\mathcal{C}(G_1)$ în $\mathcal{C}(G_2)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Fie $\Psi : \mathcal{C}(G_1) \to \mathcal{L}^\infty(G_2)$ definit prin $g = \Psi f$ dacă $g^\wedge = f^\wedge \circ \alpha$. Operatorul Ψ este pînă acum numai un operator liniar. Vom arăta că Ψ este continuu folosind teorema graficului închis. Pentru aceasta să presupunem că $f_n \in \mathcal{C}(G_1)$, că $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ și că $\|\Psi f_n - g\|_\infty - \to 0$; atunci $\|f_n - f\|_1 \to 0$ deci $\|f_n^\wedge - f^\wedge\|_\infty \to 0$, deci $f_n^\wedge(\gamma) \to f^\wedge(\gamma)$ pentru orice $\gamma \in \Gamma_1$; în particular rezultă $(f_n^\wedge \circ \alpha)(\gamma) \to (f^\wedge \circ \alpha)(\gamma)$ pentru orice $\gamma \in \Gamma_2$; pe de altă parte același gen de raționament ne arată că $(f_n^\wedge \circ \alpha)(\gamma) \to g^\wedge(\gamma)$ pentru orice $\gamma \in \Gamma_2$; prin urmare $f^\wedge \circ \alpha = g^\wedge$ sau $\Psi f = g$, ceea ce trebuia. Cum G_2 este compact, $\mathcal{L}^\infty(G_2) \subset \mathcal{L}^1(G_2)$ deci $g^\wedge \in \mathcal{C}_0(\Gamma_2)$. Dacă $\gamma_1 \in \Gamma_1$ și $f(x) = (x, \gamma_1)$, atunci $g^\wedge(\gamma) = 1$ pentru orice $\gamma \in \alpha^{-1}(\gamma_1)$ și $g^\wedge(\gamma) = 0$ pentru orice $\gamma \notin \alpha^{-1}(\gamma_1)$ (conf. relațiilor de ortogonalitate, § 2) și cum $g^\wedge \in \mathcal{C}_0(\Gamma_2)$, rezultă că pentru orice $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\alpha^{-1}(\gamma_1)$ este finită; de asemenea, rezultă:

$$(\Psi f)(y) = \sum_{\alpha(\gamma) = \gamma_1} (y, \gamma); \quad y \in G_2. \tag{1}$$

Dacă F este un polinom trigonometric pe $G_1 \oplus G_2$ și dacă scriem $F^y(x) = F(x, y)$, atunci F^y este un polinom trigonometric pe G_1 pentru fiecare $y \in G_2$; cum $\alpha^{-1}(\gamma_1)$ este o mulțime finită pentru orice $\gamma_1 \in \Gamma_1$, relația (1) ne arată că ΨF^y este un polinom trigonometric pe G_2. Să punem acum $\varphi(y) = (\Psi F^y)(y)$ pentru $y \in G_2$. Atunci φ este un polinom trigonometric pe G_2; într-adevăr:

$$F(x, y) = \sum_i c_i (x, \gamma_1^i)\,(y, \gamma_2^i)$$

$$F^y(x) = \sum_i c_i (y, \gamma_2^i) f_i(x)\,; \; f_i(x) = (x, \gamma_1^i)$$

$$\Psi F^y = \sum_i c_i (y, \gamma_2^i)\, \Psi f_i$$

și cum:

$$(\Psi f_i)(z) = \sum_{\alpha(\gamma) = \gamma_1^i} (z, \gamma)$$

rezultă

$$(\Psi F^y)(y) = \sum_i \left(c_i (y, \gamma_2^i) \sum_{\alpha(\gamma) = \gamma_1^i} (y, \gamma) \right).$$

În plus :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_\infty &= \sup_{y\in G_2} |(\Psi F^y)(y)| \leqslant \\ & \sup_{y\in G_2}\Big\{\sup_{y'\in G_1} |(\Psi F^y)(y')|\Big\} = \\ (2) \qquad &= \sup_{y\in G_2} \|\Psi F^y\|_\infty \leqslant \\ &\leqslant \|\Psi\| \sup_{y\in G_2} \|F^y\|_\infty \\ &= \|\Psi\| \sup_{y\in G_2}\Big\{\sup_{x\in G_1} |F(x, y)|\Big\} = \|\Psi\| \, \|F\|_\infty . \end{aligned}$$

Cum $G_1 \oplus G_2$ este compact, caracterele formează o mulţime totală în $\mathcal{C}(G_1 \oplus G_2)$ (conf. § 3) şi deci o măsură se poate defini numai pe caractere. Aplicaţia :

$L : F \rightarrow \int_{G_2} \varphi(y)\, dy$ este o funcţională liniară complexă mărginită pe $\mathcal{T}(G_1 \oplus G_2)$ (vezi § 3) ; într-adevăr, liniaritatea este evidentă, iar mărginirea rezultă din (2). Ea se extinde de la o funcţională liniară şi mărginită pe $\mathcal{C}(G)$, căreia conf. teoremei de reprezentare Riesz-Kakutani, îi corespunde o măsură $\sigma \in \mathfrak{M}(G_1 \oplus G_2)$ aşa ca $\|\sigma\| \leqslant \|\Psi\|$ şi :

$$\int_{G_1 \oplus G_2} F(x, y)\, d\sigma(x, y) = \int_{G_2} \varphi(y)\, dy ;\ F \in \mathcal{T}(G_1 \oplus G_2).$$

Modificat convenabil, acest raţionament ne dă

$$(3) \qquad \int_{G_1 \oplus G_2} F(-x, y)\, d\sigma(x, y) = \int_{G_2} \varphi(y)\, dy ;\ F \in \mathcal{T}(G_1 \oplus G_2)$$

Să fixăm acum $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$ şi să punem $F(x, y) = (x, \gamma_1)(-y, \gamma_2)$. Membrul drept din (3) este atunci $\sigma^\wedge(\gamma_1, \gamma_2)$, iar

$$\varphi(y) = (-y, \gamma_2) \sum_{\alpha(\gamma) = \gamma_1} (y, \gamma) = \sum_{\alpha(\gamma) = \gamma_1} (y, \gamma - \gamma_2)$$

şi deci

$$\sigma(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{\alpha(\gamma) = \gamma_1} \int_{G_2} (y, \gamma - \gamma_2)\, dy = \begin{cases} \text{dacă } \alpha(\gamma_2) = \gamma_1 \\ 0 \text{ dacă } \alpha(\gamma_2) \neq \gamma_1 . \end{cases}$$

Prin urmare $\sigma^\wedge$ este funcţia caracteristică a graficului lui α deci, conf. **12.4**, acest grafic aparţine clanului claselor lui $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, aşa încît teorema rezultă din **13.17**.

14.18. În această secţiune dăm *un exemplu de aplicaţie afină pe porţiuni.*

TEOREMĂ. *Fie* φ *o funcţie nenulă pe* Γ *aşa încît*

a) φ, $\varphi^{-1} \in \mathfrak{B}(\Gamma)$;

b) $\|\varphi^n\| \leqslant C$ *pentru orice* $n \in Z$.

Atunci φ *este o aplicaţie afină pe porţiuni a lui* Γ *în* T.

COROLAR. *Dacă în plus* Γ *este conex, atunci există un număr complex unimodular* a *şi un element* $x\in G$ *aşa încît:*

$$\varphi(\gamma) = a(x, \gamma);\ \gamma\in\Gamma.$$

Conform *formulei razei spectrale* avem:

$$(1)\qquad \|\varphi\|_\infty \leqslant \lim_{n\to\infty} \|\varphi^n\|^{1/n} \leqslant \lim_{n\to\infty} C^{1/n} = 1$$

Aceeaşi relaţie are loc şi pentru φ^{-1}, deci pentru orice $\gamma\in\Gamma$ avem $|\varphi(\gamma)| = 1$, aşa încît $\varphi: \Gamma\to T$. Fie $\mu\in\mathcal{M}(G)$ aşa ca $\varphi = \mu^\wedge$; notăm prin $\mu^{-1}\in\mathcal{M}(G)$ măsura care corespunde lui φ^{-1}; şi $\mu^n = \mu*\ldots*\mu$ de n ori iar $\mu^{-n} = \mu^{-1}*\ldots*\mu^{-1}$ de n ori. Pentru orice $f\in\mathcal{L}^1(Z)$ definim:

$$(2)\qquad \Psi f = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n)\,\mu^{-n}$$

seria fiind convergentă în $\mathcal{M}(G)$ căci $\|\mu^n\| \leqslant C$ pentru $n\in Z$ şi $f\in\mathcal{L}^1(Z)$. Atunci $\Psi: \mathcal{L}^1(Z)\to\mathcal{M}(G)$ este un homomorfism de algebre după cum se verifică uşor. Avînd în vedere că norma în $\mathcal{M}(G)$ domină norma $\|\ \|_\infty$ din $\mathcal{B}(\Gamma)$, rezultă, conf. **2.10**:

$$(\Psi^\wedge f^\wedge)(\gamma) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n)\,\varphi^{-n}(\gamma) = f^\wedge(\varphi(\gamma)).$$

Prin urmare, pentru orice $f\in\mathcal{L}^1(Z)$, rezultă $f^\wedge\circ\alpha\in\mathcal{B}(\Gamma)$ deci, conf. **13.4**, φ este afină pe porţiuni.

Dacă Γ este conex, atunci φ este afină, deci este un homomorfism continuu al lui Γ în T urmat de o translaţie în T adică de forma dată în corolar.

14.19. NOTE. (1) Dacă $\Gamma = R$, atunci rezultatul precedent se transcrie:

$$\varphi(t) = e^{i(at+b)};\ t\in R.$$

(2) Aplicaţiile afine pe porţiuni ale lui Γ în T pot fi descrise foarte explicit. Fie $S_1, \ldots, S_n$ mulţimi disjuncte aparţinînd clanului claselor lui Γ şi avînd reuniunea întreg Γ; să alegem $x_1, \ldots, x_n\in G$ şi numerele complexe unimodulare $c_1, \ldots, c_n$ şi să punem:

$$\alpha(\gamma) = c_j(x_j, \gamma);\ (\gamma\in S_j).$$

Atunci α este afină pe porţiuni.

Reciproc, fie α o aplicaţie afină pe porţiuni definită pe $Y\subset\Gamma$ cu valori în T şi fie $Y = S_1\cup\ldots\cup S_n$ cu S_i din clanul claselor lui Γ, $S_i\subset K_i$, K_i clasă deschisă în Γ, iar $\alpha/S_i = \alpha_i/S_i$, unde $\alpha_i: K_i\to T$ este o aplicaţie afină. Atunci α_i este un homomorfism continuu definit pe un subgrup H_i din Γ, urmat de o translaţie în T. Avînd în vedere teorema de prelungire a caracterelor (§ 9), rezultă că $\alpha_i = c_i(x_i, \cdot)$, deci α este de forma anterior considerată.

În particular *aplicațiile afine pe porțiuni ale lui T în T sînt de forma*

$$\alpha(e^{i\theta}) = c\, e^{in\theta} = e^{i(n\theta+a)};\ e^{i\theta}\in T. \tag{3}$$

unde $|c| = 1$ iar $n\in Z$, deoarece T este conex.

14.20. TEOREMĂ. *Fie φ o aplicație a lui T în T așa încît seria Fourier a lui $f\circ\varphi$ să fie absolut convergentă ori de cîte ori seria Fourier a lui f este absolut convergentă. Atunci există $n\in Z$ și $a\in R$ așa ca*

$$\varphi(e^{i\theta}) = e^{i(n\theta+a)};\ e^{i\theta}\in T.$$

Să observăm că condiția din teoremă se exprimă cu alți termeni astfel: $f\in\mathcal{A}(T \Rightarrow f\circ\varphi\in\mathcal{A}(T)$ așa încît teorema rezultă din **13.4** și **14.19** (2).

14.21. Comentarii. În toate cazurile speciale studiate pînă acum, or Γ_2 a fost conex — și atunci clanul claselor lui Γ_2 a fost trivial — or Ψ a fost un izomorfism de normă 1. În toate cazurile α a fost afină pe Γ_2, așa încît nici clanul claselor și nici aplicațiile afine pe porțiuni nu au intervenit. Rolul jucat de aceste două noțiuni a devenit aparent mai întîi prin studiul cazului $\Gamma_1 = \Gamma_2 = Z$. În acest caz atît problema, cît și rezultatul pot fi exprimate foarte concret.

Fie $Y\subset Z$ și fie $\alpha : Y \to Z$; în terminologia uzuală problema pe care ne-o punem este: care sînt aplicațiile α pentru care aplicația $f^\wedge \to f^\wedge\circ\alpha$ duce pe $\mathcal{A}(Z)$ în $\mathcal{A}(Z)$, ceea ce revine la caracterizarea homomorfismelor $\mathcal{L}^1(T) \to \mathcal{L}^1(T)$. În limbajul clasic al analizei armonice problema este: *care sînt aplicațiile $\alpha : Y\to Z$ pentru care*

$$\sum_{n\in Y} c(\alpha(n))\, e^{in\theta} \tag{1}$$

este o serie Fourier (a unei funcții din $\mathcal{L}^1(T)$) *ori de cîte ori seria*

$$\sum_{n\in Z} c(n)\, e^{in\theta} \tag{2}$$

este o serie Fourier (a unei funcții din $\mathcal{L}^1(T)$).

Răspunsul la această problemă îl deducem din considerațiile generale de mai înainte și îl formulăm în următoarea:

14.22. TEOREMĂ. *Condiția necesară și suficientă pentru ca $\alpha : Y \to Z$ să ducă pe $\mathcal{A}(Z)$ în $\mathcal{A}(Z)$ este să existe un întreg pozitiv q și o aplicație $\beta : Z \to Z$ cu următoarele proprietăți:*

(i) *Dacă $A_1, \ldots, A_q$ sînt clasele de resturi modulo q, atunci $Y = S_1 \cup \ldots \cup S_n$, unde fiecare S_i este sau finit sau conținut într-un A_i de care diferă printr-o mulțime finită*; *iar mulțimile S_i sînt disjuncte două cîte două*;

(ii) *pentru aproape toți $n\in Y$, $\alpha(n) = \beta(n)$*;

(iii) *pentru orice $n\in Z$, $\beta(n+q) \neq \beta(n)$*;

(iv) *pentru orice $n\in Z$, $\beta(n+q) + \beta(n-q) = 2\beta(n)$.*

Conform teoremelor generale **13.4** şi **14.3** necesar şi suficient pentru ceea ce se cere este ca:

(1) $Y \in$ clanului claselor lui Z;

(2) α afină pe porţiuni;

(3) α întoarce mulţimile finite în mulţimi finite. Considerăm aceste condiţii pe rînd.

Dacă (1) este adevărată, atunci, conf. **12.17**, Y diferă de o mulţime periodică cel mult într-un număr finit de puncte. Fie q perioada acelei mulţimi şi $A_1, \ldots, A_q$ clasele de resturi modulo q. Atunci, evident, $Y = S_1 \cup \cdots \cup S_n$ cu S_i disjuncte, iar S_i este finită sau conţinută într-un A_j de care diferă în cel mult un număr finit de puncte, de unde rezultă condiţia (i). Reciproc, (i) $\Rightarrow$ (1) în mod evident.

Dacă (2) este adevărată, atunci α, restrîns la S_i pe care îl presupunem inclus în A_j, trebuie să coincidă cu restricţia unei aplicaţii afine β_j a lui A_j, căci, deoarece S_i diferă de A_j, numai într-un număr finit de puncte, A_j este singura clasă care conţine pe S_i. Să căutăm atunci aplicaţiile afine β_j ai lui A_j; un punct al lui A_j este de forma $a_j + kq$ cu $k \in Z$ şi $a_j = 0, 1, \ldots q - 1$; să punem $\beta_j(a_j) = u$ şi $\beta_j(a_j + q) = u + v$; atunci, dacă $\beta_j(a_j + kq) = u + kv$, rezultă că

$$\begin{aligned}\beta_j\,[a_j + (k+1)\,q] &= \beta_j\,[(a_j + q) + (a_j + kq) - a_j] = \\ &= \beta_j(a_j + q) + \beta_j(a_j + kq) - \beta_j(a_j) = \\ &= u + v + u + kv - u = u + (k+1)\,v.\end{aligned}$$

Astfel, am demonstrat prin inducţie că $\beta_j(a_j + kq) = u + kv$ cu $u, v \in Z$.

Definim atunci $\beta : Z \to Z$ prin relaţia $\beta(n) = \beta_j(n)$ dacă $n \in A_j$; definiţia este coerentă. Fie $n \in Z$; atunci n, $n - q$, $n + q$ aparţin aceluiaşi A_j şi rezultă condiţia (iii); într-adevăr, fie $\beta(n) = u$, $\beta(n + q) = u + v$, $\beta(n - q) = u - v$ şi verificarea este imediată.

Reciproc, fie $\beta : Z \to Z$ aşa încît să aibă loc (iii); vom arăta că pentru orice $n \in Z$ există u şi v aşa ca $\beta(n + kq) = u + kv$; să notăm $\beta(n) = u$ şi $\beta(n + q) - \beta(n) = v$; atunci, din (iii) rezultă mai întîi $\beta(n - q) = u - v$ şi apoi prin inducţie.

În demonstraţia părţii directe s-a văzut că $\alpha(n) = \beta(n)$ pentru aproape toţi $n \in Y$ (în afară de cei din S_i-urile finite), deci (2) $\Rightarrow$ (ii). Reciproc, o aplicaţie egală aproape peste tot cu o aplicaţie afină pe porţiuni este o aplicaţie afină pe porţiuni, deci (ii) + (iii) $\Rightarrow$ (2).

Pentru echivalenţa (3) $\Leftrightarrow$ (iv) putem presupune că $\alpha = \beta$ peste tot fără a restrînge generalitatea. Dacă β întoarce mulţimile finite în mulţimi finite, atunci, evident, $\beta(n + q) \neq \beta(n)$, căci în caz contrar, conf. (iii), toată clasa lui n ar avea aceeaşi imagine prin β. Reciproc, să presupunem că $\beta(n + q) \neq \beta(n)$ pentru orice $n \in Z$; arătăm că într-o clasă A_j nu există decît un element care prin β merge într-un $m \in Z$ dat; cu aceasta teorema va fi demonstrată, căci nu există decît un număr finit de clase; dar acest fapt este evident, căci din $\beta(n + q) \neq \beta(n)$ şi $\beta(n + kq) = u + kv$ rezultă $v \neq 0$.

Teorema este complet demonstrată.

14.23. NOTE. (1) Dacă din enunţul teoremei **14.22** omitem condiţia (iv), atunci se obţine condiţia necesară şi suficientă ca α să ducă pe $\mathcal{A}(Z)$ în $\mathcal{B}(Z)$.

(2) Teorema se extinde pentru $\Gamma_1 = Z$, $\Gamma_2 =$ grup de caracteristică 0.

14.24. Considerăm acum un caz particular al teoremei **14.7.**

Teoremă. *Fie G un $\mathcal{C}$. c.a. grup*; $\mathcal{L}^1(G)$ *este izomorf cu* $\mathcal{L}^1(T)$ *dacă şi numai dacă $G = T \oplus F$, unde F este un grup abelian finit*

Dacă $G = T \oplus F$, atunci $\Gamma = Z \oplus F$; dacă F are q elemente $f_1, \cdots, f_q$ şi dacă definim

$$\alpha(k + nq) = (h, f_k; \quad n \in Z; \quad 1 \leqslant k \leqslant q,$$

atunci α este afină pe porţiuni şi bijectivă; deci, conf. **14.7**, $\mathcal{L}^1(G)$ este izomorf cu $\mathcal{L}^1(T)$.

Reciproc, dacă există o aplicaţie biunivocă afină pe porţiuni a lui Z pe Γ, atunci Γ este o reuniune finită de progresii aritmetice. În particular, Γ este finit generat, deci este o sumă directă de grupuri ciclice. Cum Γ este infinit şi reuniune finită de progresii aritmetice, conf. lemei **13.12**, exact unul din aceste grupuri ciclice este Z. Astfel $\Gamma = Z \oplus F$, deci $G = T \oplus F$ cu F finit.

14.25. Note bibliografice. Teorema **13.4** a fost demonstrată de Cohen [3]. În secţiunile **13.6**—**13.8** ne-am condus după monografia lui Rudin [21], pentru a demonstra a doua parte a teoremei **13.4**. Demonstraţia dată în această monografie pentru prima parte a teoremei **13.4** este însă incompletă; relaţia (2) din secţiunea 4.5.2 a cărţii lui Rudin nu este justificată; faptul esenţial omis de Rudin este măsurabilitatea claselor conjugate cu care lucrează. În expunerea de faţă demonstraţia a fost completată prin prelucrarea articolului lui Cohen; lemele **13.15**, **13.17** au fost prelucrate de Zsidó László.

În expunerea teoremelor **14.2** şi **14.3** — datorate tot lui Cohen — ne-am condus după Rudin [21]. În secţiunile **14.6** — **14.8** diluăm expunerea lui Rudin ([21], 4.6.4) care conţine şi o eroare (se aplică ultima parte a lemei 4.2.4 care este falsă). Teorema **14.9** bis a fost demonstrată şi prin altă metodă de către Segal [25], Edwards [6] şi Hewitt [13. Bis]. În expunerea noastră am folosit lema **14.9** obţinută de Zsidó László; Rudin ([21], 4, 6, 8) foloseşte un rezultat mai puternic decît lema **14.9** dar nu-l demonstrează. Rezultatele de la **14.10**—**14.12** au fost obţinute de Helson [10] şi Beurling, Helson [1]. Exemplul **14.18** apare pentru prima dată tot în Beurling, Helson [1].

Cazul particular $G_1 = G_2 = Z$ (teorema **14.20**) a fost studiat de Kahane ([16], [17]) şi Leibenson [18], iar cazul $G_1 = G_2 = T$ (teorema 14.22) de Rudin [3].

Homomorfismele idealelor algebrelor grupale au fost studiate de Forelli [9].

Primită la redacţie la 3 septembrie 1966

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Beurling, A. and Helson, H., *Fourier — Stieltjes transforms with bounded powers.* Math. Scand., **1**, 120—126 (1953).

2. Cohen, P. J., *On a conjecture of Littlewood and idempotent measures.* Am. J. Math., **82**, 191—212 (1960).

3. COHEN, P. J., *On homomorphisms of group algebras*. Am. J. Math., **82**, 213—226 (1960).
4. DAVENPORT, H. Ark. mat., **14** (1965).
5. EDWARDS, R., *On factor functions*. Pacific J. Math., **5**, 367—378 (1955).
6. EDWARDS, R., *On functions which are Fourier transforms*, Proc. Am. Math. Soc., **6**, 71—78 (1954).
7. EYMARD, P., Séminaire Bourbaki, exposé n⁰ 234.
8. FOIAȘ, C., *On a commutative extension of commutative Banach algebra*. Pacific. J. Math., **8**, 407—410 (1958).
9. FORELLI, M., *Homomorphisms of ideals of group algebras*. Illinois J. Math., *9* (1965).
10. HELSON, H., *Isomorphisms of Abelian group algebras*. Ark. Mat. **2**, 475—487 (1953).
11. HELSON, H., *Note on harmonic functions*. Proc. Am. Math. Soc. **4**, 686—691 (1953).
12. HELSON, H., *Proof of a conjecture of Steinhaus*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S., **40**, 205—206 (1954).
13. HELSON, H., *On a theorem of Szegö*. Proc. Am. Math. Soc., **6**, 235—242 (1955).
13. Bis. HEWITT, E., *Representation of functions as absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms*. Proc. Am. Math. Soc. **4**, 663—670 (1953).
14. ISTRĂȚESCU, V., *On a class of measures on locally compact Abelian groups*. Rev. roum. math. pures et appl. **XI**, 431—434(1966).
15. ITO, T., AMEMYIA, I., *A simple proof of a theorem of P. J. Cohen*, Bull. Am. Math. Soc. *70* (1964), 762—766.
16. KAHANE, J. P., *Sur les fonctions sommes de séries trigonométriques absolument convergentes*. C.R. Acad. Sci. Paris, **240**, 36—37 (1955).
17. KAHANE, J. P., *Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes*. J. Math. Pures Appl., **35** 249—259 (1956).
18. LEIBENSON, Z. L., Uspehi Mat. Nauk, Novaia Seria, **9**, 157—162 (1954).
19. MATÉ, L., *Some abstract results concerning, multiplier algebres*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **10**, 261—266 (1965).
20. MATÉ, L., *On the factor theory of commutative Banach Algebras*. Publ. Math. Inst. Hung., **9**, (1964).
21. RUDIN, W., *Fourier analysis on groups*. Interscience publishers (1962).
22. RUDIN, W., *Idempotent measures on Abelian groups*. Pacific J. Math. **9** (1959) 195—209.
23. RUDIN, W., *The automorphisms and endomorphisms of the groups algebra of the unit circle*. Acta Math., **95**, 39—56 (1956).
24. RUDIN, W., *On isomorphisms of group algebras*. Bull. Am. Math. Soc., **64**, 167—169 (1958).
25. SEGAL, I. E., *The class of functions which are absolutely convergent Fourier transforms*. Acta Litt. Sci. Szeged, **12**, 157—161 (1950).
26. WANG, J. K., *Multipliers of commutative Banach algebras*, Pacific J. Math., **11**, 1131—1149 (1961).

O CONDIȚIE NECESARĂ ȘI SUFICIENTĂ DE ERGODICITATE MAI FINISATĂ, PENTRU LANȚURILE MARKOV OMOGENE CU UN NUMĂR FINIT DE STĂRI, RESPECTIV PENTRU „LANȚURILE CONSTANTE“ CU UN NUMĂR ARBITRAR DE STĂRI

DE

G. THEILER

Se dau condiții necesare și suficiente de ergodicitate mai finisate ca cele de pînă acum (cerînd în genere mai puține iterații) pentru lanțurile Markov omogene cu un număr finit de stări, respectiv pentru lanțurile constante (unde se consideră „distanța Markov").

1. CAZUL LANȚURILOR MARKOV OMOGENE

Să considerăm un lanț Markov omogen cu m stări și cu probabilitățile de trecere

$$p_{ij}\,;\ i, j = 1,2, \ldots m.$$

Dacă notăm cu $p_{ij}^{(n)}$ probabilitatea de trecere a sistemului (lanțului) din starea i în starea j după n pași, se știe că o condiție necesară și suficientă de ergodicitate, este existența unui număr întreg și pozitiv r și a unei stări l astfel ca :

$$\min_{1\leqslant i\leqslant m} p_{il}^{(r)} = \delta > 0.$$

În locul acestei condiții vom prezenta o alta mai puțin puternică, care face obiectul următoarei teoreme :

TEOREMĂ. *O condiție necesară și suficientă de ergodicitate a lanțului este existența unui număr întreg și pozitiv s astfel ca* :

$$\max_{i,\, j\, =\, 1,2,\ldots,\, m} \sum_{u=1}^{m} |p_{iu}^{(s)} - p_{ju}^{(s)}| < 2.$$

Demonstrație. 1°. *Condiția este necesară.* Lanțul fiind ergodic :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ k=1,2,\ldots,m}} p_{ku}^{(n)} = \tilde{p}_u .$$

În consecință oricare ar fi $i, j = 1,2,\ldots, m$, oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr $n_0(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n > n_0(\varepsilon)$:

$$|p_{iu}^{(n)} - p_{ju}^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{m}, \qquad i, j = 1,2,\ldots, m$$

Prin urmare :

$$\sum_{u=1}^{m} |p_{iu}^{(n)} - p_{ju}^{(n)}| < \varepsilon \text{ pentru } n > n_0(\varepsilon).$$

E suficient a lua $\varepsilon = 2$.

2°. *Condiția e suficientă.* Ne propunem să arătăm mai întîi că $|p_{iu}^{(n)} - p_{ju}^{(n)}|$ pentru n suficient de mare, poate fi făcut arbitrar de mic, oricare ar fi stările inițiale i, j.

Să presupunem $p_{iu}^{(n)} > p_{ju}^{(n)}$ ceea ce desigur nu implică nici o restricție.

Putem scrie :

$$p_{iu}^{(n)} = \sum_{v=1}^{m} p_{iv}^{(l)} p_{vu}^{(n-l)}, \quad p_{ju}^{(n)} = \sum_{v=1}^{m} p_{jv}^{(l)} p_{vu}^{(n-l)}, \therefore p_{iu}^{(n)} - p_{ju}^{(n)} = \sum_{v=1}^{m} [p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)}]\, p_{vu}^{(n-l)}.$$

Dacă în membrul drept vom lua ori de cîte ori $p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)} \geqslant 0$ în loc de $p_{vu}^{(n-l)}$, $\max\limits_{1 \leqslant v \leqslant m} p_{vu}^{(n-l)} = M_u^{(n-l)}$ și ori de cîte ori $p_{iv}^{(l)} - p_{iv}^{(l)} < 0$, în loc de $p_{vu}^{(n-l)}$; $\min\limits_{1 \leqslant v \leqslant m} p_{vu}^{(n-l)} = m_u^{(n-l)}$, membrul drept va fi majorat.

Prin urmare :

$$p_{iu}^{(n)} - p_{ju}^{(n)} \leqslant \Sigma_1 (p_{iv}^{(l)} - \underset{\geqslant 0}{p_{jv}^{(l)}})\, M_u^{(n-l)} + \Sigma_2 (p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)})\, m_u^{(n-l)}.$$

Întrucît :

$$\Sigma_1 (p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)}) + \Sigma_2 (p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)}) = \sum_{v=1}^{m} p_{iv}^{(l)} - \sum_{v=1}^{m} p_{jv}^{(l)} = 1 - 1 = 0,$$

rezultă :

$$p_{iu}^{(n)} - p_{ju}^{(n)} \leqq \Sigma_1 (p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)})\, [M_u^{(n-l)} - m_u^{(n-l)}]$$

Dar :

$$\Sigma_1 (p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)}) = \frac{1}{2} [\Sigma_1 (p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)}) - \Sigma_2 (p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)})] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{m} |p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)}|.$$

În consecință :

$$p_{iu}^{(n)} - p_{ju}^{(n)} \leqslant \frac{1}{2} \max_{1 \leqslant i, j \leqslant m} \sum_{v=1}^{m} |p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)}| \cdot [M_u^{(n-l)} - m_u^{(n-l)}].$$

Membrul drept al acestei inegalităţi nedepinzînd de i şi j, putem lua în membrul stîng i astfel ca $p_{iu}^{(n)} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} p_{ku}^{(n)} = M_u^{(n)}$ şi tot aşa j astfel ca $p_{ju}^{(n)} = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant m} p_{ku}^{(n)} = m_u^{(n)}$.

Notînd apoi cu 2δ un număr mai mic decît 2 astfel ca :

$$\max_{1\leqslant i,\, j\leqslant m} \sum_{v=1}^{m} |p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)}| < 2\delta$$

rezultă din inegalitatea de mai sus :

$$M_u^{(n)} - m_u^{(n)} < \delta\,[M_u^{(n-l)} - m_u^{(n-l)}]$$

Tot aşa se vede că :

$$M_u^{(n-l)} - m_u^{(n-l)} < \delta\,[M_u^{(n-2l)} - m_u^{(n-2l)}]$$

ş.a.m.d.

Înmulţind relaţiile corespunzătoare se deduce :

$$M_u^{(n)} - m_u^{(n)} < \delta^{\left[\frac{n}{l}\right]}$$

Cum şirul $\{M_u^{(n)}\}_{n\in N^*}$ este necrescător iar şirul $\{m_u^{(n)}\}_{n\in N^*}$ este nedescrescător, aceste două şiruri sînt convergente, din inegalitatea de mai sus rezultînd egalitatea acestor limite.

Teorema este demonstrată.

Cum :

$$M_u^{(n)} > p_{iu}^{(n)} > m_u^{(n)}; \quad M_u^{(n)} > \tilde{p}_u > m_u^{(n)}$$

rezultă imediat :

$$|p_{iu}^{(n)} - \tilde{p}_u| < \delta^{\left[\frac{n}{l}\right]}.$$

Observaţie. Întrucît :

$$\sum_{v=1}^{m} |p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)}| \leqslant \sum_{v=1}^{m} p_{iv}^{(l)} + \sum_{v=1}^{m} p_{jv}^{(l)} = 2$$

rezultă că singurul caz în care teorema ergodică nu se aplică este atunci cînd nu există un l astfel ca :

$$\max_{1\leqslant i,\, j\leqslant m} \sum_{v=1}^{m} |p_{iv}^{(l)} - p_{jv}^{(l)}| < 2.$$

Pentru aceasta e necesar ca oricare ar fi l să existe în matricea corespunzătoare probabilităţilor de tranziţie în l paşi, două linii i şi j astfel ca atunci cînd $p_{iu}^{(l)} \neq 0$, elementul corespunzător din linia j, adică $p_{ju}^{(l)}$ să fie egal cu zero şi reciproc pentru $p_{iu}^{(l)} \neq 0$, $p_{iu}^{(l)} = 0$.

Pe baza teoremei de mai sus, ergodicitatea se poate recunoaşte pe o matrice „iterată" de un număr mai mic de ori, în genere, ca la teorema de pînă acum, nefiind necesar ca toate elementele unei coloane să fie diferite de zero.

2. CAZUL „LANŢURILOR CONSTANTE”

a) Noţiunea de lanţ sub forma pe care o vom utiliza aici se găseşte expusă ca şi o teoremă (27.3) la care ne vom referi în cartea lui Loève : *Probability Theory*, [2].

Un şir X_n de variabile aleatoare este un lanţ, dacă pentru orice n întreg distribuţia lui X_{n+1} daţi fiind $X_1, \ldots, X_n$ poate fi făcută să coincidă cu distribuţia lui X_{n+1} dat fiind X_n, deci astfel ca $P^{X_1, \ldots, X_n}_{X_{n+1}} = P^{X_n}_{X_{n+1}}$ respectiv $P(x_1, x_2, \ldots, x_n, S)$ este independentă de argumentele $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Lanţul este „un sistem” X a cărui „stare” la „momentul n” este X_n cu valorile $x \in R$; reprezentînd stările „posibile”.

Prin $P^{(n, n+1)}(x, S)$ se înţelege probabilitatea de trecere din starea x în momentul n în grupul de stări S în momentul $n + 1$.

Dacă $P^{(n, n+1)}(x, S) = P(x, S)$ este independent de n, lanţul se numeşte „constant” în timp respectiv omogen (în timp).

Prin $P_n(S)$ se notează distribuţia lui X_n.

Proprietăţile de bază ale lanţurilor „constante” („omogene”) sînt rezumate de Loève în teorema 27.3 A astfel :

O funcţie $P(x, S)$ cu $x \in R$ şi S mulţime boreliană $S \subset R$ este o funcţie de probabilitate de tranziţie a unui lanţ constant de variabile aleatoare, dacă şi numai dacă este o funcţie măsurabilă de x pentru fiecare S fixat şi o probabilitate în S pentru orice x fixat.

Legea unui lanţ constant de variabile aleatoare X cu distribuţiile $P_n(S)$ este determinată de distribuţia iniţială $P_1(S)$ şi de funcţia de probabilitate, de tranziţie $P(x, S)$.

Pentru orice m, n întregi :

$$P_{m+n}(x) = \int P_m(\mathrm{d}x)\, P^{(n)}(x, S)$$

unde funcţia $P^{(n)}(x, S)$ este determinată de relaţia :

$$P^{(n+p)}(x, S) = \int P^{(n)}(x, \mathrm{d}x')\, P^{(p)}(x', S) \qquad n, p = 1, 2, \ldots$$

b) Prin măsură Markov generalizată se înţelege expresia :

$$\Delta_n = \sup_{x, y}.\ \sup_{S}.\ [P^{(n)}(x, S) - P^{(n)}(y, S)].$$

Extinzînd puţin noţiunea de convergenţă exponenţială din Loève, vom spune că un lanţ constant este uniform ergodic dacă fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr $n_0(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n > n_0(\varepsilon)$:

$$|P^{(n)}(x, S) - \overline{P}(S)| < \varepsilon$$

oricare ar fi x şi S, unde $\overline{P}(S)$ reprezintă o funcţie de mulţime nedepinzînd bineînţeles de n şi x.

Se poate stabili uşor că $\overline{P}(S)$ este o probabilitate.

Teorema pe care o prezintă Loève, 27.3 B, se aplică și în cazul mai general de mai sus, ea putînd fi enunțată astfel:

TEOREMĂ. *O condiție necesară și suficientă de ergodicitate uniformă a lanțului este ca să existe un număr întreg h astfel ca*:

$$\Delta_h < 1.$$

În locul acestei teoreme vom prezenta un analog al teoremei din prima parte a lucrării, care reprezintă o versiune mai slabă a teoremei și anume:

TEOREMĂ. *O condiție necesară și suficientă de ergodicitate uniformă a lanțului omogen este ca să existe un număr întreg l astfel ca*:

$$\sup_{x,y} \int |P^{(l)}(x, dz) - P^{(l)}(y, dz)| < 2$$

Demonstrație. 1° *Condiția este necesară.* Pentru orice x și y fixați: $[P^{(l)}(x, S) - P^{(l)}(y, S)]$ reprezintă o măsură generalizată.

Pe baza teoremei de descompunere a lui Jordan:

$$\int |P^{(l)}(x, dz) - P^{(l)}(y, dz)| = [P^{(l)}(x, S_1^{(x,y)}) - P^{(l)}(y, S_1^{(x,y)})] -$$
$$- [P^{(l)}(x, S_2^{(x,y)}) - P^{(l)}(y, S_2^{(x,y)})],$$

prima paranteză fiind pozitivă, a doua negativă.

Pe baza definiției ergodicității uniforme se vede imediat că există un l astfel ca:

$$P^{(l)}(x, S_1^{(x,y)}) - P^{(l)}(y, S_1^{(x,y)}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$P^{(l)}(y, S_2^{(x,y)}) - P^{(l)}(x, S_2^{(x,y)}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

unde l nu depinde de x și y.

Prin urmare există un l astfel ca:

$$\sup_{x,y} \int |P^{(l)}(x, dz) - P^{(l)}(y, dz)| < \varepsilon$$

e suficient a se lua $\varepsilon = 2$ pentru ca prima parte a demonstrației să fie terminată.

2° *Condiția este suficientă.* Să considerăm un S oarecare și să arătăm că $|P^{(n)}(x, S) - P^{(n)}(y, S)|$ poate fi făcut arbitrar de mic oricare ar fi x și y.

Să fixăm pe n și să presupunem $P^{(n)}(x, S) > P^{(n)}(y, S)$ ceea ce desigur nu implică nici o restricție.

Putem scrie:

$$P^{(n)}(x,S) = \int P^{(l)}(x, dz)\, P^{(n-l)}(z, S)\,;\quad P^{(n)}(y, S) = \int P^{(l)}(y, dz)\, P^{(n-l)}(z, S)$$

$$P^{(n)}(x, S) - P^{(n)}(y, S) = \int [P^{(l)}(x, dz) - P^{(l)}(y, dz)]\, P^{(n-l)}(z, S).$$

Pe baza teoremei de descompunere a lui Jordan pentru x, y fixați, putem scrie, notînd

$$\sup_z P^{(n-l)}(z, S) = M^{(n-l)}(S), \quad \inf_z P^{(n-l)}(z, S) = m^{(n-l)}(S)$$

$$P^{(n)}(x, S) - P^{(n)}(y, S) < \int_{S_1^{(x,y)}} [P^{(l)}(x, \mathrm{d}z) - P^{(l)}(y, \mathrm{d}z)]\, M^{(n-l)}(S) -$$

$$- \int_{S_2^{(x,y)}} [P^{(l)}(x, \mathrm{d}z)\, P^{(l)}(y, \mathrm{d}z)]\, m^{(n-l)}(S)$$

Întrucît:

$$\int_{S_1^{(x,y)}} [P^{(l)}(x, \mathrm{d}z) - P^{(l)}(y, \mathrm{d}z)] + \int_{S_2^{(x,y)}} [P^{(l)}(x, \mathrm{d}z)] - P^{(l)}(y, \mathrm{d}z)] =$$

$$= \int P^{(l)}(x, \mathrm{d}z) - \int P^{(l)}(y, \mathrm{d}z) = 1 - 1 = 0$$

rezultă:

$$P^{(n)}(x, S) - P^{(n)}(y, S) \leqslant \int_{S_1^{(x,y)}} [P^{(l)}(x, \mathrm{d}z) - P^{(l)}(y, \mathrm{d}z)] \times$$

$$\times [M^{(n-l)}(S) - m^{(n-l)}(S)]$$

dar:

$$\int_{S_1^{(x,y)}} [P^{(l)}(x, \mathrm{d}z) - P^{(l)}(y, \mathrm{d}z)] = \frac{1}{2}\left[\int_{S_1^{(x,y)}} [P^{(l)}(x, \mathrm{d}z) - P^{(l)}(y, \mathrm{d}z)] -\right.$$

$$\left. - \int_{S_2^{(x,y)}} [P^{(l)}(x, \mathrm{d}z) - P^{(l)}(y, \mathrm{d}z)]\right] = \frac{1}{2} \int | P^{(l)}(x, \mathrm{d}z) - P^{(l)}(y, \mathrm{d}z) |.$$

Cu atît mai mult:

$$P^{(n)}(x, S) - P^{(n)}(y, S) \leqslant \frac{1}{2} \sup_{x,y}. \int | P^{(l)}(x, \mathrm{d}z) -$$

$$- P^{(l)}(y, \mathrm{d}z) | \, [M^{(n-l)}(S) - m^{(n-l)}(S)].$$

Notînd cu 2 δ un număr mai mic ca 2 astfel ca:

$$\sup_{x,y}. \int | P^{(l)}(x, \mathrm{d}z) - P^{(l)}(y, \mathrm{d}z) | < 2\delta$$

inegalitatea de mai sus, în care membrul din dreapta nu depinde de x și y, implică:

$$M^{(n)}(S) - m^{(n)}(S) < \delta\, [M^{(n-l)}(S) - m^{(n-l)}(S)].$$

Pe baza acestei relaţii se deduce ca şi în prima parte a lucrării că

$$\lim_{n \to \infty} P^{(n)}(x, S) = \overline{P}(S),$$

membrul drept nedepinzînd de x şi în plus:

$$|P^{(n)}(x, S) - \overline{P}(S)| < \delta^{\left[\frac{n}{l}\right]}$$

Primită la redacţie la 31 mai 1967

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. A. RÉNYI, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. VEB Deutscher Verlag, Berlin, 1962.
2. M. LOÈVE, *Probability Theory*, D. Van Nostrand Company Inc., 3d ed., 1963.

TRANSFORMAREA LAPLACE A DISTRIBUŢIILOR

DE

C. TUDOR

În [7] s-a definit transformarea Laplace a distribuţiilor în acelaşi mod în care I. M. Ghelfand şi G. E. Şilov au definit transformarea Fourier şi s-a arătat că pentru distribuţiile care admit transformată Laplace în sensul lui L. Schwartz cele două definiţii coincid.

În cele ce urmează se face un studiu detaliat al spaţiului ($\mathfrak{L}\,\mathfrak{D}$) al transformatei Laplace de elemente din $\mathfrak{D}$ (spaţiul funcţiilor cu valori complexe definite pe R^1, indefinit derivabile şi cu suportul compact). După ce se defineşte ca şi în [7] transformarea Laplace ca o aplicaţie liniară şi continuă de la $\mathfrak{D}'$ la $(\mathfrak{L}\,\mathfrak{D})'$, precum şi transformarea Laplace inversă de la $(\mathfrak{L}\,\mathfrak{D})'$ la $\mathfrak{D}'$ se studiază proprietăţile acestor transformări. În cele din urmă se consideră transformarea Laplace a distribuţiilor definite pe $\mathfrak{D}\,(R^n)$.

1. TRANSFORMAREA LAPLACE A FUNCŢIILOR DIN SPAŢIUL $\mathfrak{D}$

Fie $\mathfrak{D}$ spaţiul funcţiilor cu valori complexe definite pe R^1 indefinit derivabile şi cu suport compact şi $\mathfrak{D}'$ dualul său, spaţiul distribuţiilor.

Transformata Laplace a unui element oarecare $\varphi \in \mathfrak{D}$ se defineşte cu ajutorul formulei

$$\psi(\sigma + i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx}\,\varphi(x)\,dx, \tag{1}$$

unde $s = \sigma + i\tau$ este variabilă complexă. Rezultă că $\psi(s)$ este o funcţie analitică întreagă. Vom scrie încă:

$$\psi(s) = (\mathfrak{L}\,\varphi)(s). \tag{2}$$

Evident că

$$(\mathfrak{L}\,\varphi)^{(k)}_{(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} (-x)^k e^{-sx}\,\varphi(x)\,dx = (-1)^k\,[\mathfrak{L}(x^k\varphi)](s). \tag{3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 10, P. 1521–1536, BUCUREŞTI, 1967

Deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-sx}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-sx}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} s\,\mathrm{e}^{-sx}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

rezultă că

$$(\mathfrak{L}\,\varphi')(s) = s\,(\mathfrak{L}\varphi)(s)$$

şi în mod analog

$$(\mathfrak{L}\varphi^{(k)})(s) = s^k(\mathfrak{L}\,\varphi)(s) \tag{4}$$

sau şi mai general

$$\left(\mathfrak{L}\left[P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\varphi\right]\right)(s) = P(s)\,(\mathfrak{L}\,\varphi)\,(s), \tag{5}$$

unde $P(t)$ este un polinom arbitrar cu coeficienţi constanţi. Totodată obţinem inegalităţile :

$$|s|^q|\psi(s)| = \left|\int_{-a}^{a}\varphi^{(q)}(x)\,\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant C_q\,\mathrm{e}^{a|\sigma|}$$

dacă suportul funcţiei φ este conţinut în intervalul $(-a,\ a)$, iar $q = 0,1,2,\ldots$. Prin urmare am obţinut :

Propoziţia 1. *Dacă* $\varphi \in \mathfrak{D}$ *şi* spt $\varphi \subset (-a,\ a)$, *atunci transformata sa Laplace* $\psi(s)$ *este o funcţie analitică întreagă de variabila* $s = \sigma + i\tau$ *satisfăcînd pentru* $q = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ *inegalităţile* :

$$|s^q\,\psi(s)| \leqslant C_q\,\mathrm{e}^{a|\sigma|} \tag{6}$$

Mai departe să observăm că pentru fiecare $x \in R^1$ integrala

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\psi(s)\,\mathrm{e}^{sx}\,\mathrm{d}s$$

există pentru orice număr real b şi în plus

$$\int_{b_1-i\infty}^{b_1+i\infty}\psi(s)\,\mathrm{e}^{sx}\,\mathrm{d}s = \int_{b_2-i\infty}^{b_2+i\infty}\psi(s)\,\mathrm{e}^{sx}\,\mathrm{d}s. \tag{7}$$

Într-adevăr, din (6) cu $q = 0{,}2$ obţinem :

$$(1+|s|^2)\,|\psi(s)| \leqslant (C_0 + C_2)\,\mathrm{e}^{a|\sigma|}$$

aşa că dacă $s = b + i\,\tau$,

$$|\psi(s)| \leqslant \frac{C_0 + C_2}{1+|s|^2}\,\mathrm{e}^{a|b|} \leqslant \frac{C_{02}\,\mathrm{e}^{a|b|}}{1+\tau^2}.$$

Deci pentru orice număr $c > 0$,

$$\left|\int_{b-ic}^{b+ic}\psi(b+i\,\tau)\,\mathrm{e}^{(b+i\tau)x}\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \mathrm{e}^{bx}\int_{-c}^{c}|\psi\,(b+i\,\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_{02}\mathrm{e}^{bx+a|b|}\int_{-c}^{c}\frac{\mathrm{d}\tau}{1+\tau^2} < C_{02}\,\mathrm{e}^{bx+a|b|}\,\pi.$$

Aplicînd teorema lui Cauchy cu $c > 0$ arbitrar și $b_1 < b_2$

$$(8) \qquad \int_{b_1-ic}^{b_1+ic} \psi(s)\,e^{sx}\,ds + \int_{b_1+ic}^{b_2+ic} \psi(s)\,e^{sx}\,ds + $$
$$+ \int_{b_2+ic}^{b_2-ic} \psi(s)\,e^{sx}\,ds + \int_{b_2-ic}^{b_1-ic} \psi(s)\,e^{sx}\,ds = 0.$$

Însă

$$\left|\int_{b_1+ic}^{b_2+ic} \psi(s)\,e^{sx}\,ds\right| = \left|\int_{b_1+ic}^{b_2+ic} \psi(\sigma+ic)\,e^{(\sigma+ic)x}\,d\sigma\right| =$$
$$= \left|\int_{b_1+ic}^{b_2+ic} \psi(\sigma+ic)\,e^{\sigma x}\,d\sigma\right| \leqslant (b_2-b_1) \sup_{\sigma\in[b_1,\,b_2]} |\psi(\sigma+ic)e^{\sigma x}|.$$

Folosind din nou (6) pentru $q = 0{,}2$ avem:

$$\left|\int_{b_1+ic}^{b_2+ic} \psi(s)\,e^{sx}\,ds\right| \leqslant (b_2-b_1) \sup_{\sigma\in[b_1,\,b_2]} \frac{C_{02}\,e^{b|\sigma|+\sigma x}}{1+c^2}$$

și deoarece numărătorul ultimei fracții nu depinde de c, ultima integrală tinde la zero cînd $c \to \infty$.

În mod analog

$$\lim_{c\to\infty} \int_{b_2-ic}^{b_2+ic} \psi(s)\,e^{sx}\,ds = 0.$$

Deci făcînd în (8) $c \to \infty$, se obține (7).

Vom arăta acum că și reciproca propoziției 1 este adevărată, adică avem:

Propoziția 2. *Dacă* $\psi(s)$ *este o funcție analitică întreagă satisfăcînd; pentru fiecare* $q = 0, 1, 2, \ldots$, *inegalitățile* (6), *atunci ea este transformata Laplace a unei funcții* $\varphi \in \mathfrak{D}$ *cu suportul conținut în intervalul* $(-a, a)$.

Demonstrație. Vom arăta că

$$(9) \qquad \varphi(x) = (\mathfrak{L}^{-1}\,\psi(s))(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \psi(s)\,e^{sx}\,ds,$$

b fiind un număr real oarecare și $s = b + i\tau$.

După cum am văzut mai înainte, integrala din (9) există pentru fiecare x real și valoarea ei nu depinde de b.

În plus

$$|\varphi(x)| \leqslant \tilde{C}\,e^{bx+a|b|}.$$

Luăm x așa încît $|x| > a$ și $t > 0$ apoi găsim b din condiția $xb = -t\,|x|$. Deci

$$|\varphi(x)| \leqslant \tilde{C}\,e^{-t|x|+at} = \tilde{C}\,e^{t(a-|x|)}.$$

Cum $\widetilde{C}$ nu depinde de t, făcînd $t \to \infty$ obținem $\varphi(x) = 0$ adică spt $\varphi \subset (-a, a)$. Deoarece φ este indefinit derivabilă, urmează că $\varphi \in \mathfrak{D}$.

Notînd cu $(\mathfrak{F}\varphi)(s)$ transformata Fourier a funcției φ, din (1) se obține că

$$(\mathfrak{L}\varphi)(s) = (\mathfrak{F}\varphi)(is). \tag{10}$$

Să considerăm acum funcția $h(s) = \psi(-is)$. Rezultă că $h(s)$ este o funcție analitică întreagă care satisface inegalitățile

$$|s^q h(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|}, \qquad q = 0, 1, 2, \ldots$$

adică $h \in (\mathfrak{F}\mathfrak{D})$ — spațiul funcțiilor analitice întregi care sînt transformate Fourier de funcții din $\mathfrak{D}$. Prin urmare

$$\mathfrak{F}^{-1} h(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma + ib)\, e^{-i(\sigma+ib)x}\, d\sigma =$$

$$= \frac{e^{bx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(b - i\sigma)\, e^{-i\sigma x}\, d\sigma = \frac{e^{bx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(b + i\tau)\, e^{i\tau x}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \psi(s)\, e^{sx}\, ds = \varphi(x)$$

așa că

$$(\mathfrak{L}\varphi)(s) = (\mathfrak{F}\varphi)(is) = \mathfrak{F}[\mathfrak{F}^{-1} h(s)](is) = h(is) = \psi(s).$$

Deci funcția ψ este transformata Laplace a funcției $\varphi \in \mathfrak{D}$ definită de (9).

2. SPAȚIUL $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$

Studiul transformării Laplace pentru funcțiile din spațiul $\mathfrak{D}$ întreprins la punctul precedent a condus la următoarea definiție :

Spațiul tuturor funcțiilor analitice întregi $\psi(s)$ care satisfac la inegalitățile

$$|s^q \psi(s)| \leqslant C_q e^{a|\sigma|}, \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

(unde constantele C_q și a depind de funcția ψ) cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire cu scalari va fi notat $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$. După cum s-a arătat la punctul 1, transformarea Laplace stabilește o corespondență biunivocă între spațiile $\mathfrak{D}$ și $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$, corespondență care este, evident, și liniară.

Rezultă că fiecărei operații liniare definită în spațiul $\mathfrak{D}$ îi corespunde o operație liniară „duală" definită în spațiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$. Astfel, operației de derivare în spațiul $\mathfrak{D}$ îi corespunde, conform formulei (4) de la punctul precedent, înmulțirea cu s în spațiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$.

De altă parte formula (3) de la același punct ne arată că operației de înmulțire cu $-x$ în spațiul $\mathfrak{D}$ îi corespunde operația de derivare în $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$; din existența membrului drept al relației (3) rezultă că funcția

$\psi(s) = (\mathfrak{L}\varphi)(s)$ este indefinit derivabilă și spațiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$ este închis în raport cu operația de derivare. Din aceeași formulă se deduce că

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)(\mathfrak{L}\varphi) = \mathfrak{L}[P(-x)\varphi], \tag{2}$$

unde $P(t)$ este un polinom arbitrar cu coeficienți constanți.

Deoarece

$$[\mathfrak{L}\varphi(x-h)](s) = \mathrm{e}^{-sh}(\mathfrak{L}\varphi)(s) \tag{3}$$

urmează că operației de translație $\varphi(x) \to \varphi(x-h)$ din spațiul $\mathfrak{D}$ îi corespunde operația de înmulțire cu e^{-sh} în spațiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$. Invers, operației de înmulțire cu e^{-hx} (h — complex) din spațiul $\mathfrak{D}$ îi corespunde operația de translație în spațiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$:

$$[\mathfrak{L}(\mathrm{e}^{-hx}\varphi(x))](s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-hx}\,\mathrm{e}^{-sx}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (\mathfrak{L}\varphi)(s+h). \tag{4}$$

În spațiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$ introducem următoarea relație de convergență : șirul $\{\psi_n\}_1^\infty$ de elemente din $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$ converge către zero, dacă

$$|s^q\psi_n(s)| \leqslant C_q\,\mathrm{e}^{a|\sigma|}, \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots),$$

unde a și C_q nu depind de n, iar șirul funcțiilor $\psi_n(\tau)$ converge uniform pe orice segment al axei reale.

În același fel ca la transformarea Fourier se poate arăta că dacă $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$ este înzestrat cu această relație de convergență, operatorii $\mathfrak{L}$ și $\mathfrak{L}^{-1}$ sînt continui.

Deoarece

$$\sum_{q=0}^{\infty} (-x)^q \frac{h^q}{q!}\varphi(x) = \mathrm{e}^{-sh}\varphi(x)$$

în sensul convergenței din $\mathfrak{D}$, are loc dezvoltarea în serie Taylor, pentru fiecare h complex :

$$\sum_{q=0}^{\infty} \psi^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!} = \psi(s+h). \tag{5}$$

Evident că dacă $\psi \in (\mathfrak{L}\mathfrak{D})$, oricare ar fi numărul real b, funcția de τ, $\psi(b + i\tau) \in \mathfrak{S}$.

Într-adevăr, dacă $s = b + i\tau$ și $\psi = \mathfrak{L}\varphi$:

$$|\tau^2\psi^{(k)}(b+i\tau)| \leqslant |s^q\,\mathfrak{L}[x^k\varphi(x)]| = |\mathfrak{L}(x^k\varphi)^{(q)}| \leqslant C\mathrm{e}^{a|b|} = C_{k,q}.$$

De altă parte singura funcție $\psi \in (\mathfrak{L}\mathfrak{D})$ pentru care $h(\tau) = \psi(b + i\tau) \in \mathfrak{D}$ este funcția $\psi \equiv 0$ întrucît ψ este funcție analitică întreagă.

3. FUNCŢIONALE PE SPAŢIUL $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$

Pe spaţiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$ ca şi pe spaţiul $\mathfrak{D}$ se pot defini funcţionale liniare şi continue – distribuţii.

O funcţională regulată definită de o funcţie g, este dată de formula

$$(1) \qquad < \psi, g > = i \int_{-\infty}^{\infty} \psi(i, \tau)\, \overline{g(i\tau)}\, \mathrm{d}\tau.$$

O funcţională analitică definită de o funcţie g, este dată de formula

$$(2) \qquad <\psi,\ g> = \int_{\Gamma} \psi(s)\, g(s)\, \mathrm{d}s,$$

unde Γ este un anumit contur.

Se poate considera funcţionala lui Dirac definită prin formula

$$< \psi,\ \delta_h > = \psi(h),$$

unde h este un număr complex oarecare. Deoarece cu formula lui Cauchy

$$\psi(h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(s)}{s - h}\, \mathrm{d}s,$$

unde Γ este un contur care conţine în interior punctul h, distribuţia lui Dirac este o funcţională analitică fiind definită de funcţia

$$g_h(s) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{s - h}.$$

Se observă imediat că

$$\overline{(s - h)}\ \delta_h = 0.$$

Pentru $h = 0$ notăm $\delta_0 = \delta$. Avem deci

$$< \psi, \delta > = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(s)}{s}\, \mathrm{d}s,$$

unde Γ poate fi luat, de exemplu, circumferinţa $|s| = 1$.

Vom nota cu $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$ mulţimea funcţionalelor liniare şi continue definite pe spaţiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$.

În mulţimea $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$ se pot introduce diferite operaţii analog ca în spaţiul $\mathfrak{D}'$. Evident că definirea operaţiilor liniare-adunare şi înmulţirea cu numere şi chiar trecerea la limită—nu conţin nimic nou. La fel vom defini înmulţirea cu o funcţie $h(s)$:

$$(3) \qquad < \psi,\ hg > = < h\psi,\ g >$$

pentru acele funcţii $h(s)$ care au proprietatea că produsul lor cu orice funcţie din $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$ dau funcţii din $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$. Astfel de funcţii sînt numite *multiplicatori în* $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$. Ele trebuie să fie funcţii analitice întregi şi să satisfacă inegalităţi de forma :

$$|h(s)| \leqslant C e^{b|\sigma|}(1 + |s|)^q \tag{4}$$

cu b, C şi q nişte constante depinzînd de h.

Un şir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge în $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$ dacă, pentru orice n, $f_n \in (\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$ şi pentru orice $\psi \in (\mathfrak{L}\mathfrak{D})$, şirul $\{< \psi, f_n >\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Se poate arăta că $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$ este complet în raport cu această convergenţă.

Derivata funcţionalei $g \in (\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$ se defineşte cu ajutorul formulei

$$< \psi, \frac{dg}{ds} > = - < \frac{d\psi}{ds}, g > \tag{5}$$

ceea ce ne arată că, la fel ca şi în $\mathfrak{D}'$, elementele lui $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$ sînt indefinit derivabile.

Spre deosebire de $\mathfrak{D}'$ însă, elementele lui $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$ sînt şi analitice. Într-adevăr, pentru orice $\psi \in (\mathfrak{L}\mathfrak{D})$

$$< \psi(s), g^{(q)}(s) \frac{h^q}{q!} > = < \frac{(-1)^q h^q}{q!} \psi^{(q)}(s), g(s) >$$

iar seria $\sum\limits_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q h^q}{q!} \psi^{(q)}(s)$ converge în $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$ după cum am văzut, către $\psi(s-h)$. Deci

$$< \psi(s), \sum_{q=0}^{\infty} g^{(q)}(s) \frac{h^q}{q!} > = < \psi(s-h), g(s) > = < \psi(s), g(s+h) >$$

adică

$$\sum_{q=0}^{\infty} g^{(q)}(s) \frac{h^q}{q!} = g(s+h). \tag{6}$$

În particular avem :

$$\delta(s+h) = \sum_{q=0}^{\infty} \delta^{(q)}(s) \frac{h^q}{q!} \tag{7}$$

pentru orice h complex.

4. TRANSFORMAREA LAPLACE A DISTRIBUŢIILOR

Fie $\mathfrak{D}'_R$ spaţiul distribuţiilor cu suportul mărginit la stînga şi fie $f \in \mathfrak{D}'_R$. Să presupunem că există un număr real c astfel încît $e^{-cx} f \in \mathfrak{S}'$. În [8] şi [9] se defineşte transformata Laplace a unei astfel de distribuţii cu ajutorul relaţiei :

$$F(s) = Lf = < e^{-sx}, f(x) >, \tag{1}$$

unde partea dreaptă a egalității (1) înseamnă

$$<\lambda(x)\,e^{-(s-c)x},\ e^{-cx}f(x)> \tag{2}$$

λ fiind o funcție indefinit derivabilă cu suportul mărginit la stînga, egală cu unu pe o vecinătate a suportului lui f.

O distribuție din $\mathfrak{D}'_R$ pentru care există c real încît $e^{-cx}f \in \mathfrak{S}'$ va fi numită *(S)-transformabilă Laplace.*

(S)-transformata Laplace $F(s)$ a unei distribuții din $\mathfrak{D}'_R$ (S)-transformabilă Laplace este o funcție de s, definită pe semiplanul $\mathrm{Re}\, s > c$.

Marginea inferioară σ_1, a tuturor constantelor reale c pentru care $e^{-cx}f \in \mathfrak{S}'$ se numește *abscisă de convergență* iar semiplanul $\mathrm{Re}\, s > \sigma_1$ se numește *regiune de convergență sau semiplanul de convergență* al lui Lf. Expresia (2) nu depinde de alegerea lui c $(c > \sigma_1)$. Evident că nu toate distribuțiile din $\mathfrak{D}'_R$ sînt (S)-transformabile Laplace.

În [7] am definit transformata Laplace pentru orice distribuție din $\mathfrak{D}'$ în modul următor. Fie $f \in \mathfrak{D}'$.

DEFINIȚIE. *Elementul* $\mathfrak{L}f \in (\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$ *definit de relația* :

$$<\mathfrak{L}\varphi,\ \mathfrak{L}f> = 2\pi i < \check{\varphi},\ f>, \tag{3}$$

unde $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ *se numește tansformata Laplace a distribuției* f.

Evident că $\mathfrak{L}$ este o transformare liniară și continuă de la spațiul $\mathfrak{D}'$ la spațiul $(\mathfrak{L}\,\mathfrak{D})'$.

Transformarea inversă $\mathfrak{L}^{-1}$ definită pe $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$ cu valori în $\mathfrak{D}'$ va fi dată de formula :

$$<\varphi,\ \mathfrak{L}^{-1}g> = \frac{1}{2\pi i} < \mathfrak{L}\,\check{\varphi},\ g>,\quad g \in (\mathfrak{L}\,\mathfrak{D})' \tag{4}$$

și va fi o transformare liniară și continuă de la spațiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$ la spațiul $\mathfrak{D}'$.

Egalitățile :

$$\mathfrak{L}^{-1}\,(\mathfrak{L}f) = f,\ f \in \mathfrak{D}'$$

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{L}^{-1}g) = g,\quad g \in (\mathfrak{L}\,\mathfrak{D})'$$

se verifică ușor. De exemplu, pentru orice $\varphi \in \mathfrak{D}$

$$<\mathfrak{L}\,\varphi,\ \mathfrak{L}(\mathfrak{L}^{-1}g)> = 2\pi i < \check{\varphi},\ \mathfrak{L}^{-1}g> = <\mathfrak{L}\,\varphi, g>.$$

Mai departe vom da următoarea

PROPOZIȚIE. *Dacă* $f \in \mathfrak{D}'$, *atunci au loc relațiile următoare* :

$$\mathfrak{L}\,[f^{(k)}] = s^k \mathfrak{L} f \tag{5}$$

$$\mathfrak{L}\,[x^k f] = (-1)^k (\mathfrak{L} f)^{(k)} \tag{6}$$

$$\mathfrak{L}\,[f(x-h)] = e^{-sh}\,\mathfrak{L} f \tag{7}$$

$$\mathfrak{L}\,[e^{-hx} f] = (\mathfrak{L} f)(s+h). \tag{8}$$

Demonstrație. Pentru orice $\varphi \in \mathfrak{D}$,

$$< \mathfrak{L}\varphi,\ \mathfrak{L}f^{(k)} > = 2\pi i < \check{\varphi},\ f^{(k)} > =$$

$$= 2\pi i\ (-1)^k < \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\check{\varphi},\ f > = 2\pi i < \check{\varphi}^{(k)},\ f > =$$

$$= < \mathfrak{L}\varphi^{(k)},\ \mathfrak{L}f > = < s^k\,\mathfrak{L}\varphi,\ \mathfrak{L}f > = < \mathfrak{L}\varphi,\ s^k\,\mathfrak{L}f >.$$

s^k fiind evident multiplicator în spațiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$, rezultă că relația (5) e adevărată. Mai departe

$$< \mathfrak{L}\,\varphi,\ \mathfrak{L}\,[x^k\ f] > = 2\pi\, i < \check{\varphi},\ x^k\ f > =$$

$$= 2\pi\, i\,(-1)^k < (-x)^k\,\check{\varphi}\, f > = (-1)^k < \mathfrak{L}\,(x^k\ \varphi),\ \mathfrak{L}f > =$$

$$= < (\mathfrak{L}\ \varphi)^{(k)},\ \mathfrak{L}f > = < \mathfrak{L}\varphi\ (-1)^k\,\mathfrak{L}\,f^{(k)} >$$

adică relația (6).

Observînd că e^{-sh} este multiplicator în spațiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$ pentru fiecare h și

$$< \mathfrak{L}\,\varphi,\ \mathfrak{L}f\,(x-h) > = 2\pi i < \check{\varphi}\ ,\ f\,(x-h) > =$$

$$= 2\pi i < \varphi\,(h-x),\ f\,(x) > = 2\pi i < \varphi\,(-\,[x-h]),\ f\,(x) > =$$

$$= < \mathfrak{L}\,\varphi\,(x-h),\ \mathfrak{L}f > = < \mathrm{e}^{-sh}\,\mathfrak{L}\,\varphi,\ \mathfrak{L}f > = < \mathfrak{L}\varphi,\ \mathrm{e}^{-sh}\,\mathfrak{L}f >$$

rezultă relația (7).

În sfîrșit,

$$< \mathfrak{L}\,\varphi, \mathfrak{L}(\mathrm{e}^{-\alpha x}f) > = 2\pi i < \check{\varphi},\ \mathrm{e}^{-\alpha x}f > = 2\pi i < \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\check{\varphi}, f > =$$

$$= < \mathfrak{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\ \varphi),\ \mathfrak{L}f > = < (\mathfrak{L}\varphi)\,(s-\alpha),\ \mathfrak{L}f > = < (\mathfrak{L}\varphi)\,(s),\ (\mathfrak{L}f)\,(s+\alpha) >$$

de unde rezultă relația (8).

Deoarece

$$< \mathfrak{L}\varphi,\ \mathfrak{L}\delta > = 2\pi i < \check{\varphi}\ ,\ \delta > = 2\pi i\,\varphi\ (0) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\psi(s)\,\mathrm{e}^{sx}\,\mathrm{d}s\right)(0) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\psi(s)\ \mathrm{d}s = < \mathfrak{L}\varphi,\ 1 >$$

urmează că

$$\mathfrak{L}\delta = 1.$$

Dacă h este un număr real și k un întreg pozitiv

$$\mathfrak{L}\delta\,(x-h) = \mathrm{e}^{-sh}$$

$$\mathfrak{L}\delta^{(k)}\,(x) = s^k$$

$$\mathfrak{L}\delta^{(k)}\,(x-h) = \mathrm{e}^{-sh}\,s^k$$

Să calculăm acum $\mathcal{L}[1]$. Avem :

$$< \mathcal{L}\varphi, \mathcal{L}[1] > = 2\pi i < \check{\varphi}, 1 > = 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-0\cdot x}\mathrm{d}x = 2\pi i\,\psi(0) = 2\pi i < \mathcal{L}\varphi, \delta >$$

așa că

$$\mathcal{L}[1] = 2\pi i\,\delta.$$

Putem calcula și transformata Laplace a unui polinom :

$$\mathcal{L}P(x) = \mathcal{L}[P(x)\cdot 1] = P\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)\mathcal{L}[1] = 2\pi i\,P\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)\mathcal{L}[1].$$

Fie mai departe $f \in \mathfrak{D}'_R$ o distribuție (S)-transformabilă Laplace și $F(s)$ transformata sa Laplace în sensul lui L. Schwartz cu abscisa de convergență σ_1 adică

$$F(s) = < \mathrm{e}^{-sx}, f(x) >, \qquad \mathrm{Re}\, s > \sigma_1.$$

Dacă notăm cu $\mathcal{L}f$ elementul din $(\mathcal{L}\mathfrak{D})'$, dat de relația (3) de la începutul acestui punct, are loc următoarea :

TEOREMĂ. *$\mathcal{L}f$ este o funcțională analitică pe $(\mathcal{L}\mathfrak{D})$, dată de funcția $F(s)$, adică pentru orice $\psi \in (\mathcal{L}\mathfrak{D})$,*

$$< \psi, \mathcal{L}f > = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \psi(s)\,F(s)\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

Demonstrație. Vom arăta mai întîi că dacă $f \in \mathfrak{D}'_R$ este o distribuție (S)-transformabilă Laplace și (S)-transformata sa Laplace este $F(s)$, atunci

$$|F(s)| \leqslant \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{Re}\,s} P(|s|), \qquad \mathrm{Re}\, s > \sigma_1, \tag{10}$$

unde $P(t)$ este un polinom cu coeficienții nenegativi iar

$$\mathrm{spt}\, f \subset (a, +\infty).$$

Într-adevăr, σ_1 fiind abscisa de convergență a (S)-transformatei Laplace a lui f avem :

$$F(s) = < \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-(s-c)x}, \mathrm{e}^{-cx} f(x) > \tag{11}$$

pentru $\mathrm{Re}\, s > c > \sigma_1$. Întrucît pentru orice distribuție $g \in \mathcal{L}'$ există o constantă C_0 și un întreg nenegativ r așa încît oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{L}$

$$|< \varphi, g >| \leqslant C_0 \sup_x |(1+x^2)^r \varphi^{(r)}(x)|, \qquad C_0 = C_0(g)$$

urmează că :

$$|F(s)| \leqslant C_1 \sup_{x \in (a, +\infty)} |(\lambda(x)\,\mathrm{e}^{-(s-c)x})^{(r)}|$$

deoarece $e^{-cx}f \in \mathcal{S}'$. Prin urmare

$$|F(s)| \leqslant C_f \sup_{x \in (a, +\infty)} |\lambda(x)\,(c-s)^r\, e^{-(s-c)x}| =$$

$$= C_f\,|(s-c)^r| \sup_{x \in (a, +\infty)} e^{-(\operatorname{Re} s - c)x} \leqslant C_f\, e^{-(\operatorname{Re} s - c)a}\, |(s-c)^r| \leqslant e^{-a \operatorname{Re} s}\, P(|s|),$$

unde

$$P(|s|) = C_f\, e^{ac} \sum_{k=0}^{r} C_r^k\, |c|^{r-k}\, |s|^k.$$

Cum

$$P(|s|)\,|\psi(s)| \leqslant C'' \frac{e^{d\,|\operatorname{Re} s|}}{1+|s|^2}$$

$$\left| \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \psi(s)\,F(s)\,\mathrm{d}s \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(b+i\tau)|\,|F(b+i\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$\leqslant e^{-ab} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(b+i\tau)|\, P(|b+i\tau|)\,\mathrm{d}\tau \leqslant C''\, e^{-ab+d\,|b|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tau}{1+\tau^2} < +\infty$$

adică integrala din (3) este convergentă pentru orice $b > \sigma_1$. În plus, dacă $b_1,\ b_2 > \sigma_1$, pentru orice $\psi \in (\mathfrak{L}\mathfrak{D})$

$$\int_{b_1-i\infty}^{b_1+i\infty} \psi(s)\,F(s)\,\mathrm{d}s = \int_{b_2-i\infty}^{b_2+i\infty} \psi(s)\,F(s)\,\mathrm{d}s$$

după cum se poate constata folosind teorema lui Cauchy la fel ca la demonstrarea relației (7) de la punctul 1.

Mai departe, să demonstrăm formula (9). Avem :

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \psi(s)\,F(s)\,\mathrm{d}s = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \psi(s) < \lambda(x)\,e^{-(s-b)x},\ e^{-bx}f(x) > \mathrm{d}s.$$

Întrucît funcția $h(\tau) = \psi(b+i\tau)$ este o funcție din $\mathcal{S}$ urmează că funcția de două variabile

$$\chi(x, \tau) = \lambda(x)\ \psi(b+i\tau)\ e^{-i\tau x} \in \mathcal{S}_{x,\tau},$$

unde $\mathcal{S}_{x,\tau}$ este spațiul funcțiilor de două variabile x, τ, cu descreștere rapidă.

Întrucît produsul direct al distribuțiilor este comutativ, notînd $e^{-bx}f(x) = g(x)$, obținem :

$$< \chi(x, \tau),\ 1(\tau) \times g(x) > = < < \chi(x, \tau),\ g(x) >,\ 1(\tau) > =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} < \chi(x, \tau),\ g(x) > \mathrm{d}\tau,$$

unde am notat cu $1\ (\tau)$ distribuția definită de funcția $1\ (\tau) = 1$, pentru orice $\tau \in R^1$ și

$$< \chi(x, \tau),\ g(x) \times 1(\tau) > = < < \chi(x, \tau),\ 1(\tau) >,\ g(x) > =$$

$$= < \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, \tau)\,\mathrm{d}\tau,\ g(x) >.$$

Prin urmare

$$\int_{-\infty}^{\infty} < \chi(x, \tau), g(x) > \mathrm{d}\tau = < \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, \tau)\, \mathrm{d}\tau, g(x) >. \tag{12}$$

Deci

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \psi(s)\, F(s)\, \mathrm{d}s = i \int_{-\infty}^{\infty} \psi(b + i\tau) < \lambda(x)\, \mathrm{e}^{-i\tau x}, \mathrm{e}^{-bx} f(x) > \mathrm{d}\tau =$$

$$= i < \lambda(x)\, \mathrm{e}^{bx} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(b + i\tau)\, \mathrm{e}^{-(b+i\tau)x}\, \mathrm{d}\tau, \mathrm{e}^{-bx} f(x) > =$$

$$= 2\pi i < \lambda \check{\varphi}, f > = 2\pi i < \check{\varphi}, f > = < \mathfrak{L}\varphi, \mathfrak{L}f >$$

aşa că se obţine relaţia (9).

5. TRANSFORMAREA LAPLACE ŞI PRODUSUL DE CONVOLUŢIE AL DISTRIBUŢIILOR

Fie $h \in (\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$. Vom demonstra următoarea :

PROPOZIŢIE. *Dacă h este o funcţională regulată definită de o funcţie $h(i\tau)$-multiplicator în $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$, atunci distribuţia $g = \mathfrak{L}^{-1} h$ este convolubilă în $\mathfrak{D}'$ si are loc egalitatea*

$$\mathfrak{L}(g \ast f) = \mathfrak{L}g \cdot \mathfrak{L}f \tag{1}$$

oricare ar fi $f \in \mathfrak{D}'$.

Demonstraţie. Să arătăm mai întîi că distribuţia $g = \mathfrak{L}^{-1} h$ este convolubilă. Pentru orice $\varphi \in \mathfrak{D}$, avem

$$< \varphi(x - \xi), g(\xi) > = \frac{1}{2\pi i} < \mathfrak{L}\varphi(x + \xi), \mathfrak{L}g > =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} < \mathrm{e}^{i\tau x} \mathfrak{L}\varphi, \mathfrak{L}g > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\tau x}\, \overline{h(i\tau)}\, (\mathfrak{L}\varphi)(i\tau)\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= [\mathfrak{L}^{-1}(\bar{h}\, \mathfrak{L}\varphi)](-x).$$

Cum $\bar{h}\, \mathfrak{L}\varphi \in (\mathfrak{L}\mathfrak{D})$, rezultă că $\mathfrak{L}^{-1}(\bar{h}\, \mathfrak{L}\varphi) \in \mathfrak{D}$ deci funcţia

$$\psi(x) = < \varphi(x - \xi), g(\xi) >$$

aparţine lui $\mathfrak{D}$.

Dacă $\varphi_n \to 0$ în $\mathfrak{D}$, atunci $\mathfrak{L}\varphi_n \to 0$ în spaţiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$ şi deci $\bar{h}\, \mathfrak{L}\varphi_n \to 0$ în $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$ de unde rezultă că $\mathfrak{L}^{-1}(\bar{h}\, \mathfrak{L}\varphi_r) \to 0$ în spaţiul $\mathfrak{D}$.

Deci distribuţia g este convolubilă în spaţiul $\mathfrak{D}'$. Mai mult, am văzut că

$$\mathfrak{L}\check{\psi} = \bar{h}\, \mathfrak{L}\varphi. \tag{2}$$

În sfîrşit, oricare ar fi distribuţia $f \in \mathfrak{D}'$, avem :

$$< \mathfrak{L}\varphi, \mathfrak{L}(g * f) > = 2\pi i < \varphi(-\xi), (g * f)(\xi) > =$$
$$= 2\pi i << \varphi(x-\xi), g(\xi) >, f(x) > = 2\pi i < \psi, f > =$$
$$= < \mathfrak{L}\check{\psi}, \mathfrak{L}f > = < \overline{h}\,\mathfrak{L}\varphi, \mathfrak{L}f > = < \mathfrak{L}\varphi, h\,\mathfrak{L}f >$$

de unde rezultă egalitatea (1).

COROLARUL 1. *Dacă g este o distribuţie cu suport mărginit, atunci*

(3) $$\mathfrak{L}(g * f) = \mathfrak{L}g \cdot \mathfrak{L}f$$

oricare ar fi $f \in \mathfrak{D}'$.

Într-adevăr, am văzut că dacă o distribuţie g este cu suportul mărginit, transformata sa Laplace este un multiplicator în spaţiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$.

În cazul cînd $f, g \in \mathfrak{D}'_R$, sînt (S)-transformabile Laplace iar (S)-transformatele lor Laplace $F(s)$, $G(s)$ au abscisele de convergenţă, σ_f, σ_g respectiv, atunci $\mathfrak{L}(f * g)$ este o funcţională analitică pe spaţiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$ definită de funcţia $F(s)\,G(s)$ adică :

(4) $$< \psi, \mathfrak{L}(f * g) > = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \psi(s)\, F(s)\, G(s)\, \mathrm{d}s$$

cu

$$b > \max(\sigma_f, \sigma_g) \text{ şi } \psi \in (\mathfrak{L}\mathfrak{D}).$$

COROLARUL 2. *Dacă f este o distribuţie cu suport compact, transformata sa Laplace este o distribuţie regulată dată de funcţia*

(5) $$F(s) = < \varphi, f >,$$

unde $\varphi(x) = \mathrm{e}^{sx}$ pe o vecinătate a suportului lui f.

Într-adevăr, n-avem decît să observăm că dacă f este cu suport mărginit, $\mathrm{e}^{-cx} f$ este cu suport mărginit oricare ar fi c real aşa că f este (S)-transformabilă Laplace.

În plus folosind şi relaţia (11) se deduce că $F(s)$ este un multiplicator pe $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$.

6. EXEMPLU DE DISTRIBUŢIE DIN $\mathfrak{D}'_+$ CARE NU ESTE (S)-TRANSFORMABILĂ LAPLACE

Fie

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{n^2} \delta(x-n) \in \mathfrak{D}'_+ .$$

Vom arăta că oricare ar fi c real, distribuţia $\mathrm{e}^{-cx} f \notin \mathfrak{S}'$.

Întrucît

$$\mathrm{e}^{-cx} f = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{n^2 - cn} \delta(x-n)$$

și $e^{-x^2+cx} \in \mathfrak{S}$, dacă $e^{-cx} f$ ar aparține spațiului $\mathfrak{S}'$ am avea :

$$< e^{-x^2+cx}, e^{-cx} f > = < e^{-x^2+cx}, \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2-cn}\, \delta(x-n) > =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2-cn} < e^{-x^2+cx}, \delta(x-n) > = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2-cn} \cdot e^{-n^2+cn}$$

or se vede că ultima serie nu este convergentă.

Să calculăm acum transformata Laplace a distribuției f în sensul definiției date de noi :

$$\mathfrak{L} f = \mathfrak{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2}\, \delta(x-n) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2}\, \mathfrak{L}\, \delta(x-n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2} \cdot e^{-ns}$$

Deci :

$$\mathfrak{L} f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2} \cdot e^{-ns},$$

ultima serie fiind convergentă în spațiul $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})'$.

7. TRANSFORMAREA LAPLACE PENTRU DISTRIBUȚII PE $\mathfrak{D}(R^m)$

Se poate introduce transformarea Laplace și pentru distribuții pe $\mathfrak{D}(R^m)$. Dacă $\varphi \in \mathfrak{D}(R^m)$, atunci transformata Laplace $\mathfrak{L}\varphi$ a lui φ este dată de formula

$$(1) \qquad (\mathfrak{L}\varphi)(s_1, s_2, \ldots, s_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_m t_m)} \cdot$$

$$\cdot\, \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_m ,$$

$s_1, s_2, \ldots, s_m$ fiind variabile complexe.

Vom nota cu $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$ spațiul funcțiilor $\psi(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ care sînt transformate Laplace ale funcțiilor $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ din $\mathfrak{D}(R^m)$. Funcțiile $\psi(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ definite în spațiul complex m-dimensional C^m sînt continue și analitice în $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$. Dacă φ este identic nulă pentru $|t_k| > a_k$, $(1 \leqslant k \leqslant m)$, transformata sa Laplace $\psi(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ satisface inegalitățile :

$$(2) \qquad | s_1^{q_1} s_2^{q_2} \ldots s_m^{q_m}\, \psi(\sigma_1 + i\tau_1, \ldots, \sigma_m + i\tau_m) | \leqslant C_q\, e^{a_1 |\sigma_1| + \cdots + a_m |\sigma_m|}.$$

Invers, orice funcție întreagă $\psi(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ satisfăcînd inegalitățile (2), este transformată Laplace a unei funcții $\psi(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \mathfrak{D}(R^m)$, care se anulează identic pentru

$$|t_k| > a_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Dacă f este o distribuție (scalară) pe R^m, transformata sa Laplace $\mathfrak{L}^f$ este o funcțională definită pe $(\mathfrak{L}\mathfrak{D})$ prin formula

$$(3) \qquad < \mathfrak{L}\varphi, \mathfrak{L}f > = (2\pi i)^m < \check{\varphi}, f >.$$

De exemplu, distribuţia lui Dirac are ca transformată Laplace tot unitatea, dar

$$\mathcal{L}(1) = (2\pi i)^m \, \delta(s_1, s_2, \ldots, s_m).$$

Se păstrează de asemenea proprietăţile generale ale transformării Laplace, adaptate însă la cazul mai multor variabile. Astfel au loc formulele :

$$(4) \qquad P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial s_m}\right) \mathcal{L}f = \mathcal{L}\,[P(-it_1, -it_2, \ldots, -it_m)f]$$

$$(5) \qquad \mathcal{L}\left[P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_m}\right) f\right] = P(s_1, s_2, \ldots, s_m)\, \mathcal{L}f$$

$$(6) \qquad \mathcal{L}\,[f(t_1 - h_1, t_2 - h_2, \ldots, t_m - h_m)] = e^{-s_1h_1 - s_2h_2 - \cdots - s_mh_m}\, \mathcal{L}f$$

$$(7) \qquad \mathcal{L}\,[e^{-h_1t_1 - h_2t_2 - \cdots - h_mt_m} f(t_1, t_2, \ldots, t_m)] = (\mathcal{L}f)\,(s_1 + h_1, s_2 + h_2, \ldots, s_m + h_m)$$

analoge formulelor (5)—(8) din secţiunea 4.

Dacă f este o distribuţie pe $\mathcal{D}(R^m)$, iar g o distribuţie pe $\mathcal{D}(R^n)$, are loc formula

$$(8) \qquad \mathcal{L}(f \times g) = \mathcal{L}f \times \mathcal{L}g$$

unde $f \times g$ este produsul direct al distribuţiilor f şi g.

Notînd cu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un punct oarecare din $\mathcal{D}(R^m)$ şi cu $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ un punct din $\mathcal{D}(R^n)$ avem :

$$< \varphi(x, y), f \times g > \; = \; < < \varphi(x, y), f(x) >, g(y) >$$

şi

$$< \mathcal{L}\varphi, \mathcal{L}(f \times g) > \; = (2\pi i)^{m+n} < \check{\varphi}, f \times g >.$$

Întrucît orice funcţie $\varphi(x, y)$ indefinit derivabilă şi cu suport compact este limita unui şir de combinaţii liniare finite de forma

$$\chi(x, y) = \sum_k \varphi_k(x)\, \psi_k(y)$$

vom stabili formula (8) pentru astfel de funcţii.

Avem

$$< \mathcal{L}\chi, \mathcal{L}(f \times g) > \; = (2\pi i)^{m+n} < \sum_k \varphi_k(-x)\, \psi_k(-y), (f \times g)(x, y) > \; =$$

$$= (2\pi i)^{m+n} \sum_k < \check{\varphi}_k, f(x) > < \check{\psi}_k, g(y) > \; = \sum_k < \mathcal{L}\varphi_k, \mathcal{L}f > < \mathcal{L}\psi_k, \mathcal{L}g > \; =$$

$$= \; < \sum_k \mathcal{L}\varphi_k \mathcal{L}\psi_k, \mathcal{L}f \times \mathcal{L}g > \; = \; < \mathcal{L}\chi, \mathcal{L}f \times \mathcal{L}g >$$

de unde rezultă formula (8).

Primită la redacţie la 31 mai 1967

Facultatea de matematică şi mecanică a Universităţii
din Bucureşti, Str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. Benedetto J., *The Laplace transform of generalized functions*. Canad. J. Math., **18**, 357–374 (1966).
2. Cooper J. L. B., *Laplace transformation of distribution*. Canad. J. Math., **18**, 1325–1333 (1966).
3. Cristescu Romulus şi Marinescu Gheorghe, *Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor*. Ed. Academiei, Bucureşti, 1966.
4. Garnir H. G., Munster M., *Transformation de Laplace des distributions de L. Schwartz*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, **33**, 615–631 (1964).
5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., *Обобщенные функции и действия над ними*. Москва, 1959.
6. Ishihara T., *On generalized Laplace Transforms*. Proc. Japan Acad., **37**, 556–561 (1961).
7. Marinescu G., Tudor C., *Sur la transformation de Laplace des distributions*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., *9* (1967).
8. Schwartz L., *Transformation de Laplace des distributions*. Comm. Math. Univ. Lund., tome suppl. dédié à M. Riesz, 196–206 (1952).
9. Zemanian A. H., *Distribution Theory and Transform Analysis*. Mc. Graw-Hill, 1965.

UN CRITERIU DE CONJUGARE

DE

LÁSZLÓ ZSIDÓ

Scopul acestei Note este de a da un criteriu de conjugare care amelioreazǎ criteriile date în [2], [3].

1. Reamintim că dacă (X_1, Σ_1, μ_1), (X_2, Σ_2, μ_2) sînt spații cu măsură finită, $L_1^p = L^p\ (X_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $L_2^p = L^p\ (X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ și U_1, U_2 sînt operatori unitari respectiv în L_1^2, L_2^2, spunem că U_1 și U_2 sînt conjugați dacă există un operator unitar $V : L_1^2 \to L_2^2$ astfel încît :

1) $VU_1 = U_2V$;

2) V este multiplicativ pe L_1^∞;

3) V este o izometrie a lui L_1^∞ pe L_2^∞.

Această definiție este echivalentă cu cea din [1], p. 42–45.

Dacă numai 1) este implinită, U_1 și U_2 se numesc spectral echivalente. Scopul acestei Note este de a demonstra următorul criteriu de conjugare care măsoară diferența între conjugare și echivalența spectrală :

Teoremă. *Fie* (X_1, Σ_1, μ_1), L_1^p, U_1 și (X_2, Σ_2, μ_2), L_2^p, U_2, *ca mai sus. Atunci pentru ca un operator unitar* $V : L^2{}_1 \to L^2{}_1$ *care realizează o echivalență spectrală între* U_1 *și* U_2 *să realizeze o conjugare între aceștia, este necesar și suficient ca* V *să fie multiplicativ pe un subinel* A *al lui* L_1^∞, *dens în* L_1^2.

O formă mai slabă a acestui criteriu (A algebră rațională, închisă la conjugare complexă, V comută pe A cu conjugarea complexă) a fost demonstrată în [2], p. 114–116 și în [3], p. 350–352.

2. Necesitatea condiției noastre este evidentă. Demonstrația suficienței are mai multe etape :

I. *Pentru* $f \in A$, $g \in L_1^\infty$. $V\ (fg) = Vf\ Vg$.

Fie $g_n \in A$, $g_n \to g$ în L_1^2. Atunci $V\,(fg_n) = Vf \cdot Vg_n$, și $fg_n \to fg$ în L_1^2, de unde $V\ (fg_n) \to V(fg)$ în L_2^2, deci și în L_2^1; cum $Vg_n \to Vg$ în L_2^2, deci $Vf \cdot Vg_n \to Vf \cdot Vg$ în L_2^1, obținem că $V(fg) = Vf \cdot Vg$ (ca elemente din L_2^1, deci și ca elemente din L_2^2).

II. *V este multiplicativ pe* L_1^∞.

Fie f, $g \in L_1^\infty$, $f_n \in A$, $f_n \to f$ în L_1^2. După I, $V\ (f_n \cdot g) = Vf_n \cdot Vg$. Deoarece $f_n \cdot g \to fg$ în L_1^2, $V\ (f_n g) \to V\ (fg)$ în L_2^2 deci și în L_2^1. Pe de altă parte, $Vf_n \to Vf$ în L_2^2, deci $Vf_n \cdot Vg \to Vf \cdot Vg$ în L_2^1. Prin urmare $V\,(fg) = Vf \cdot Vg$.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 10, P. 1537–1538, BUCUREȘTI, 1967

III. *Pentru* $f \in L_1^\infty$ *avem* $\|Vf\|_{L_2^\infty} \leqslant \|f\|_{L_1^\infty}$.

Într-adevăr,

$$|Vf|^{2n} = (Vf)^n\,\overline{(Vf)}^n = Vf^n \cdot \overline{Vf^n} = |Vf^n|^2,$$

deci, V fiind unitar,

$$\lambda = \int |Vf|^{2n}\,\mathrm{d}\mu_2 = \int |Vf^n|^2\,\mathrm{d}\mu_2 = \int |f^n|^2 \mathrm{d}\mu_1 = \int |f|^{2n}\,\mathrm{d}\mu_1 \leqslant \|f\|_{L_1^\infty}^{2n}\,\mu_1(X_1).$$

Dacă $\|Vf\|_{L_2^\infty} > \|f\|_{L_1^\infty}$ (eventual $\|Vf\|_{L_2^\infty} = +\infty$), există $a > \|f\|_{L_1^\infty}$ astfel încît

$$\mu_2(\{x \mid x \in X_2,\ |Vf(x)| \geqslant a\}) = \varepsilon > 0$$

deci $\lambda \geqslant a^{2n}\varepsilon$. Prin urmare în acest caz

$$\|f\|_{L_1^\infty}^{2n}\,\mu_1(X_1) \geqslant a^{2n}\varepsilon,$$

$$\frac{\|f\|_{L_1^\infty}}{a} \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{\mu_1(X_1)}\right)^{\frac{1}{2n}} \to 1,$$

$$\|f\|_{L_1^\infty} \geqslant a,$$

ceea ce contrazice alegerea lui a.

Menționăm că demonstrația lui III în ipoteza II, a fost luată din [2] (sau [3] *loc. cit.*).

Acum deoarece VL_1^∞ este un subinel al lui L_2^∞, dens în L_2^∞ pe care V^{-1} este multiplicativ, după III, pentru $\varphi \in L_2^\infty$, $\|V^{-1}\varphi\|_{L_1^\infty} \leqslant \|\varphi\|_{L_2^\infty}$. Prin urmare $VL_1^\infty = L_2^\infty$ și pentru $f \in L_1^\infty$, $\|f\|_{L_1^\infty} = \|V^{-1}(Vf)\|_{L_1^\infty} \leqslant \leqslant \|Vf\|_{L_2^\infty}$, de unde rezultă că

IV. *V este o izometrie a lui L_1^∞ pe L_2^∞.*

Conjuncția afirmațiilor II și IV, înseamnă tocmai că V realizează o conjugare.

Primită la redacție la 19 mai 1967

Facultatea de matematică și mecanică a Universității din București, Str. Academiei nr. 14.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Halmos, *Lectures on ergodic theory*. Chelsea, New York, 1956.
2. N. Dinculeanu, C. Foiaș, *A universal model for ergodic transformations on separable measure spaces*. Michigan Math. J., **13**, (1966).
3. C. Foiaș, *Automorphisms of compact Abelian groups, as models for measure-preserving invetible transformations*. Michigan Math. J., **13** (1966).

TOM. 19, Nr. 10
1967

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

INDEX ALFABETIC

	Nr.	Pag.
ANGHEL, C. : Familii epimorfice şi topologia canonică	6	805
ANGHEL, CONSTANTIN şi vezi RADU, ALEXANDRU : Teorema de reducere a lui Giraud	9	1303
BALÁZS, M. şi vezi JANKÓ, B. : Despre unicitatea soluţiei ecuaţiilor operaţionale neliniare	4	509
BALÁZS, M. şi vezi JANKÓ, B. : Despre metoda generalizată a lui Newton aplicată la rezolvarea ecuaţiilor operaţionale	8	1149
BALÁZS, M. şi vezi JANKÓ, B. : Despre metoda coardei pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare în spaţii normate	10	1433
BĂNICĂ, C. şi STĂNĂŞILĂ, O. : Spectrul unei latici	1	137
BERECHET, O. : O observaţie asupra problemei Cauchy-Nicolescu pentru ecuaţia iterată a căldurii	4	479
BOTH, NICOLAE : Despre bazele inducţiei complete. Inducţia simultană	9	1251
BURLACU, EUGEN şi GAŞPAR, TOMA : Aplicarea metodei generalizate a lui Mc. Cluskey în cazul folosirii simbolurilor în diverse baze de numeraţie.	8	1115
CAMENSCHI , GALINA : Asupra mişcării cu cavitaţie a fluidelor compresibile în jurul plăcii	7	957
CÂMPU, EUGEN : Asupra derivatei unei funcţii aditive de domeniu.	4	489
CIORĂNESCU, IOANA : Familii compozabile de operatori.	3	449
CIORĂNESCU, IOANA : Teoreme asupra suporturilor distribuţiilor.	4	483
CÎRNU, MIRCEA : Asupra transformării Fourier a distribuţiilor şi funcţiilor distribuţionale	10	1401
CÎŞLARU, CORNEL : Configuraţiile reuniunii a două limbaje.	5	649
CIOCÎRLAN, PAUL şi vezi ROŞCULEŢ, MARCEL, N. : Contribuţii la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip parabolic. VII. Polinoame calorice şi transformări Paul Appell	5	739
COHN, HARRY : Momente de oprire pentru şiruri de variabile aleatoare.	10	1407
CRAIU, MARIANA : Proprietăţi ale seriei Fourier asociată unei funcţii neintegrabile de singularităţi date	1	73
CRAIU, MARIANA : Proprietăţi ale seriei Fourier asociată unei funcţii neintegrabile de singularităţi date	3	403
CREANGĂ - SÂMBOAN, ANCA : Estimaţii de tip produs.	8	1125
CRISTESCU, ROMULUS : Observaţii privind suporturile unor operatori liniari.	4	493
CRIŞAN - ZVERCA, MARIANA : Asupra programării unei strategii prestabilite de aplicare a metodei lui Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare	4	497
CRIŞAN-ZVERCA, MARIANA : Pseudooperaţii la maşinile electronice cifrice cu virgulă mobilă.	10	1413
DIACONESCU, RADU : Sume directe în categoria laticilor.	6	817
DINCĂ, G. : Influenţa temperaturii asupra propagării undelor în fire extensibile (problema cuplată).	5	659
DINU, LIVIU : Asupra pătrunderii normale a unui con într-un fluid compresibil.	8	1131
DRAGOMIRESCU, MIHAI : Algoritmul Theil - Van de Panne pentru programarea convexă.	5	681

	Nr.	Pag.
DRAGOMIRESCU, MIHAI : Asupra condițiilor Kuhn-Tucker din programarea neliniară.	5	691
DRAGOȘ, LAZĂR și HOMENTCOVSCHI, DOREL : Asupra mișcării bidimensionale a fluidului conductor în jurul profilelor subțiri în cazul cîmpurilor cvasialiniate.	7	963
DUMA, ANDREI : Morfisme de natură finită în categoria spațiilor inelate.	1	59
DUMA ANDREI : Morfisme între categorii autonome.	5	697
DUMITRAȘ, VIOREL : Asupra spațiilor A_n cu grup separabil care admit o rotație.	1	33
DUMITRAȘ, VIOREL : Determinarea spațiilor A_n cu „p" forme Pfaff invariante cu grup maxim de mișcări.	5	701
ENE, DUMITRU : : Pseudocorectarea erorilor în teoria codurilor.	1	131
ENE, DUMITRU : Asupra pseudocorectării erorilor.	5	707
ENE, HORIA, I. : Asupra unei probleme din mișcarea apelor arteziene.	1	53
ENE, HORIA, I. : Asupra metodei lui A. B. Tayler.	6	825
ENE, HORIA, I. : Asupra unei probleme la limită care apare în mișcarea unui fluid perfect în prezența unui corp poros neomogen.	10	1425
FILIMON, ION : Mișcări circulatorii în jurul unui profil dat. Metoda corectă a lui Ciaplîghin.	6	831
FILIPESCU, AVRAM, ȘT. : Asupra unei clase de ecuații funcționale.	4	503
GAȘPAR, TOMA ; Programarea la calculatorul MECIPT-1 a algoritmului de minimizare a funcțiilor peudobooleene	8	1135
GAȘPAR, TOMA și vezi BURLACU, EUGEN : Aplicarea metodei generalizate a lui Mc. Cluskey în cazul folosirii simbolurilor în diverse baze de numerotație.	8	1115
GHEORGHIU, N. : Teorema contracțiilor în spații uniforme.	1	119
GODINI, G. : Observații cu privire la subseriile unei serii dintr-un spațiu Banach.	5	711
GOGONEA, SORIN : Asupra mișcării apelor arteziene în anumite domenii concave.	9	1259
GUIAȘU, SILVIU : Contribuții la studiul repartiției limită a proceselor stocastice cu timp discret aleator.	7	971
HOMENTCOVSCHI, DOREL : Asupra mișcării bidimensionale a fluidului perfect conductor în jurul profilelor subțiri.	7	1019
HOMENTCOVSCHI, DOREL și vezi DRAGOȘ LAZĂR : Asupra mișcării bidimensionale a fluidului conductor în jurul profilelor subțiri în cazul cîmpurilor cvasialiniate.	7	963
IANUȘ, S. : Asupra unor spații fără torsiune.	6	845
ION, D. B. : Asupra unor proprietăți ale constantelor de structură ale algebrelor Jordan de tip A	7	1031
ISAC, GEORGE : Elemente Ω'-idempotente în algebre universale	6	853
ISPAS, C. I. : Identitățile lui Bianchi și Veblen pentru tensorul simetric de curbură a unui spațiu cu conexiune afină. Echivalența lor.	3	461
ISTRĂȚESCU, VASILE,. I. : Operatori hyponormali (I).	3	423
ISTRĂȚESCU, VASILE, I. : Operatori hyponormali (II)	3	439
JALOBEANU, M. : Asupra compatibilității operației de grup cu relația de ordonare parțială.	6	859
JANKÓ, B. și BALÁZS, M. : Despre unicitatea soluției ecuațiilor operaționale neliniare	4	509
JANKÓ, B. și BALÁZS, M. : Despre metoda generalizată a lui Newton aplicată la rezolvarea ecuațiilor operaționale.	8	1149
JANKÓ, B. și POP, V. : Asupra rezolvării ecuațiilor operaționale, definite în spații metrice cu ajutorul metodelor convergente de ordinul K.	8	1155
JANKÓ, B. și BALÁZS, M. : Despre metoda coardei pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare în spații normate	10	1433
KLINCSEK, GEZA : O problemă de frontieră pentru sisteme de ecuații cu derivate parțiale tare eliptice	1	65
MARCOV, N. : Perturbarea cîmpului magnetic în cazul mișcării fluidului electroconductor în jurul obstacolului circular	7	1039
MARCUS, F. : Congruențe de drepte ce stabilesc între pînzele lor focale o reprezentare conformă de modul constant și diferit de ± 1	1	13
MARUȘCIAC, I. : Infrapolinoame și legătura lor cu derivata unui polinom	4	515

	Nr.	Pag.
MIHAI, ALEXANDRU : O reprezentare a claselor Chern întregi cu ajutorul formelor cu singularităţi	9	1273
MUNTEANU, ION : Simplificarea funcţiilor de variabile polivalente	2	241
MUNTEANU, E. : Analiza logică a algoritmilor (II)	3	415
MUNTEANU PASCAL, FLORICA : Restul în formula de cvadratură a lui Shovelton	6	865
MUNTEANU PASCAL, FLORICA : Metoda dreptelor în rezolvarea unor probleme referitoare la o ecuaţie cu derivate parţiale de tip parabolic	6	871
MUNTEANU PASCAL, FLORICA : O schemă cu gradul de exactitate patru în metoda dreptelor aplicată la rezolvarea aproximativă a unor probleme la limită asupra ecuaţiilor de tip parabolic	7	1047
MURGULESCU, ELENA : Asupra determinării punctelor de inflexiune în cazul unor curbe remarcabile	4	523
NADIU, GH. S. : Asupra unei metode de construcţie a algebrelor lukasiewicz trivalente	7	1063
NĂDEJDE, ILEANA : Un algoritm pentru rezolvarea unor probleme de programare pătratică	8	1159
NEY, ANDREI : Asupra convergenţei seriilor şi evaluarea restului în spaţii liniare ordonate	8	1169
NICULESCU, CONSTANTIN : Un exemplu de curbă care umple un cub *k*-dimensional	2	281
NIŢĂ, CONSTANTIN : Rezoluţii standard în categorii cu multiplicare	9	1285
OPROIU, VASILE : Asupra conexiunilor din spaţiul fibrat tangent la un spaţiu fibrat principal	4	531
OPROIU, T. şi vezi POP, I. : Asupra mişcării sateliţilor artificiali ai pămîntului într-un mediu rezistent	8	1181
PĂVĂLOIU, I. : Asupra unor inegalităţi recurente şi aplicaţii ale lor	8	1175
PĂVĂLOIU, I : Observaţii asupra rezolvării sistemelor de ecuaţii cu ajutorul proceselor iterative	9	1289
PETCU, ALEX. : Definirea algebrelor booleene şi a semilaticilor cu ajutorul a două axiome-identităţi	6	891
PETEANU, VASILE : Asupra compatibilităţii problemei centrale a ordonanţării	1	47
PETER-MIHOC, MARIA : Asupra nomogramelor de gen zero cu două scări regulate şi una proiectivă	5	715
PETRESCU, GH. : O generalizare a problemei lui Jukovski în teoria filtraţiei	1	97
POP, IOAN : O problemă variaţională pentru un corp de masă variabilă	1	85
POP, IOAN : Soluţii ale ecuaţiilor stratului limită nestaţionar tridimensional	1	91
POP, IOAN : Asupra problemei lui Rayleigh cu sucţiune	10	1437
POP, I. şi OPROIU, T. : Asupra mişcării sateliţilor artificiali ai pămîntului într-un mediu rezistent	8	1181
POP, V. şi vezi JANKÓ, B. : Asupra rezolvării ecuaţiilor operaţionale definite în spaţii metrice, cu ajutorul metodelor convergente de ordinul *K*.	8	1155
POPA, EUGEN : O caracterizare a spaţiilor uniforme	9	1299
POPA, VIOREL : O mişcare plană staţionară cu suprafaţă liberă într-un mediu poros omogen	1	123
POPESCU, I. L. : Asupra unor corecţii de compresibilitate în dinamica gazelor.	10	1443
POPESCU, NICOLAE : Elemente de teoria fasciculelor. VI	2	205
PORICEL, MARINA : Asupra mişcării fluidelor newtoniene între două conuri coaxiale, cu acelaşi vîrf	8	1187
RADU, ALEXANDRU : Funcţia caracteristică a lui Hilbert.	4	537
RADU, ALEXANDRU : Obiecte de prezentare finită în categoria prefasciculelor abeliene	10	1449
RADU, ALEXANDRU şi ANGHEL, CONSTANTIN : Teorema de reducere a lui Giraud.	9	1303
RADU, NICOLAE : Asupra unor categorii de module.	3	393
RAISCHI, CONSTANTIN : Asupra unui model algebric al categoriilor gramaticale (I)	4	549
RAISCHI, CONSTANTIN : Asupra unui model algebric al categoriilor gramaticale (II)	5	723
RIZESCU, GH. N. şi vezi TEODORESCU, N. N. : Asupra perechilor de spaţii Riemann cu tensorii de curbură proporţionali.	4	609

	Nr.	Pag.
ROMALO, DAN : Încercare de etică matematică	8	1193
ROSIN, S. şi vezi SIMON, Z. : Metodele matematice de reglare a hematopoiezei	9	1325
ROŞCA, RADU : Cîteva consideraţii de geometrie diferenţială liniară	1	3
ROŞCA, RADU : Asupra transformărilor infinitezimale de dilataţie superficială nulă din spaţiul eliptic	2	165
ROŞCULEŢ, MARCEL, N. : Un criteriu de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi	1	9
ROŞCULEŢ, MARCEL, N. : Curbe care umplu un compact din R^n	3	317
ROŞCULEŢ, MARCEL, N. : Cercetări asupra seriilor trigonometrice. VI. Asupra sumabilităţii seriei Fourier asociată unei funcţii neintegrabile	4	565
ROŞCULEŢ, MARCEL, N. şi COCÎRLAN, PAUL : Contribuţii la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip parabolic. VII. Polinoame calorice şi transformări Paul Appell	5	739
RUS, TEODOR : Tratarea algebrică a limbajelor formalizate	2	259
RUS, TEODOR : Algebra limbajelor formalizate	9	1459
SĂNDULESCU, ŞERBAN : Stabilirea ecuaţiei unei pînze de jet care prelungeşte lateral o aripă aşezată în curent incompresibil	10	1459
SÂMBOAN, G. : Procese gaussiene generalizate	10	1455
SICOE, CORNELIU, O. : Note asupra algebrelor lukasiewicziene polivalente	8	1203
SIMIONESCU, CLAUDIA : Asupra teoremei Vitali	1	147
SIMON, Z. şi ROSIN, S. : Metodele matematice de reglare a hematopoiezei	9	1203
STANCIU, TOMA, N. : Puterile funcţiei lui Möebius	4	583
STANCU, FELICIA : Asupra unor formule de interpolare şi integrare numerică pentru două variabile	10	1467
STAVRE, PETRE : Curbe pe varietăţi V_n^m dintr-un spaţiu Riemann V_n	2	285
STAVRE, PETRE : Asupra formulelor Frenet ale unei familii de direcţii ξ_1^λ definită pe o curbă (C) dintr-un spaţiu Riemann V_n	3	469
STAVRE, PETRE : Asupra unor clase de curbe	5	747
STAVRE, PETRE : Curbe (S) pe varietăţi V_n^{n-1} sau V^{n-1} din spaţii riemanniene V_n	5	753
STAVRE, PETRE : Asupra unor conexiuni coparalele	9	1337
STĂNĂŞILĂ, O. şi vezi BĂNICĂ, C. : Spectrul unei latici	1	137
STOICA, MARCEL, DRAGOŞ : Utilizarea metodelor vectoriale la studiul compatibilităţii a două ecuaţii algebrice de gradul n cu o necunoscută	9	1341
STOKA, MARIUS, I. : Asupra grupurilor izomorfe cu grupul transformărilor ortogonale din spaţiul E_3 şi cu subgrupurile lui	2	177
STOKA, MARIUS, I. : Asupra subgrupurilor grupului transformărilor ortogonale din spaţiul E_3	3	339
STOKA, MARIUS, I. : Grupurile de olonomie ale spaţiilor A_4	4	585
STOKA, MARIUS, I. : Determinarea subgrupurilor grupului transformărilor afine din plan	6	897
STOKA, MARIUS, I. : Conexiuni invariante pe spaţii riemanniene cu metrica nedefinită cu curbura constantă	7	1071
STOKA, MARIUS, I. : Asupra grupurilor izomorfe cu grupul proiectiv din plan şi cu subgrupurile lui	7	1081
STRĂTILĂ, ŞERBAN : Elemente de analiză armonică (I)	8	1209
STRĂTILĂ, ŞERBAN : Elemente de analiză armonică (II)	10	1473
SUCIU, I. : Teoria spaţiilor H^p în cazul algebrelor de funcţii	5	757
SUSEA, ANDREI : O generalizare a problemei Riemann omogene	1	155
SZILÁGYI, M. şi vezi WESZELY, T. : O interpretare diferenţial geometrică a curbelor integrale ale unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi	2	273
ŞUTA C., IOAN : Grupul de invarianţă al unui obiect geometric $\Omega^\wedge (x, x)$	1	25
TĂNĂSESCU, CONSTANTIN : Unele aplicaţii ale ecuaţiilor booleene în teoria algebrică a gramaticii	9	1357
TEODORESCU, N. N. : Asupra unor perechi de spaţii Riemann	9	1367
TEODORESCU, N. N. şi RIZESCU, GH. N. : Asupra perechilor de spaţii Riemann cu tensorii de curbură proporţionali	4	609
THEILER, G. : O condiţie necesară şi suficientă de ergodicitate mai finisată, pentru lanţurile Markov omogene cu un număr finit de stări, respectiv pentru „lanţurile constante” cu un număr arbitrar de stări	10	1513

	Nr.	Pag.
THEODORESCU, R. și VĂDUVA, I. : Un model demografic-matematic privind dinamica specialiștilor	3	329
TODOR, LIVIU : Problema normării datelor pentru aplicarea metodei lui Jacobi respectiv Givens de rezolvare a problemei valorilor și vectorilor pentru metrici simetrice	1	41
TODOR, LIVIU : Matricea ortogonală cea mai apropiată de o matrice reală dată B	3	363
TODOR, LIVIU : Asupra metodei lui Gauss de rezolvare a sistemelor liniare de mari dimensiuni și asupra inversării matricilor mari	3	371
TOMA, ILEANA : Extensiuni ale polinoamelor areolare	3	387
TOMA MARCU, ELEONORA : Proprietăți ale închiderilor Sestier din teoria algebrică a gramaticii	9	1377
TOMESCU, IOAN : Asupra unor metode matriciale care intervin în teoria rețelelor	1	105
TOMESCU, IOAN Proprietăți ale funcției caracteristice a unui multipol	6	927
TOMESCU, IOAN : Asupra unor probleme combinatorii care intervin în teoria clasificării	9	1385
TRANDAFIR, RODICA : Familii de varietăți cu unu, doi și trei parametri măsurabile din spațiul euclidian E_3.	4	619
TRANDAFIR, RODICA : Probleme de geometrie integrală ale rețelelor dintr-un spațiu euclidian E_3.	7	1105
TUDOR, C. : Transformarea Laplace a distribuțiilor	10	1521
ȚEVY, IONEL : O generalizare a noțiunii de continuitate în sensul lui Florin Vasilescu	6	935
UNGUREANU, ELENA : Influența temperaturii asupra unor mișcări plane staționare în medii poroase.	6	945
VASIU, MIRCEA : Asupra ecuației de dispersie a unei plasme radiative cu conductivitatea electrică finită.	4	635
VĂDUVA, I. : Asupra estimației densității de repartiție a unui proces staționar în sens larg	3	455
VĂDUVA, I. și vezi THEODORESCU, R. : Un model demografic-matematic privind dinamica specialiștilor.	3	329
VOICULESCU, DAN : Spații cu convexitate (I)	2	295
VOICULESCU, DAN : Spații cu convexitate (II)	2	303
WESZELY, T. și SZILÁGYI, M. : O interpretare diferențial geometrică a curbelor integrale ale unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi	2	273
ZSIDÓ, LÁSZLÓ : Teorema de structură pentru l.c.a.-grupuri compacte generate.	9	1395
ZSIDÓ, LÁSZLÓ : Un criteriu de conjugare.	10	1537

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1983

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, Str. Mihai Eminescu, nr. 47, Bucureşti.

1967 NOV 17

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594 p., 31 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283, p., 21,50 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 1966, 669 p., 38 lei.

I. SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

M. STOKA, **Geometria integrală**, 1967, 239 p., 9,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 19, NR. 10, P. 1399—1544, BUCUREŞTI, 1967

I. P. „Informaţia" – c. 5770

43831

Lei 12.